

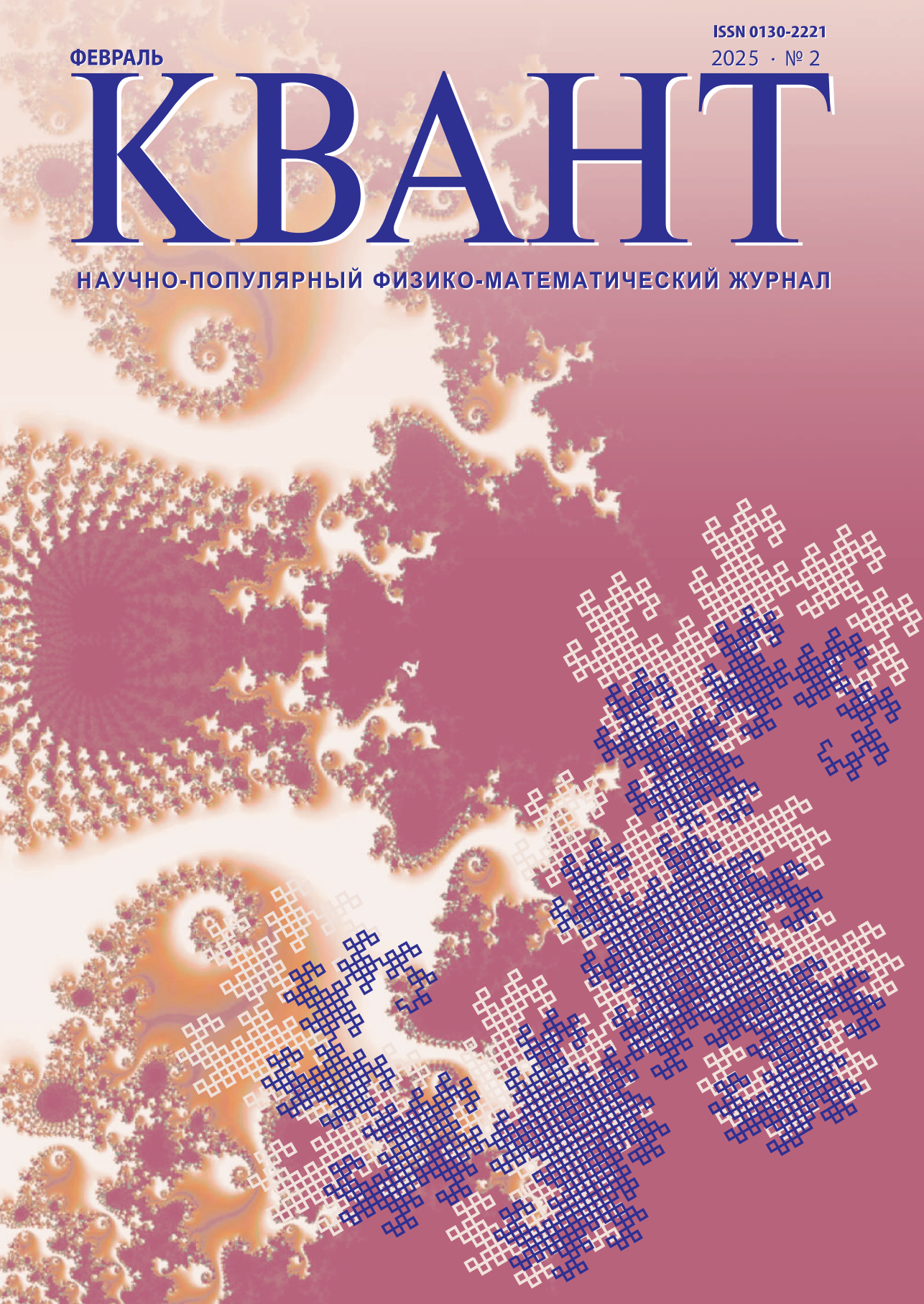
ISSN 0130-2221

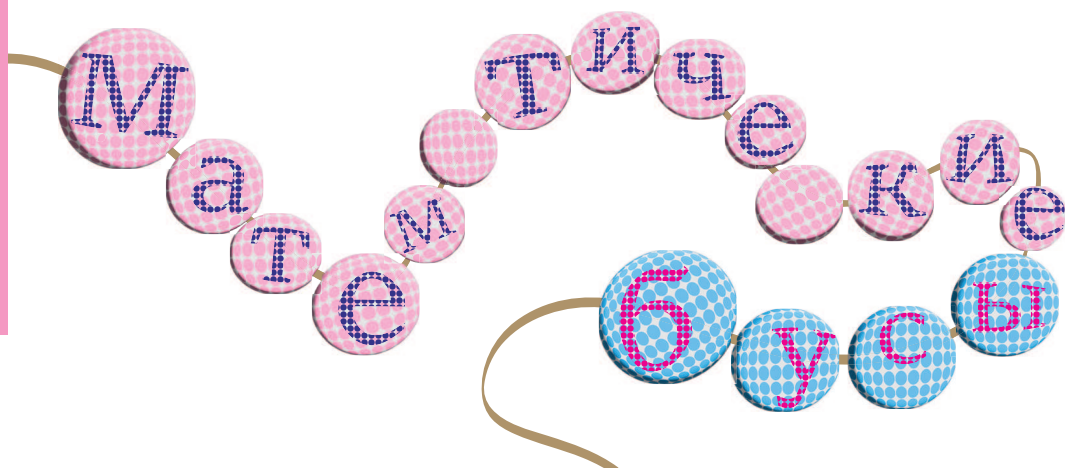
2025 · № 2

ФЕВРАЛЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





Бусины головоломки пронумерованы числами от 1 до 32. Снимите бусины с нити, их нужно будет нанизать заново так, чтобы сумма чисел на любых двух соседних бусинах равнялась квадрату некоторого числа. В том числе квадратом должна быть сумма чисел на первой бусине и на последней, т.е. бусы должны быть замкнутыми. На бусах, показанных на фотографии, есть только три пары соседних бусин, на которых суммы являются квадратами: $4 + 5$, $12 + 13$ и $24 + 25$.

Поскольку головоломка математическая, то ее удобнее сначала решить с карандашом в руках, а потом правильно нанизать бусины. Подумайте, сколько решений имеет эта головоломка.

Желаем удачи!

Н.Авилов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский
физико-технический институт
Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
К.А.Кноп, П.А.Кожевников,
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов,
А.А.Леонович, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Сверхпроводимость. Факты и перспективы
(к 100-летию квантовой механики). *Л.Белопухов*
20 Самоподобие. *В.Кириченко, В.Тиморин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 29 Задачи M2830–M2833, Ф2837–Ф2840
31 Решения задач M2818–M2821, Ф2821–Ф2828

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Самоподобие в картинках

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 40 Задачи

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 41 Задачи 21–24

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Затяжной прыжок и вихрь мыслей. *А.Стасенко*

