

МАЙ-ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

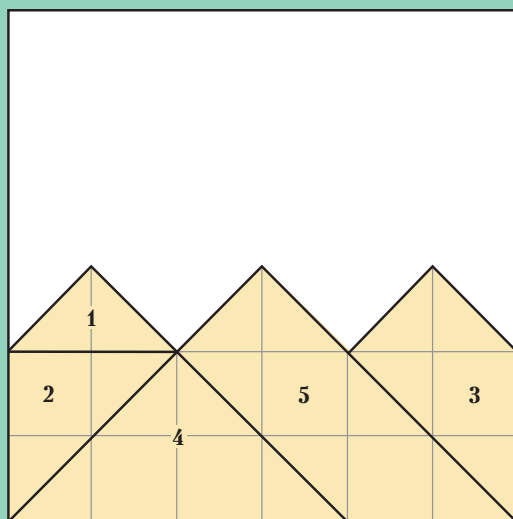
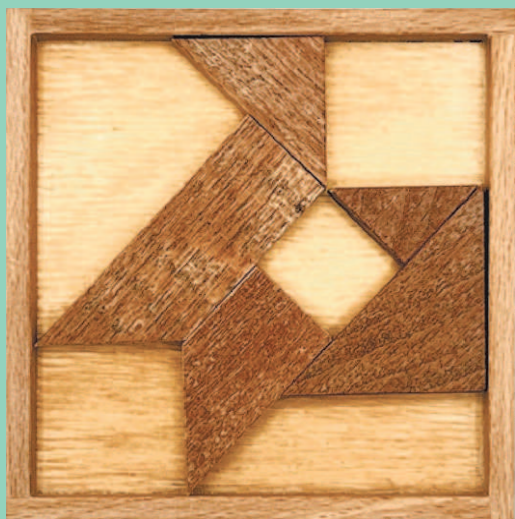
2025 № 5-6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



НЕ ПУСТОЕ МЕСТО



Головоломка содержит пять игровых элементов площадью 1, 2, 3, 4 и 5, которые нужно разместить в квадратной рамке размером 6×6 . При этом площадь, не занятая элементами, должна обладать некоторыми наперед заданными свойствами. Как говорит автор головоломки Геннадий Ярконой, «поиграем с пустотой». Например, на приведенной фотографии пустота представляет собой три квадрата, трапецию и выпуклый четырехугольник.

Предлагаем несколько заданий головоломки. Расположите игровые элементы в рамке так, чтобы оставшиеся пустые области квадратной рамки представляли собой:

- а) 3 равных четырехугольника;
- б) 3 подобный четырехугольника;
- в) 3 прямоугольных треугольника;
- г) 4 прямоугольных треугольника;
- д) 5 прямоугольных треугольников;
- е) 6 прямоугольных треугольников;
- ж) 7 прямоугольных треугольников;
- з) 8 прямоугольных треугольников.

Желаем удачи!

Н. Авилов

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Математики и механики в Великой
Отечественной войне. *Н.Панюнин*
9 Квантовое туннелирование (к 125-летию
квантовой физики и 100-летию квантовой
механики). *Л.Белопухов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи M2842–M2849, Ф2849–Ф2856
22 Решения задач M2830–M2833, Ф2837–Ф2840
30 Когда фальшивые монеты соседние.
А.Грибалко, К.Кноп

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Большое и малое в физике

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 37 Задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 38 Испытания для барона М. *К.Кноп*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 43 Тепловые свойства воды. *С.Варламов*

ОЛИМПИАДЫ

- 45 Заключительный этап LI Всероссийской
олимпиады школьников по математике

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 49 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Физика
53 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Математики и механики в Великой Отечественной войне

Н. ПАНЮНИН

9 МАЯ 1945 ГОДА ЗАКОНЧИЛАСЬ Великая Отечественная война. В войне погибло более 27 миллионов советских людей. Несмотря на колоссальные трудности и человеческие жертвы, победа была достигнута. Она стала возможной благодаря огромным усилиям тех, кто сражался на фронте и работал в тылу.

«Современная война в значительной степени война техники, стало быть – война науки». С такими словами обратился вице-президент АН СССР академик Отто Юльевич Шмидт к 60 крупнейшим ученым, присутствовавшим на расширенном заседании Президиума АН СССР 23 июня 1941 года.

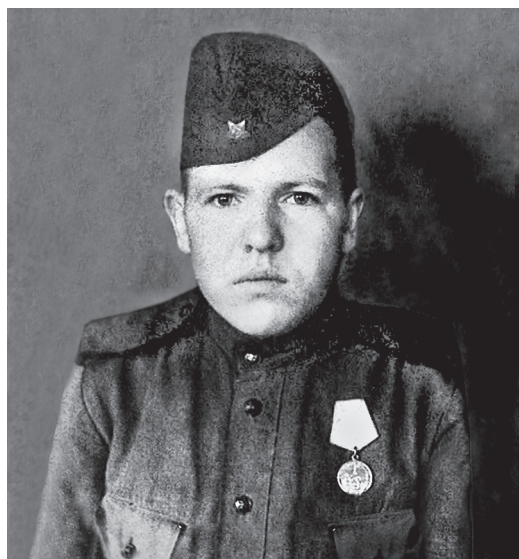
Восемьдесят лет спустя хотелось бы вспомнить о подвиге советских ученых – математиков и механиков.

Математики и механики на фронте

Очень многие ученые ушли на фронт. Только из МГУ ушли около пяти тысяч студентов, аспирантов, преподавателей. Около трех тысяч погибли. «От героев былых времен не осталось порой имен...». Расскажем о некоторых из тех, чья судьба нам известна.

Василий Сергеевич Владимиров в 1941 году был студентом физического факультета Ленинградского государственного университета. Война застала его в библиотеке, когда он готовил последний экзамен за второй курс. Учебу удалось возобновить лишь в конце 1945 года.

В июле–августе 1941 года Василий Сергеевич участвовал на оборонных работах под Ленинградом, затем был призван в ряды Красной армии и направлен курсантом в Военно-автомобильное училище военно-воздушных сил Ленинградского фронта. Рядовым солдатом Василий Сергеевич прошел всю войну до победы. С ноября 1941 года по декабрь 1944 года воевал на Ленинградском фронте на различных военных авиабазах, с декабря 1944 года по октябрь 1945 года служил в системе противовоздушной обороны Ленинграда. Василий Сергеевич – участник героической обороны и прорыва блокады Ленинграда, пережил ужасы блокадного голода и холода. События тех лет описаны Василием Сергеевичем в воспоминаниях «Я – сын трудового народа».



Василий Сергеевич Владимиров

После войны В.С. Владимиров стал крупным ученым, академиком, участвовал в советском атомном проекте. Василий Сергеевич лауреат множества премий, почетный член иностранных академий.

Виктор Абрамович Залгаллер в 1941 году учился в Ленинградском авиационном институте. Он начал войну артиллеристом, вступив в народное ополчение, затем стал связистом. До 1944 года воевал в блокадном Ленинграде. С началом наступления Красной Армии и снятием блокады участвовал в Выборгской операции. Затем освобождал Польшу. Был несколько раз ранен. Награжден орденами и медалями. События войны Виктор Абрамович описал в книге «Быт войны». Вот один эпизод из этой книги.

«Бой кончился. Разбитый большой магазин. В витрине, не замечая где он, спиной ко всему бараклу стоит молоденький солдат, усталый, в обмотках, и задумчиво ест из ладони леденцы. Моральный солдатский итог войны – презрение к бараклу, роскоши, комфорту. А заодно – и понимание бренности славы. И высочайшая оценка дружбы и коллективных усилий».

После демобилизации Виктор Абрамович окончил Ленинградский университет,

где впоследствии преподавал. Виктор Абрамович является автором многочисленных статей и монографий, участвовал в решении многих задач для нужд промышленности, консультировал инженеров. Велика его заслуга в организации в 1960 году одной из первых в стране физико-математических школ – школы №239.

Евгений Фролович Мищенко в 1940 году закончил школу и готовился поступать в университет, но осенью его призвали в армию – близилась война. Служил Евгений Фролович в пограничных войсках в Карелии, там же и воевал. Вместе со своим отрядом он совершал боевые рейды по оккупированной территории. По его воспоминаниям, редко удавалось ночевать под крышей: «ткнешься в снег и спишь».

В течение войны Евгений Фролович вел переписку с П.С. Александровым (математическая переписка между академиком Павлом Сергеевичем Александровым и школьником из Владимирской глубинки завязалась в 1939 году).

После войны Евгений Фролович стал крупным математиком, академиком, создателем школы по динамическим системам и теории игр.



Виктор Абрамович Залгаллер



Евгений Фролович Мищенко



Ирина Александровна Тюлина

Ирина Александровна Тюлина ушла на фронт добровольцем в 1941 году со второго курса механико-математического факультета МГУ. Пройдя курсы медсестер, участвовала в битве за Москву, воевала на 2-м Белорусском фронте в Белоруссии, Польше. Войну закончила в Германии на реке Эльбе. Была награждена орденами и медалями.

После войны Ирина Александровна вернулась на мехмат и успешно его окончила. Стала ученым-механиком, специалистом по истории и методологии механики.

Горимир Горимирович Черный начал войну студентом МГУ, вступив в народное ополчение. Участвовал в битве за Москву под Ельней и Вязьмой, где его дивизия была почти полностью уничтожена. Попал в окружение, был сильно контужен и в марте 1942 года оказался на оккупированной немцами территории. Период жизни в оккупации Горимир Горимирович описывает короткой фразой «я выживал – и выжил». Долгие месяцы скитаний, попытки выйти к своим, партизанская работа против немцев. Затем снова присоединился к действующей армии. Победу встретил в «ликующей Праге».

Его тяжелый путь к победе описан в воспоминаниях «Военные годы», напи-



Горимир Горимирович Черный

санных на основе дневников, которые он вел в течение войны.

Горимир Горимирович награжден многими орденами и медалями. После войны он стал ученым с мировым именем, академиком, создал научную школу в области гидроаэромеханики и газовой динамики.

Давид Оскарович Шклярский, закончив в июне 1941 года с отличием Московский университет, вместо предполагавшейся аспирантуры был направлен на работу в Центральный аэрогидродинамический институт имени Н.Е.Жуковского. Однако добился отправки добровольцем в действующую армию. В январе 1942 он писал: «Сейчас прекрасный зимний день, погода совсем по Пушкину — мороз и солнце, день чудесный. Может быть от этого у меня светлое и хорошее настроение... Кончится война, и я опять буду заниматься математикой, которую за время войны я совсем не забыл». В феврале 1942 его отправили за линию фронта в партизанский отряд, откуда он не вернулся. Погиб в июне 1942 года.

Будучи школьником, Давид Оскарович получил первую премию на второй Московской математической олимпиаде. В 1938-1941 годах студентом руководил работой математических кружков в Московском университете. Он сильно перестроил содержание работы кружков и их



Давид Оскарович Шклярский

организацию, подняв кружки на качественно иной уровень. Большая часть участников его кружка погибла во время войны. В память о его заслугах он значится первым автором серии книг «Избранные задачи и теоремы элементарной математики».

Математики и механики фронту

Ученые СССР в годы войны показали высокий научный уровень. В кратчайшие сроки ими решались сложнейшие задачи. Это оказалось возможным благодаря грандиозным усилиям, предпринятым в стране в области образования и науки за 20 предвоенных лет.

К началу 1941 года СССР имел 786 крупных научно-исследовательских институтов. Научной работой занималось 98300 человек, к научной деятельности готовилось 16863 аспирантов. Достигнутый высокий уровень образования позволил подготовить выдающиеся инженерные кадры, обеспечившие страну первоклассной военной техникой.

Обратимся к подвигу ученых, внесших большой вклад в решение оборонных задач.

Алексей Антонович Ильющин среди группы ученых Института механики АН СССР получил от Государственного комитета обороны задачу об упрощении технологии производства снарядов.



Алексей Антонович Ильющин

В ноябре-декабре 1941 года положение под Москвой было очень тяжелым. Наши войска оказались перед «снарядным голодом». Чтобы получить представление о расходе артснарядов во время военных действий, достаточно сказать, что значительно больше половины всего производимого в стране черного металла шло не на корпуса танков, самолетов, кораблей и строительные конструкции, а именно на артснаряды.

Вот что вспоминает Алексей Антонович (см. [1]).

«Военная приемка на заводах проверяла тогда снаряды по наибольшей остаточной деформации корпуса. На полигонах снаряды отстреливали по мягким грунтам, собирали и индикаторами измеряли деформацию поверхности рядом с ведущим пояском: если она была меньше 0,25 миллиметра по диаметру, то снаряд считался годным, если нет – отбраковывался. Когда это условие прочности не выполнялось, забраковывалась вся партия, и их было много.

Налицо было явное противоречие: прочность снаряда определялась по остаточной, т.е. пластической деформации, возникающей в нем при прохождении ствола, а проектирование и расчеты на прочность велись во всем мире методами теории упругости. Иными словами, мои предшественники не

учитывали совместных деформаций ствола и движущегося в нем снаряда...

...Буквально за два месяца удалось создать фундамент теории малых упругопластических деформаций и доказать, что простейшая деформационная теория пластичности физически достоверна для простых (пропорциональных) нагружений... Главным теоретическим итогом этих исследований стало создание так называемого «метода упругих решений конкретных задач».

Все эти общие теоремы и методы были созданы для того, чтобы разобраться в явлениях, происходящих в артиллерийском снаряде при движении по каналу ствола. Они помогли обосновать возможность нового подхода к изготовлению артснарядов и коренным образом изменить, упростить и удешевить их проектирование и расчет, а главное – производство и военную приемку...

...«Снарядный голод» резко пошел на убыль, вскоре появился даже избыток снарядов. Только тогда у военного командования появилась возможность организовывать крупномасштабные операции типа Сталинградского артиллерийского кольца».

В 1942 году А.А. Ильюшин был удостоен Сталинской премии.

Николай Гурьевич Четаев во время войны решил задачу об устойчивости про-



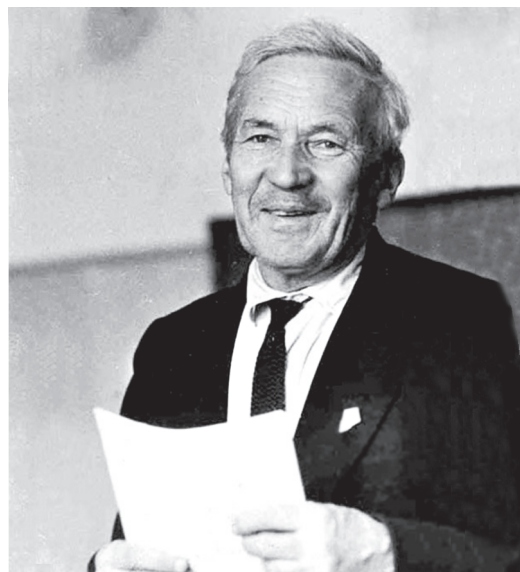
Николай Гурьевич Четаев

долно-вращательного движения снаряда. Им была определена оптимальная крутизна нарезки ствола орудия для обеспечения наибольшей меткости стрельбы и расширения тактических возможностей применения артиллерийского орудия.

За свои работы по устойчивости движения и аналитической механике Николай Гурьевич был удостоен Ленинской премии (посмертно).

Андрей Николаевич Колмогоров в первые годы войны был академиком-секретарем АН СССР. Он много времени уделял организации работы академии, но также работал над математическими задачами, возникающими в теории стрельбы. Андрей Николаевич считал важным не только выстроить математически строгую теорию стрельбы (существующую он считал неудовлетворительной), но и выйти на практическое применение. Можно сказать, довести теорию до конкретных чисел. А это приводило к очень непростым вычислительным задачам, которые нужно было решить в кратчайшие сроки.

Одной из идей, предложенных Колмогоровым, была стрельба с искусственным рассеиванием. Коротко ее можно описать так. Рассмотрим задачу определения системы стрельбы, которая при заданном чис-



Андрей Николаевич Колмогоров

ле выстрелов дает наибольший показатель эффективности. Казалось бы, нужно максимально эффективно делать каждый конкретный выстрел. Однако это не так: отсюда не всегда следует, что эффективность будет максимальной в целом. Дело в том, что выстрелы нельзя считать независимыми испытаниями. Тогда возникает идея умышленно выбирать для отдельных выстрелов установки, уклоняющиеся от наилучших при каждом конкретном выстреле. Такая стрельба и называется стрельбой с искусственным рассеиванием.

По-видимому, именно за стрельбные работы Колмогоров в 1944 и 1945 годах был награжден орденами Ленина. Всего известно три статьи Андрея Николаевича по теории стрельбы.

Михаил Алексеевич Лаврентьев – один из крупнейших специалистов в области теории функций комплексного переменного, вариационного анализа и математической физики. Он был не только ученым с мировым именем, но и выдающимся организатором науки. Во время войны Михаил Алексеевич занимался теорией кумулятивного эффекта. Вот, что он пишет в своих воспоминаниях.

«Законы пробивания снарядом или пуль различных преград изучались со вре-

мен существования артиллерии. Несколько сотен лет незыблемой оставалась формула, согласно которой глубина пробивания пропорциональна скорости снаряда. Пробивание брони кумулятивными снарядами происходило по каким-то иным законам.

Мне были известны две модели, изучавшиеся у нас и за рубежом. Согласно первой, броню пробивает струя раскаленного газа (схема бронепрожигания), по второй – раскаленная металлическая пыль (схема откола). Я поставил ряд опытов, из которых следовала несостоятельность каждой из них. Поиски новых моделей привели к принципиально новой концепции: надо принять, что медный кумулятивный конус снаряда и пробиваемая броня суть идеально несжимаемые жидкости, тогда в основу расчета можно положить теорию жидких струй.

Мысль о том, что металл ведет себя, как жидкость, многим казалась нелепой. Помню, мое первое выступление об этом в Академии артиллерийских наук было встречено смехом. Но мне удалось доказать, что при формировании кумулятивной струи и пробивании брони возникают такие скорости, что прочностные и упругие силы становятся пренебрежимо малыми по сравнению с инерционными. Гидродинамическую трактовку кумуляции поддержали М.В.Келдыш и Л.И.Седов. Благодаря теории кумуляции были созданы надежные методы расчета, предложены новые типы кумулятивных зарядов. В дальнейшем эта теория оказалась приложимой к широкому кругу задач. Через несколько лет работа по теории кумуляции была отмечена Государственной премией СССР».

Сергей Натанович Бернштейн – выдающийся математик, частично решивший 19-ю проблему Гильберта, писал президенту АН СССР: «Прошу направить меня в Ленинград на предмет участия в той форме, в какой Наркомат обороны сочтет это полезным, в математической работе, связанной с непосредственным обслуживанием фронта и прифронтовой полосы».



Михаил Алексеевич Лаврентьев



Сергей Натанович Бернштейн

В период Великой Отечественной войны в 1942 году под руководством С.Н. Бернштейна было разработано пособие для определения местонахождения кораблей по радиопеленгам. Применение пособия в практике вождения кораблей позволяло примерно в 10 раз ускорить штурманские расчеты.

Александр Осипович Гельфонд – математик, решивший седьмую проблему Гильберта.

Александр Осипович был привлечен к работам в области криптографии при Главном Штабе Военно-Морского Флота. Читаем в графе «краткое, конкретное изложение личного боевого подвига или заслуг» наградного листа на старшего научного сотрудника 11 отдела Разведывательного управления Главного морского штаба Военно-Морского Флота:

«Член-корреспондент Академии наук СССР, доктор математических наук, профессор тов. Гельфонд пришел в разведку в период Отечественной войны с тем, чтобы все свои знания и опыт выдающегося ученого отдать непосредственно делу разгрома гитлеровской Германии.

Будучи научным руководителем научно-исследовательского Отделения тов. Гель-



Александр Осипович Гельфонд

фонд лично решил ряд сложнейших теоретических проблем, имевших большое практическое значение».

Работы А.О.Гельфонда, за которые он был представлен к ордену Трудового Красного Знамени, видимо до сих пор засекречены.

В военные годы многие работы математиков и механиков были связаны с обороной. Здесь упомянуты лишь очень немногие. После окончания войны президент Академии наук СССР Сергей Иванович Вавилов писал: «Почти каждая деталь военного оборудования, обмундирования, военные материалы, медикаменты – все это несло на себе отпечаток предварительной научно-исследовательской мысли и обработки».

Литература

1. А. Ильюшин. Вся жизнь – научный поиск. – «Наука и жизнь», 1998, № 2.
2. И.А.Тюлина. Памяти математиков и механиков Московского университета, погибших в Великой Отечественной войне. – М.: Издательство Московского университета, 2007.
3. Б.В.Лёвшин. Советская наука в годы Великой Отечественной войны. – М.: Наука, 1983.
4. Б. Гнеденко. Математика и математики в Великой Отечественной войне. – «Квант», 1985, № 5.

Квантовое туннелирование

(к 125-летию квантовой физики
и 100-летию квантовой механики)

Л. БЕЛОПУХОВ

ТАК В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ принято называть эффект, который получил имя *туннельный*. Энциклопедическое определение туннельного эффекта таково: проникновение микрочастицы в область потенциального барьера, когда полная механическая энергия частицы меньше высоты потенциального барьера.

В одномерном случае на графике зависимости энергии от координаты это будет выглядеть так, как будто на пути частицы оказывается гора, которую она преодолевает в «туннеле», проходя сквозь гору и оказываясь на ее другом склоне. На самом деле, конечно, никакой горы нет. Она появляется только на графике. А в действительности в опытах, где обнаруживается такой эффект, частица в своем движении подходит к точке, где на нее действует сила, отбрасывающая ее назад, и, согласно законам классической физики, останавливается, а затем изменяет знак своей скорости. Одним словом, частица отражается словно бы от невидимой стены. Эту невидимую стену писатели-фантасты назвали силовым барьером.

Но оказалось, что в микромире это не так, вернее – не совсем так. Поток микрочастиц в этой ситуации ведет себя таким образом, что часть потока действительно отражается. Но часть потока оказывается каким-то таинственным способом в области силового барьера и даже за барьером, если он имеет конечную протяженность.

Особенно необычно состояние частиц в области барьера.

Силовой барьер в микрофизике целесообразнее рассматривать как потенциальный барьер, т.е. такую зависимость потенциальной энергии частицы от расстояния, которая соответствует силам, не позволяющим ей проникнуть в область барьера. Если E – полная механическая энергия, по закону сохранения одна и та же до барьера и за барьером, а U_0 – высота прямоугольного барьера, т.е. значение потенциальной энергии взаимодействия частицы с силами, действующими в области барьера, то кинетическая энергия частицы в области барьера $E_k = E - U_0$. И если $U_0 > E$, то $E_k < 0$ – кинетическая энергия отрицательная, а скорость мнимая. Как это можно представить?

Как принято в современной микрофизике – чисто виртуально, т.е. не ища никакого реального (наглядного) образа поведе-



Выезд из туннеля современного обтекаемого локомотива



J. J. Thomson.

Сэр Джозеф Джон Томсон

ния частицы в этой области. При этом если барьер имеет конечную протяженность, она называется шириной барьера, то за барьером частица попадает в область, где снова ее полная энергия больше потенциальной и кинетическая энергия положительна. Частица вновь реализуется и продолжает свое движение.

По отношению к потоку частиц это означает, что часть потока не отразилась, а прошла сквозь барьер – как бы по воображаемому туннелю. Отсюда и названия «туннельный эффект», «туннелирование». А по отношению к отдельной частице математический формализм позволяет ввести величину вероятности преодоления барьера как отношение числа частиц ΔN , прошедших барьер, к числу частиц N , прошедших к барьеру: $W = \Delta N/N$. Эту вероятность можно назвать *коэффициентом прозрачности* барьера.

Не существует никакого экспериментального способа проследить за движением отдельной частицы в области барьера, например – за ее траекторией. И объяснения

туннельного эффекта в классической физике просто не существует. Под объяснением понимается создание и обсуждение наглядной модели явления. Но ведь само явление-то существует! Его заметили и начали изучать независимо от рождения квантовой физики. В начале XX века, в связи с бурным развитием радиоэлектроники, физики много внимания уделяли детальному изучению газовых разрядов. И в 1901 году молодой ученый Роберт Эрхарт в лаборатории Дж. Дж. Томсона в Кембридже получил неожиданные результаты в поведении ионов при газовом разряде между двумя близко расположенными электродами. Томсон предположил, что это не ошибка эксперимента, а какое-то новое явление.

Практическая работа по созданию радиоламп отвлекла физиков от исследования непонятого явления. Эти исследования продолжились только в 1911 году аспирантом Томсона Францем Розером. В 1914 году он обнаружил выделение электронов (эмиссию) из катода, когда эмиссия не могла происходить из-за наличия близко расположенного другого электрода, заряженного отрицательно (в условиях глубокого вакуума). Явление было названо автоэмиссией, и никакого объяснения ему тогда не было дано. Физики Кавендишской лаборатории увлеклись в это время созданием планетарной модели атома и первыми ядерными реакциями. Но и в ядерной физике тоже были необъяснимые явления. Одно из них – вероятностный характер радиоактивных превращений ядер.

Теоретическое объяснение этих непонятных явлений, связанных с наличием потенциального барьера, появилось только после создания квантовой механики в 1925 году. Немецкий физик Фридрих Хунд, российские физики Леонид Мандельштам, Михаил Леонтович и Георгий Гамов, американские физики Рональд Гёнри и Эдвард Кондон почти одновременно и независимо друг от друга применили к задачам с потенциальным барьером волновую квантовую механику, только что созданную тогда Эдвином Шрёдингером. А один из

создателей матричной квантовой механики Макс Борн обобщил все исследования, разработав общую теорию квантового туннелирования.

Главное в этих рассматриваниях и теориях – принципиальный отказ от поисков наглядного механизма явления и от ответа на вопрос, что происходит с микрочастицей в области потенциального барьера. В квантовой механике основополагающим утверждением является принцип неопределенности (соотношение неопределенностей). Согласно этому принципу, чем определеннее становится местоположение микрочастицы, тем неопределеннее оказывается величина ее импульса (скорости). Поэтому классическое рассуждение о поведении частицы в области потенциального барьера (приведенное в начале статьи) в механике микромира (квантовой механике) неприменимо. Нельзя выделять в полной энергии потенциальную и кинетическую энергии, они в области барьера не определены. Ведь кинетическая энергия – функция скорости, потенциальная – функция координаты. А координата и скорость связаны соотношением неопределенностей. Это накладывает ограничение на поиск какого бы то ни было наглядного образа поведения частицы в области потенциального барьера, например траектории ее движения. (В этом есть некоторая аналогия с принципиальным отсутствием понятия траектории движения электрона в атоме.)

Результатами всех экспериментов с туннелированием является не изучение характера поведения частицы в области барьера, а сам факт «прозрачности» барьера и измерение коэффициента прозрачности. И результатами теоретических работ должно стать его расчетное определение. В этих работах наиболее эффективным оказалось использование родившейся в 1925 году волновой квантовой механики, а именно – уравнения Шрёдингера.

Уравнение Шрёдингера

Математически это уравнение относится к классу дифференциальных волновых уравнений, т.е. его решением должно



Эрвин Шрёдингер

быть уравнение волны, например в виде тригонометрических функций координат и времени (вспомните уравнение звуковой или электромагнитной волны). Не будем выписывать соответствующее дифференциальное уравнение, это прекрасно сделано в учебниках и многочисленных сайтах с названием «уравнение Шрёдингера». Упомянем только, что в него входят первая производная по времени и вторые производные по координатам. Решение этого уравнения – операция, обратная дифференцированию, т.е. интегрирование.

«Квантовость» этого уравнения заключается в том, что оно имеет решения только при определенных значениях полной энергии частицы. Она «автоматически» оказываемся квантованной. А воздействие на микрочастицу в простых одномерных задачах задается функцией потенциальной энергии – ее зависимостью от координаты.

Но что же является функцией в этом уравнении и в его решении, другими словами, что колеблется в той волне, уравнение которой является решением волнового уравнения Шрёдингера? И вообще, почему в уравнении для микрочастиц речь идет о какой-то волне?



Луи де Бройль

Предвестьем квантовой механики была гипотеза Луи де Бройля о волновых свойствах материи, высказанная им в 1923 году. К этому времени эйнштейновская гипотеза о квантовых свойствах излучения, сформулированная им еще в 1905 году, уже обрела всеобщее признание, особенно после ее блестящего применения А.Комптоном для объяснения взаимодействия электромагнитного излучения со свободными электронами. Согласно этой гипотезе, электромагнитную волну излучения можно рассматривать и как объект, имеющий корпускулярные (квантовые) механические характеристики – импульс p и энергию E , связанные с длиной волны λ соотношениями

$$p = h/\lambda, \quad E = hc/\lambda,$$

где h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме.