ИНФОРМАЦИЯ

- 43 Заочная физико-техническая школа МФТИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 45 Why-точки, полуописанные окружности
и прямая Эйлера. *Ф.Бахарев, Г.Челноков*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 51 Тянем-потянем резину. *С.Варламов*

ОЛИМПИАДЫ

- 55 Муниципальный этап LVIII Всероссийской
олимпиады школьников по физике

- 60 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (28)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Самоподобие»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Сверхпроводимость. Факты и перспективы

(к 100-летию квантовой механики)

Л. БЕЛОПУХОВ

ПОЧТИ С ТАКИМ ЖЕ ЗАГОЛОВ-ком в «Кванте» №6 за 1988 год была напечатана замечательная статья А.Абрикосова, одного из нобелевских лауреатов «за сверхпроводимость». Но с тех пор прошло уже более 36 лет!



Алексей Алексеевич Абрикосов

В настоящей статье освещается более подробно история получения низких температур («азотных», «водородных» и «гелиевых»), без которых открытие сверхпроводимости и ее использование было бы невозможным. И, конечно, рассказывается о том применении сверхпроводимости, которое существует в наше время.

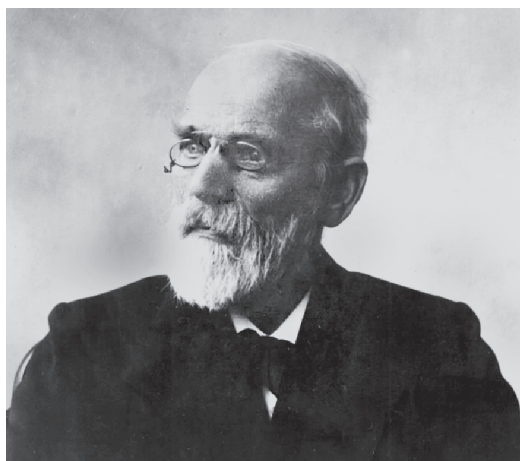
Явление сверхпроводимости было открыто уже довольно давно, в ходе работ по получению низких температур для сжижения газов. Превратить газ в жидкость, на первый взгляд, довольно легко – достаточно его как следует сжать. Например, бытового баллонный газ пропан, сжатый до 1,6 МПа, при комнатной температуре является жид-

костью, которой в 27-литровом баллоне помещается 11 килограммов. Удобно для перевозки и хранения.

Получение низких температур. Сжижение газов

Еще в 1850-е годы ученые (в том числе и Д.И.Менделеев) установили, что с помощью сжатия превратить газ в жидкость можно только в том случае, если температура его будет ниже некоторого критического значения. В 1873 году голландский физик Йоханнес Дидерик Ван дер Ваальс (1837–1923) в своей докторской диссертации предложил полуэмпирическое уравнение состояния вещества, пригодное как для газообразного, так и для жидкого состояния. Из этого уравнения следовала и возможность существования некоторого промежуточного состояния, параметры которого (давление, плотность и температуру) Ван дер Ваальс назвал критическими. Таким образом, критическая температура вещества получила свое обоснование. Для пропана эта температура достаточно высока – 370 К (97 °С). Но для очень многих газов она ниже 0 °С. Например, для метана эта температура равна 191 К (–82 °С), для кислорода 155 К (–119 °С), для азота 127 К (–146 °С). И самая низкая – для гелия, это 5,2 К (–267,9 °С).

Выводы Ван дер Ваальса были основаны на молекулярно-кинетических представлениях о веществе, которые тогда еще не были признаны многими физиками. И только в 1910 году (через 37 лет), когда уже все физики признали существование атомов и молекул, Ван дер Ваальс получил заслу-



Йоханнес Дидерик Ван дер Ваальс

женную Нобелевскую премию с формулировкой «За работу над уравнением состояния газов и жидкостей». К этому времени понятие критической температуры уже прочно вошло в практику сжижения газов. Температура сжижения обязательно должна быть ниже критической. Температура сжижения при этом может сильно зависеть от давления. Поэтому в таблицах обычно приводят температуры кипения при атмосферном давлении, т.е. температуры, при которых «газовая жидкость» закипает. Для пропана это 231 К (-42°C), для метана 112 К (-161°C), для кислорода 90 К (-183°C), для азота 77 К (-196°C), для водорода 20,1 К, для гелия 4,2 К.

И где же взять такие низкие температуры? Самая низкая температура на Земле зафиксирована на антарктической станции «Восток» 21 июля 1983 года, это $-89,2^{\circ}\text{C}$. В космосе, конечно, есть более низкие температуры. На телах Солнечной системы самая низкая температура – это 33 К (-240°C). И как ни странно, она наблюдается не на наиболее удаленных от Солнца планетах, а совсем недалеко от Земли – на дне некоторых очень глубоких лунных кратеров, куда никогда не заглядывает Солнце. А самая низкая температура во Вселенной зафиксирована в протопланетарной туманности Бумеранг на расстоянии 5000 световых лет от Земли – это 1 К. Это ниже температуры реликтового излучения. Но все же не абсолютный ноль.

На Земле низкие и сверхнизкие (криогенные) температуры уже давно стали получать в лабораторных и технических условиях. Сначала это было стремлением получить температуру в несколько десятков кельвинов, потом – несколько кельвинов. А сегодня идет соревнование научных лабораторий – подобраться как можно ближе к абсолютному нулю. И на этом пути достигнуты поразительные успехи. Сегодня «мировой рекорд» – это $3,8 \cdot 10^{-11}$ К, или тридцать восемь пикокельвинов (Германия, исследовательский центр Бременского университета).

А зачем вообще все это нужно – получать низкие и особенно сверхнизкие температуры? Зачем нужны сжиженные газы? Рассмотрим несколько причин.

Во-первых – это удовлетворение научного любопытства и неизбежный при этом исследовательский азарт. Что ж? Это вообще важная причина развития науки. Как сказал Энрико Ферми, создав и запустив 2 декабря 1942 года первый в мире ядерный реактор, предназначенный для получения плутония для атомной бомбы: «Это, прежде всего, очень интересная физика».

Вторая причина – это изучение свойств веществ и их поведения при низких температурах. Они могут сильно отличаться от свойств и поведения при обычных температурах. Большое научное значение имеет изучение химических реакций в условиях, когда скорости хаотического движения частиц становятся совсем незначительными и для реакции остаются более существенными силы взаимодействия между молекулами. В химических лабораториях нередко можно увидеть баллоны с жидким азотом и даже с жидким гелием.