Таким образом, электромагнитное излучение обладает двойственной природой (дуализм). В одних явлениях более существенны волновые свойства, в других – корпускулярные (квантовые). Но то, что подобный дуализм свойственен не только электромагнитному излучению, а каждо-

му материальному объекту, было далеко не сразу признано физиками.

А это и есть сущность гипотезы де Бройля. Любой объект, имеющий импульс p , обладает в то же время некими волновыми свойствами, характеризующимися длиной волны $\lambda = h/p$. И действительно, вскоре после опубликования статьи де Бройля и защиты им в 1924 году диссертации на эту тему, в опытах американских физиков Джозефа Дэвиссона и Лестера Джермера в 1925 году было открыто волновое явление дифракции электронов на кристаллах. В 1930 году это явление было более подробно исследовано английским физиком Джорджем Томсоном, сыном знаменитого Дж.Дж.Томсона, «открывшего» электрон в 1897 году. Началась эра электронной микроскопии. Джозеф Дэвиссон и Джордж Томсон стали нобелевскими лауреатами в 1937 году. Заметим, что Дж.Дж.Томсон старший был не только замечательным физиком, но и великим педагогом. Сам нобелевский лауреат (1906 г.), он воспитал семь нобелевских лауреатов, включая и своего сына.

Но в 1924 году мало кого из физиков интересовала проблема дуализма. Одним из заинтересовавшихся был профессор теоретической физики Цюрихского университета Эдвин Шрёдингер. Ему показалась интересной идея де Бройля, высказанная им в своей диссертации, о том, что траекторию движения электрона на стационарной атомной орбите можно представить как некую стоячую волну. Используя условие стационарности стоячей волны на длине орбиты электрона и свой постулат о волновых свойствах электрона, де Бройль получил для атома водорода те самые дискретные значения энергий электрона, которые за 10 лет до этого вывел Нильс Бор в своей теории и которые так хорошо подтверждались опытом.

Шрёдингер стал искать уравнение, решением которого была бы эта стоячая волна. Это было нелегкой задачей. Сначала он потерпел неудачу, пытаясь представить эту стоячую волну как пространственное волнообразное распределение заряда электрона.

Осенью 1925 года у Шрёдингера обострился туберкулез, и он уехал лечить его



Нильс Бор

в самый знаменитый альпийский курорт-санаторий Ароза. В биографиях Шрёдингера иногда пишут, что он жил «в горной хижине». Так и рисуется образ средневекового отшельника. Ничего подобного. Не хижина, а комфортабельное шале. Не отшельник, а в сопровождении молодой спутницы, которая даже что-то понимала в физике. Одним словом, были все условия и для работы, и для отдыха.

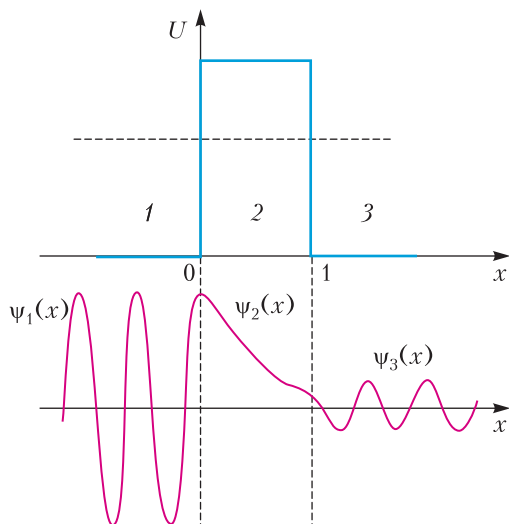
Там и создал тогда Шрёдингер свое знаменитое уравнение, означающее рождение новой теории, которую он назвал «волновой теорией механики атомов и молекул». Первой ее проверкой тоже было сравнение с опытными данными о спектре атома водорода. И это было не просто сравнение теории с опытом. Теория предсказывала более точные значения, которые позже получили опытное подтверждение. Окрыленный успехом, Шрёдингер послал в немецкий физический журнал статью с результатами своей работы (она была опубликована в 1926 году).

Так что же колеблется в дебройлевской волне? Шрёдингер отказался от поисков наглядного образа этого колеблющегося объекта. Он просто назвал его, выбрав греческую букву, которая до этого не

употреблялась в физике, — букву ψ («пси»). В дебройлевской волне колеблется ψ -функция. Следовательно, она и является аргументом в уравнении Шрёдингера.

В это же время немецкие физики-теоретики во главе с Вернером Гейзенбергом и Максом Борном разработали теорию, которую они назвали матричной квантовой механикой. Шрёдингер показал, что его теория дает такие же результаты, как и эта теория. С тех пор уравнение Шрёдингера считается главным содержанием *волновой квантовой механики*.

Несколько позднее под влиянием Нильса Бора ψ -функции был придан вероятностный смысл. Поскольку она, как решение дифференциального волнового уравнения, является комплексной величиной, а вероятность W — величина действительная, то «офизичивание» ψ -функции таково: квадрат модуля ψ -функции есть плотность вероятности нахождения частицы в данной точке в данный момент времени. Вероятностная трактовка ψ -функции позволяет задать граничные и начальные условия для ее определения в качестве решения уравнения Шрёдингера. На одном из приведенных здесь графиков представлено решение в простейшем случае: Ψ_1 и Ψ_3 для областей до и после барьера и Ψ_2 для области внутри барьера. Отношение квадратов Ψ -функций



Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер

в точках x_2 и x_1 – это коэффициент прозрачности потенциального барьера.

Итак, туннельный эффект относится к числу явлений, которые удалось объяснить и рассчитать только с помощью квантовой механики, и лучше всего с помощью волновой квантовой механики, т.е. с использованием уравнения Шрёдингера. Проиллюстрируем это примерами из ядерной физики.

Объяснение вероятностного характера альфа-распада

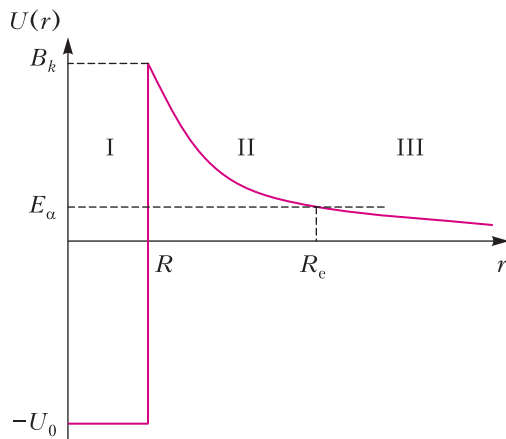
Первичная гипотеза о строении атомного ядра опиралась на явление радиоактивного распада. В атомных ядрах должны быть альфа-частицы и электроны, раз они появляются как результат ядерных превращений, – такой была эта гипотеза. Объяснить бета-распад было трудно, ведь электроны не должны отталкиваться от положительно заряженного ядра. Проще было с объяснением альфа-распада. Еще Резерфордом в самом начале XX века было доказано, что альфа-частицы – это ядра атомов гелия. А в 1919 году, осуществив первые в истории науки лабораторные ядерные реакции, он сделал вывод о том, что в ядра всех химических элементов должны входить ядра простейшего элемента – водорода. Он и назвал их простейшими частицами – *протонами*. Ядро атома гелия, или альфа-частица, по Резерфорду, состоит из четырех протонов и двух электронов. Ее масса примерно в 4 раза больше массы протона, а величина положительного электрического заряда точно в два раза больше заряда протона, т.е. равна $2e$.

Резерфорд высказал гипотезу о том, что между положительно заряженными частицами ядра, т.е. протонами и альфа-частицами, должны действовать мощные силы притяжения неизвестной «ядерной» природы, преодолевающие электрические кулоновские силы отталкивания. Иначе атомные ядра не могли бы существовать. И Резерфорд сделал вывод о короткодействии этих сил – ведь вне ядра они никак не проявляются. В этом их существенное отличие от электрических сил взаимодействия между заряженными частицами.

Энергии радиоактивных альфа-частиц вдали от ядер в 20-е годы были уже хорошо известны. У разных радиоактивных ядер они составляют от 3 МэВ до 10 МэВ (МэВ, или мегаэлектронвольт, это принятая в атомной физике внесистемная энергетическая единица, равная $1,6 \cdot 10^{-13}$ Дж). Зная размер ядра, можно оценить потенциальную энергию электрических сил отталкивания для альфа-частицы на «краю» ядра. По оценкам Резерфорда, она примерно равна 60 МэВ, т.е. на порядок больше энергии альфа-частицы при ее вылете из ядра, не превышающей нескольких мегаэлектронвольт.

Зависимость потенциальной энергии от расстояния внутри ядра определяется ядерными силами притяжения (они много больше электрических сил отталкивания). Эта энергия имеет отрицательный знак, если вдали от ядра потенциальную энергию считать нулевой. Принято называть такую зависимость «потенциальной ямой». Но сразу же за ядром ядерные силы перестают действовать, остаются только электрические. Их потенциальная энергия положительна, поскольку это силы отталкивания. Обратно пропорционально расстоянию она стремится к нулю.

Таким образом, суммарная потенциальная энергия альфа-частицы имеет потенциальный барьер такой «высоты», что он больше полной энергии частицы. На приведенном здесь графике глубина потенциальной ямы ядерных сил притяжения внутри



Энергия альфа-частицы внутри ядра и вне

ядра изображена в другом масштабе, нежели потенциальная энергия «холма» кулоновских сил отталкивания. На самом деле она почти в сто раз «глубже».

Целый ряд физиков-теоретиков стали решать задачу о расчетах вероятностей преодоления потенциального барьера при радиоактивном альфа-распаде. Наибольшего успеха достиг российский физик Георгий Гамов, который тогда находился в научных стажировках в Германии и Англии. В Геттингенском университете он общался с теоретиками, которые помогали ему преодолевать математические трудности волновой квантовой механики. А в Кембриджском университете лаборатория Резерфорда была в это время мировым центром зарождающейся ядерной физики, и там было получено много экспериментальных результатов по радиоактивным превращениям. Там же работали и друзья Гамова, российские физики Петр Капица и Юлий Харитон, которые, правда, занимались не ядерной физикой, а другими вопросами, но могли помочь Гамову получить нужные сведения об альфа-распадах.

Гамов не только довел до конца все теоретические расчеты, но и сделал сравнение их результатов с опытом. Что было известно об альфа-распаде? По крайней мере для 10 радиоактивных элементов были известны периоды полураспада и энергии альфа-частиц при этих распадах. Отчетливо выявлялась обратная зависимость – чем больше энергия альфа-частиц, тем меньше период полураспада (а значит, тем больше вероятность преодоления потенциального барьера). Полученные Гамовым результаты и качественно, и количественно соответствовали экспериментальным данным. Это стало не только крупным научным достижением самого Георгия Гамова, но и одним из первых успехов только что родившейся квантовой механики. Вероятностный характер радиоактивного превращения соответствовал вероятностному характеру туннельного преодоления потенциального барьера.



Георгий Гамов

Однако в ядерной физике не было теории, объяснявшей строение атомного ядра из альфа-частиц и электронов или из альфа-частиц, протонов и электронов. Эти гипотезы оказались неверными. А до открытия нейтрона и создания протонно-нейтронной модели атомного ядра было еще целых четыре года.

Но сам Гамов уже не возвращался к объяснению альфа-распада. Его больше интересовала Вселенная, ее эволюция и эволюция звезд. И биология – он первым предложил расшифровку генетического кода. А еще Гамов был самым известным и самым замечательным популяризатором науки, особенно последних достижений физики.

Туннельный эффект в ядерной реакции синтеза

Ядерные реакции синтеза – это сокращенное название ядерных реакций синтеза легких атомных ядер из более легких ядер. Эти реакции – экзотермические

вплоть до синтеза ядер железа. Продукты реакции (ядра и частицы) обладают большей кинетической энергией, чем исходные ядра. Наиболее важными в природе являются реакции синтеза ядер гелия из ядер изотопов водорода. Эти реакции и представляют собой сущность звезд как источников энергии. В звездах, правда, идут и другие ядерные реакции с образованием других элементов периодической системы с выделением энергии. (При синтезе более тяжелых ядер реакции уже эндотермические, т.е. требуют затраты энергии.)

В первые годы после второй мировой войны на земле произошло событие особой важности – 1 ноября 1952 года на атолле Эниветок (Маршалловы острова Тихого океана) была осуществлена звездная реакция синтеза гелия из изотопов водорода – дейтерия и трития. Это был взрыв – прообраз будущих водородных бомб. В военных целях это устройство, правда, использовать было нельзя – оно имело массу 82 тонны и размером было с двухэтажный дом. Основную массу устройства представляла теплозащита, вернее, «холодозащита» жидких изотопов водорода от закипания с помощью жидкого азота. Главным конструктором этого устройства был выдающийся американский ученый и инженер Эдвард Теллер.

Меньше чем через год, 12 августа 1953 года на Семипалатинском полигоне в Казахстане (СССР) было взорвано устройство, пригодное для военного использования, его масса составляла всего 7 тонн. А энергия этого взрыва была эквивалентна 400 килотоннам тротила. Здесь не место обсуждать, как это удалось. Отметим только, что своим рождением это устройство (бомба) целиком было обязано научному и инженерному таланту академика А.Н. Сахарова.

Началась гонка вооружений. Испытательный взрыв самой страшной бомбы 30 октября 1961 года (по прозвищам «царь-бомба» или «кузькина мать») был эквивалентен по своей энергии взрыву 58 мегатонн тротила (железнодорожный состав с

вагонами тротила длиной 30 тысяч километров!). И для этого было заложено в бомбу всего чуть больше 800 кг изотопов водорода.

Отвлечемся от страшного характера этих достижений военной науки и техники. И хотя сегодня еще существуют в ядерных арсеналах США и России по полторы тысячи водородных бомб, но вероятность их страшного использования невелика и их продолжают потихоньку демонтировать. За 30 лет ядерные арсеналы уменьшились более чем в 10 раз.

Еще до создания бомб, в 1950-51 годы А.Д.Сахаров вместе с И.Е.Таммом разработали принцип стационарной ядерной реакции синтеза как почти неиссякаемого источника «мирной» энергии. Она получила название *термоядерной* реакции. Почему? Более правильным было бы назвать ее температурноядерной. Для того чтобы двум ядрам изотопов водорода (например, дейтону, т.е. ядру дейтерия, с тритоном, т.е. ядром трития) соединиться, им нужно сблизиться на расстояние 2 фм ($2 \cdot 10^{-15}$ м). Только тогда «включатся» могучие ядерные силы и своим мощным притяжением придадут частицам скорости порядка $5 \cdot 10^6$ м/с. Когда частиц много и они имеют такую среднюю скорость, это означает, что температура всей массы частиц будет порядка сотен миллионов и даже миллиарда кельвинов. По-видимому, именно такова температура внутренних слоев Солнца.

Но на пути столкновения частиц, двух ядер дейтерия или ядра дейтерия с ядром трития, стоит потенциальный барьер кулоновских сил отталкивания. Расчеты показали, что если ядра изотопов водорода будут иметь среднюю энергию, соответствующую температуре в 20 миллионов градусов, то этот барьер частично преодолит. Вероятность туннельного эффекта будет уже достаточной для того, чтобы частицы сблизилась до 2 фм и произошло слияние ядер с появлением ядра гелия и нейтрона. А вот у них средняя энергия будет уже много больше – она будет соответствовать миллиарду кельвинов.



Площадка ИТЭР (вид сверху)

А 20 миллионов кельвинов – это как раз та температура, которую имеет плазма «огненного шара» уранового или плутониевого ядерного взрыва. Поэтому в каждой водородной бомбе водородный «заряд» окружен слоями урана или плутония. Можно образно назвать этот урановый заряд «спичкой» для «поджигания» главного заряда – изотопов водорода. Но не простой спичкой, а «квантовой», использующей квантовый туннельный эффект.

Сейчас приближается к завершению самый гигантский (по масштабам и по затратам) научный «прибор» – ИТЭР, международный термоядерный экспериментальный реактор. По проекту в импульсном режиме в течение 400 секунд на нем должна выделяться энергия в 500 МэВ при затрате на «спичку» энергии 50 Мэв, в 10 раз меньшей. «Спичкой» в этом случае являются ускоренные электрическим полем струи дейтериево-третиевой плазмы – это так называемые гиротроны, изобретенные и изготовленные в России, которая является полноправным участником этого грандиозного эксперимента (10% расходов на изготовление отдельных элементов). А продукты реакции синтеза, ядра атомов гелия и нейтроны будут отдавать свою энергию теплоносителю.

В будущем, уже не экспериментальном, а действующем, реакторе водяной пар, получающий эту энергию, будет в турбо-

генераторах рождать электрический ток. Но до этого еще далеко, по некоторым оценкам до создания первой термоядерной «электростанции» пройдет не меньше 50 лет. Тем более, что в 2021 году обнаружили серьезные дефекты в материалах труб, по которым циркулирует жидкий гелий, создающий в обмотках электромагнитов низкую температуру для их сверхпроводящего состояния. Это, по-видимому, приведет к задержке пуска ИТЭР на несколько лет.

Подчеркнем, что без туннельного эффекта реактор не смог бы работать. Но становится все яснее, что туннельный эффект играет заметную роль не только в ядерной физике. Например, его роль оказалась очень важной в кинетике многих химических реакций. Велика роль этого эффекта и в полупроводниковых явлениях и приборах – туннельных диодах, вентильном фотоэффекте, светодиодах, эффекте Джозефсона и других.

А туннельный эффект невозможно понять и применять без квантовой механики. Год 2025 – год столетнего юбилея этой науки, которую без преувеличения можно считать одним из самых значительных научных достижений двадцатого века. Именно так охарактеризовал значение квантовой механики нобелевский лауреат, российский физик-теоретик Лев Ландау в своем интервью в 1962 году.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2842 предлагалась на региональном этапе XVII Олимпиады имени Л.Эйлера, задачи M2844 а, б и M2845 — на XLIV Турнире городов, а задачи M2846–M2849 – на заключительном этапе LI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2849–Ф2856 предлагались на заключительном этапе LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2842–M2849, Ф2849–Ф2856

M2842. На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел равна квадрату натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел равна квадрату натурального числа?

А.Кузнецов

M2843. Пусть A' , B' , C' – середины сторон BC , CA , AB соответственно в правильном треугольнике ABC (рис. 1). На продолжении отрезка $A'B'$ за B' взята точка D , а на продолжении отрезка $A'C'$ за C' взята точка E так, что отрезок DE проходит через точку A . Отрезки $B'E$ и $C'D$ пересекаются в точке X .

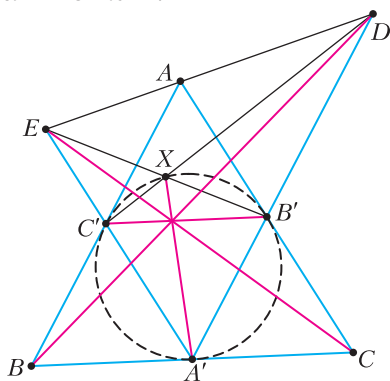


Рис. 1

а) Докажите, что точки X , A' , B' , C' лежат на одной окружности.

б) Докажите, что отрезки $A'X$, CE , BD и $B'C'$ пересекаются в одной точке.

К.Байрак, ученик 11 класса

M2844. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг нее собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скормливает его одному из котят (на свой выбор), причем каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котят поровну мяса, если всего котят а) двое; б) трое; в*) четверо?

А.Кушнир, В.Ретинский

M2845. В трехмерном координатном пространстве рассмотрим множество всех кубов с целочисленными координатами вершин. Докажите, что в этом множестве существует такое бесконечное подмножество K , что любые два разных куба из K не имеют параллельных ребер.

М.Малкин, М.Мееров

M2846. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100 , делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в

некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?

А.Солынин

M2847. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC , AB_1C , ABC_1 и ABC – остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.

А.Терёшин

M2848. Найдите все натуральные n , для которых существует такое *четное* натуральное a , что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.

Т.Коротченко

M2849. Дано натуральное число N . Куб с ребром $2N+1$ сложен из $(2N+1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых либо черный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2 \times 2 \times 2$, не более 4 черных кубиков. Какое наибольшее количество черных кубиков могло быть использовано?

Ю.Хромин

Ф2849. Микрофон, установленный в точке A горизонтальной поверхности (рис. 2), зафиксировал сигнал от сверхзвукового самолета спустя время t после его пролета над этой точкой. Еще через время t звук начал регистрироваться микрофоном, расположенным в точке B . Известно, что первый сигнал, зарегистрированный микрофоном B , был испущен самолетом из точки C . Самолет двигался равномерно и прямолинейно в одной вертикальной плоскости с микрофонами.

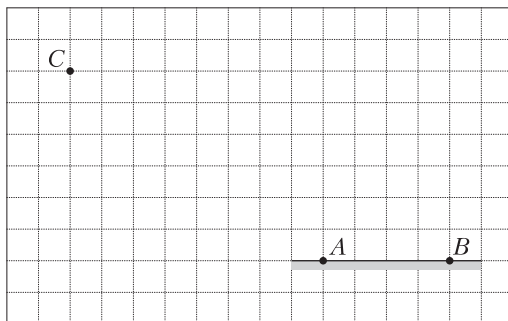


Рис. 2

С помощью геометрических построений восстановите траекторию полета самолета и определите его местоположения в моменты регистрации звуковых сигналов микрофонами.

А.Вергунов

Ф2850. С вершины башни высотой h с одинаковыми скоростями, равными v и направленными перпендикулярно одна к другой, под разными углами к горизонту одновременно брошены два камня так, что их движение происходит в одной вертикальной плоскости. Через некоторое время после броска, как раз непосредственно перед падением одного камня на землю, оказалось, что векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту.

Определите величину этого угла φ и расстояние между камнями l в этот момент времени.

Известно, что в начальный момент времени оба камня удаляются от поверхности земли, а непосредственно перед падением одного камня на землю другой камень тоже приближается к поверхности земли. Башня расположена на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха не учитывайте.

А.Аполонский

Ф2851. На горизонтальной поверхности находятся два тела: длинная доска высотой h и однородный цилиндр радиусом $R = 2h$, которые касаются друг друга (рис. 3). Масса цилиндра равна M . Коэффициенты трения между цилиндром и поверхностью, а также между самими телами

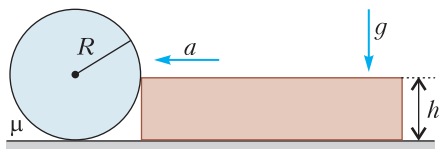


Рис. 3

одинаковы и равны μ . Доска движется с постоянным горизонтальным ускорением a , направленным перпендикулярно линии контакта с цилиндром. Ускорение свободного падения равно g .

При каких значениях ускорения a доски цилиндр не будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, если коэффициент трения μ может принимать любые значения больше нуля?

А.Ившин, Е.Васенин, А.Вергунов

Ф2852. На шероховатой горизонтальной поверхности стола находится система, состоящая из призмы массой m , снабженной легким блоком, и бруска массой $M = 2m$ (рис. 4). Боковая поверхность призмы

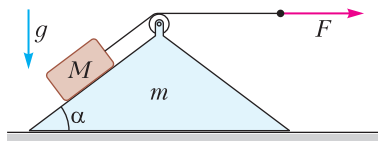


Рис. 4

является гладкой, а угол между гранью, на которой находится брусок, и поверхностью стола равен α ($\sin \alpha = 3/5$). К бруску привязана легкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок, к противоположному концу которой приложена горизонтальная сила F . Известно, что ускорение призмы не зависит от величины этой силы.

1) Определите возможные значения коэффициента трения μ между призмой и поверхностью стола.

2) Для каждого из полученных в пункте 1 значений μ найдите ускорение призмы a . Ускорение свободного падения равно g . Наклонный отрезок нити параллелен левой боковой грани призмы. Трение в оси блока отсутствует.

И.Юдин

Ф2853. На рисунке 5 приведен фрагмент графика зависимости от времени τ средней мощности $N_{\text{ср}}$, равной отношению суммарного количества теплоты, переданного слит-

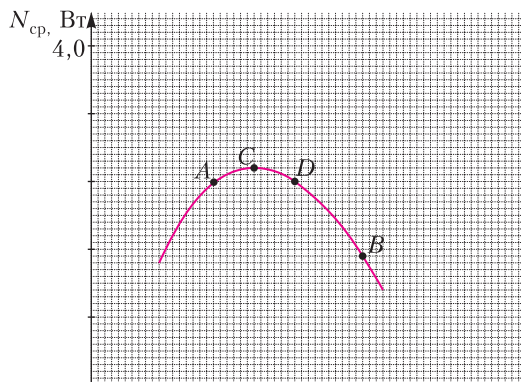


Рис. 5

ку серебра массой $m = 50$ г, ко времени его теплообмена с внешними телами. Через некоторое время после начала теплообмена температура слитка в состоянии A увеличилась до $t_A = 40^\circ\text{C}$, а спустя еще 2,2 мин (в состоянии B) она вновь оказалась равна t_A . Удельная теплоемкость серебра $c = 240$ Дж/(кг $\cdot$ $^\circ\text{C}$).

1) Восстановите координатные оси графика и их масштаб, если известно, что начало оси времени нагрева совпадает с началом оси $N_{\text{ср}}$.

2) Найдите начальную температуру t_0 слитка серебра (при $\tau = 0$).

3) Найдите температуры слитка, средние и мгновенные мощности теплообмена с внешними телами в состояниях, соответствующих точкам C и D.

М.Замятнин, А.Вергунов

Ф2854. Из тонкой непроводящей плоской пластины вырезали пять фигур разной формы и размера. Каждую из них зарядили электрическим зарядом с постоянной, положительной и одинаковой для всех фигур поверхностной плотностью. Первая фигура представляет собой квадрат со стороной $2a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 6). Модуль напряженности электрического поля, созданного в точке O зарядами на поверхности такой фигуры, равен E_0 .

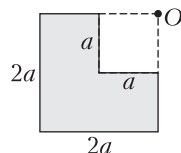


Рис. 6

1) Чему равно отношение E'/E_0 , где E' – модуль напряженности электрического

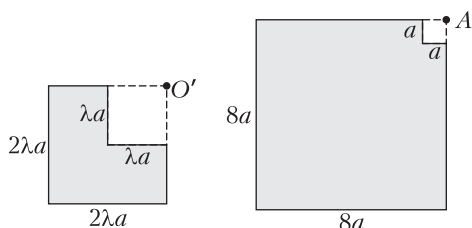


Рис. 7

Рис. 8

поля, созданного в точке O' второй заряженной фигурой, имеющей форму квадрата со стороной $2\lambda a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной λa (рис. 7)? Здесь λ – некоторое положительное число.

2) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_A$ электрического поля, созданного в точке A третьей заряженной фигурой, представляющей собой квадрат со стороной $8a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 8). Модуль вектора $\vec{E}_A$ выразите через величину E_0 .

3) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_B$ электрического поля, созданного в точке B четвертой заряженной фигурой, имеющей форму четверти кольца (рис. 9), внутренний радиус которого a , а внешний $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_B$ выразите через E_0 .

4) Определите модуль и направление вектора напряженности $\vec{E}_C$ электрического поля, созданного в точке C пятой заряженной фигурой, имеющей форму трапеции (рис. 10), одно основание которой a ,

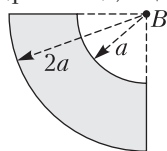


Рис. 9

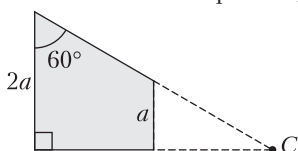


Рис. 10

второе $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_C$ выразите через E_0 . Углы при большем основании данной трапеции указаны на рисунке. Точки O, O', A, B и C находятся в одной плоскости с соответствующей фигурой.

А.Заяц

Ф2855. На рисунке 11 изображена схема электрической цепи с регулируемым источником тока. Такой источник выдает во

внешнюю цепь электрический ток заданной силы, а напряжение на его выходах подстраивается под параметры внешней цепи.

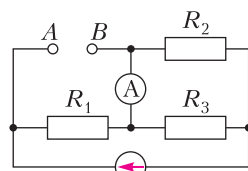


Рис. 11

При подключении к контактам A и B последовательно соединенных диода и лампы показания амперметра равны нулю при двух ненулевых значениях силы тока через источник I_{01} и I_{02} . Считайте, что сила тока I_d , протекающего через лампу, и напряжение на ней связаны соотношением $I_d = \alpha U_d^{2/3}$. Для диода сила тока I_d пропорциональна квадрату напряжения на нем: $I_d = \beta U_d^2$. Сопротивления резисторов R_1, R_2 и R_3 , а также коэффициенты α и β неизвестны.

1) При каком ненулевом значении силы тока I_{03} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только лампу?

2) При каком ненулевом значении силы тока I_{04} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только диод?

Д.Рубцов

Ф2856. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится точечный монохроматический источник света S с длиной волны λ . Известно, что диаметр линзы равен D , причем $\sqrt{\lambda F} \ll D \ll F$. Линзу разрезают на две одинаковые половинки (полулинзы), которые смещают параллельно исходным положениям (рис. 12) вдоль оси. Одна половинка (верхняя) оказывается на расстоянии $d_1 = 4F/3$ от источника, а другая (нижняя) – на расстоянии $d_2 = 2F$.

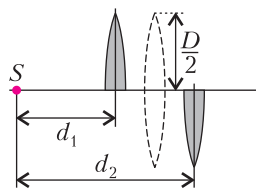


Рис. 12

от источника, а другая (нижняя) – на расстоянии $d_2 = 2F$.

1) Найдите, на каких расстояниях l_1 и l_2 от источника находятся его изображения в верхней и нижней половинках линзы.

Перпендикулярно оси размещают экран на некотором расстоянии L от источника.

2) Опишите картину, которая наблюдается на экране (изобразите ее схематически на рисунке и определите величины существенных характеристик) при $L_1 = 3F$ и $L_2 = 6F$.

3) При каком расстоянии $L_3 > 2F$ на экране наблюдается изображение в форме круга? Экран закрепляют на расстоянии $L_4 = 40F/9$ от источника.

4) Опишите качественно и объясните картину, которая наблюдается на экране, указав все характерные детали.

5) Пройдем из точки пересечения экрана осью вверх, до края наблюдаемой картины. Определите, сколько на этом пути окажется интервалов, на которых освещенность экрана будет возрастать. Для расчета используйте такие значения: $F = 4$ м, $\lambda = 650$ нм, $D = 5$ см.

Считайте, что исходная линза была идеальной: она обладала свойством таутохронизма (лучи от одного источника, прошедшие через разные ее точки, достигают новой точки пересечения за одинаковое время) и при прохождении через ее фокус фаза световой волны скачком изменялась на π . Все лучи, не попадающие непосредственно от источника на полулинзы, обрезаются диафрагмами.

К. Соломатин

Решения задач M2830–M2833, Ф2837–Ф2840

M2830. В ходу монеты номиналом a и b дублонов, где a и b – данные взаимно простые натуральные числа, причем $a < b < 100$. Целое неотрицательное число n называется удачным, если сумму в n дублонов можно набрать, используя не более 1000 монет. Найдите количество удачных чисел.

Ответ: $1001b - \frac{b(b-1)}{2}$.

Если в наборе использовались хотя бы b монет по a дублонов, мы можем заменить их на a монет по b дублонов. При этом сумма номиналов не изменится, а общее количество монет уменьшится. Таким образом, из любого набора такими заменами можем получить набор с той же суммой, в котором не более $(b-1)$ монет по a дублонов. Итак, далее рассматриваем только наборы, в которых от 0 до $b-1$ монет по a дублонов.

Заметим, что варианты с разным количеством монет по a дублонов дают заведомо разные суммы, так как у них разные остатки при делении на b . (Действительно, если $0 \leq i < j \leq b-1$ – количества монет по a дублонов, то соответствующие суммы при делении на b дают такие же остатки, как ia и ja . Но $ja - ia = (j-i)a$ не делится на b , поскольку a и b взаимно просты, а $0 < j-i < b$.)

Зафиксируем количество k монет по a дублонов. Тогда к ним можно добавить $0, 1, \dots, 1000-k$ монет по b дублонов, и, очевидно, все получаемые при этом суммы будут различны. Видим, что для данного k у нас есть $(1001-k)$ вариантов.

Суммируя по $k = 0, 1, \dots, b-1$, получаем итоговое количество вариантов:

$$\begin{aligned} & 1001 + (1001-1) + (1001-2) + \dots \\ & \dots + (1001-(b-1)) = \\ & = 1001b - (1+2+\dots+(b-1)) = \\ & = 1001b - \frac{b(b-1)}{2}. \end{aligned}$$

П. Кожевников

M2831. Впишем в параболу треугольник DEF (рис. 1). Проведем в точках D , E , F касательные, пусть они ограничивают треугольник ABC . Докажите, что $S_{DEF} = 2S_{ABC}$.

Это красивое утверждения можно доказать многими способами, в том числе «лобовым» вычислением в координатах. Одно из возможных доказательств опирается на такую лемму.

Пусть из точки A проведены касательные AE и AF к параболе (так что E и F – точки касания). Тогда:

(1) медиана AK треугольника AEF параллельна оси параболы (иначе говоря, A лежит на вертикальной прямой, проходящей через середину EF ;

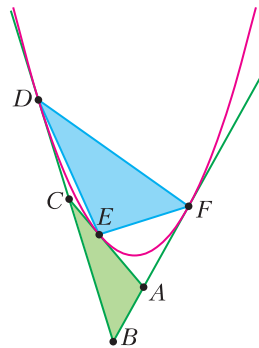


Рис. 1

(2) кроме того, середина медианы AK лежит на параболе.

Лемму несложно доказать непосредственной выкладкой: если $y = x^2$ — уравнение параболы, то касательные, проведенные к ней в точках $(d; d^2)$, $(e; e^2)$, пересекаются в

точке $\left(\frac{d+e}{2}; de\right)$.

Также используем такой факт: если провести параллельные прямые, то середины отрезков, отсекаемых на них параболой, лежат на одной прямой, параллельной оси параболы. (Этот факт несложно доказать, используя теорему Виета.)

Перейдем к решению задачи.

Не умаляя общности, считаем, что проекция B на ось Ox лежит между проекциями A и C . Пусть K, L, M — середины сторон EF ,

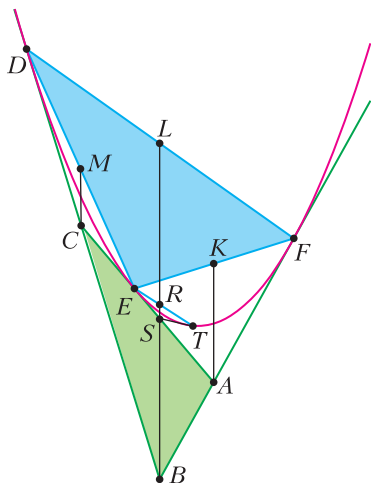


Рис. 2

FD, DE соответственно (рис. 2). Согласно лемме, $AK \parallel BL \parallel CM$ (эти три прямые параллельны оси параболы). Видим, что проекции отрезков KM и AC на ось Ox равны, примем длину этой проекции за l .

Далее, через точку E проведем прямую, параллельную DF , пусть она вторично пересекает параболу в точке T . Тогда по указанному выше факту середина R отрезка ET лежит на (вертикальной) прямой BL . Пусть касательная к параболе, проведенная в точке T , пересекает AC в точке S . Снова, согласно лемме, SR параллельна оси параболы, значит, S также лежит на BL . По утверждению (2) леммы, точка пересече-

ния BL с параболой делит пополам каждый из отрезков BL и SR . Значит, $BS = RL$. Переходим к вычислению площадей:

$$2S(ABC) = AC \cdot BS \cdot \sin \angle ASB = BS \cdot (AC \sin \angle ASB) = BS \cdot l.$$

В треугольнике DEF (или в трапеции $DETF$) высота, проведенная из точки E , равна $RL \sin \angle RLF$. Поэтому

$$\begin{aligned} S(DEF) &= DF \cdot RL \cdot \frac{\sin \angle RLF}{2} = \\ &= RL \cdot \frac{DF}{2} \cdot \sin \angle RLF = \\ &= RL \cdot (KM \sin \angle RLF) = BS \cdot l, \end{aligned}$$

что равно $2S(ABC)$.

Приведем схему еще одного решения. Оно опирается на следующий факт.

Пусть прямая, параллельная оси параболы и проходящая через B , пересекает AC в точке B' . Тогда B' и E симметричны относительно середины AC .

(Это несложно показать, например, выразив абсциссы всех точек через абсциссы точек касания.)

Аналогично определим точки A' и C' ; для них выполнено аналогичное свойство. Так, в треугольниках $A'B'C'$ и DEF соответствующие вершины симметричны относительно середины сторон треугольника ABC . Такие треугольники называют *изотомичными* относительно треугольника ABC .

Известно (и не так сложно доказать), что изотомичные треугольники равновелики. Остается убедиться в том, что если в треугольнике ABC проведены параллельные чевианы AA', BB' и CC' (т.е. A', B', C' — точки на прямых BC, CA, AB такие, что $AA' \parallel BB' \parallel CC'$), то $S(A'B'C') = 2S(ABC)$.

Замечание. Как заметил М. Дидин, эту задачу можно переформулировать без привлечения параболы следующим образом. Пусть на описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P (на самом деле P — фокус параболы, касающейся прямых AB, BC, CA). Через точку P проведем окружность, касающуюся стороны AB в точке B , а также окружность, касающуюся стороны AC в точке C . Они вторично пересекаются в точке A' (на самом деле A' лежит

на BC и является точкой касания параболы с прямой BC). Аналогично определяются точки B' , C' . Тогда $S(A'B'C') = 2S(ABC)$.

П. Кожевников

M2832. На координатной плоскости отмечены 2024 точек общего положения (т.е. точки, среди которых нет трех, лежащих на одной прямой). Существует ли многочлен от двух переменных $f(x, y)$ а) степени 2025; б) степени 2024 такой, что он обращается в ноль в точности в этих отмеченных точках?

Ответ: а) нет; б) да.

а) Отрицательный ответ будет следовать из известного общего факта: если многочлен $f(x, y)$ имеет нечетную степень n , то уравнение $f(x, y) = 0$ имеет бесконечно много решений.

Доказать этот факт можно так. Будем считать, что $f(0, 0) \neq 0$ (иначе предварительно сделаем сдвиг по осям координат). Подставим $y = kx$, т.е. рассмотрим $f(x, kx)$ (как многочлен от x и k). Это многочлен от переменной x степени n , а коэффициентом при x^n будет являться некоторый ненулевой многочлен $h(k)$.

Существует бесконечно много вещественных значений k , в которых h не обращается в 0. Для каждого такого значения $k = k_0$ многочлен $g(x) = f(x, k_0x)$ будет являться многочленом нечетной степени от x , а значит, будет иметь хотя бы один корень x_0 , при этом $x_0 \neq 0$, так $f(0, 0) \neq 0$. Тогда (x_0, k_0x_0) – решение уравнения $f(x, y) = 0$. Для разных k_0 мы получаем разные решения, таким образом, нами получено бесконечно много решений.

б) Положим $m = 1012$. Идея построения искомого многочлена будет такой. Разобьем все отмеченные точки $A_1, \dots, A_{2m}$ на m пар и проведем прямые $l_1, l_2, \dots, l_m$, соединяющие точки в парах. Рассмотрим уравнения $L_i = 0$ прямых l_i . Тогда произведение $(L_1 L_2 \dots L_m)^2$ – это многочлен степени $2m$, который во всех точках принимает неотрицательные значения и при этом обращается в 0 только в точках, принадлежащих хотя бы одной из прямых $l_1, l_2, \dots, l_m$.

Рассмотрим всевозможные разбиения отмеченных точек на пары и сложим соответствующие произведения $(L_1 L_2 \dots L_m)^2$. Получим многочлен F степени $2m$ (отметим, что старшая $(2m)$ -я степень здесь не сократится, так как она представляет собой сумму квадратов ненулевых однородных многочленов, принимающих только неотрицательные значения). При этом $F(x, y) \geq 0$ во всех точках и F обращается в 0 в любой из отмеченных точек.

Остается доказать, что в любой заданной не отмеченной точке A значение F строго больше 0. Для этого достаточно понять, что хотя бы для одного разбиения отмеченных точек на пары точка A не лежит ни на одной из прямых l_i .

Пару отмеченных точек $\{A_i, A_j\}$ назовем *запрещенной*, если точка A лежит на прямой $A_i A_j$. Надо показать, что отмеченные точки $A_1, \dots, A_{2m}$ можно разбить на пары, ни одна из которых не является запрещенной. Каждая из прямых AA_i содержит помимо A_i еще не более одной отмеченной точки (поскольку отмеченные точки общего положения), значит, каждая отмеченная точка входит не более чем в одну запрещенную пару. Перенумеруем отмеченные точки так, чтобы запрещенными парами являлись пары $\{A_1, A_2\}, \{A_3, A_4\}, \dots, \{A_{2t-1}, A_{2t}\}$ ($t \leq m$). Тогда достаточно взять разбиение на пары «противоположных» точек: $\{A_1, A_{m+1}\}, \{A_2, A_{m+2}\}, \dots, \{A_m, A_{2m}\}$. Этим завершается решение.

Замечание. Сюжет этой задачи предлагался автором на Ирано-Индийском математическом соревновании 2024 года в следующей более сложной постановке:

Какую минимальную степень может иметь многочлен с вещественными коэффициентами $f(x, y)$ такой, что он обращается в ноль в точности в n точках, являющихся вершинами правильного n -угольника?

Ответом будет n при четных n и $n + 1$ при нечетных n . Идея конструирования многочлена как сумму квадратов та же, что и в решении выше. Доказать оценку (т.е. что не существует искомого многочлена меньшей степени) совсем не просто.

Н. Сафаеи, П. Кожевников

М2833*. По кругу лежат а) 26; б) 30 одинаковых на вид монет. Известно, что ровно две из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, лежат фальшивые монеты рядом или нет?

Решение этой задачи приводится в статье А.Грибалко и К.Кнопа в этом номере журнала.

Ф2837. Два маленьких тяжелых шарика массами m закреплены с помощью трех невесомых и нерастяжимых нитей между двумя вертикальными стенками в поле тяжести (рис. 1). Расстояние между

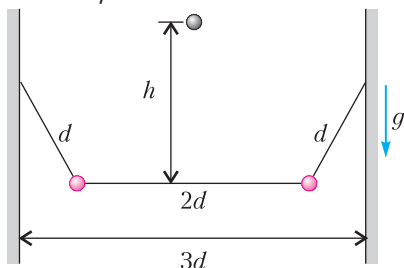


Рис. 1

стенками $3d$, длины нитей, прикрепленных к стенкам, равны d , длина нити между шариками $2d$. С высоты h , считывая от середины горизонтальной нити, падает еще один такой же шарик, к которому прикреплен крючок. Пролетая рядом с горизонтальной нитью, шарик зацепляется за нить крючком. Определите силы натяжения нитей в этот момент. Ускорение свободного падения равно g .

Скорость падающего шарика в момент, когда он цепляется за горизонтальную нить, равна $v = \sqrt{2gh}$. Рассмотрим движение одного из шариков, подвешенных на нитях (на рисунке 2 – левого). Он движется по окружности с центром в точке крепления нити на левой стенке. Проекция

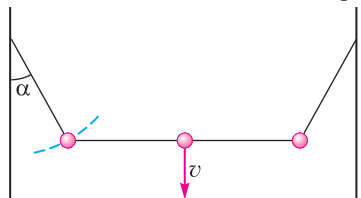


Рис. 2

скоростей левого и центрального шариков на горизонтальную нить должны быть равны. Скорость центрального шарика v направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость левого шарика в начальный момент времени равна нулю. Нормальная проекция ускорения левого шарика тоже равна нулю, поэтому есть только тангенциальная составляющая $\vec{a}_\tau = \vec{a}$. Определим эту величину двумя способами.

Способ 1. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вниз с постоянной скоростью $\vec{v}$ (рис. 3). В ней левый шарик движется по окружности, центром которой является центральный шарик. Нормальная проекция ускорения в этой системе отсчета направлена вдоль нити и равна $a_n = v^2/d$. Но переход в инерциальную систему отсчета не меняет ни величину, ни направление ускорения. Поэтому a_n является проекцией ускорения $\vec{a}$ на горизонтальную нить:

$$a_n = a \cos \alpha, \quad \frac{v^2}{d} = a \cos 30^\circ, \quad a = \frac{2v^2}{\sqrt{3}d}.$$

Способ 2. Перейдем в неинерциальную систему отсчета левого шарика, тогда на центральный шарик будет действовать сила инерции равная $-m\vec{a}$ (рис. 4). Запишем для центрального шарика уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$m \frac{v^2}{d} = T_2 - ma \cos 30^\circ - T'_2.$$

Откуда получаем тот же ответ.

Теперь уже несложно найти силы натяжения T_1 боковой и T_2 горизонтальной нитей. Из второго закона Ньютона для левого шарика следует

$$m \frac{v^2}{d} = T_2 - T_1 \sin 30^\circ,$$

$$m \frac{v^2}{\sqrt{3}d} = T_1 \cos 30^\circ - mg.$$

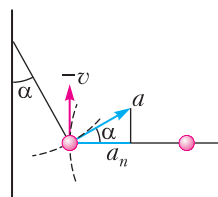


Рис. 3

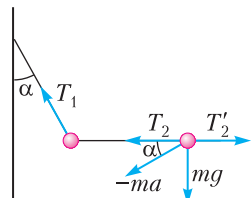


Рис. 4

Отсюда получаем

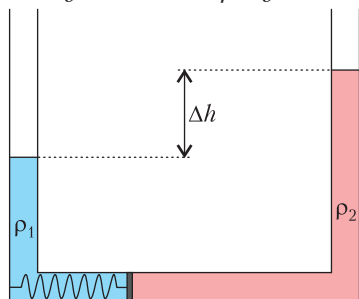
$$T_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg + \frac{2mv^2}{3d}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}mg + \frac{4mv^2}{3d}.$$

Заменив $v^2 = 2gh$, получаем окончательно

$$T_1 = \frac{mg}{3} \left(2\sqrt{3} + 4\frac{h}{d} \right), \quad T_2 = \frac{mg}{3} \left(\sqrt{3} + 8\frac{h}{d} \right).$$

А.Аполонский

Ф2838. Тонкая трубка площадью поперечного сечения S изогнута в виде перевернутой буквы П (см. рисунок). В горизонтальной



зонтальной части трубки находится невесомый поршень, который связан с левой стенкой пружиной. В вертикальных концах трубки в равновесии находятся две жидкости: в левой – жидкость плотностью ρ_1 , а в правой – жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$. При этом разность уровней верхних границ жидкостей в вертикальных коленях составляет Δh , а пружина находится в недеформированном состоянии. Коэффициент жесткости k пружины подобран таким образом, чтобы при добавлении в левое колено жидкости плотностью ρ_1 разность уровней Δh все время оставалась постоянной.

1) Чему равен коэффициент жесткости k ? В левую часть трубки добавляют объем ΔV жидкости плотностью ρ_2 , при этом верхние границы жидкостей в вертикальных частях оказываются на одном уровне.

2) Определите, какой объем ΔV добавили в левое колено.

Поршень скользит без трения. Жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает и не выливается из сосуда. Объемом пружины можно пренебречь, жидкости не смешиваются и не перетекают в другое вертикальное колено. Ускорение свободного падения равно g .

Так как оба конца трубки открыты в атмосферу, атмосферное давление можно не учитывать. Условие равновесия поршня в начальном положении имеет вид

$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g h_2 S,$$

где h_1 и h_2 – высота столба жидкости выше центра поршня в левой и правой частях соответственно. При добавлении жидкости плотностью ρ_1 в левый сосуд поршень сместится на расстояние x вправо, и на него начнет действовать сила упругости. Запишем условие равновесия поршня после добавления некоторого количества жидкости:

$$\rho_1 g H_1 S = \rho_2 g H_2 S + kx.$$

После перемещения поршня на расстояние x уровень жидкости в правой части тоже увеличится на x , тогда

$$\rho_1 g (h_1 + y) S = \rho_2 g (h_2 + x) S + kx,$$

где y – высота, на которую увеличился уровень жидкости в левом сосуде. Для того чтобы разность высот Δh оставалась постоянной, y должно равняться x . Поэтому

$$k = (\rho_1 - \rho_2) g S.$$

Условие равновесия поршня после добавления в левую часть объема ΔV жидкости плотностью ρ_2 приобретает вид

$$\rho_1 g (h_1 - x) S + \rho_2 g z S = \rho_2 g (h_2 + x) S + kx.$$

Чтобы верхние границы жидкостей совпадали, высота z добавленной в левое колено жидкости плотностью ρ_2 должна быть равна $\Delta h + 2x$. Тогда, с учетом найденного коэффициента жесткости пружины,

$$x = \frac{\rho_2 \Delta h}{2(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Убедимся, что при перемещении поршня на расстояние x в левую вертикальную часть трубки останется жидкость плотностью ρ_1 . Из условия равновесия поршня в начальный момент

$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g (h_1 + \Delta h) S$$

получаем

$$h_1 = \frac{\rho_2 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2}, \quad h_1 > x.$$

Объем добавленной жидкости может быть найден по формуле

$$\Delta V = S (\Delta h + 2x),$$

откуда получаем

$$\Delta V = \frac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}.$$

А.Вергунов

Ф2839. Идеально гибкая однородная нерастяжимая цепочка постоянной толщины, массой m и длиной L подвешена с помощью короткой нити к закрепленной точке A (рис. 1, а). В некоторый момент

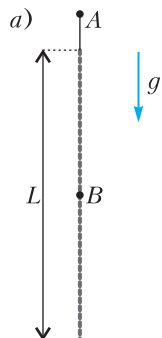


Рис. 1

б) времени нить пережигают, а цепочку начинают тянуть за ее нижний конец с постоянной силой F в направлении точки A (рис. 1, б).



1) С каким по модулю ускорением a_0 начинает двигаться верхний конец цепочки сразу после пережигания нити?

2) Через какое время τ после пережигания нити вся цепочка снова выпрямится?

3) Определите модуль скорости цепочки v сразу после ее распрямления.

4) Какое количество теплоты Q выделится за время τ ?

5) Определите силу натяжения T цепочки в точке B , расположенной в ее середине, после распрямления цепочки.

Ускорение свободного падения равно g . Сопротивлением воздуха необходимо пренебречь. Размеры звеньев в цепочке много меньше ее длины. Считайте, что столкновения звеньев в цепи неупругие.

После пережигания нити длина вертикального участка цепочки, на край которой действует сила F , будет увеличиваться. Другой участок цепочки сокращающейся длины будет двигаться только под действием силы тяжести, значит, модуль ускорения верхнего края цепочки сразу после пережигания и до момента полного разворота цепочки равен

$$a_0 = g.$$

Согласно теореме о движении центра масс, ускорение центра масс цепочки в проекции на ось y (рис. 2) равно

$$a_y = \frac{mg - F}{m} = g - \frac{F}{m}.$$

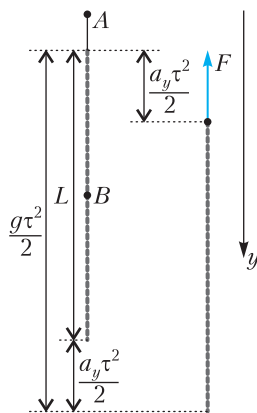


Рис. 2

За время τ центр масс цепочки сместится вдоль оси y на $\frac{a_y \tau^2}{2}$. Верхний край цепочки за время τ переместится на расстояние $\frac{g \tau^2}{2}$, значит,

$$L + \frac{a_y \tau^2}{2} = \frac{g \tau^2}{2}.$$

С учетом полученных соотношений,

$$\tau = \sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

Ответ на этот же вопрос можно получить и другим способом. Пересядем из лабораторной системы отсчета в неинерциальную систему отсчета, падающую вниз без начальной скорости с ускорением свободного падения g . В этой системе отсчета изначально неподвижная цепочка приходит в движение под действием лишь одной силы F . И сумма действующих на любой элементарный (малый) участок силы тяжести и силы инерции равна нулю. В этом случае центр масс цепочки движется, согласно теореме о движении центра масс, с ускорением $a' = F/m$ и проходит за искомое время τ расстояние L . А значит, $\tau = \sqrt{\frac{2L}{a'}}$, что дает тот же ответ.

Через время τ все части цепочки движутся с одинаковой скоростью, равной скорости ее центра масс. Следовательно, $v = |v_y| = |a_y| \tau$, т.е.

$$v = \left| g - \frac{F}{m} \right| \sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

Ответ на этот пункт можно получить, также используя пересадку в неинерциальную систему отсчета. Скорость в данной системе отсчета сразу после разворота цепочки равна

$$v' = a'\tau = \frac{F}{m} \sqrt{\frac{2Lm}{F}} = \sqrt{\frac{2FL}{m}}$$

и направлена вверх. В данный момент выбранная система отсчета будет двигаться вниз со скоростью

$$v_c = g\tau = g\sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

При пересадке обратно в лабораторную систему отсчета с учетом закона сложения скоростей получаем

$$v_y = v_c - v' = \left(g - \frac{F}{m}\right) \sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

А значит, $v = |v_y|$.

Работа A_F силы F равна сумме изменения механической энергии $\Delta E_{\text{мех}}$ цепочки и выделившегося количества теплоты Q :

$$A_F = \Delta E_{\text{мех}} + Q,$$

где

$$A_F = F \left(L - \frac{a_y \tau^2}{2} \right), \quad \Delta E_{\text{мех}} = \frac{mv^2}{2} - mg \frac{a_y \tau^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$Q = FL.$$

В неинерциальной системе отсчета к моменту полного разворота цепочки точка приложения силы F переместится на $2L$, следовательно, ее работа равна $2FL$. Изменение кинетической энергии цепочки составляет

$$\frac{mv'^2}{2} = FL.$$

С учетом этого находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = 2FL - FL = FL.$$

После распрямления цепочки выделим нижнюю половину нити (ниже точки B) массой $m/2$ и запишем для этого участка теорему о движении центра масс в проекции на ось y :

$$\frac{m}{2} a_y = \frac{m}{2} g - T.$$

В итоге получаем

$$T = \frac{F}{2}.$$

Рассматривая движение в неинерциальной системе отсчета, на нижнюю половину цепочки после ее разворота будет действовать сила

$$T = \frac{m}{2} a' = \frac{F}{2}.$$

А.Киреев

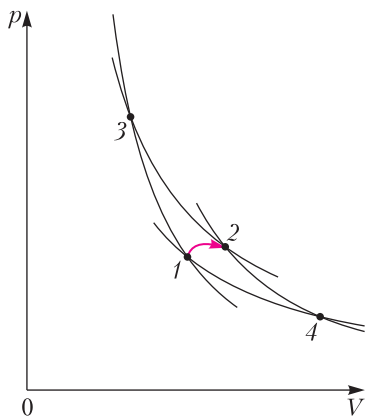
Ф2840. Рассмотрим два процесса A и B , в каждом из которых ν молей одноатомного идеального газа квазистатически переводят из состояния 1 с объемом V и температурой T в состоянии 2 с объемом $2V$ и температурой $2T$ так, что в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится. При этом процесс A осуществляется таким образом, что количество теплоты, которое подводят к газу, оказывается максимально возможным при выполнении данных условий, а в процессе B количество теплоты оказывается минимальным.

- 1) Определите максимальные $V_A^{\max}$, $V_B^{\max}$ и минимальные $V_A^{\min}$, $V_B^{\min}$ значения объемов газа в каждом из этих процессов.
- 2) Каково количество теплоты Q_A и Q_B , подведенное в каждом процессе?

Через любую точку, соответствующую состоянию газа в координатах pV , проходит ровно одна изотерма. Изотермы друг с другом не пересекаются, а расположенным выше изотермам соответствуют большие температуры. При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 точка, соответствующая его состоянию, не может перемещаться с «верхних» изотерм на «нижние», так как температура газа не уменьшается, а траектория процесса лежит между изотермами, проходящими через эти точки.

Если теперь рассмотреть аналогичным образом на той же pV -плоскости семейство адиабат, то точка, соответствующая состоянию газа, не может перемещаться с «верхних» адиабат на «нижние», так как тепло от газа не отводится, следовательно, траектория процесса лежит между адиабатами, проходящими через точки 1 и 2.

Покажем, что максимальное количество теплоты в таком процессе подводится к газу в случае, если его сначала адиабатически



перевести из состояния 1 в состояние 3, затем изотермически из состояния 3 в состояние 2 (см. рисунок). Рассмотрим цикл 1–3–2–1, полагая переход из состояния 2 в состояние 1 произвольным, лежащим внутри криволинейного четырехугольника 1–3–2–4–1. Работа в этом цикле равна разности подведенного на участке 1–3–2 количества теплоты Q_{132} и отведенного при переходе 2–1 количества теплоты Q_{21} . Поскольку работа положительна, то

$$Q_{132} > Q_{21}.$$

Так как процесс 2–1 выбран произвольно (при ограничениях на подвод тепла и изменение температуры, которые оговорены в условии), то величина Q_{132} соответствует максимальному значению количества теплоты, которое может быть подведено при таком переходе. Аналогично можно показать, что минимально возможному количеству теплоты соответствует процесс, при котором газ сначала изотермически расширяется из состояния 1 в состояние 4, а затем адиабатически сжимается, переходя из состояния 4 в состояние 2.

Приведем анализ характера процессов A и B другим способом – с использованием понятия энтропии. Процессы A и B протекают так, что в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится, значит, энтропия в этих процессах не может уменьшаться. Подведенное количество теплоты δQ и изменение энтропии dS связаны соотношением

$$\delta Q = TdS.$$

Процесс A протекает с максимально возможным подведенным теплом, значит, в этом процессе все подведенное тепло должно быть передано при максимально возможной температуре T . Для этого систему нужно перевести без подвода тепла в состояние с максимально возможной температурой, что соответствует процессу, при котором газ сначала адиабатически сжимается от состояния 1 до состояния 3, а затем изотермически расширяется, переходя из состояния 3 в состояние 2. Процесс B протекает с минимально возможным подведенным теплом, значит, в этом процессе все подведенное тепло должно быть передано при минимально возможной температуре, после чего в состоянии 2 систему нужно перевести без подвода тепла. Это соответствует процессу, при котором газ сначала изотермически расширяется от состояния 1 до состояния 4, а затем адиабатически сжимается, переходя из состояния 4 в состояние 2.

Перейдем к вычислению объемов, соответствующих точкам 3 и 4. Уравнение, связывающее переменные T и V в адиабатическом процессе, имеет вид

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

где γ – показатель адиабаты. В случае одноатомного идеального газа $\gamma = 5/3$ и $TV^{2/3} = \text{const}$. Для процесса A

$$TV^{2/3} = 2T(V_A^{\min})^{2/3}, \quad V_A^{\min} = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что $V_A^{\max} = 2V$. Для процесса B

$$2T \cdot (2V)^{2/3} = T(V_B^{\max})^{2/3}, \quad V_B^{\max} = 4\sqrt{2}V.$$

Разумеется, $V_B^{\min} = V$.

Тепло в этих процессах подводится на изотермах. Количество теплоты в изотермическом процессе равно работе газа. Для процесса A

$$Q_A = 2\nu RT \ln \frac{V_2}{V_3} = 5\nu RT \ln 2,$$

для процесса B

$$Q_B = 2\nu RT \ln \frac{V_4}{V_1} = \frac{5}{2}\nu RT \ln 2.$$

А.Аполонский

Когда фальшивые монеты соседние

А. ГРИБАЛКО, К. КНОП

В этой статье мы приведем решение трудной задачи M2833 из задачника «Кванта». Рассмотрим ее в обобщенной формулировке.

По кругу лежат N внешне одинаковых монет. Известно, что ровно две из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Нужно определить за K взвешиваний на чашечных весах без гирь, лежат фальшивые монеты рядом или нет.

Кроме того, хотелось бы понять, для какого максимального числа N монет это можно сделать за K взвешиваний.

Отметим, что варианты этой задачи встречались ранее: случай $K = 2$, $N = 8$ – см. «Квантик» №9 за 2023 г. (задача 3 на с. 22); случай $K = 3$, $N = 20$ – см. «Квант» №9 за 2023 г. (задача 16 на с. 39).

Наконец, в задаче M2833 требуется найти алгоритм для $K = 3$ и а) $N = 26$, б) $N = 30$.

Будем нумеровать монеты по часовой стрелке числами от 1 до N . Монеты, про которые еще не доказано, фальшивые они или настоящие, традиционно будем называть подозрительными. В нашей задаче подозрительные монеты делятся на две категории: такие, у которых еще осталась возможность быть фальшивой вместе с какой-то из соседних монет, и такие, у которых такой возможности уже нет.

Будем приводить несколько алгоритмов решения для каждого из рассматриваемых случаев, чтобы подчеркнуть их разнообразие.

Случай $K = 1$, $N = 4$

За одно взвешивание удастся решить задачу для $N = 4$ монет с помощью такого способа взвешивания:

$$(1, 3) \quad ? \quad (2, 4).$$

Если в нем равенство, то ответ на задачу «да», т.е. фальшивые монеты являются соседними, а если неравенство – то «нет».

Другой возможный алгоритм

$$1 \quad ? \quad 3.$$

Неудлучшаемость этого результата можно доказать перебором.

Случай $K = 2$, $N = 8$

Этот результат также может быть получен разными алгоритмами, приведем два из них.

Алгоритм первый

Первое взвешивание:

$$(2, 3) \quad ? \quad (6, 7).$$

1) В случае равенства $(2, 3) = (6, 7)$ ясно, что на каждой чаше весов находится поровну фальшивых монет (по 0 или 1). При этом все монеты 2, 3, 6, 7 остались подозрительными монетами, но ни одна не может являться фальшивой вместе с соседней. В качестве соседних фальшивых у нас могут быть только две пары монет (4, 5) и (8, 1).

Вторым взвешиванием можно сравнить эти пары друг с другом:

$$(4, 5) \quad ? \quad (8, 1).$$

Теперь после равенства $(4, 5) = (8, 1)$ приходим к ответу «нет», а после неравенства мы понимаем, что фальшивая монета присутствует, значит, ни среди монет в первом взвешивании, ни на более тяжелой чаше весов фальшивых монет нет – следовательно, обе фальшивые на более легкой чаше, а значит, можно давать ответ «да».

2) В случае неравенства без ограничения общности будем считать, что $(2, 3) < (6, 7)$, и мы понимаем, что среди монет 2 и 3 либо одна фальшивая монета, либо обе фальшивые; в первом случае парами соседних фальшивых могут быть (1, 2) и (3, 4). Тогда второе взвешивание:

$$(1, 3) \quad ? \quad (2, 4).$$

Равенство в нем доказывает, что обе фальшивые монеты на весах, а также, что пара

фальшивых – одна из трех пар соседей или пара (1,4). Но последний случай невозможен, поэтому равенство на весах означает ответ «да» на вопрос основной задачи.

Таким образом, неравенство во втором взвешивании означает «нет».

Алгоритм второй

Первое взвешивание:

$$(2,3) \quad ? \quad (5,8).$$

1) При равенстве единственная пара возможных соседних фальшивых монет – это (6,7). При этом другие возможные пары фальшивых монет с участием монет 6 и 7 не содержат монет 2,3,5,8, т.е. обязательно содержат одну из монет 1 и 4. Поэтому вторым взвешиванием после равенства можно сравнить

$$(6,7) \quad ? \quad (1,4)$$

и в случае $(6,7) < (1,4)$ дать ответ «да», а в любом ином исходе – «нет».

2) Случаи неравенства $(2,3) \neq (5,8)$ тут различны.

а) Если левая чаша легче, то фальшивая хотя бы одна из монет 2 и 3 и тогда вторым взвешиванием можно поступить как в первом алгоритме:

$$(1,3) \quad ? \quad (2,4).$$

б) Если же легче правая чаша, то 2 и 3 – настоящие монеты, а возможными парами соседних фальшивых монет остались (4,5), (5,6), (7,8), (8,1), поэтому вторым взвешиванием можно сравнить

$$(4,5,6) \quad ? \quad (1,7,8).$$

Равенство, очевидно, означает ответ «нет». Докажем, что каждое из неравенств означает ответ «да». Действительно, на весах все 6 подозрительных монет, поэтому неравенство бывает только когда обе фальшивые монеты на одной чаше. Несоседними монетами на левой чаше являются 4 и 6, а на правой 1 и 7. Но ни в одной из этих пар нет монет из первого взвешивания, которые были более легкими. Значит, такие пары фальшивыми быть не могут.

Замечание. Предложенные алгоритмы по-разному делят множество из 8 возможных пар соседних монет между результатами первого взвешивания. Для первого

это $2 : 3 : 3$, а для второго это $1 : 3 : 4$. То, что на втором взвешивании можно «распознать» четыре варианта соседства, дает надежду решить задачу для 10 монет, разделив результаты на $2 : 4 : 4$ или $3 : 3 : 4$. Попробуйте придумать этот алгоритм.

Перейдем к случаю трех взвешиваний.

Случай $K = 3, N = 20$

Алгоритм первый

Первое взвешивание (рис. 1):

$$(1,2,3,4,5,6) \quad ? \quad (11,12,13,14,15,16).$$

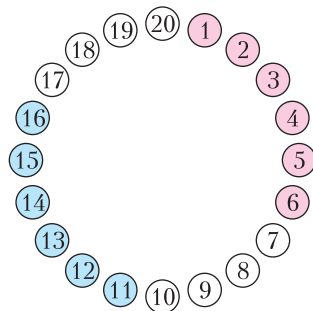


Рис. 1

1) Если равенство, то только белые монеты могут быть фальшивыми соседними. Далее решается, как в первом алгоритме для 8 монет:

$$(8,9) \quad ? \quad (18,19)$$

и т.д.

2) Если неравенство, то без ограничения общности будем считать, что правая чаша тяжелее. Тогда решаем аналогично первому алгоритму для 8 монет для монет от 20 до 7 в ряд. Единственный нюанс: если $(1,2) = (5,6)$, то пара соседних фальшивых монет может быть только (3,4), но мы не знаем, одна фальшивая или две в группе (20,1,2,3,4,5,6,7). Поэтому для проверки добавляем к монетам 3, 4 заведомо настоящие и делаем третье взвешивание:

$$(3,4,11,12,13,14,15,16) \quad ? \quad (7,8,9,10,17,18,19,20).$$

Алгоритм второй

Первое взвешивание (рис. 2):

$$(2,4,6,8,10) \quad ? \quad (12,14,16,18,20).$$

Если $(2,4,6,8,10) = (12,14,16,18,20)$, то ответ сразу «нет». Если неравенство, то без ограничения общности будем считать,

(Продолжение см. на с. 34)

Это письмо так длинно, потому что у меня не было времени написать его короче.

Блез Паскаль

*Открылась бездна, звезд полна;
Звездам числа нет, бездне — дна.*

Михаил Ломоносов

Конечный человек не отваживается рассматривать бесконечное как нечто данное и доступное его привычной интуиции.

Карл Фридрих Гаусс

Если сообщить ... телу бесконечно малое количество теплоты, то спрашивается, какое действие оно произведет...

Рудольф Клаузиус

Есть только две бесконечные вещи: Вселенная и глупость. Хотя на счет Вселенной я не вполне уверен.

Альберт Эйнштейн

... почему малейшего избытка или нехватки положительных или отрицательных зарядов достаточно, чтобы произвести заметное электрическое действие?

Ричард Фейнман

Дайте-ка я покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

Из лекции

А так ли хорошо знакомы вам БОЛЬШОЕ И МАЛОЕ в ФИЗИКЕ?

Размышления над микроскопически малым и безгранично большим — от атомов до Вселенной — издревле волновали умы не только ученых. Неотъемлемые элементы картины мира влекли таинственностью и замысловатостью и до сих пор не всем удается с ними подружиться, что порой приводит к казусам и парадоксам. Однако наука не только «оседлала» их, но и сделала рабочим инструментом, в том числе для школьников. Без них не замостить путь к продолжению учебы — так что постигайте премудрости нуля и бесконечности, ведь где только они не дают о себе знать при освоении точных дисциплин!

Вопросы и задачи

1. Оцените расстояние до линии горизонта, считая рост человека $h = 1,8$ м, а радиус Земли $R_3 = 6400$ км.
2. Почему мы практически не ощущаем вращения Земли?
3. На какую долю изменится сила тяжести при подъеме на высоту $h = 1$ км? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.
4. Шарик массой m падает на Землю с высоты h и после упругого удара под-

нимается на ту же высоту. Его импульс изменился, а энергия сохранилась. Как это объяснить?

5. Найдите потенциальную энергию материальной точки массой m на различных расстояниях r от центра Земли ($r \geq R_3$). Величину потенциальной энергии на бесконечности считать равной нулю.

6. Влияют ли скорость вращения Земли вокруг своей оси, ее форма и распределение массы по объему на величину ее ускорения под действием притяжения Солнца?

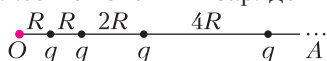
7. Лодке массой m сообщили скорость v_0 . Найдите расстояние, пройденное ею до остановки, если на нее действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости. Сколько это займет времени?

8. Можно ли натянуть веревку горизонтально так, чтобы она не провисала?

9. Чему должна быть равна теплоемкость идеального газа в изотермическом и адиабатическом процессах?

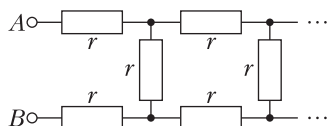
10. Оцените, сколько электронов проходит через поперечное сечение нити накала за одну секунду при силе тока в лампочке карманного фонарика, равной 0,3 А. С чем можно сравнить полученную величину?

11. На луче OA расположено бесконечное множество точечных зарядов величин



ной q так, что расстояние между очередными двумя соседними зарядами удваивается. Определите потенциал поля в точке O (начало луча), где заряда нет.

12. Электрическая цепочка состоит из бесконечного числа одинаковых звеньев, содержащих три резистора сопротивлением r . Определите сопротивление R между точками A и B .



13. Что имеется в виду, когда говорят, что основным свойством линзы считается получение с ее помощью параллельного пучка лучей, если их источник расположен в фокусе линзы?

14. Дно водоема глубиной $H = 2$ м рассматривают, глядя вертикально вниз. Какой будет кажущаяся глубина водоема? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Микроопыт

Проведите пластмассовой расческой по сухим волосам и пронесите ее вблизи мелких обрезков бумаги или фольги; при этом они «подпрыгивают», притягиваясь к наэлектризованной расческе. Не противоречит ли это закону взаимодействия зарядов – ведь обрезки были электрически нейтральны?

Любопытно, что...

...беспечное обращение с понятием бесконечности завело древнегреческих ученых в тупик, что привело к его изгнанию из науки более чем на два тысячелетия.

...несмотря на уже выстроенное в XVII веке Ньютоном и Лейбницем здание анализа бесконечно малых, оно до начала XIX века было окутано мистическим туманом. Рассеял его француз Огюстен Коши, дав производной определение, использующее понятие предела.

...примером модели твердого тела при описании многих явлений служит материальная точка. Однако даже самый маленький объект нельзя считать материальной точкой, если он вращается.

...чтобы примерно представить себе малость атомов, можно взять бильярдный шар. Он будет больше атомов, из которых состоит, во сколько же раз, во сколько сам он меньше Земли.

...отношение силы электростатического отталкивания друг от друга двух протонов к силе гравитационного притяжения между ними равно астрономической величине – 10^{36} .

...слияние черных дыр, произошедшее 1,3 миллиарда лет назад, привело к гигантскому энергетическому всплеску. Он был зарегистрирован на Земле в 2015 году гравитационно-волновой обсерваторией, хотя энергия достигшего ее сигнала была в 10^{51} раз меньше энергии волны при ее рождении.

...сообщить телу сколь угодно большую скорость, увы, не удастся даже прикладываемая неограниченно большие усилия. Второй постулат теории относительности ставит предел: ни при каких условиях скорость тела не может превысить скорость света в вакууме.

...важнейший результат так называемой теории петлевой квантовой гравитации – в том, что наше пространство не непрерывно, не бесконечно делимо, а состоит из «атомов пространства». Они чрезвычайно мелки: в миллиард миллиардов раз меньше самого маленького атомного ядра.

Что читать в «Кванте» о большом и малом в физике (публикации последних лет)

1. «Задачи по физике – смысл условий» – 2017, №6, с.34;
2. «Численные значения: зачем и почему они нужны» – 2019, №4, с.2;
3. «Проблемы конденсатора» – 2022, №9, с.2;
4. «Малые составляющие атмосферы и парниковый эффект» – 2023, №8, с.2;
5. «И снова премия за лазерные инструменты» – 2023, №11/12, с.2.

Материал подготовил А.Леонovich

(Начало см. на с. 30)

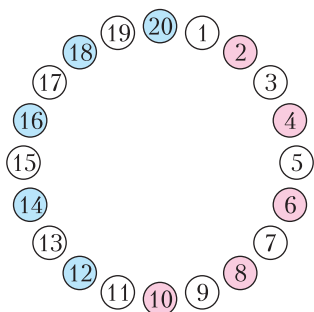


Рис. 2

что $(2, 4, 6, 8, 10) < (12, 14, 16, 18, 20)$, тогда второе взвешивание

$$(1, 5, 9) \quad ? \quad (3, 7, 11).$$

Если здесь равенство, то ответ снова «нет». Если неравенство, то пусть без ограничения общности более легкая чаша $(1, 5, 9)$. Тогда возможны только такие пары соседних фальшивых: $(1, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(8, 9)$ и $(9, 10)$. Проведем третье взвешивание:

$$(5, 8, 10) \quad ? \quad (4, 6, 9).$$

Равенство будет означать, что либо на весах обе фальшивые монеты, либо ни одной. В обоих случаях ответ «да». Неравенство означает ответ «нет».

Теперь решим задачу для 26 монет.

Случай $K = 3$, $N = 26$

Первое взвешивание (рис. 3):

$$(2, 4, 6, 8, 10) \quad ? \quad (12, 14, 16, 18, 20).$$

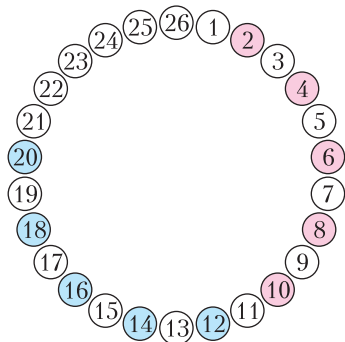


Рис. 3

1) Если неравенство, пусть без ограничения общности правая чаша тяжелее. Тогда среди монет 2, 4, 6, 8, 10 точно есть хотя бы одна фальшивая, а пары соседних

фальшивых могут быть только от 1 до 11. Делаем второе взвешивание:

$$(1, 5, 9) \quad ? \quad (3, 7, 11).$$

1.1) Если равенство, то монеты 1, 3, 5, 7, 9, 11 настоящие и ответ «нет».

1.2) Если неравенство, то пусть без ограничения общности $(1, 5, 9) < (3, 7, 11)$, тогда вторая фальшивая монета среди 1, 5, 9, а пары соседних фальшивых могут быть $(1, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(8, 9)$, $(9, 10)$. Делаем третье взвешивание:

$$(5, 8, 10) \quad ? \quad (4, 6, 9).$$

Если равенство, то либо все монеты на весах настоящие, значит, фальшивые 1, 2, либо на каждой чаше по одной фальшивой монете, тогда это могут быть пары $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(8, 9)$, $(9, 10)$. В любом случае ответ «да». Во всех остальных случаях неравенство и ответ «нет».

2) Если равенство, то либо на каждой чаше по одной фальшивой монете и тогда ответ сразу «нет», либо на весах все монеты настоящие и тогда пары соседних фальшивых могут быть только от 21 до 26. Делаем второе взвешивание (рис. 4):

$$(22, 23) \quad ? \quad (25, 26).$$

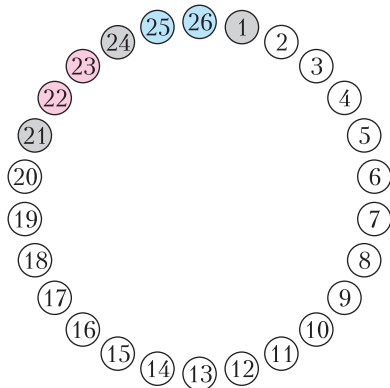


Рис. 4

2.1) Если равенство, то ответ «нет».

2.2) Если неравенство, пусть без ограничения общности $(22, 23) < (25, 26)$, тогда среди монет 22, 23 точно есть хотя бы одна фальшивая, а пары соседних фальшивых могут быть только от 21 до 24. Делаем третье взвешивание:

$$(22, 24) \quad ? \quad (21, 23).$$

Если равенство, то на каждой чаше по фальшивой монете (причем это не пара (21, 24)) и ответ «да». Иначе ответ «нет».

Наконец, рассмотрим случай 30 монет.

Случай $K = 3$, $N = 30$

Первое взвешивание (рис. 5):

(1, 3, 5, 7, 9, 11) ? (20, 22, 24, 26, 28, 30).

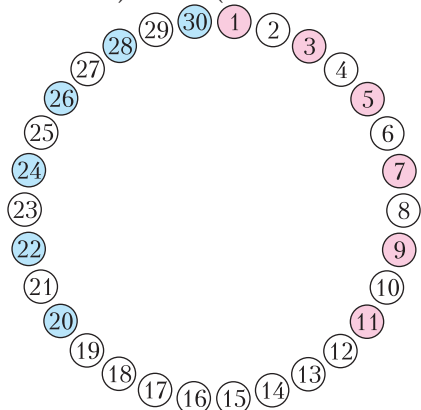


Рис. 5

1) Если равенство, то либо все монеты на весах настоящие, либо на каждой чаше есть по одной фальшивой монете, поэтому пары соседних фальшивых могут быть либо от 12 до 19, либо 30 и 1. Обозначим набор монет (3, 5, 7, 9, 11) через R , набор (20, 22, 24, 26, 28) — через L (это группы монет из первого взвешивания без монет 1 и 30), набор (2, 4, 6, 8, 10) — через R' , а набор (21, 23, 25, 27, 29) — через L' (это группы монет, расположенные внутри групп из первого взвешивания). Делаем второе взвешивание (рис. 6):

(1, 13, 14) ? (17, 18, 30).

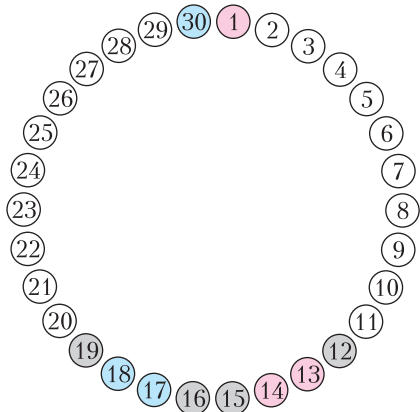


Рис. 6

1.1) Если равенство $(1, 13, 14) = (17, 18, 30)$, то подозрительными парами остаются (15, 16) и (30, 1). При этом заметим, что если одна из монет 1 или 30 фальшивая, то и вторая тоже фальшивая, поскольку только они участвовали в обоих взвешиваниях. Делаем третье взвешивание:

$(R, L, 13, 14) ? (R', L', 12, 19)$.

Если равенство $(R, L, 13, 14) = (R', L', 12, 19)$, то все монеты на весах настоящие. Действительно, если фальшивая монета есть в одном из наборов R или L , то вторая фальшивая монета — в другом из этих наборов. А если фальшивая монета 13 или 14, то вторая фальшивая монета — 17 или 18, а их нет на правой чаше. Следовательно, монеты 17 и 18 тоже настоящие и ответ в этом случае «да».

Если $(R, L, 13, 14) < (R', L', 12, 19)$, то по тем же причинам либо обе фальшивые монеты в наборах R и L , либо одна фальшивая монета — 13 или 14, а вторая — 17 или 18. В любом случае ответ «нет».

Если $(R, L, 13, 14) > (R', L', 12, 19)$, то монеты 13 и 14 настоящие, а значит, 17 и 18 тоже настоящие, но на правой чаше хотя бы одна из монет фальшивая, поэтому ответ «нет».

1.2) Если неравенство, то без ограничения общности пусть $(1, 13, 14) < (17, 18, 30)$, тогда монеты 17, 18, 30 настоящие, а среди монет 1, 13, 14 точно есть хотя бы одна фальшивая. Делаем третье взвешивание (сразу заметим, что на весах есть хотя бы одна фальшивая монета, а монета 30 на правой чаше настоящая):

$(1, 12, 14) ? (13, 15, 30)$.

Если равенство $(1, 12, 14) = (13, 15, 30)$, то монета 1 фальшивой быть не может, иначе вторая фальшивая была бы в наборе L , а на правой чаше нет монет из него. Значит, либо фальшивая монета 13 и тогда вторая — одна из монет 12 или 14, либо фальшивая монета 14 и тогда вторая — одна из монет 13 или 15, поэтому в любом случае ответ «да».

Если $(1, 12, 14) < (13, 15, 30)$, то либо монета 1 фальшивая, либо монета 14 фальшивая, но монеты 13 и 15 настоящие, поэтому в любом случае ответ «нет».

Если $(1, 12, 14) > (13, 15, 30)$, то монета 13 фальшивая, но монеты 12 и 14 настоящие, поэтому ответ тоже «нет».

2) Если неравенство, то без ограничения общности будем считать, что $(1, 3, 5, 7, 9, 11) < (20, 22, 24, 26, 28, 30)$, тогда монеты 20, 22, 24, 26, 28, 30 настоящие, а среди монет 1, 3, 5, 7, 9, 11 точно есть хотя бы одна фальшивая, поэтому пары соседних фальшивых могут быть только от 1 до 12. Делаем второе взвешивание (на правую чашу добавляем настоящую монету 20) (рис. 7):

$$(2, 6, 10) \quad ? \quad (4, 8, 20).$$

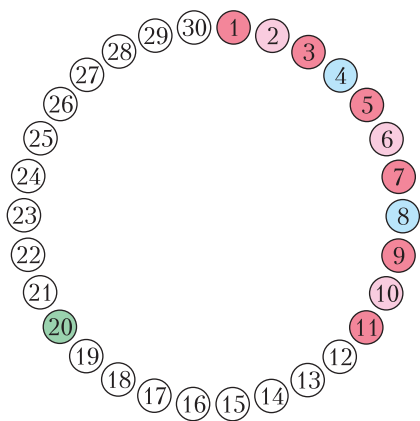


Рис. 7

2.1) Если равенство, то монеты 2, 4, 6, 8, 10 настоящие и осталось проверить только одну подозрительную пару (11, 12). Делаем третье взвешивание (на правую чашу добавляем четыре настоящие монеты 20, 22, 24, 26):

$$(1, 3, 5, 7, 9) \quad ? \quad (12, 20, 22, 24, 26).$$

Если равенство $(1, 3, 5, 7, 9) = (12, 20, 22, 24, 26)$, то либо монета 12 настоящая, либо она фальшивая и одна из монет 1, 3, 5, 7, 9 тоже фальшивая, но тогда монета 11 настоящая, поэтому в любом случае ответ «нет».

Если $(1, 3, 5, 7, 9) < (12, 20, 22, 24, 26)$, то монета 12 настоящая и ответ тоже «нет».

Если $(1, 3, 5, 7, 9) > (12, 20, 22, 24, 26)$, то монета 12 фальшивая, а монеты 1, 3, 5, 7, 9 настоящие, поэтому монета 11 фальшивая и ответ «да».

2.2) Если $(2, 6, 10) < (4, 8, 20)$, то вторая фальшивая монета среди 2, 6, 10. Делаем третье взвешивание:

$$(1, 3, 10) \quad ? \quad (2, 9, 11).$$

Если равенство, то либо все монеты на весах настоящие и тогда фальшивые монеты – это 6 и одна из монет 5 или 7, либо фальшивая монета 2 и тогда вторая – одна из монет 1 или 3, либо фальшивая монета 10 и тогда вторая – одна из монет 9 или 11. В любом случае ответ «да».

Если неравенство, то без ограничения общности считаем, что $(1, 3, 10) < (2, 9, 11)$, тогда монеты 2, 9, 11 настоящие, а одна из фальшивых монет среди 1, 3, 10, поэтому ответ «нет».

2.3) Если $(2, 6, 10) > (4, 8, 20)$, то вторая фальшивая монета 4 или 8. Делаем третье взвешивание (сразу заметим, что на весах есть хотя бы одна фальшивая монета):

$$(3, 5, 8) \quad ? \quad (4, 7, 9).$$

Если равенство, то либо фальшивая монета 4 и тогда вторая – одна из монет 3 или 5, либо фальшивая монета 8 и тогда вторая – одна из монет 7 или 9. В любом случае ответ «да».

Если неравенство, без ограничения общности $(3, 5, 8) < (4, 7, 9)$, то монета 8 фальшивая, а монеты 7 и 9 настоящие, поэтому ответ «нет».

В заключение скажем, что известно по поводу максимального числа момент, среди которых за K взвешиваний можно определить, лежат ли две соседние фальшивые рядом. Будем обозначать это число $N_{\max}(K)$.

Для случая одного взвешивания, как уже говорилось выше, перебором можно доказать, что $N_{\max}(1) = 4$. Для $K = 2$ доказано, что $N_{\max}(2) = 10$. Попробуйте доказать это сами. Для $K = 3$ и $K = 4$ известно только, что $N_{\max}(3) \geq 38$, а $N_{\max}(4) \geq 181$. Больше никаких содержательных результатов по этой задаче не известно.

Задачи

1. В записи $12345678 = 1$ вставьте знаки умножения и деления между некоторыми цифрами так, чтобы равенство стало верным.

А.Шаповалов



2. Катя каждый день ест на завтрак либо кашу, либо яичницу, либо сырники, но никогда не ест два дня подряд одно и то же. В течение двух недель Катя записывала, чем она завтракала. Оказалось, что сырники она ела в два раза чаще, чем кашу. Сколько раз за эти две недели Катя завтракала кашей, сколько — яичницей и сколько — сырниками?

И.Русских



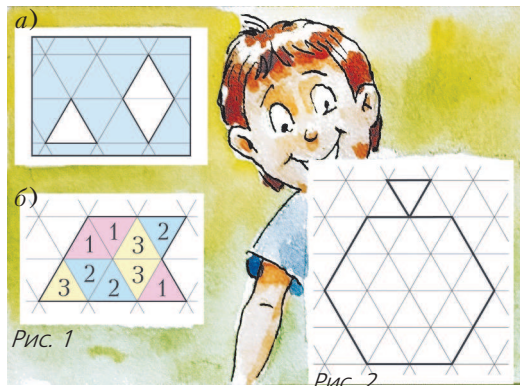
Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

3. Из 54 красных и 54 белых брусков $1 \times 1 \times 2$ сложили куб $6 \times 6 \times 6$. Какое наибольшее количество красных клеточек могло оказаться на поверхности куба?

М.Евдокимов



4. У Васи есть трафареты и цветные карандаши. Вася каждым ходом может приложить трафарет к бумаге и закрасить выбранным цветом всю видимую через трафарет область. Например, используя трафарет с двумя отверстиями, как на рисунке 1, а, Вася может раскрасить фигурку на рисунке 1, б за 3 хода в 3 цвета. Придумайте для Васи такой трафарет с двумя отверстиями, пользуясь которым он сможет за 5 ходов раскрасить фигуру в форме яблока (рис. 2) в 5 цветов так, чтобы каждая



треугольная клетка была покрашена ровно одним цветом. Трафарет можно поворачивать и переворачивать.

И.Русских

Испытания для барона М.

К. КНОП

В САМОМ СТАНДАРТНОМ СЮЖЕТЕ задач о взвешиваниях есть весы (или иной прибор) и задана какая-то информация о неизвестных объектах (монетах). Например, говорится, сколько среди них «фальшивых» монет, а также сообщается, легче ли они, чем настоящие монеты (или сказано, что могут быть не только легче, но и тяжелее). Однако есть отдельный класс задач, в котором ко всему этому прибавляется мощнейший инструмент – честнейший эксперт барон М., который знает все необходимое про все монеты. Главная трудность – барон должен строго доказать всю известную ему информацию с помощью взвешиваний. А так как весы – традиционный символ Фемиды, то второй персонаж в таких задачах – судья. Судье известна часть информации из условия задачи, но не вся информация, известная эксперту.

Какие же испытания предстоят барону в таких доказательных упражнениях? Какая математика стоит за этим? Не претендуя на полный охват всех возможных задач, остановимся на некоторых из них.

Испытание 1. Неинтересное

У барона М. имеются 12 монет. Половина из них имеет массу 4 г, а другая половина – 5 г. Судья знает эту информацию, но не знает, какие именно монеты сколько весят. Сможет ли барон за одно взвешивание доказать судье массу каждой монеты?

Указание. Все легкие монеты вместе весят 24 г, а пять тяжелых – 25 г.

Испытание 2. Малоинтересное

У барона М. имеются 6 монет по 4 г, 5 монет по 5 г и 4 монеты по 6 г. Как ему доказать судье массу каждой монеты за одно взвешивание?

Указание. На каждую чашу весов нужно положить ровно по 24 г.

Испытание 3. Восемь гирь, одно взвешивание

Барон предъявил суду 8 гирь. Он знает массу каждой гири, а судья знает только то, что массы гирь – последовательные целые числа от 1 до 8. Барону разрешено продемонстрировать всего одно взвешивание. Как ему доказать судье массу какой-нибудь одной гири?

Предоставим слово эксперту – барону М.

– Ваша честь, я кладу на левую чашу весов 5 гирь, а на правую – две. Вы видите, что весы в равновесии? Значит, масса моих 5 гирь такая же, как у других двух. Но масса любых двух гирь из имеющихся не более $7 + 8 = 15$ г, а любых пяти гирь – не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ г, значит, равенство возможно, только когда на каждой чаше ровно 15 г, т.е. на

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20250504>



левой чаше действительно лежат гири массой от 1 до 5 г, а на правой – гири 7 и 8 г. А это значит, что единственная невзвешенная гиря должна иметь массу 6 г!

Испытание 4. Шесть гирь, два взвешивания

Барон предъявил суду 6 гирь. Он знает массу каждой гири, а судья знает только то, что массы гирь – последовательные целые числа от 1 до 6. Как барону следует проделать два взвешивания, чтобы доказать судье массу каждой гири?

Барон предложил такие два взвешивания:

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Почему результаты этих двух взвешиваний являются доказательством? На месте судьи мы должны убедиться, что никакая нетождественная перестановка чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 не может дать такие же два результата. Давайте анализировать. Первое взвешивание говорит, что масса какой-то из гирь такая же, как у других трех гирь вместе. Но ведь масса трех самых маленьких гирь не меньше $1 + 2 + 3$ г, а самой большой гири – не больше 6 г. Равенство достигается, только когда на правой чаше лежит гиря 6 г, а на левой – гири 1, 2, 3 г в каком-то порядке. Тем самым, итог этого взвешивания позволяет судье распределить все гирьки на три множества $\{1, 2, 3\}$, $\{6\}$ и остаток $\{4, 5\}$. Перестановки теперь возможны только внутри каждого множества, но не между множествами.

А что происходит во втором взвешивании? На левой чаше весов – гиря 6 г (уже определенная) и одна из гирь первого множества, а на правой – по одной гире из первого и последнего множеств. Левая чаша легче. И что? Будем перебирать все оставшиеся варианты? Нет. Снова применим анализ, основанный на неравенствах: на левой чаше не менее 7 г, потому что там сумма масс гири 6 и одной из гирь 1–3. На правой чаше не более 8 г, потому что на ней сумма масс одной из гирь 4–5 и одной из гирь 1–3. Значит, правая чаша может быть тяжелее левой только в том случае, когда на ней 8 г, а на левой 7 г. Иначе говоря, масса неизвестной гирьки на левой чаше 1 г, а массы гирек на правой чаше 3 г и 5 г (понятно, у какой какая масса, потому что они из разных множеств!). Значит, массы гирек 1, 3, 5 уже доказаны. Но тогда

доказаны и массы двух остальных, так как они остались единственными неопознанными в своих множествах.

Задача 1. Как за два взвешивания доказать суду правильность масс для такого набора из восьми гирь: 10, 20, 25, 30, 35, 201, 203, 207 г?

Испытание 5. Девять гирек, два взвешивания. Оценка

В этот раз у барона целых 9 гирек, массы которых ему известны. Существует ли такой набор гирь, про который он сможет доказать судье их массы за два взвешивания?

Речь барона в суде надолго запомнится всем любителям логических рассуждений.

– Ваша честь! Вы поставили меня не просто перед трудной задачей – нет, она не трудна. Она неразрешима! Давайте мысленно представим, что я мог бы сейчас сделать? Вот я кладу какие-то гири на весы, взвешиваю, мы с вами смотрим результат. Потом делаем то же с другим набором гирь. Иначе говоря, каждой из гирь я присваиваю двузначную «метку» от 00 до 22, показывающую, в каком взвешивании я клал ее на левую чашу (1), на правую (2) или не использовал (0). Чтобы результаты взвешиваний доказали массу каждой гири, все метки должны быть различными – ведь две гири с одинаковыми метками неразличимы. Итак, мои взвешивания обязаны быть такими (я указываю метки гирь, а не их массы!):

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & 11 & 12 & ? & 20 & 21 & 22, \\ 01 & 11 & 21 & ? & 02 & 12 & 22. \end{array}$$

Но давайте посмотрим на возможные результаты. Если результатом взвешиваний будут два равенства – то при парном обмене гирь 10 с 01, 20 с 02 и 12 с 21 первое взвешивание «перейдет» во второе, и наоборот. Иначе говоря, мы не сможем однозначно выяснить, какая гиря соответствует какой из меток. Тот же обмен гирь с сохранением результатов будет и при двух одинаковых неравновесиях.

Далее, если получились два разных неравенства, то можно рассмотреть парный обмен 01 с 20, 10 с 02 и 11 с 22 – оба неравенства сохранятся, и мы снова не сможем опознать массу. Если в первом взвешивании было равенство, а во втором – одно из неравенств, то аналогичный эффект даст обмен 10 с 20, 11 с 21 и 12 с 22. И, наконец, если равновесие было только во втором взвешивании, то

применяется обмен 01 с 02, 11 с 12 и 21 с 22. Таким образом, для всех возможных исходов у нас нет возможности гарантированно опознать все девять монет.

Задача 2. Если бы вместо чашечных весов у барона М. были весы со стрелкой, смог ли бы барон М. доказать суду массу каждой гири за три взвешивания?

Испытание 6. Сорок пять гирек, два взвешивания. «Разделяй и властвуй»

На следующем заседании судья был обескуражен: барон М. притащил целый ящик с гирями. В описи ящика, заверенной секретарем суда, значилось, что там есть одна гиря массой 9 г, две гири массой по 8 г, три гири массой по 7 г, ..., девять гирь по 1 г. «Сколько же взвешиваний вам нужно, чтобы все это доказать?» – спросил судья. – «Всего два», – с достоинством дворянина ответил барон М. Как ему действовать?

Секрет манипуляций барона очень прост: k гирек массой по $(10 - k)$ г равны по массе $(10 - k)$ гирькам массой по k г. Поэтому если на одну чашу весов положить $9 + 8 + 7$ самых легких гирек, а на другую $1 + 2 + 3$ самых тяжелых, то на весах будет равновесие – и оно позволит барону разделить все гирьки на три множества $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ и $\{7, 8, 9\}$. Аналогично, если вторым взвешиванием взвесить $9 + 6 + 3$ гири масс 1, 4 и 7 г с $7 + 4 + 1$ гирями масс 3, 6 и 9 г соответственно, то равенство в этом взвешивании позволит установить точно массы всех гирь внутри всех множеств (2, 5 и 8 установятся методом исключения, аналогично тому, как 2 и 4 определялись в задаче о шести гирьках).

Задача 3. Существует ли набор из еще большего числа гирек, для которого барон М. смог бы доказать судье массы всех гирек за два взвешивания?

Испытание 7. Три взвешивания, 19 гирек. Транснеравенство

Когда судья и барон встретились в следующий раз, у барона в руках был целый набор гирь, опись к которому удостоверенная, что тут находятся гирьки массой от 1 до 19 г, по одной каждой массы. «Даю вам всего три взвешивания, дорогой барон!» – провозгласил судья, ударяя по столу своим молоточком.

Барон молча написал на каждой гирьке число от 1 до 19 (которое, вероятнее всего,

должно было означать ее массу), положил перед собой листок, на котором были написаны числа 12, 7 и 3, поклонился и приступил к взвешиваниям:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 13 = 16 + 18 + 19,$$

$$1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 11 + 16 = 8 + 10 + 13 + 17,$$

$$1 + 4 + 6 + 8 + 12 + 18 = 3 + 7 + 11 + 13 + 15.$$

Судья и все остальные присутствующие смотрели на барона, затаив дыхание, но ничегошеньки не понимали. Наконец, судья не выдержал:

– Что вы делаете, барон? До сих пор вы хотя бы выглядели разумным человеком – клали самые тяжелые гири на одну чашу весов, самые легкие на другую. Как вы собираетесь что-то доказать нам?

– Ваша честь! Давайте доведем опыт до конца. Для этого, – тут барон перевел взгляд на листок, – умножим все числа в первом равенстве на 12, во втором на 7, а в третьем на 3 и сложим все это вместе. – Сказав это, барон стал медленно выписывать выражение

$$\begin{aligned} &22m_1 + 19m_2 + 16m_3 + 15m_4 + \\ &+ 12m_5 + 10m_6 + 9m_7 + 8m_8 + 7m_9 + \\ &+ 5m_{10} + 4m_{11} + 3m_{12} + 2m_{13} = 3m_{15} + \\ &+ 5m_{16} + 7m_{17} + 9m_{18} + 12m_{19}. \end{aligned}$$

– Вы, разумеется, не можете знать массу гирьки, которую я назвал «1», равно как и все остальные массы. Но вы видите, что в левой части равенства коэффициенты монотонно убывают. Согласно транснервенству¹, наименьшее возможное значение левой части равно

$$\begin{aligned} &22 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + \\ &+ 12 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + \\ &+ 4 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 13 = 634. \end{aligned}$$

¹ Подробнее о транснервенстве (rearrangement inequality) можно узнать, например, из книги А.В.Арбита «Неравенства и основные способы их доказательства» (приложение к журналу «Квант» №3 за 2016 г.) или из книги «Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки – к профессии» под редакцией А.А.Заславского и др.

Однако в правой части коэффициенты монотонно возрастают, поэтому наибольшее возможное значение ее равно

$$12 \cdot 19 + 9 \cdot 18 + 7 \cdot 17 + 5 \cdot 16 + 3 \cdot 15 = 634.$$

Как и в предыдущих задачах, равенство означает, что одновременно достигаются все равенства $m_i = i$.

– Да, вижу, что вы снова правы, дорогой барон!

Задача 4. Массы скольких гирек барон М. смог бы доказать, если разрешить не три, а четыре взвешивания?

Следующие три испытания барону достались в одном и том же деле, поэтому мы не стали их нумеровать по-разному.

Испытание 8-1.² Восемнадцать монет двух масс. Система неравенств

Казалось, никакие фокусы со взвешиваниями уже не могут удивить судью. Но... барон предъявил 18 монет, про которые судья знал только то, что массы некоторых из них по 10 г, а остальные – по 11 г, и брался доказать это всего за три взвешивания.

– Но как, барон?! Ладно, за одно взвешивание вам удастся доказать мне одну тяжелую монету и одну легкую. За следующее взвешивание – если вы добавите на легкую чашу две тяжелые, а на чашу с тяжелой монетой – две легкие, то результат взвешивания изменится, а значит, вы сможете доказать массу еще 2 тяжелых и 2 легких монет. За третье взвешивание – еще 4 + 4, итого 7 тяжелых и 7 легких. Но у вас ведь их не по 7, а по 9 штук каждого вида!

– Здесь нет ничего невозможного, ваша честь! Давайте только сначала разложим монеты по кучкам. В две первые кучки я положу по 2 монеты и буду доказывать, что в одной из них лежат 2 тяжелые, а в другой 2 легкие (обозначу их «2т» и «2л»). В две следующие – по 3 монеты («3т» и «3л»), а в две последние – по 4 («4т» и «4л») и сделаю следующие взвешивания:

$$2т + 3л < 2л + 3т,$$

$$3т + 4л < 3л + 4т,$$

$$4т + 2л + 3л < 4л + 2т + 3т.$$

² В простом случае 14 монет эта задача предлагалась на VII Всесоюзной олимпиаде, а также была помещена в «Задачник «Кванта» (M212). Автор задачи про 18 монет и следующей задачи про 12 + 12 монет – С.Токарев.

– Да, барон, я вижу результаты взвешиваний. Но что именно они доказывают?

– Вы слишком нетерпеливы, ваша честь. Мне будет нужно совсем немножко алгебры. Пусть x – разница в массах между кучками «2т» и «2л», а y и z – разницы между кучками «3т» и «3л» и «4т» и «4л» соответственно. Это ведь не слишком сложно?

– Нет. Продолжайте!

– Далее, x, y, z – целые числа. Первое взвешивание показало, что $x < y$, второе – что $y < z$, а третье – что $z < x + y$. Понятно, почему?

– Да.

– Давайте заменим строгие неравенства между целыми числами на нестрогие: $x + 1 \leq y, y + 1 \leq z, z + 1 \leq x + y$. Я хочу вывести из этого, что $x = 2, y = 3, z = 4$. Как только это будет доказано, станет понятно, что масса каждой кучки ровно такая, как я утверждаю, – ведь разность между массами пары монет не превышает 1, а значит, для двух пар разность всегда не больше 2, для трех пар – не больше 3, а для четырех – не больше 4, и равенства достигаются лишь в том случае, если в одних кучках только тяжелые монеты, а в других только легкие. Верно?

– Согласен.

– Ну, давайте умножим первое неравенство на 2, второе на 4, третье на 3 – и сложим все. Получим $9 \leq x + y + z$. Это фактически означает одновременное выполнение равенств $x = 2, y = 3, z = 4$. У меня все, ваша честь!

Испытание 8-2. Две дюжины монет. Еще одна система неравенств

Про очередные 24 монеты, предъявленные бароном, судье было известно, что массы 12 из них по 10 г, а остальных 12 – по 11 г. Однако неугомонный барон снова доказал массы каждой монеты всего за три взвешивания! Как?

Проследим аккуратно за рассуждениями барона из предыдущего решения. Вначале он раскладывал монетки в кучки, а затем рассматривал разность масс между кучками, доказывая, что для каждой кучки эта разность равна количеству монет в ней. Отсюда, конечно, следует все необходимое. Поэтому давайте сразу посмотрим, что поменяется в значениях величин x, y, z , если общее количество монет теперь равно 24, а неравенства

$x < y$, $y < z$, $z < x + y$ будут доказаны с помощью взвешиваний? Ясно, что в этой задаче $x + y + z \leq 12$, и целью барона является доказать равенство в последнем неравенстве. Если точнее, барону следует показать, что $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, т.е. разбить монетки на кучки именно таких размеров.

К сожалению, приведенная система неравенств имеет неединственное решение – например, годится также $z = 5$, $y = 4$, $z = 2$ с суммой 11. Как же мог действовать барон, если его предыдущее решение не срабатывает?

Оказывается, все равно барон действует точно так же! Ведь если общая масса всех монет четная, то и величина $x + y + z$ должна быть четной, а значит, не может быть равна 11. Например, можно действовать в духе предыдущей замены строгих неравенств нестрогими: $x + 1 \leq y$, $y + 1 \leq z$, $z + 2 \leq x + y$. В последнем неравенстве появилась 2 вместо 1, потому что в нем на весах выложены все монеты с четной общей массой $12(11 + 10)$, и если одна чаша перевесила, то разность между чашами не менее 2. Ну а теперь если умножить первое на 2, второе на 4, а третье на 3, то после суммирования получим $x + y + z \geq 12$, что и требовалось.

Испытание 8-3. Два раза по тридцать монет, 4 взвешивания

Сколько монет удалось бы предъявить барону (с доказательством), если разрешить ему делать четыре взвешивания вместо трех?

Ясно, например, что из предыдущих решений немедленно следует способ для $20 + 20$ монет: четвертым взвешиванием барон кладет на одну чашу весов 9 уже опознанных как легкие и 11 неизвестных, а на другую – 9 опознанных тяжелых и 11 неизвестных. Если первая чаша оказывается тяжелее, то 11 неизвестных монет на ней должны быть тяжелыми, а 11 неизвестных монет с другой чаши – легкими, потому что неизвестных тяжелых монет всего $20 - 9 = 11$, и если бы они разложились на разные чаши, то веса бы оказались в равновесии.

Можно ли больше? Да, вполне. Покажем способ для $30 + 30$ монет, для которого их необходимо разбить на кучки $3 + 3$, $7 + 7$, $9 + 9$ и $11 + 11$. Каждая пара кучек с одинаковым количеством раскладывается на разные чаши весов, и если разности их масс

равны x , y , z , t , то проводятся взвешивания, демонстрирующие выполнение системы неравенств

$$\begin{aligned} z &< x + y, \\ x + y &< t, \\ t &< x + z, \\ x + t &< y + z. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждениям из предыдущих задач, строгие неравенства здесь можно заменить нестрогими, причем в последнем неравенстве минимально возможная разность частей будет равна 2:

$$\begin{aligned} x + y - z &\geq 1, \\ t - x - z &\geq 1, \\ x + z - t &\geq 1, \\ y + z - x - t &\geq 2. \end{aligned}$$

Если теперь первое умножить на 8, второе на 10, третье на 6, четвертое на 3 и сложить все – получим неравенство $x + y + z + t \geq 30$, которое и доказывает все необходимое.

Замечание. Последовательность значений $(10 + 10$ и $30 + 30)$, найденная бароном в испытаниях 8-1 и 8-3, разумеется, не заканчивается на четырех взвешиваниях. Известно (доказано компьютерным перебором), что она продолжается: $114 + 114$ – для пяти взвешиваний и $454 + 454$ – для шести (<https://oeis.org/A280432>). Эта последовательность тесно связана с такой алгебраической конструкцией, как матрицы Адамара.

Как мы увидели на примерах, задачи о взвешиваниях, в которых участвует эксперт, намного менее комбинаторны (по духу и содержанию) и намного более алгебраичны, чем классические задачи об отыскании фальшивых монет. Зато в них гораздо больше нераскрытых секретов – например, почти ни для каких сложных задач из последних испытаний пока не удастся беспереборно доказать не только точные (верхние) оценки, но и такие, которые бы были близки к точным.

Тепловые свойства воды

С.ВАРЛАМОВ

В МОЛЕКУЛАХ ВОДЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ заряды распределены так, что на атоме кислорода «неуравновешенный» заряд отрицательный, а на присоединенных к этому атому кислорода двух атомах водорода «неуравновешенные» заряды положительные и в два раза меньшие по величине, чем на атоме кислорода. Иными словами, электрические заряды распределены по молекуле воды неравномерно, а суммарный заряд молекулы равен нулю.

Образно говоря, молекула воды представляет собой электрический диполь, в котором один отрицательный заряд (-2δ) на кислороде и два положительных разнесенных в пространстве заряда ($+\delta$) на атомах водорода расположены в углах равнобедренного треугольника с углом между равными сторонами $104,5^\circ$ (рис. 1).

Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, и упорядоченному расположению таких зарядов (плюс к минусу) соответствует минимальная потенциальная энергия. Глубина потенциальной ямы, которую обеспечивает один моль водородных связей (по данным справочников), равна примерно 21 кДж/моль .

Твердая (да и жидкая) вода представляет собой систему/сетку молекул, связанных так называемыми водородными связями. Одна молекула образует со своими ближайшими

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20250505>

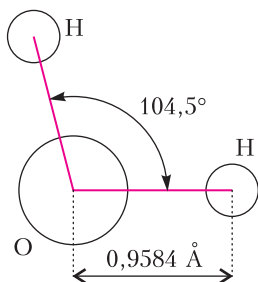


Рис. 1

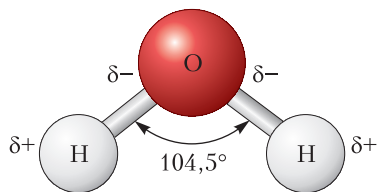
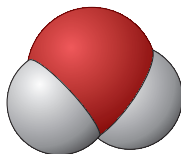


Рис. 2

соседками четыре такие связи. На рисунке 2 показано схематически такое расположение молекул, а водородные связи изображены пунктирными отрезками. На самом деле, конечно же, структура пространственная, а не расположенная (как на рисунке) в одной плоскости, но суть дела таким рисунком все-таки отражается.

В твердой фазе (в структуре льда) все водородные связи задействованы. Следовательно, один моль молекул воды, входящий в состав конденсированного вещества льда, при абсолютном нуле температуры находится в потенциальной яме глубиной примерно $21 \cdot 4/2 \text{ кДж/моль} + U = (42 + U) \text{ кДж/моль}$.

Вторую часть потенциальной энергии взаимодействия, обозначенную буквой U , обеспечивают не ближайшие соседи, между которыми установлены водородные связи, а далеко расположенные друг от друга молекулы. Это так называемое Ван-дер-Ваальсовое взаимодействие. Кроме того, этот моль молекул воды имеет тепловую энергию, равную $C \cdot T$, где C – молярная теплоемкость льда, а T – его температура.

А в жидкой воде существуют так называемые кластеры, состоящие из большого числа молекул, в которых структура такая же, как и у льда, но на границах кластеров «включены» уже не все водородные связи. И по мере роста температуры воды доля включенных

водородных связей становится все меньше, т.е. размеры кластеров убывают, и растет доля молекул, живущих на границах кластеров.

При плавлении льда при температуре 273 К упорядоченная структура расположения молекул частично разрушается, и поскольку молярная теплота плавления льда составляет примерно 6 кДж/моль, то доля исчезнувших или разорвавшихся водородных связей при плавлении льда составляет $6/42 = 1/7 = 14,3\%$. Если молекулы, находящиеся на поверхности кластера, потеряли всего по одной водородной связи, то можно оценить количество молекул, входящих в один кластер. Для оценки будем считать, что молекулы кластера образуют куб, на каждом ребре которого расположены N молекул. Тогда всего в кластер включены N^3 молекул, образовавшие $2N^3$ водородных связей, а на его поверхности находятся $6N^2$ молекул. Отношение $6N^2/(2N^3) = 1/7$ дает число N , равное 21, т.е. каждый кластер содержит примерно $21^3 = 9261 \approx 9300$ молекул. Это совсем не малое количество!

Молярные теплоемкости льда и жидкой воды равны $C_l = 4,5R$ и $C_v = 9R$ соответственно. А теория утверждает, что для трехатомных молекул вещества, находящегося в конденсированном состоянии, они должны быть равны $6R$. Это означает, что в твердой воде (во льду) задействованы не все возможные способы накопления механической энергии. И если кластеры молекул в жидкой воде (как мы выяснили) весьма большие, то и в жидкой воде не задействованы эти же способы накопления тепловой энергии. Но в жидкой воде включился механизм разрушения структуры, и он обеспечивает дополнительную теплоемкость, равную $4,5R$. При нагреве 1 моля воды от 0 °С до 100 °С на разрушение структуры тратится дополнительно примерно 3,7 кДж энергии, т.е. дополнительно разрушается еще $3,7/42 = 0,09 = 9\%$ первоначально существовавших во льду водородных связей. Таким образом, в воде при 100 °С остается всего 77% водородных связей от их количества в состоянии льда.

Итак,

$$-42 \cdot 0,77 - U + 4,5R \cdot 373 \text{ К} + Q_{100} = \\ = (3 + 1)R \cdot 373 \text{ К},$$

или

$$-42 \cdot 0,77 - U + Q_{100} = -0,5R \cdot 373 \text{ К}.$$

Здесь Q_{100} – это молярная теплота испарения воды при температуре 100 °С = 373 К, которая равна 40,61 кДж/моль (см. таблицу¹).

$t, ^\circ\text{C}$	Удельная теплота испарения		$t, ^\circ\text{C}$	Удельная теплота испарения	
	кДж/кг	ккал/кг		кДж/кг	ккал/кг
0	2501	597	80	2308	551
5	2489	594	100	2256	539
10	2477	592	160	2083	497
15	2466	589	200	1941	464
18	2458	587	300	1404	335
20	2453	586	370	438	105
30	2430	580	374	115	27
50	2382	569	374,15	0	0

Отсюда можно получить оценку для величины U :

$$U = 9,89 \text{ кДж/моль} \approx 9,9 \text{ кДж/моль}.$$

Это – энергия Ван-дер-Ваальсового взаимодействия в конденсированном веществе (в воде) при низкой температуре.

Молекулы кислорода и молекулы азота не имеют дипольных моментов, их молярные массы сопоставимы с молярной массой воды и плотности этих веществ в твердом состоянии примерно такие же, как у воды, но у них «работает» только Ван-дер-Ваальсовое притяжение, поэтому температуры плавления этих веществ – 54 К и 63 К соответственно – в несколько раз меньше температуры плавления льда. Например, если считать глубину потенциальной ямы для молекул кислорода в конденсированном твердом состоянии в $(42 + 10)/10 \approx 5$ раз меньшей соответствующей глубины для молекул воды, то температура плавления кислорода должна быть 273/5 К = 54,6 К. Поразительное совпадение!

С помощью вычисления теплоты испарения воды при разных температурах можно проверить правильность модели, в которой введены отдельно Ван-дер-Ваальсовая и связанная с водородными связями составля-

¹ При температуре 374,15 °С и давлении 22,13 МПа вода находится в критическом состоянии. В этом состоянии жидкость и ее насыщенный пар обладают одинаковыми свойствами – различие между водой и ее насыщенным паром исчезает.

ющие общей глубины потенциальной ямы. Считаем, что Ван-дер-Ваальсовая составляющая U не изменяется, поскольку плотность воды изменяется совсем мало (на 4%). Например, при температуре 0°C теплота испарения на моль воды Q_0 , согласно приведенной выше таблице, равна 45 кДж/моль . Вычислим эту теплоту испарения Q_0 , используя ранее выведенные формулы:

$$-0,857 \cdot 42 + U + 4,5R \cdot 273\text{ К} + Q_0 = \\ = (3 + 1)R \cdot 273\text{ К},$$

откуда $Q_0 \approx 45\text{ кДж/моль}$. Тоже прекрасное совпадение!

Можно попробовать применить эту же модель для воды при температуре, близкой к критической (374°C), например, при температуре $370^\circ\text{C} = 643\text{ К}$. При таких условиях плотность воды уже в два с половиной раза меньше, чем при 277 К . А это означает, что вклад Ван-дер-Ваальсовой составляющей стал в $2,5^2 \approx 6$ раз меньше. Молярная

теплота испарения (согласно данным таблицы) стала равной примерно $7,9\text{ кДж/моль}$. Таким образом,

$$-x \cdot 42 - 1,6 + (0,5)R \cdot 643\text{ К} + 7,9 = 0,$$

откуда найдется доля x оставшихся «в работе» водородных связей: $x = 0,21$. Это означает, что от прежнего (в составе холодного льда) количества водородных связей на один моль молекул осталась примерно лишь пятая часть. Иными словами, в среднем на одну молекулу при этих условиях приходится меньше одной водородной связи (критическая температура близка!).

Предлагаемое в модели, описывающей тепловые свойства воды, разделение потенциальной энергии взаимодействия молекул на две части позволяет, как видно из приведенных вычислений, получить хорошее соответствие предсказаний модели и экспериментальных данных в широком диапазоне температур от весьма низких до близких к критической.

ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап LI Всероссийской математической олимпиады проходил с 16 по 22 апреля 2025 года на Федеральной территории «Сириус». Участники отметили, что оргкомитет при поддержке традиционных партнеров Всероссийской олимпиады добился очень высокого качества проведения олимпиады. «Сириус» собрал около 500 лучших юных математиков страны, также в онлайн-режиме в олимпиаде приняли участие шестеро школьников из Китая, в этом году — представители провинции Сычуань.

Дипломами победителя или призера были награждены представители 29 регионов России, всего 221 участник олимпиады. В следующих трех таблицах отражена успешность решения задач (учтены результаты всех российских участников; решившим задачу

здесь считается участник, набравший по этой задаче не меньше 5 баллов из 7 возможных).

9 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 162), решивших задачу	140	132	38	12	125	142	97	0

10 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 150), решивших задачу	118	82	32	3	147	126	56	3

11 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 182), решивших задачу	171	91	23	20	170	150	24	3

Границы баллов, необходимых для того, чтобы стать победителем или призером, показаны еще в одной таблице.

	9 класс	10 класс	11 класс
Минимальный балл победителя	47	49	46
Минимальный балл призера	33	30	29
Минимальный балл для похвальной грамоты	29	27	25

По традиции, в конце олимпиады среди участников был проведен опрос, в котором ребята указали наиболее понравившиеся задачи. В этом задачном «конкурсе красоты» в 9 и 10 классе победила одна и та же задача по теории чисел (задача 3, автор – Таисия Коротченко), в 11 классе лучшей была признана задача по стереометрии (задача 2, автор – Александр Терёшин). Также призовые места заняли следующие задачи: в 9 классе – задачи 4 (2 место) и 5 (3 место), в 10 классе – задачи 7 (2 место) и 1 (3 место), в 11 классе – задачи 4 (2 место) и 8 (3 место).

Ниже приводятся условия задач и список победителей заключительного этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Условия задач

9 класс

1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведенных линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в черный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцвет-

ных треугольника не имели общего отрезка границы?

С.Берлов

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω . Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ . Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.

А.Терёшин

3. См. задачу M2848 «Задачника «Кванта».

4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовем сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.)

С.Токарев

5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – приведенные квадратные трехчлены, а точки A_1 и A_2 – соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox .

Н.Агаханов

6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он продельвает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a , b , c и заменить число b на $a - b + c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать исходные числа и сделать несколь-

ко операций так, чтобы после них среди чисел оказалось k целых?

С.Берлов

7. В строку выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 60$ (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки «+», «-» и « $\times$ » между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Игорю, иначе – Руслану. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?

И.Ефремов

8. На периметре треугольника ABC выбраны точки $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2 , равны.

К.Бельский

10 класс

1. См. задачу М2846 «Задачника «Кванта».

2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . На отрезке AB отмечена точка Q , а на отрезке AC – точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP . Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC , а через точки Q и R – прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR . Докажите, что существует окружность, которая касается четырех проведенных прямых.

А.Терёшин, А.Кузнецов

3. См. задачу М2848 «Задачника «Кванта».

4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведенном отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестерки отмеченных точек посчитал сумму чисел на

всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C , при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

Г.Челноков

5. Дано натуральное число n . Натуральные числа $1, 2, \dots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?

И.Богданов

6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдется такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек?

А.Кузнецов

7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый – во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать прогноз, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают компетентным, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие прогнозы, что хотя бы k из них будут признаны компетентными независимо от исхода соревнования?

М.Федотова

8. См. задачу 8 для 9 класса.

11 класс

1. На доску выписали 777 попарно различных комплексных чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a

и b , записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$. Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d , записанных на доске, что $c^2 + d^2 + 2025 = 2cd$.

А.Кузнецов

2. См. задачу M2847 «Задачника «Кванта».

3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовем *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d – целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ так же является важной?

А.Голованов

4. См. задачу M2849 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и

увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя.

С.Берлов

7. Четырехугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω . В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b, ω_b и ω_c, ω_c и ω_d, ω_d и ω_a , не содержащие сторон четырехугольника $ABCD$. Четырехугольник, последовательные стороны которого лежат на четырех проведенных прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Γ . Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω_a и ω_c, ω_b и ω_d, Ω и Γ , пересекаются в одной точке.

А.Кузнецов

8. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f . Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причем среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N .

А.Кузнецов

Победители олимпиады

9 класс

Аксенова Елизавета – Санкт-Петербург,

Главатских Максим – Республика Татарстан,

Ровинский Кирилл – Москва,

Буровик Нелли – Санкт-Петербург;

10 класс

Кравченко Роман – Санкт-Петербург,

Шишко Андрей – Москва,

Соколов Анатолий – Московская область,

Прокудина Арина – Челябинская область;

11 класс

Часовских Иван – Московская область,
Коптилин Ратибор – Новосибирская область,

Гришко Дмитрий – Москва,

Патрушев Василий – Приморский край,

Замоторин Илья – Санкт-Петербург.

Публикацию подготовили *Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов, О.Подлипский, К.Сухов*

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

Физика

Отборочный этап Творческая часть

11 класс

Однажды в параллельной Вселенной

Действие происходит в параллельной Вселенной, открытой для нас Айзеком Азимовым (см. серию рассказов «Я, робот»). Там тоже идет 2024 год, но там еще в XX веке был создан позитронный мозг, по своим возможностям не уступающий человеческому, создатель которого заложил в его физическую конструкцию три Закона Робототехники. Впрочем, это не имеет прямого отношения к нашим задачам. Итак, приступим...

Сьюзен Кэлвин сидела в кабинете доктора Альфреда Лэннинга, когда туда зашел Грегори Пауэлл.

– В информационной ленте мира, из которого выходил на контакт этот астрофизик... – начал он.

– Азимов, – терпеливо подсказал ему доктор Лэннинг.

– Да! – торопливо проговорил Пауэлл. – Там дали Нобелевскую премию по физике за машинное обучение!

– Машинное обучение? – оживилась Сьюзен Кэлвин. – Быть может, это похоже на наш эксперимент, когда мы на начальном этапе обучаем группу роботов так, как когда-то обучали детей в школе, и только потом используем прямую загрузку информации?

– Вряд ли, – сказал доктор Лэннинг. – Не забывайте, их машины снабжены электронными мозгами, работающими в основном по классическим принципам: максимум – туннельные переходы и спинтроники. Но я и сам когда-то начинал с попыток смоделировать нейронную сеть системой взаимодействующих квантовых частиц, и один из их лауреатов делал то же самое, только у него была модель спиновой решетки.

– Спиновая решетка? – переспросил Пауэлл. – Что это за штука?

– Но Вы должны знать: это система закрепленных частиц, каждая из которых – элементарный магнетик с моментом $\vec{\mu} = -\mu_0 \vec{s}$, где атомный магнетон (константа, записываемая через элементарный заряд, постоянную Планка и массу электрона) $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m}$,

знак «минус» связан с тем, что в атомном магнетизме основную роль играют отрицательно заряженные электроны, а безразмерный вектор $\vec{s}$ характеризует состояние частицы. В простом случае в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ квантовая частица может находиться всего в двух состояниях с проекциями $\vec{s}$ на направление магнитного поля $+1$ и -1 , а взаимодействиями частиц между собой можно пренебречь.

– Тогда у половины частиц этот вектор будет направлен по полю, а у другой половины против поля, и магнитный момент всей решетки будет равен нулю с точностью до флуктуаций, – важно заметил Пауэлл.

– Не торопитесь, – предостерег его доктор Лэннинг. – Если решетка находится при температуре T , то вероятности реализации разных микросостояний описываются статистикой Больцмана: вероятности иметь каждую из двух проекций s_B равны

$w(s_B) = C \cdot \exp\left(-\frac{E(s_B)}{kT}\right)$, где C не зависит от s_B . Кстати, хотя второй из лауреатов, моему, не физик, но в одной из его работ тоже использовалась статистика Больцмана.

– Но ведь сумма двух вероятностей равна 1? – уточнила Сьюзен Кэлвин.

– Да, конечно, – ответил доктор Лэннинг и продолжил, – а энергия этих состояний $E(s_B) = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_0 B \cdot s_B$. Так что они вовсе не равновероятны. Кстати, Сьюзен, это может быть неплохой задачей для Ваших

«школьников». Это важно – ведь при производстве позитронного мозга мы используем охлаждение некоторых элементов до низких температур за счет *адиабатического размагничивания* решеток магнитных кристаллов, а они в чем-то похожи на спиновые решетки. Только расскажите им про *энтропию*: им для начала достаточно будет знать, что в термодинамике это функция состояния системы микрочастиц S , бесконечно малое изменение которой связано с количеством теплоты, которое получила система при температуре T : $dS = \frac{1}{T} \delta Q$. И сообщите, что для спиновой решетки из N частиц в магнитном поле $\vec{B}$ эта самая энтропия равна

$$S(T, B) = S_0(T) - \frac{kN}{2} \left(\frac{e^{\mu_0 B/(kT)} - e^{-\mu_0 B/(kT)}}{e^{\mu_0 B/(kT)} + e^{-\mu_0 B/(kT)}} \right)^2.$$

– А $S_0(T)$?

– Это энтропия решетки без учета магнитных свойств; она им, в сущности, не понадобится. Пусть считают, что в нужных им процессах ее изменение пренебрежимо мало.

1. Охлаждение намагниченной спиновой решетки (18 баллов)

Определите величину S и найдите вероятности реализации значений $s_B = \pm 1$ при температуре жидкого гелия $T_0 \approx 1,9$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл. Вычислите среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц при этих значениях температуры и индукции поля. Рассмотрите процесс, в котором эту решетку сначала при постоянной температуре $T_0 \approx 1,9$ К намагнитили до создания магнитного поля $B = 10$ Тл, а затем адиабатически размагнитили до магнитного поля «остаточной» намагниченности, которая для этой решетки равна $B_0 = 5$ мТл. Какой примерно будет конечная температура решетки? Используйте такие данные: атомный магнетон $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m} \approx 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл; постоянная Больцмана $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

– Кстати, а чем они у Вас сегодня занимаются? – спросил доктор Лэннинг.

– У них была лабораторная работа, – сообщила Сьюзен. – Они синтезировали прозрачные плоскопараллельные пластины, в которых показатель преломления изменяется в зависимости от координаты y , отсчитываемой поперек пластины так, что

узкий световой пучок идет по заданной кривой $y(x)$. Например, ученик S-401 синтезировал пластину, у которой луч, упавший из воздуха в начале координат под углом $\alpha_0 = 60^\circ$,

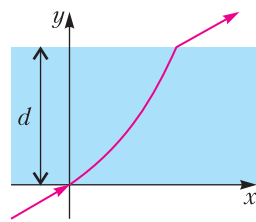


Рис. 1

«прочерчивает» внутри пластины толщиной d график функции $y(x) = x + \frac{x^2}{2d}$ (рис. 1).

– И как же у этой пластины показатель преломления зависит от y ?

2. Световая парабола (15 баллов)

Ответьте на вопрос доктора Лэннинга. Показатель преломления воздуха считайте равным 1.

– А еще двое экспериментировали с упругими нецентральными ударами.

– Это более сложная задача! – согласился доктор Лэннинг.

3. Стержневой удар (20 баллов)

Гладкий однородный стержень длиной L с квадратным поперечным сечением $a \times a$ установлен вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Второй такой же стержень скользит по этой поверхности со скоростью v_0 , направленной перпендикулярно одной из боковых граней первого, и сталкивается с первым так, что наносит своим торцом удар по этой грани. В каких направлениях и с какими угловыми скоростями будут вращаться стержни после удара? Известно, что $a = 2L/7$; деформации всех тел считайте упругими, причем деформации стержней очень малы, но при этом намного больше деформаций поверхности.

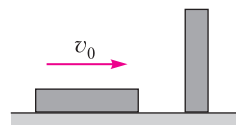


Рис. 2

Указание. Момент инерции однородного параллелепипеда массой m с размерами $a \times b \times c$ относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно грани $b \times c$, равен $I_0 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$.

В кабинет вернулся ушедший было Грегори Пауэлл. Он обратился к Сьюзен Кэлвин:

– Ну вот, два Ваших «школьника» собрались на экскурсию в заповедник Истории.

Они хотят облететь его за один день, а дирекция заповедника строго запрещает использование гипердвигателя. Они требуют использовать средство передвижения на реактивной тяге!

– Но это же очень шумно! – поморщилась та.

– А они говорят, что это поможет созданию правильной атмосферы. Хуже другое: таких уже давно не делают, и придется им срочно изготовить парочку двигателей.

– Ничего, справитесь! – улыбнулся доктор Лэннинг. – Пусть сами ученики Вам помогут.

4. Скорость истечения (22 балла)

В реактивном двигателе в камеру сгорания поступают топливо и окислитель (пусть в нашем случае в качестве окислителя используется кислород воздуха), а потом продукты горения через сопло вырываются наружу, формируя реактивную струю. Одной из важных характеристик реактивного двигателя является *скорость истечения* реактивной струи из сопла. На самом деле она довольно сложным образом зависит от характеристик топлива, геометрии камеры сгорания и сопла и даже от условий запуска двигателя. Но мы постараемся построить *полумпирическую модель* для ее вычисления для конкретного типа топлива и конкретной конструкции двигателя, работающего в определенных режимах. Вам предлагается в рамках этой модели использовать следующие предположения.

• Горение топлива происходит на определенной поверхности и является квазиравновесным процессом, и поэтому на этой *поверхности горения топлива* температура T и давление p будут связаны уравнением Клапейрона–Клаузиуса $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta v}$, в котором L – молярная теплота испарения топлива, а Δv – изменение молярного объема при фазовом переходе, причем объемом жидкого топлива можно пренебрегать по сравнению с объемом образовавшихся газообразных продуктов горения. При этом для описания изучаемых нами режимов горения с удовлетворительной точностью можно вместо переменной молярной теплоты испарения использовать некоторое среднее значение $L \approx 8,2$ кДж/моль.

• Зависимость массового расхода топлива $\frac{dm}{dt} = m'$ на поверхности горения от температуры определяется уравнением Аррениуса,

которое в нашем случае удобно записать в дифференциальной форме: $\frac{dm'}{dT} = m' \frac{E_a}{RT^2}$, при этом энергию активации для используемого топлива можно считать примерно постоянной и равной $E_a \approx 20,5$ кДж/моль.

• Скорость истечения примерно равна скорости удаления газообразных продуктов реакции от поверхности горения. Эмпирическая подгонка модели осуществляется подбором зависимости эффективной площади поверхности горения от давления – мы будем моделировать эту зависимость линейной во всем интересующем нас диапазоне.

Пусть тестовые эксперименты показали, что в режиме, в котором давление вблизи поверхности горения равно $p_1 = 1,6$ МПа, скорость истечения $u_1 \approx 1,6$ км/с, а при $p_2 = 2,0$ МПа скорость истечения $u_2 \approx 3,1$ км/с. Рабочее давление вблизи поверхности горения для этого двигателя равно $p = 2,3$ МПа. В рамках предлагаемой модели установите характер зависимости скорости истечения от давления и рассчитайте скорость истечения реактивной струи в рабочем режиме. Возможно ли в рамках этой модели провести анализ работы двигателя в режиме с давлением $p^* = 3,75$ МПа на поверхности горения (ответ объясните)?

Избранные задачи 9 и 10 классов

1. График замораживания (9 класс)

В большом сосуде с теплоизолирующими стенками находилась вода, температура которой была практически точно равна 0°C . Небольшой груз из необычного материала, о котором нам известна только величина его удельной теплоемкости $c = 18,9$ Дж/(г $\cdot^\circ\text{C}$) (а также то, что он довольно хорошо проводит тепло), подвесили на легкой тонкой нити, прикрепленной к крючку электронного динамометра. Этот динамометр был настроен так, что он показывал силу натяжения нити в единицах величины силы тяжести, действующей на груз. Груз стали равномерно опускать вниз, так что он в итоге целиком оказался под водой, где его аккуратно остановили. На графике (рис. 3) показана зависимость показаний динамометра от времени. Определите плотность сплава и температуру груза перед опусканием его в воду. Считать точными следующие данные: плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см³, плотность льда

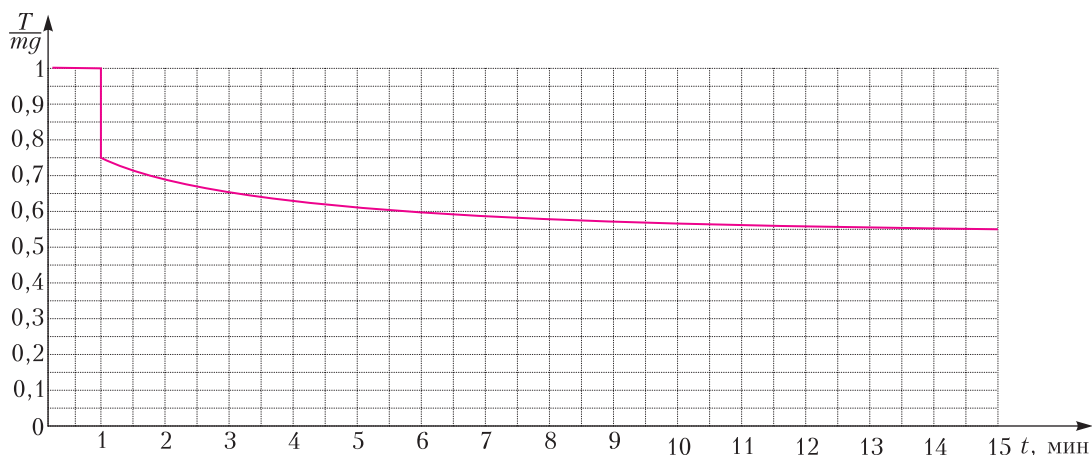


Рис. 3

$\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \text{ Дж/г}$.

2. Разные мощности (10 класс)

В школьной лаборатории ученики собрали цепь, схема которой показана на рисунке 4, из аккумулятора, ключа, лампочки накаливания и 2024 одинаковых резисторов. Ключ

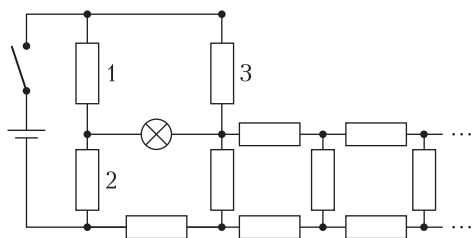


Рис. 4

замкнули, и лампа загорелась. Найдите отношение суммарной мощности, потребляемой всеми «незанумерованными» резисторами схемы, и мощности, потребляемой резистором с номером 1.

3. Из области фантастики (10 класс)

В кубическом сосуде с ребром $a = 1 \text{ м}$ находится $\nu = 25,07$ моль криптона в равновесном состоянии с температурой $T = 168 \text{ К}$. В некоторый момент времени неким фантастическим способом изменяются законы соударения молекул криптона с внутренними стенками сосуда: теперь эти соударения с вероятностью 98% являются упругими, а с вероятностью 2% – абсолютно неупругими. Оцените время после воздействия, за которое давление на стенки сосуда уменьшится на 2% по сравнению с тем, что было до воздействия. За какое время это давление

уменьшится в два раза? Какая масса криптона осядет на стенках сосуда к этому моменту времени? Молярная масса криптона $M \approx 83,8 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Заключительный этап

11 класс

1. Вертикальное однородное колесо – полый цилиндр массой M с внешним радиусом R и внутренним $R/2$ (масса спиц и втулки пренебрежимо малы) – может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, проходящей через его центр. Его раскрутили до угловой скорости ω_0 в направлении, показанном на рисунке 5, а затем аккуратно опустили на него конец стержня массой m , подвешенного шарнирно за другой конец. Стержень опирается на верхнюю точку диска, трения в шарнире нет, и в этом положении стержень составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью. Диск совершил ровно 65 оборотов до полной остановки. Затем опыт повторили, но на этот раз диск раскрутили до той же угловой скорости в противоположном направлении. Сколько оборотов совершит до полной остановки диск на этот раз? Сопротивлением воздуха пренебречь. Коэффициент трения между концом стержня и боковой поверхностью диска $\mu = 0,3$.

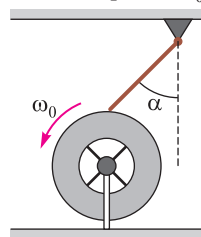


Рис. 5

2. Две вертикальные стеклянные пластины, составляющие малый двугранный угол α ,

опущены в широкий резервуар с полностью смачивающей их жидкостью. Плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . Найдите высоту подъема жидкости между пластинами над уровнем в резервуаре в зависимости от расстояния x от ребра двугранного угла. Считайте, что $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$,

но много меньше размеров пластин, и при этом сечение поверхности жидкости плоскостью, перпендикулярной биссектрисе двугранного угла, имеет форму дуги окружности.

3. Квадратная «заслонка» размером $l \times l$ с толщиной d изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ и плотностью τ . Она может скользить без трения по вертикальным направляющим (рис. 6). Для регулировки величины ускорения заслонки в области ее движения создали горизонтальное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярное поверхности заслонки, а направляющие сверху соединили, используя ключ и конденсатор. Изначально заслонку удерживают, ключ разомкнут. Заслонку отпускают одновременно с замыканием ключа. Пара-

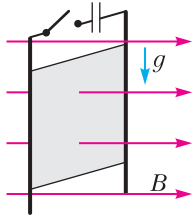


Рис. 6

лировки величины ускорения заслонки в области ее движения создали горизонтальное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярное поверхности заслонки, а направляющие сверху соединили, используя ключ и конденсатор. Изначально заслонку удерживают, ключ разомкнут. Заслонку отпускают одновременно с замыканием ключа. Пара-

метры и начальное состояние системы подобраны таким образом, чтобы ток зарядки конденсатора после этого был постоянным и равным $I = \frac{\tau l d}{2B} g$, где g – ускорение свободного падения. Определите емкость конденсатора и найдите закон движения заслонки. Сопротивление направляющих и используемых проводов, а также сопротивление контактов ключа намного меньше сопротивления заслонки, ЭДС самоиндукции пренебречь.

4. Широкий резервуар с водой, установленный в лаборатории, покоится и волн на поверхности воды нет. При этом на поверхности есть масляная пленка, которую освещают рассеянным светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Интенсивность отраженного света измеряется фотодатчиком, ось входного окуляра которого направлена под углом 60° к нормали к поверхности воды. Известно, что масло прозрачное и его показатель преломления $n = 1,5$. Наблюдения показали, что в течение некоторого времени интенсивность изменяется периодически, причем период почти точно равен $T = 15$ мин. Определите скорость испарения (т.е. скорость уменьшения толщины) масляной пленки.

Публикацию подготовил К.Парфенов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. 27 км.

Скорость сближения туристов равна 8 км/ч, поэтому они встретятся через $24 : 8 = 3$ часа, а место их встречи находится в $3 \cdot 3 = 9$ км от пункта Б. Значит, в сторону пункта А муха пролетит на 9 км больше, чем в сторону пункта Б. При этом в сторону пункта А она летит со скоростью 8 км/ч, а обратно – со скоростью 12 км/ч. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. На эти «лишние» 9 км муха потратит $\frac{9}{8}$ часа, за остальные $\frac{15}{8}$ часа она пролетит в обе стороны равные расстояния. При этом скорость мухи в одну сторону в 1,5 раза меньше, чем в обратную, поэтому в сторону пункта А муха будет летать в 1,5 раза дольше, чем в сторону пункта Б, т.е. $\frac{9}{8}$ и $\frac{6}{8}$ часа соответственно. Следова-

тельно, всего она пролетит $9 + 8 \cdot \frac{9}{8} + 12 \cdot \frac{6}{8} = 27$ км.

Второй способ. Обозначим через x расстояние, которое муха пролетит в сторону пункта Б, тогда время ее полета равно $\frac{x+9}{8} + \frac{x}{12}$ ч. Получаем

уравнение $\frac{x+9}{8} + \frac{x}{12} = 3$, откуда $x = 9$, а всего муха пролетит $9 + 9 + 9 = 27$ км.

2. Может.

Пусть команда X выиграла все три матча первого круга и набрала 9 очков, а остальные команды все матчи между собой сыграли вничью, набрав по 2 очка. Тогда, чтобы не позволить X выйти в следующий этап, какие-то две команды должны во втором круге набрать хотя бы по 7 очков. Это возможно только в случае, если они одержат по две победы, а между собой сыграют вничью. Но даже так эти две команды не смогут опередить X по дополнительным показателям, так как в матчах между этими тремя командами они наберут по 5 очков, а X наберет 6 очков.

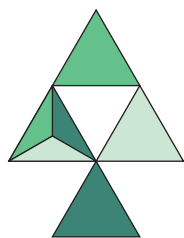


Рис. 1

3. Ответ показан на рисунке 1.

4. При 8 муравьях.

Оценка. Предположим, что муравьев не меньше девяти. Рассмотрим момент, когда один из них будет находиться в вершине куба. Для каждой грани подсчитаем количество муравьев, расположенных на ней, и найдем сумму этих шести чисел. Муравей в вершине попадет в такую сумму трижды, а каждый из остальных — хотя бы дважды, поэтому сумма не меньше $3 + 2 \cdot 8 = 19$.

Значит, на одной из граней будут находиться не менее четырех муравьев, а так как больше четырех их быть не может, то их там будет ровно четыре. Они могут двигаться по грани только одновременно, оставаясь постоянно в вершинах квадрата, вписанного в эту грань. Следовательно, в какой-то момент они все окажутся в ее вершинах. В этот момент все остальные муравьи могут быть только на противоположной грани, и их там не больше четырех. Противоречие.

Пример. Пусть в вершинах нижней грани сидят четыре рыжих муравья, а в вершинах верхней — четыре черных. Сначала муравьи одного цвета могут посетить все вершины своей грани. Далее, ползая по передней и задней грани, они могут поменяться местами, после чего рыжие муравьи смогут побывать во всех вершинах верхней грани, а черные — во всех вершинах нижней.

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №3)

25. Нет.

Пусть из каждой клетки в каждую можно пройти по стрелочкам. Рассмотрим любую клетку A и соседнюю с ней клетку B , в которую ведет стрелочка из A (рис. 2). Из B тоже должен быть какой-то путь в A , рассмотрим его клетки. По ним мы можем ходить только «по кругу», а в другие клетки плоскости не попадем, противоречие.

26. В четырех.

Петя не мог полностью угадать результат забега более четырех раз — иначе за какие-то два подряд идущих забега он получил бы по 5 баллов, что противоречит условию. Если бы он угадал все 5 позиций не больше трех раз, то получил бы за эти забеги не больше $5 \cdot 3 = 15$ баллов, значит, за остальные забеги он получил бы по крайней мере 15 баллов. Но если результат забега угадывается не полностью, то в нем угадано не более трех позиций. Поэтому такое

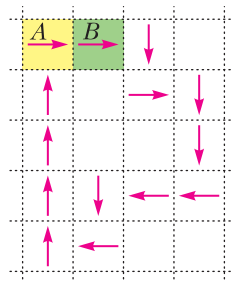


Рис. 2

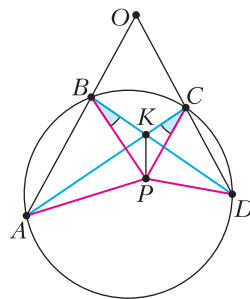


Рис. 3

возможно, только если за все остальные забеги Петя получил ровно по 3 балла. Но если среди 8 забегов нашлось 5 «трехбалльных», то какие-то два из них шли подряд — снова противоречие с условием. Значит, Петя верно угадал результат забега четыре раза. Например, во всех нечетных забегах Петя угадал по 5 позиций, во втором и четвертом — по 2 позиции, а в шестом и восьмом — по 3.

27. Докажем от противного: предположим, что пересечение прямых AC и BD — это точка K , отличная от P (рис. 3). Тогда треугольники ABK и DCK подобны (так как вписанные углы равны) с коэффициентом $k = AB/DC \neq 1$. По условию треугольники ABP и DCP подобны с тем же коэффициентом k .

Треугольники KBP и KCP также подобны с коэффициентом k , поскольку $\angle KBP = \angle KCP$ (потому что $\angle PBA = \angle PCD$ и $\angle KBA = \angle KCD$), и отношение сторон $BP/CP = k = BK/CK$. Но сторона KP этих треугольников общая, поэтому коэффициент подобия должен быть равен 1, получаем противоречие.

28. При любом n .

Заметим сначала, что целочисленная решетка (т.е. множество всех целочисленных точек плоскости) обладает тем свойством, что для любых двух ее точек A и B остальные вершины квадрата $ABCD$ также будут принадлежать этой решетке.

Раскрасим узлы целочисленной решетки в шахматном порядке в два цвета. Узлы каждого из этих цветов образуют решетку, подобную целочисленной (конкретнее, получающуюся из целочисленной решетки поворотом на 45° и гомотетией с коэффициентом $\sqrt{2}$). Теперь одну из этих решеток тем же образом можем разбить на две подобные целочисленной, и так далее.

Следовательно, для любого n узлы целочисленной решетки можно разбить на n решеток, подобных целочисленной, и каждую из них покрасить в свой цвет — эта раскраска будет

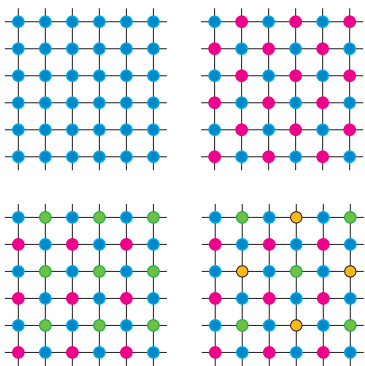


Рис. 4

обладать нужным свойством. На рисунке 4 показаны фрагменты таких раскрасок для n от 1 до 4.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Поскольку $h \ll R$ (здесь $R = R_3$ — радиус Земли), угол α (рис. 5) очень мал, расстояние до линии горизонта L практически не будет отличаться от длины дуги s :

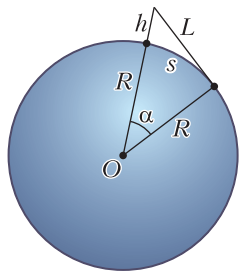


Рис. 5

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \\ &= \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh} = \\ &= 4,8 \text{ км.} \end{aligned}$$

2. Ускорение, которое мы испытываем, находясь на широте φ , равно

$a = \omega^2 r = (2\pi/T)^2 R \cos \varphi$. Поэтому даже на экваторе ($\varphi = 0$) ускорение $a \approx 0,034 \text{ м/с}^2$, что много меньше ускорения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. $F_0 = G(Mm)/R^2$, $F(h) = G(Mm)/(R+h)^2$, $(F_0 - F)/F_0 = 1 - R^2/(R+h)^2 = 1 - (1+h/R)^{-2} \approx \approx 1 - (1 - 2(h/R)) = 2(h/R) \approx 3 \cdot 10^{-4}$ (здесь R — радиус Земли).

4. При ударе Земля также меняет свой импульс, однако приобретаемая ею скорость ничтожно мала, как и ее кинетическая энергия. Поэтому вклад Земли в закон сохранения энергии пренебрежимо мал.

5. Сила тяготения, действующая на тело, равна $F = mgR_3^2/r^2$. Тогда

$$E_n(r) = \int_{\infty}^r F dr = mgR_3^2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{mgR_3^2}{r}.$$

6. Нет, на перечисленные факторы Солнце не влияет. Это — следствие малого размера Земли по сравнению с ее расстоянием до Солнца.

7. По второму закону Ньютона: $ma_x = F_{cx} = -kv_x$ (рис. 6); $ma_x dt = -kv_x dt$; $mdv_x = -kdx$; $s = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 dv_x = \frac{mv_0}{k}$. Хотя пройденное лодкой рас-



Рис. 6

стояние конечно, время торможения формально бесконечно велико.

8. Реальная массивная веревка не может быть натянута горизонтально, так как это потребовало бы бесконечно большой силы упругости веревки для уравнивания силы тяжести.

9. По определению теплоемкость $C = \Delta Q/\Delta T$. В изотермическом процессе $\Delta T = 0$ и теплоемкость C обращается в бесконечность; в адиабатическом процессе $\Delta Q = 0$ и $C = 0$.

10. Число электронов $N = Q/e = (I \cdot t)/e = = (0,3 \text{ А} \cdot 1 \text{ с})/(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}) \approx 2 \cdot 10^{18}$. Ток в металлах создается движением чудовищно большого числа электронов: так, звезд в нашей Галактике значительно меньше — порядка 10^{11} .

11. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= kq/R + kq/(2R) + kq/(4R) + \dots = \\ &= (kq/R)(1 + 1/2 + 1/4 + \dots) = 2kq/R, \end{aligned}$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

12. Отсутствие или добавка конечного числа звеньев из трех резисторов не влияет на сопротивление бесконечной цепочки (рис. 7), а именно: $R_{AB} = R_{A'B'}$, т.е.

$$R = 2r + Rr/(r + R),$$

$$R^2 - 2Rr - r^2 = 0,$$

$$R = r(1 + \sqrt{3}) \approx 2,73r.$$

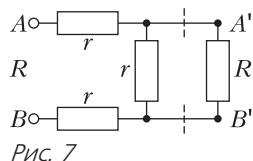


Рис. 7

13. Никакая линза в действительности не дает строго параллельного пучка лучей; под «параллельным» пучком всегда подразумеваются лучи, сходящиеся или расходящиеся под малым углом.

14. С учетом малости углов α и β (рис. 8), а в глаз попадает именно слабо расходящийся пучок лучей, закон преломления света $\sin \beta = n \sin \alpha$ можно записать как $\text{tg} \beta = n \text{tg} \alpha$, или $d/h = = nd/H$. В итоге $h = = H/n = 2 \text{ м} \cdot 3/4 = 1,5 \text{ м}$.

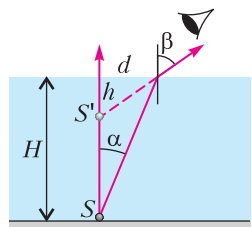


Рис. 8

Микроопыт

Находясь в неоднородном электростатическом поле расчески, нейтральные обрезки любых размеров испытывают перераспределение зарядов (рис. 9), которые находятся на разных расстояниях от источника поля и взаимодействуют с ним с различными по величине силами. Закон же Кулона справедлив исключительно для *точечных* зарядов и в данном случае не применим.

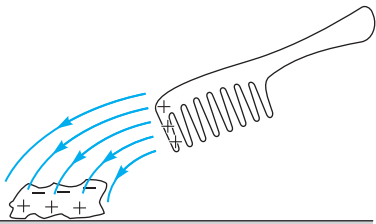


Рис. 9

Испытания для барона М.

1. Достаточно провести такие взвешивания:
 $10 + 20 + 30 = 25 + 35$, $10 + 25 + 201 < 30 + 207$.
2. Нет, не смог бы. Чтобы результаты взвешиваний на одночашечных весах доказали массу каждой гири, «траектории» всех гирь должны быть различными. Но «траектория» – это то, в каких из трех взвешиваний гиря побывала на весах, а в каких – нет. Следовательно, количество различных траекторий всего $2^3 = 8$, и по принципу Дирихле разделить 9 гирь по разным траекториям невозможно.
3. Несомненно, существует. Достаточно вместо гирьки 9 взять гирьку $n > 9$, а количество единичных гирек увеличить с 9 до n – это докажет веса всех $36 + n$ гирек.
4. Известно решение задачи для 58 монет, однако нет доказательства максимальности этого количества.

Заключительный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по математике

9 класс

1. Да, верно.
 Пусть Петя проведет в каждом из прямоугольников диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. После этого все треугольники, примыкающие к левым верхним углам прямоугольников, он покрасит в черный цвет, а остальные – в белый. Докажем, что такая раскраска подойдет. Рассмотрим общий отрезок границы двух треугольников. Если этот отрезок диагональный, то сверху к нему примыкает черный треугольник, а снизу – белый. Если отрезок горизонтальный, то к нему

сверху примыкает белый треугольник, а снизу – черный. Случай вертикального отрезка аналогичен. Поэтому такая раскраска подходит.

2. Обозначим центры описанных окружностей треугольников ABE , BCE , CDE , ADE через O_{AB} , O_{BC} , O_{CD} , O_{AD} соответственно. Пусть T_1 , T_2 – точки касания одной из общих касательных с описанными окружностями треугольников ABE и CDE соответственно; обозначим через O и T середины отрезков $O_{AB}O_{CD}$ и T_1T_2 соответственно (рис. 10). Тогда в прямоугольной трапеции $O_{AB}T_1T_2O_{CD}$ прямая OT – средняя линия, поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку T_1T_2 . Заметим, что окружность ω симметрична относительно прямой $O_{AB}O_{CD}$, на которой также лежит точка O , значит, O – центр ω . Аналогично получаем, что середина отрезка $O_{AD}O_{BC}$ является центром γ . Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $O_{AB}O_{BC}O_{CD}O_{AD}$ – параллелограмм (рис. 11). Для доказательства этого достаточно заметить, что $O_{AB}O_{BC}$ и $O_{CD}O_{AD}$ – серединные перпендикуляры к отрезкам EB и ED , поэтому $O_{AB}O_{BC} \parallel O_{CD}O_{AD}$; аналогично, $O_{AB}O_{AD} \parallel O_{BC}O_{CD}$, откуда и следует требуемое.

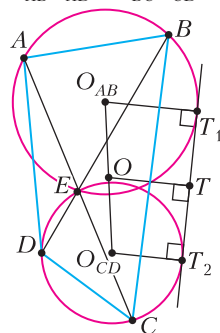


Рис. 10

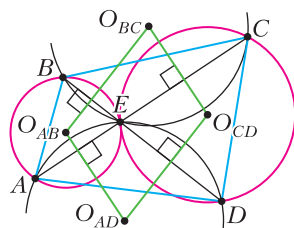


Рис. 11

4. 44 хода.

Докажем, что среди ходов должно было быть хотя бы 20 неприятных (а значит, количество приятных ходов не больше 44). Расставим в клетках числа, как показано на рисунке 12; клетки с одинаковыми числами удалены на одно и то же расстояние от центра, а клетки с меньшими номерами находятся ближе к центру, чем клетки с большими.

Каждый ход из клетки с числом 1 не уменьшает расстояния до центра и потому неприятен – таких ходов 4. Ход из клетки с числом 2 может быть приятным, только когда он идет в клетку с числом 1. Но на доске восемь чисел 2 и только четыре числа 1, поэтому хотя бы четыре хода из клеток с числом 2 будут неприятными.

Рассмотрим теперь ходы, ведущие в 32 клетки с числами, не меньшими 6. Заметим, что эти ходы не могут идти из клеток с числами 1 и 2, т.е. в

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Рис. 12

рассуждении выше они не учтены. Такой ход может быть приятным, только если он идет из клетки с номером не меньше 7; однако таких клеток всего 20. Значит, среди рассмотренных ходов еще $32 - 20 = 12$ неприятных и общее количество неприятных ходов не меньше, чем $4 + 4 + 12 = 20$.

Пример обхода, в котором 44 приятных хода, приведен на рисунке 13.

Замечание. По сути, в последней части доказательства оценки показано, что среди ходов, ведущих в клетки, отмеченные зеленым на рисунке 12, есть не менее трех неприятных. Это можно доказать разными способами, например проведя небольшой перебор.

5. 45° .

Пусть данные трехчлены $-P_1(x) = (x - x_1)^2 + y_1$ и $P_2(x) = (x - x_2)^2 + y_2$, где $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — координаты вершин парабол. Тогда $m(P_1(x)) = y_1$, а $P_1(P_2(x)) = ((x - x_2)^2 + y_2 - x_1)^2 + y_1$. Если $y_2 \leq x_1$, то минимальное значение выражения $((x - x_2)^2 + y_2 - x_1)^2$ равняется нулю, откуда $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x)) = y_1 - y_1 = 0$. Последнее противоречит тому, что $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ — положительное число. Таким образом, $y_2 > x_1$, откуда

$$m(P_1(P_2(x))) = (y_2 - x_1)^2 + y_1 \text{ и} \\ m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x)) = (y_2 - x_1)^2.$$

Аналогично, $y_1 > x_2$ и

$$m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x)) = (y_1 - x_2)^2.$$

Теперь условие равенства разностей переписывается в виде $(y_1 - x_2)^2 = (y_2 - x_1)^2$. Отсюда, поскольку $y_2 > x_1$ и $y_1 > x_2$, получаем $y_1 - x_2 = y_2 - x_1$, т.е. $y_2 - y_1 = -(x_2 - x_1)$. Значит, искомый угол равен 45° .

6. При $k = 50$.

Оценка. Покажем, что целых чисел никогда не станет больше 50.

Будем следить за разностями между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Если подряд стояли числа a , b и c , то их разности были равны $a - b$ и $b - c$. После применения

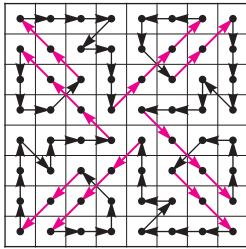


Рис. 13

операции к числу b получатся числа a , $a - b + c$ и c , разности которых равны $a - (a - b + c) = b - c$ и $(a - b + c) - c = a - b$. Итак, в результате операции две соседние разности просто переставляются местами. Изначально все разности были нецелыми, поэтому они в любой момент времени будут нецелыми. Таким образом, два целых числа никогда не могут появиться рядом и, значит, их будет не больше 50.

Пример. Для начала расставим по кругу попеременно числа 0,1 и 0,2. Если с каждым числом 0,2 проделать операцию, то оно будет заменено на $0,1 - 0,2 + 0,1 = 0$ и числа через одно будут целыми.

Осталось подправить пример так, чтобы все числа стали различными. Для этого достаточно прибавить к каждому числу 0,1 по своему маленькому числу, а к каждому числу 0,2 — сумму чисел, прибавленных к его соседям. Например, выбрав $t = 0,001$, можно прибавить к последовательным числам 0,1 числа $0, t, 2t, \dots, 47t, 48t, 50t$; тогда к числам 0,2 будут прибавляться числа $t, 3t, 5t, \dots, 95t, 98t, 50t$. В результате все числа станут различными.

Явно построенный пример выглядит так:

0,1 0,2001 0,1001 0,2003 0,1002 0,2005 0,1003 ...
... 0,1047 0,2095 0,1048 0,2098 0,105 0,205

7. Игорь.

Заменим все числа в строке на их остатки от деления на 3, от этого результат игры не изменится. Получим строку 1, 2, 0, ..., 1, 2, 0. Промежутки между числами пронумеруем слева направо от 1 до 59.

Первым ходом Игорь ставит знак « $-$ » в 30-й промежуток, а все остальные промежутки он разбивает на пары вида $(i, 30 + i)$. Если Руслан ставит в какой-то промежуток знак « $+$ » или « $-$ », то Игорь в парный промежуток ставит « $-$ » или « $+$ » соответственно. А если Руслан ставит знак « $\times$ », то Игорь ставит в парный промежуток также знак « $\times$ ».

Когда все знаки расставлены, полученное выражение разбивается на несколько слагаемых. При этом в левой и правой половинах выражения набор слагаемых одинаковый, но берется с противоположными знаками. Следовательно, его значение будет давать остаток 0 при делении на 3.

8. Начнем со следующей полезной леммы.

Лемма. Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (рис. 14).

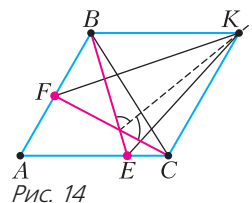


Рис. 14

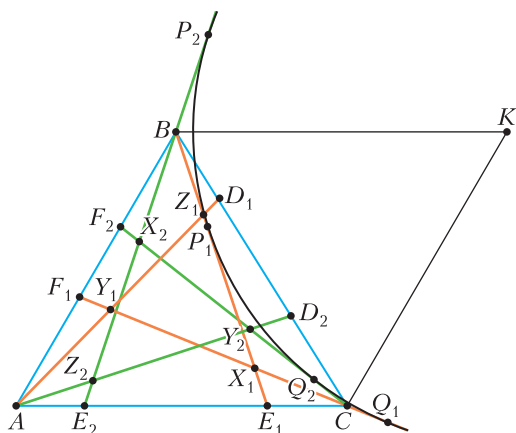


Рис. 15

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны.

Перейдем к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены, как на рисунке 15). Выберем точку K так, что $ABKC$ – параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1 , CF_1 , BE_2 и CF_2 ; значит, существует окружность с центром K , касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1 , Q_1 , P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 =$$

$$= BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, приходим к требуемому равенству периметров.

10 класс

2. Поскольку $AB \cdot AQ = AP^2 = AC \cdot AR$, четырехугольник $BCRQ$ – вписанный (рис. 16). Пусть O – центр окружности $(BCRQ)$. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей (BPC) и (QPR) . Покажем, что прямые BO_1 , CO_1 , QO_2 , RO_2 равноудалены от O . Так как $OB = OC = OQ = OR$,

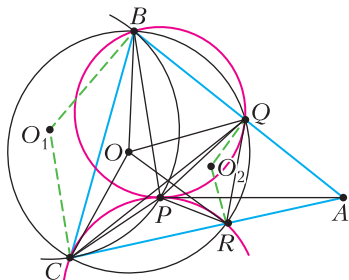


Рис. 16

для этого достаточно установить равенство (направленных) углов

$$\angle OCO_1 = \angle O_1BO = \angle OQO_2 = \angle O_2RO.$$

Здесь первое и последнее равенства очевидны из симметрии относительно серединных перпендикуляров к BC и QR .

Остается доказать равенство

$$\angle O_1BO = \angle OQO_2. \quad (*)$$

Из счета углов получаем

$$\begin{aligned} \angle OQO_2 &= \angle OQR - \angle O_2QR = \\ &= (90^\circ - \angle RCQ) - (90^\circ - \angle RPQ) = \\ &= \angle RPQ - \angle RCQ. \end{aligned}$$

Аналогично, $\angle O_1BO = \angle BPC - \angle BQC$.

Значит, $(*)$ эквивалентно равенству

$$\angle RPQ - \angle RCQ = \angle BPC - \angle BQC,$$

или

$$\angle BQC - \angle RCQ = \angle BPC - \angle RPQ. \quad (**)$$

Из касания окружностей (BPQ) и (CPR) следует $\angle RPQ = \angle RCP + \angle PBQ$, что равно (из суммы углов четырехугольника $BPCA$) $\angle BPC - \angle BAC$. Тем самым, неравенство $(**)$ преобразуется к виду $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BAC$, что верно.

Задача решена.

4. $\frac{15}{4}$.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются отмеченные точки, а ребрами – проведенные отрезки.

Оценка. Докажем оценку $C \leq \frac{15}{4}$. Условие гласит, что в нашем полном графе есть как шестерки вершин, сумма на ребрах между которыми положительна, так и шестерки вершин, сумма на ребрах между которыми отрицательна. Тогда найдутся две шестерки, отличающиеся заменой только одной вершины, такие, что у одной из них сумма положительна, у другой отрицательна. В самом деле, возьмем шестерку с положительной суммой и будем превращать ее в шестерку с отрицательной, меняя вершины по одной – на каком то шаге произошло изменение знака. Шестерки, которые были до и после этого шага – искомая пара.

Далее работаем с полным подграфом на множестве S из семи вершин, объединении вышеописанной пары шестерок. Рассмотрим все семь шестерок, которые можно получить выбрасыванием одной вершины из S . Пусть среди них k с отрицательными суммами, получающиеся выбрасыванием вершин $A_1, \dots, A_k$, будем называть эти вершины A -шестерками, а соответствующие шестерки A -шестерками, и $7 - k$ с положительными суммами, получающиеся выбрасыванием вершин $B_1, \dots, B_{7-k}$, будем называть эти верши-

ны B -вершинами, а соответствующие шестерки B -шестерками. Ребра между двумя A -вершинами будем называть AA -ребрами, между двумя B -вершинами – BB -ребрами, а ребра, соединяющие A -вершину с B -вершиной – AB -ребрами.

Из старой расстановки чисел на ребрах, соединяющих вершины множества S , получим новую расстановку, заменив все числа на AA -ребрах на число x , равное их среднему арифметическому, и аналогично заменив все числа на AB -ребрах на их среднее арифметическое y , а все числа на BB -ребрах на их среднее арифметическое z . Очевидно, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$, так как все старые числа по модулю не превосходят 1.

Лемма. Подграф S с новыми числами на ребрах удовлетворяет условию с той же константой C .

Доказательство леммы. Заметим, что для каждого AA -ребра есть одно и то же количество A -шестерок, в которые входят оба его конца. И наоборот, для любой A -шестерки среди 15 ребер между ее вершинами есть одно и то же количество AA -ребер. То же верно для AB -ребер и для BB -ребер. Значит, сумма Σ_A чисел на ребрах в A -шестерке в новой расстановке есть среднее сумм по всем A -шестеркам в старой расстановке, т.е. среднее нескольких чисел, не больших $-C$; значит, $\Sigma_A \leq -C$. Аналогичное утверждение верно для сумм в B -шестерках. Лемма доказана.

Далее изучаем новую расстановку. Рассмотрим возможные случаи.

Случай $k = 1$. Иными словами, есть ровно одна A -шестерка, на которой пятнадцать BB -ребер, и шесть B -шестерок, на каждой из которых десять BB -ребер и пять AB -ребер. Имеем систему неравенств: $15z \leq -C$, $5y + 10z \geq C$. Умножим первое на -2 , сложим со вторым, умноженным на 3, получим $15y \geq 5C$, откуда $C \leq 3$.

Случай $k = 2$. Теперь у нас две A -вершины и пять B -вершин, т.е. на A -шестерке есть десять BB -ребер и пять AB -ребер, а на B -шестерке – шесть BB -ребер, восемь AB -ребер и одно AA -ребро. Имеем $5y + 10z \leq -C$, $x + 8y + 6z \geq C$. Исключая z , получаем $8C \leq 5x + 25y \leq 30$, значит, $C \leq \frac{15}{4}$.

Случай $k = 3$. Аналогично предыдущему, имеем $x + 8y + 6z \leq -C$, $3x + 9y + 3z \geq C$. Избавляясь на этот раз от y , получаем $17C \leq 15x - 30z \leq 45$, откуда $C \leq \frac{45}{17} < \frac{15}{4}$.

Случай $k \geq 4$ сводятся к рассмотренным умножением всех чисел на -1 , что ведет к замене $k \mapsto 7 - k$. Итак, оценка $C \leq \frac{15}{4}$ доказана.

Пример. Любое число вершин от двух до 999995 объявим вершинами типа A , остальные – вершинами типа B . На всех ребрах между двумя вер-

шинами типа B напомним число $-\frac{7}{8}$, на всех остальных – число 1. Тогда если в шестерке вершин хотя бы пять B -вершин, то сумма в ней не больше $-\frac{15}{4}$, а иначе – не меньше $\frac{15}{4}$.

5. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Оценка. Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, $\text{НОД}(a, b) = d > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n – противоречие. Значит, каждый из написанных НОД не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОД не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

Пример. Разобьем все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \dots, 2^k a$, где a – нечетное число, не превосходящее n . Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leq \lfloor n/2 \rfloor$ найдется цепочка, в которой встречается d , а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leq \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

6. 98.

Положим $n = 100$.

Покажем, как подобрать нужный многочлен g степени не выше $n - 2$ для данного многочлена f степени n . При домножении f на ненулевую константу условие не поменяется (g можно домножить на ту же константу), поэтому считаем, что старший коэффициент f равен 1, так что $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$.

Возьмем произвольный набор n различных чисел $x_1, \dots, x_n$, дающих в сумме $-a_1$, и положим $h(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, $g(x) = f(x) - h(x)$, так что $h = f - g$. Видим, что у f и h совпадают коэффициенты при x^n и при x^{n-1} , поэтому степень g не превышает $n - 2$. С другой стороны, абсциссы точек пересечения графиков f и g – это в точности корни многочлена h , а их ровно n .

Покажем, что $k \leq n - 3$ не работает.

Пусть дан многочлен $f(x) = x^n$, а $g(x)$ – многочлен степени не выше $n - 3$. Предположим, что графики f и g пересекаются в n точках, имеющих абсциссы $x_1, \dots, x_n$. Но тогда многочлен $f - g$ степени n имеет n вещественных корней $x_1, \dots, x_n$. С другой стороны, у $f - g$ коэффициенты при x^{n-1} и x^{n-2} равны 0. Но тогда по теореме Виета сумма $s_1 = x_1 + \dots + x_n$ и сумма попарных произведений $s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ равны 0. Отсюда $x_1^2 + \dots + x_n^2 = s_1^2 - 2s_2 = 0$, следовательно, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, что противоречит тому, что x_i различны.

7. 24.

Оценка. Покажем, что $k \leq 24$, т.е. что любой эксперт может оказаться некомпетентным. Если

этот эксперт считает, что все спортсмены возьмут по одной медали, опровергнем его результатом $(25, 0, 0, \dots, 0)$. Иначе эксперт считает, что несколько (хотя бы один) спортсменов получают 0 медалей. Тогда распределим все медали между этими спортсменами так, чтобы каждый из них получил хотя бы одну медаль. В таком случае эксперт не угадает ни одного количества медалей.

Пример. Пусть прогноз одного эксперта – $(1, 1, 1, \dots, 1)$, а прогнозы остальных – $(1, 0, \dots, 0, 24), (0, 1, \dots, 0, 24), \dots, (0, 0, \dots, 1, 24)$.

Если некомпетентным оказался первый эксперт, то в исходе точно есть хотя бы три нуля, иначе хотя бы в 23 позициях количество медалей не меньше 2, и общее количество медалей не меньше $23 \cdot 2 > 30$ – противоречие. Но тогда каждый из остальных экспертов компетентный.

Предположим теперь, что двое экспертов, отличных от первого, оказались некомпетентными. Тогда в двух позициях их прогнозы это 0 и 1 медалей, а значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 2 медалей. Кроме того, еще в 22 позициях прогнозы обоих экспертов – нули, значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 1 медали. Тогда общее количество медалей не меньше $2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 > 25$ – противоречие.

11 класс

1. Заметим, что условие $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$ равносильно тому, что $(a - b)^2 = -1$ или же $a - b = \pm i$. Рассмотрим граф, вершины которого – записанные на доску числа, а ребро проводится между двумя числами, которые отличаются на i . Согласно условию задачи, в таком графе ровно 760 ребер. Каждая компонента связности этого графа представляет собой путь и состоит из вершин-чисел вида $z, z + i, z + 2i, \dots, z + (n - 1)i$. Предположим, что в этом графе k компонент связности. Тогда в нем $777 - k$ ребер, поэтому $k = 17$. Поскольку $17 \cdot 45 = 765 < 777$, то в какой-то компоненте связности хотя бы 46 вершин, поэтому какие-то две из этих вершин – это числа c и $d = c + 45i$. Тогда $(c - d)^2 = 45^2 \cdot i^2 = -2025$, следовательно, $c^2 + d^2 + 2025 = 2cd$, что и требовалось.

3. Не существует.

Пусть пара многочленов F и G – важная. Рассмотрим пары остатков от деления на 100 чисел $F(a, b)$ и $G(a, b)$, где a, b – всевозможные пары целых чисел от 0 до 99. Согласно условию задачи, все такие пары остатков разные. Поскольку всего пар чисел 100^2 , то каждая пара остатков от деления на 100 достигается ровно один раз. Значит, достигаются все 4 возможные пары четностей чисел $F(a, b)$, $G(a, b)$. Поскольку четность значения многочлена с целыми коэффици-

ентами в точке (a, b) зависит только от четности чисел a и b , мы получаем, что пары значений $(F(0, 0); G(0, 0)), (F(1, 0); G(1, 0)), (F(0, 1); G(0, 1)), (F(1, 1); G(1, 1))$ дают все четыре возможные пары четностей. Однако заметим, что для пар многочленов $F = P$, $G = Q$ и $F(x, y) = P(x, y) - xy$, $G(x, y) = Q(x, y) + xy$ первые три пары четностей одинаковые, а последняя пара – разная. Следовательно, обе такие пары многочленов важными быть не могут.

6. Обозначим записанные по кругу числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. Вася будет следить лишь за десятью числами, которые он разобьет на пары: $(a_9, a_{18}), (a_{27}, a_{36}), \dots, (a_{90}, a_{99})$. За один ход Петя может уменьшить не более чем одно из этих 10 чисел. Если Петя уменьшил одно из чисел пары (a_i, a_{i+9}) , Вася в ответ добавит 1 к числам $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+9}$. Если же Петя не уменьшил ни одно из этих 10 чисел, Вася сделает любой разрешенный ход. Таким образом, после пары ходов Пети и Васи сумма чисел в каждой из пяти Васиных пар не уменьшится. Поскольку изначально пять сумм в парах положительны, то после каждого Васиного хода сумма в каждой из этих пяти пар будет положительной, поэтому в каждой из пар будет хотя бы одно положительное число. Таким образом, после любого Васиного хода будет хотя бы 5 положительных чисел, что и требовалось.

7. Пусть, не умаляя общности, лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи AD и BC – в точке Q (рис. 17). Обозначим центр окружности ω_a через I_a , точки I_b, I_c, I_d определим аналогично. Обозначим четырехугольник, образованный четырьмя касательными, через $A'B'C'D'$ (прямая $A'B'$ – общая внешняя касательная к ω_a и ω_b , аналогично с тремя другими сторонами).

В силу леммы о трезубце для треугольников ABD и ACD , точки A, D, I_a, I_d лежат на одной окружности (с центром в середине дуги AD окружности Ω). Пусть прямая $I_a I_d$ пересекает стороны AB и CD в точках U и V , а также пересекает прямую AD в точке X_{ad} . Обозначим в четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = \delta$. Тогда в силу вписанности четырехугольников $ABCD$ и $A I_a I_d D$ выполняются равенства углов: $\angle QCD = \alpha$, $\angle U I_a A = \angle A D I_d = \delta/2$, $\angle V I_d D = \angle D A I_a = \alpha/2$. Следовательно, $\angle CQD = \delta - \alpha$ и $\angle PUV = \angle PVU = (\alpha + \delta)/2$. В частности, $\alpha < \delta$, поэтому точка X_{ad} лежит на луче AD и $\angle D X_{ad} I_d = \angle ADV - \angle PVU = (\delta - \alpha)/2$. Последнее равенство означает, что прямая $I_a I_d$ параллельна биссектрисе угла CQD . Поскольку прямая $A'D'$ симметрична прямой AD относительно линии центров $I_a I_d$, мы получаем, что $A'D' \parallel BC$, а также прямая $A'D'$ проходит через точку X_{ad} . Определим аналогично точки X_{ab} ,

X_{bc} , X_{cd} и получим, что эти точки лежат на прямых $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, которые параллельны сторонам четырехугольника $ABCD$.

Как мы поняли выше, прямая $I_a I_d$ параллельна биссектрисе угла CQD . Рассуждая аналогично, мы получаем, что этой биссектрисе параллельна прямая $I_b I_c$, а прямые $I_a I_b$ и $I_c I_d$ параллельны биссектрисе угла BPC . Поскольку $\angle PUV = \angle PVU$, то биссектриса угла BPC перпендикулярна прямой $I_a I_d$. Таким образом, соседние стороны четырехугольника $I_a I_b I_c I_d$ перпендикулярны, т.е. это прямоугольник. Значит, он вписан в окружность, обозначим ее через ω , центр которой – точка пересечения диагоналей. Следовательно достаточно доказать, что центры окружностей ω , Ω и Γ лежат на одной прямой. Мы докажем, что у этих трех окружностей общая радикальная ось, причем на ней лежат точки X_{ab} , X_{bc} , X_{cd} , X_{da} .

Обозначим через γ описанную окружность четырехугольника $A I_a I_d D$. Тогда точка X_{ad} – радикальный центр окружностей γ , ω и Ω , поскольку она лежит на двух их радикальных осях. Значит, радикальная ось окружностей ω и Ω проходит через точку X_{ad} ; аналогично, на ней лежат и точки X_{ab} , X_{bc} , X_{cd} . В частности, эти 4 точки лежат на одной прямой.

Пусть прямая $B'C'$ пересекает сторону AB в точке S и сторону CD в точке T . Поскольку $B'C' \parallel AD$, то $\angle BST = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCT$, поэтому четырехугольник $BCTS$ – вписанный. Поскольку $C'D' \parallel AB$ и $A'B' \parallel CD$, то по теореме Фалеса

$$\frac{X_{bc} B'}{X_{bc} T} = \frac{X_{bc} X_{ab}}{X_{bc} X_{cd}} = \frac{X_{bc} S}{X_{bc} C'}.$$

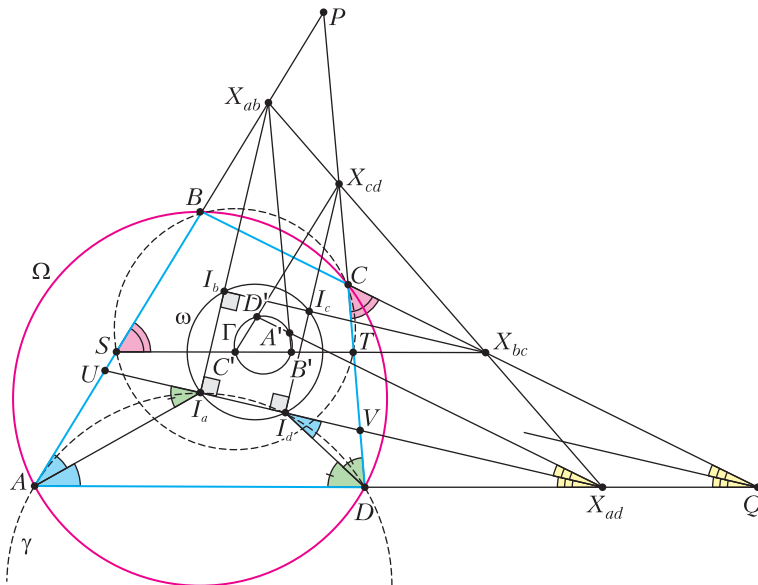


Рис. 17

Из этого равенства отношений и вписанности $BCTS$ мы получаем, что

$$X_{bc} B' \cdot X_{bc} C' = X_{bc} S \cdot X_{bc} T = X_{bc} B \cdot X_{bc} C,$$

т.е. степень точки X_{bc} относительно окружностей Ω и Γ одинакова. Рассуждение для точек X_{ab} , X_{ad} , X_{cd} аналогично.

8. 4049.

Для натурального n положим $g_n(x) = f(x+n) - f(x)$. Тогда число хорд длины n равно количеству нулей функции $g_n(x)$.

В качестве примера выберем следующую кусочно-линейную функцию $f: f(x) = x$ при $x \leq 2024 \frac{9}{10}$ и $f(x) = 2024 \cdot |2025 - x|$ при $x \geq 2024 \frac{9}{10}$. Заметим, что при $a \notin \left[0; 2025 \frac{1}{10}\right]$ функция $f(x)$ принимает значение $f(a)$ только в точке a . Следовательно, если $g_n(x) = 0$, то обе точки x и $x+n$ лежат на отрезке $\left[0; 2025 \frac{1}{10}\right]$. В частности, $n \leq 2025$

и нули функции $g_n(x)$ лежат в промежутке $\left[0; 2025 \frac{1}{10} - n\right]$. Для $n = 2025$ при $x \in \left[0; \frac{1}{10}\right]$ имеем, что $g_{2025}(x) = 2024x$. Значит, $g_{2025}(x)$ имеет единственный нуль $x = 0$, т.е. хорда длины 2025 у функции f единственна. При натуральном $n \leq 2024$ функция $g_n(x)$ монотонно убывает при $x \in \left[0; 2025 - n\right]$ и монотонно возрастает при $x \in \left[2025 - n; 2025 \frac{1}{10} - n\right]$, при этом $g_n(0) > 0$,

$g_n(2025 - n) < 0$ и $g_n\left(2025 \frac{1}{10} - n\right) > 0$. Таким образом, у этой функции ровно два нуля, т.е. функция f имеет по две хорды длины $n = 1, 2, \dots, 2024$. Итого у нее 4049 различных хорд.

Теперь перейдем к оценке. Без ограничения общности будем считать, что хорда длины 2025 соединяет точки $(0; 0)$ и $(0; 2025)$, т.е. $f(0) = f(2025) = 0$. Положим $g(x) = g_1(x) = f(x+1) - f(x)$. Из условия следует, что у функции g конечное число нулей, а также эта функция непрерывна. Пусть все ее нули лежат в промежутке $[-M; M]$. Тогда функция g знакопостоянна на лучах $x > M$ и $x < -M$. При необходимости, заменив функцию f на $-f$, мы будем считать, что $g(x) > 0$ при $x > M$.

Предположим, что $g(x) < 0$ при $x < -M$. Заметим, что $g_n(x) = g(x) + g(x+1) + \dots + g(x+n-1)$, поэтому $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и $g_n(x) < 0$ при $x < -M-n$. Значит, функция $g_n(x)$ имеет нуль, т.е. у функции f есть хорда любой натуральной длины, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $g_n(x) > 0$ при $x < -M$. Значит, $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и при $x < -M-n$. Далее мы докажем, что при натуральных k и m , в сумме дающих 2025, функция f имеет хотя бы 4 хорды длин k и m . Применяя это утверждение для каждой такой пары k, m , мы получим заявленную оценку. Иными словами, мы докажем, что у функций $g_k(x)$ и $g_m(x)$ при $k + m = 2025$ суммарно хотя бы 4 нуля. Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что функция $g_k(x)$ имеет не более одного нуля. Значит, эта функция не может принимать отрицательных значений. Действительно, пусть $g_k(t) < 0$. Поскольку функция $g_k(x)$ непрерывна и неотрицательна при достаточно больших по модулю значениях x , то у нее есть нуль на луче $(-\infty; t)$ и на луче $(t; +\infty)$, т.е. хотя бы два нуля. Противоречие.

Итого $g_k(x) \geq 0$, причем равенство нулю достигается не более чем в одной точке. Покажем, что $g_m(t) > 0$ для некоторого $t \in (0; k)$. Рассмотрим наименьшее натуральное число N , для которого число Nk делится на 2025, и обозначим через $r_1, r_2, \dots, r_{N-1}$ остатки чисел $k, 2k, \dots, (N-1)k$ по модулю 2025. Если $g_k(0) > 0$, положим $r_0 = r_N = 0$, если же $g_k(0) = 0$, положим $r_0 = r_N = 2025$. Рассмотрим разности $d_j = f(r_{j+1}) - f(r_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Заметим, что если $r_{j+1} > r_j$, то $r_{j+1} = r_j + k$ и $d_j = g_k(r_j) \geq 0$; если же $r_{j+1} < r_j$, то $r_j = r_{j+1} + (2025 - k) = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Если $r_0 = 0$, то $d_0 = g_k(0) > 0$. В случае $r_N = 2025$ мы получаем, что $d_{N-1} = g_k(2025 - k) > 0$, поскольку $g_k(0) = 0$, а $2025 - k \neq 0$. Таким образом, $d_0 + d_1 + \dots + d_{N-1} = 0$ и первое или последнее слагаемое в этой сумме положительно. Значит, найдется отрицательное слагаемое $d_j < 0$, что возможно лишь в ситуации $r_j = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Тогда для $t = r_{j+1} \in [0; k]$ мы получаем, что $g_m(t) = -d_j > 0$.

Заметим, что $g_k(0) + g_m(k) = g_m(0) + g_k(m) = f(2025) - f(0) = 0$. Поскольку функция g_k неотрицательна, то $g_m(0) \leq 0$ и $g_m(k) \leq 0$, в частности, $t \neq 0$ и $t \neq k$, поэтому $t \in (0; k)$.

В случае, когда $g_k(0) > 0$ и $g_k(m) > 0$, мы получаем, что $g_m(0) < 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(k) < 0$, а также функция $g_m(x)$ положительна при достаточно больших по модулю x . Значит, функция g_m имеет по нулю на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; t)$, $(t; k)$, $(k; +\infty)$, т.е. уже эта функция имеет хотя бы 4 нуля. Если $g_k(0) = 0$, то $g_k(m) > 0$, поскольку

у функции g_k не более одного нуля. Тогда $g_m(k) = 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(0) < 0$. В этом случае у функции g_m есть по нулю на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; t)$, а также нуль в точке k , т.е. хотя бы 3 нуля, и еще один нуль в точке 0 есть у функции g_k , что в сумме составляет хотя бы 4 нуля. Случай $g_k(m) = 0$ разбирается аналогично.

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» Физика Отборочный этап 11 класс

1. В соответствии с «подсказкой» Сьюзен Кэлвин, сумма $C \cdot \exp(+z) + C \cdot \exp(-z) = 1$, где $z = \frac{\mu_0 B}{kT} \approx 3,535$. Следовательно,

$$C = \frac{1}{\exp(+z) + \exp(-z)} \approx 0,0291,$$

$$w(+1) = \frac{\exp(-z)}{\exp(+z) + \exp(-z)} \approx 0,00085,$$

$$w(-1) = \frac{\exp(+z)}{\exp(+z) + \exp(-z)} \approx 0,99915.$$

Среднее значение проекции магнитного момента частицы на направление внешнего поля

$$\mu_{срB} = \mu_0 ((+1) \cdot w(+1) + (-1) \cdot w(-1)) \approx -0,9983 \cdot \mu_0 \approx -9,25 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}.$$

Так что среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц равно

$$M \approx 0,9983 \cdot \mu_0 N \approx 9,25 \cdot 10^{-24} \cdot N \text{ Дж/Тл}.$$

При анализе процесса адиабатического размагничивания достаточно заметить, что в соответствии с сообщенными свойствами энтропии она остается постоянной в адиабатическом процессе, а из формулы для энтропии решетки следует, что при заданных приближениях постоянство энтропии означает постоянство B/T . Таким образом:

$$\frac{B}{T_0} = \frac{B_0}{T}, \quad T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ К} \approx 1 \text{ мК}.$$

2. При движении луча внутри пластины, в соответствии с законом Снелла,

$$n(y) \cdot \sin \alpha(y) = n_0 \cdot \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

где α – угол отклонения луча от оси y . С другой стороны,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{d} = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}},$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 2 + 2 \frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2} = 2 \left(1 + \frac{y}{d} \right).$$

Следовательно,

$$n(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{y}{d} \right)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad n(y) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(1 + \frac{y}{d} \right)}.$$

3. Данная задача является задачей с частично открытой моделью. При анализе удара мы должны понимать, что малость деформаций означает и малость времени соударений, а это позволяет пренебрегать действием на тела в процессе удара всех конечных сил. Таким образом, нам нужно учитывать только очень большие силы – силы реакции. Учитывая условия гладкости всех тел, приходим к выводу, что это силы нормальной реакции – между стержнями N_1 и между горизонтальным стержнем и поверхностью N_2 . Характер движения вертикального стержня после удара позволяет утверждать, что сила реакции между ним и поверхностью остается конечной. Силы нормальной реакции всегда перпендикулярны поверхностям соприкосновения тел, но их распределение по этим поверхностям могут изменяться в процессе удара для выполнения условий связи, возникающих при движении соприкасающихся тел. Конкретный вид условий связи сил реакции зависит от упругих свойств тел, а в предложенной задаче есть разные тела. Упругие свойства стержней, разумеется, одинаковы, а упругие свойства поверхности могут от них отличаться: единственная информация в условии, которая позволяет нам делать выводы о соотношении упругих свойств, содержится во фразе «деформации стержней очень малы, но при этом намного больше деформаций поверхности». Это позволяет считать, что жесткость материала поверхности намного больше жесткости материала стержней, и поэтому процессы изменения силы N_2 намного быстрее, чем у N_1 . Тогда мы приходим к выводу, что в ходе удара изменение N_2 подстраивается под изменение N_1 таким образом, чтобы смещения точек поверхности можно было пренебрегать по сравнению с очень малыми смещениями точек горизонтального стержня. Поэтому в рамках нашей модели мы будем считать, что перед отрывом горизонтального стержня от поверхности вертикальная составляющая точки касания этого стержня и поверхности должна остаться равной нулю (хотя вертикальная составляющая скорости центра масс этого стержня должна быть направлена вверх благодаря действию силы N_2).

На вертикальный стержень в процессе удара действует одна «очень большая» сила – сила нормальной реакции N'_1 со стороны горизонтального стержня (рис. 18). Из геометрии удара сразу становится ясно, что момент этой силы относительно центра масс вертикального стержня ненулевой, и этот стержень после удара начнет вращаться против часовой стрелки. В процессе старта такого вращения (перед началом поворота) силы нормальной реакции между стержнями должны перераспределиться по поверхности их соприкосновения таким образом, чтобы они были сосредоточены

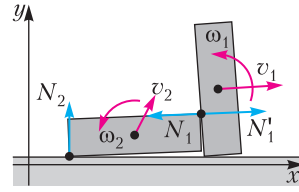


Рис. 18

ны в точке контакта верхнего ребра горизонтального стержня с вертикальным. Поэтому, если N_1 – средняя величина силы взаимодействия стержней за время удара Δt , то скорость центра масс и угловая скорость вращения вертикального стержня после удара удовлетворяют соотношениям

$$mv_1 = N_1 \Delta t, \quad I\omega_1 = l N_1 \Delta t.$$

Здесь m – масса каждого стержня, момент инерции каждого стержня относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через центр масс, равен

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + L^2) = \frac{53}{48} ma^2, \quad \text{а плечо силы}$$

$$\text{реакции равно } l = \frac{L}{2} - a = \frac{3}{4} a.$$

Для горизонтального стержня

$$mv_{2x} = mv_0 - N_1 \Delta t, \quad mv_{2y} = N_2 \Delta t,$$

$$I\omega_2 = \frac{a}{2} N_1 \Delta t - \frac{L}{2} N_2 \Delta t.$$

Как видно, условие связи для точки касания этого стержня с поверхностью

$$v_{2y} - \omega_2 \frac{L}{2} = \left(\frac{N_2}{m} - \frac{L}{2I} \left(\frac{a}{2} N_1 - \frac{L}{2} N_2 \right) \right) \Delta t = 0$$

может быть выполнено только при вращении горизонтального стержня после удара в направлении, показанном на рисунке, и оно дает нам связь очень больших сил реакции:

$$N_2 \left(1 + \frac{mL^2}{4I} \right) - N_1 \frac{maL}{4I} = 0,$$

$$N_2 = \frac{maL}{4I + mL^2} N_1 = \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} N_1 = \epsilon N_1.$$

Подсчет дает, что $\epsilon = 0,21$. С учетом этого условия связи мы можем выразить все конечные скорости и угловые скорости через скорость центра масс вертикального стержня после удара:

$$\omega_1 = \frac{ml}{I} v_1 = \frac{36}{53a} v_1, \quad v_{2x} = v_0 - v_1,$$

$$v_{2y} = \epsilon v_1 = \frac{21}{100} v_1, \quad \omega_2 = \frac{2}{L} v_{2y} = \frac{4\epsilon}{7a} v_1 = \frac{3}{25a} v_1.$$

Подставляя эти соотношения в закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + \frac{I}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

находим, что

$$v_1 = \frac{5300}{6809} v_0 \approx 0,778 v_0.$$

Таким образом, угловые скорости вращения стержней по часовой стрелке после удара равны

$$\omega_1 = \frac{3600}{6809} \frac{v_0}{a} \approx 0,529 \frac{v_0}{a},$$

$$\omega_2 = \frac{636}{6809} \frac{v_0}{a} \approx 0,093 \frac{v_0}{a}.$$

Примечание. Если ввести другие предположения об упругих свойствах тел, можно построить и другие модели удара, приводящие к другим связям между силами реакции. Приведем некоторые примеры альтернативных моделей.

Пример 1. Введем предположение, противоположное заданному в условии. Пусть деформации поверхности очень малы, но намного больше, чем деформации стержней. Теперь стержни значительно жестче поверхности, и их соударение происходит намного быстрее. Таким образом, в ходе соударения стержней поверхность только начала деформироваться и сила реакции N_2 осталась конечной. Тогда при ударе стержней ее можно не учитывать, и в результате тройное соударение стержней и поверхности можно рассматривать как два последовательных парных: сначала, пренебрегая влиянием поверхности, мы рассматриваем удар стержней, а затем – соударение горизонтального стержня с поверхностью (при этом вертикальный стержень уже начал движение и больше не участвует в соударении). В таком случае получается, что вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{72}{145} \frac{v_0}{a} \approx 0,497 \frac{v_0}{a}$, горизонтальный вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{564}{3625} \frac{v_0}{a} \approx 0,156 \frac{v_0}{a}$.

Пример 2. Будем считать, что перераспределения сил реакции в процессе удара не происходит и точкой приложения равнодействующей сил нормальной реакции стержней в ходе удара является центр площади соприкосновения. С помощью законов сохранения импульса, энергии и момента импульса получаем: вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{120}{181} \frac{v_0}{a} \approx 0,663 \frac{v_0}{a}$, а горизонтальный стержень не вращается вовсе.

(Продолжение следует)

Головоломка

(см. 2-ю с. обл.)

Решения приведены на рисунке 19.

Найти их помогут соображения, связанные с оценками площадей. Площадь «пустоты» равна 21. Значит, в задании а) площадь каждого четырех-

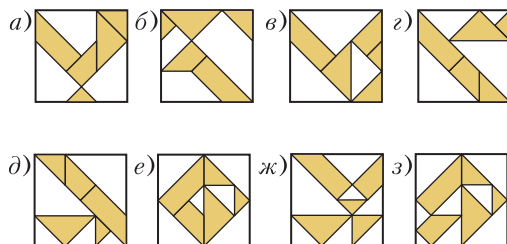


Рис. 19

угольника равна $21 : 3 = 7$. Остается найти четырехугольник площади 7 с углами, кратными 45° . Выбор здесь небольшой, и мы приходим к рисунку 19, а. В задании б) нужно площадь «пустоты» представить в виде суммы трех различных слагаемых. Начав с площадей 3, 6 и 12 (в сумме дающих 21), получаем решение на рисунке 19, б. Аналогично рассуждая, можно найти решения остальных заданий головоломки.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Грицук, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Н.В.Станцо

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

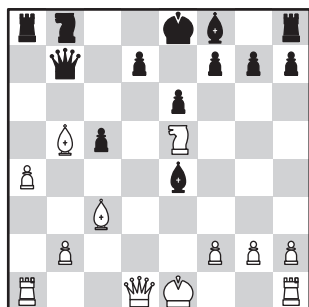
Тел.: (831) 218-40-40

ИгрА НА ПОБЕДУ

Второй этап серии Grand Chess Tour 2025, прошедший в Бухаресте, завершился победой Рамешбабу Прагнанандхи и порадовал любителей шахмат рядом партий, в которых были разыграны дебютные варианты, редко встречающиеся у игроков элиты. Вот две из них.

У.Со – Рамешбабу Прагнанандхи Бухарест, 2025

1. d4 ♖f6 2. c4 c5 3. d5 b5. Волжский гамбит – нечастый гость на подобных соревнованиях. 4. cb a6 5. e3 ab 6. ♙b5 ♜a5+ 7. ♚c3 ♙b7 8. ♙d2 ♜b6 9. ♙f3 ♙d5 10. a4 e6 11. e4 ♙c3 12. ♙c3 ♙e4 13. ♙e5.



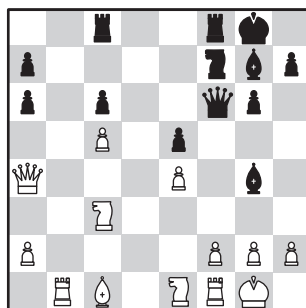
13... ♜b7! (единственный способ защитить пешку d7) 14. ♜h5 ♙g6 15. ♙g6 ♜e4+ 16. ♚f1 fg 17. ♜h3 ♜f5?! (точнее 17... ♙c6!? 18. ♙e1 ♙d5 19. ♜g4 ♙e7 20. ♙g7 ♙g8 21. ♙c3 h5, и черные получают сбалансированную позицию) 18. ♜g3?! (сильнее 18. ♜e3! ♙c6 19. ♙c6 dc 20. h4 с угрозой ♙h3-f3) ♙c6 19. ♜c7 ♙d5 20. ♙c6 dc 21. h4 ♙e7 22. ♙h3 (но не 22. ♙g7? ♙a4! 23. ♙a4 ♙d1x) ♙f8 23. ♜e5 ♙f6 24. ♜e2 ♙d4 25. ♙d4 cd 26. h5? (точнее 26. a5, разменивая пешку,

белые ослабляют линию g) ♙f6 27. ♚g1 ♙f7 28. hg+ ♙g6 29. g3. Решающая ошибка. Лучше 29. ♙f3+, оставляя ладью более активной. 29...d3! 30. ♙d2 ♙g4 31. a5 ♙e4 32. ♙h7 ♙g8 33. ♙h4 ♙e2 34. ♜c3 d2 35. ♙d1 ♙f8 36. ♙h2 ♜e4 37. ♙f1 ♙f3 38. ♜c5 ♙e1, белые сдались.

Следующая партия была сыграна в последнем туре, и черных устраивала только победа, которая в итоге была достигнута и позволила Али-резе Фируздже разделить на финише 1-3 места.

Б.Дяк – А.Фирузджа Бухарест, 2025

1. d4 ♙f6 2. c4 g6 3. ♙c3 ♙g7 4. e4 d6 5. ♙e2 0-0 6. ♙f3 ♙a6. Редкий и потому малоизученный вариант староиндийской защиты, оставляющий гроссмейстерам больше свободы для творчества. 7. 0-0 e5 8. ♙e3 ♙g4 9. ♙g5 f6 10. ♙c1 ♙h6 11. ♙b1! ♙f7 12. b4 c6 13. de fe 14. c5 dc 15. ♙a6 ba 16. bc ♜f6? Объективно сильнее 16... ♙d1! 17. ♙d1 ♙f6, так как наличие ферзей на доске только помогает атаке белых. Но черные вынуждены рисковать и усложнять игру. 17. ♙a4 ♙g4 18. ♙e1 ♙ac8.



19. ♙e3. Темповый ход 19. ♙b7!, вероятно, привел бы к победе белых ввиду слабости

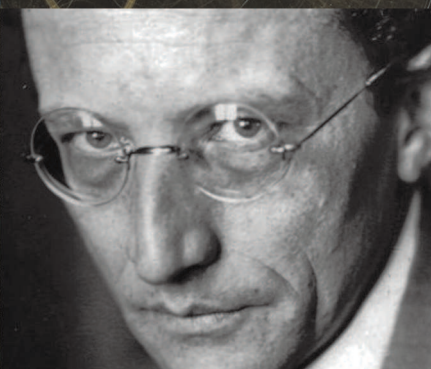
черных пешек на ферзевом фланге. 19... ♙c7 20. ♙a6 ♙g5 21. f3 (и снова сильнее 21. ♙b7!) ♙c8 22. ♜c4+ ♙e6 23. ♜e2 ♙f7 24. ♙d1 ♙e6 25. ♙a6 ♙d4 26. ♙f2?! Точнее 26. ♙e2, разменивая опасного черного коня. 26... ♙d8 27. ♙fd2 ♙cd7?! (27... ♙e7 28. ♙d3 ♙cd7) 28. ♙e2 ♙f8 29. ♙d4 ed 30. ♙d3 ♙e7 31. ♙a5 ♙dd7 32. ♙h1 ♙h6 33. ♙b2 ♙e3 34. ♙a6 h5 35. e5 ♙e6 36. ♙g3 h4 37. ♙e4 h3 38. ♙f6+?! Белые напрасно принимают жертву качества, сильнее компьютерное 38. ♙df2! ♙f2 39. ♙f6+ ♙g7 40. ♙f2, и белые используют лишний темп для f3-f4, продолжая атаку. 38... ♙g7 39. ♙d7 ♙d7 40. ♙f1 hg+ 41. ♙g2 ♙f5 42. ♙g3 g5 43. ♙g2 ♙d5 44. h4 ♙e6? (компьютерный советник предпочитает идейное 44... ♙f8, освобождая поле g7 для ладьи после 45. hg ♙g7) 45. ♙a3? (человеку почти невозможно «поднять» 45. ♙a4! ♙c4 46. ♜c2, чтобы контролировать поле c4) a5 46. hg ♙f5 47. g6 ♙b7 48. ♙e1? (48. ♙f2! ♙c4 49. ♙c1 – здесь наилучшее поле для ладьи) ♙c4 49. ♙d1 ♙d3 50. ♙d3 ♙b1! 51. ♙e3 ♙h5? К победе ведет 51...de! 52. ♙e3 ♙b2+ 53. ♙f1, и разница в активности тяжелых фигур сказывается быстро: 53...♙b1+ 54. ♙e1 ♙d3+ 55. ♙g1 ♙b1, выигрывая ферзя. 52. ♙h3. Белые упускают единственный путь к спасению: 52. ♙d3! ♙h1+ 53. ♙f2 de+ 54. ♙e3 ♙c1+ 55. ♙d2 ♙c5+ 56. ♙f4 ♙b4+ 57. ♙f5 ♙f8+ 58. ♙g5 ♙e7+ 59. ♙f5, и черные вынуждены согласиться на вечный шах. 52... ♙g5+ 53. ♙g3 ♙e3 54. ♙e3 de, и черная пешка проходит в ферзи, поэтому белые сдались.

А.Русанов

Индекс 90964

Уроки с физикой

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР



Почему в микромире поток заряженных
частиц может туннелировать?



(Подробнее – на с.9 внутри журнала)