Знание свойств веществ при низких температурах необходимо и во многих человеческих делах, например в арктических и особенно в антарктических экспедициях. Так, недостаточное знание свойств олова при низких температурах стало одной из причин трагического конца экспедиции Роберта Скотта к Южному полюсу в 1912 году. В этой экспедиции олово было основным элементом пайки швов в бидонах для керо-



Руаль Амундсен на Южном полюсе

сина, единственного источника тепла в антарктическом холоде. Но уже было известно, что олово при температуре ниже $-33\text{ }^{\circ}\text{C}$ испытывает алломорфное превращение своей кристаллической формы – белое олово превращается в серое. Если белое олово – пластичное вещество, то серое олово – порошок. И паяльные швы при низких температурах могут разрушаться, если в составе пайки будет больше олова, чем свинца. Так вот, на обратном пути от достигнутой цели экспедиция Скотта осталась почти без керосина и замерзла в 17 километрах от базы. Последним потерял сознание сам Роберт Скотт, записывающий ради науки в дневнике все происходящее до самого конца. Отзвук этой трагедии был особенно тяжел и потому, что к полюсу шли одновременно две экспедиции – английская Роберта Скотта и норвежская Руаля Амундсена. Соревнование было выиграно норвежской экспедицией, которая покорила полюс 14 декабря 1911 года. Через 34 дня достигла полюса и экспедиция Скотта. И можно представить себе горе и отчаяние англичан, увидевших на «подошве» мира норвежский флаг и не ставших первыми, кто покорила Южный полюс!

Трагедия от незнания свойств веществ при низких температурах произошла и в

наши дни – 28 января 1986 года американский космический шаттл «Челленджер» через несколько секунд после старта потерпел аварию. Погибли семь астронавтов (в том числе две женщины). Причиной несчастья стала утечка продуктов сгорания твердого ракетного топлива сквозь уплотнительные кольца, материал которых изменил свои механические свойства из-за необычно низкой температуры воздуха на мысе Канаверал ($-8\text{ }^{\circ}\text{C}$, а обычно было выше нуля). Ракета с «Челленджером» простояла на старте несколько суток при этой морозной температуре, и этого оказалось достаточно для изменения формы колец. Известно было, что многие полимеры меняют свои свойства при температурах жидкого азота ($-196\text{ }^{\circ}\text{C}$). Например, каучук становится хрупким и резиновые детали разбиваются на куски, будто они сделаны из стекла. Но никто не ожидал, что нечто подобное может происходить с пластмассой при температуре небольшого мороза.

Правительственная комиссия долго не могла найти причину аварии. И только когда в комиссию по настоянию президента Рональда Рейгана был включен знаменитый физик Ричард Фейнман (1918–1988), он нашел эту причину и продемонстрировал на пресс-конференции потерю формы кольца при опускании его в ледяную воду. Для того чтобы обнаружить эту причину аварии, Фейнману пришлось тщательно проанализировать технологию изготовления всех деталей ракетного двигателя и их техническую проверку. Эту гигантскую работу он провел в перерывах между несколькими онкологическими операциями. «Я работал, ничего не зная, – говорил потом Фейнман, – и у меня было лишь немного времени, чтобы исправить это». Некоторые биографы Фейнмана считают, что главную роль в том, что он довел до конца это свое исследование, сыграла даже не личная просьба президента, а любящая жена Фейнмана, которая считала, что напряженная работа – лучшее средство в борьбе с болезнью, и уговорила мужа взяться за эту работу. Что ж? Два года

полноценной жизни в этой борьбе работа смогла у болезни отвоювать.

Важное место в вопросе изучения свойств веществ при низких температурах заняло исследование электрических и магнитных свойств веществ, в том числе исследование явления сверхпроводимости.

И, наконец, есть и *третья причина* получения низких и сверхнизких температур. Во второй половине 19-го века технологическое развитие металлургии потребовало применения кислородного дутья в печах для высокотемпературного плавления металлов. Появилась целая промышленная отрасль получения жидкого кислорода. Сейчас практически вся металлургическая промышленность перешла на кислородное дутье. А во второй половине 20-го века жидкий кислород и жидкий водород получили широкое применение в качестве компонентов ракетного топлива. Без них был бы нереальным тот скачок в исследовании Солнечной системы и космогонии, который совершило человечество. Автомобили и поезда на сжиженном водороде в качестве топлива уже испытываются во многих странах. И Россия не хочет отставать. Сейчас готовится к выпуску на одном из предприятий Ростеха одна из таких моделей в качестве представительской автомашины Президента России.

Жидкий кислород нашел широкое применение и во многих других отраслях, например в стекольной промышленности. Но особое значение он приобрел в медицине. И это не только те кислородные подушки, для снаряжения которых жидким кислородом обеспечиваются больницы и аптеки. Возможно, что в недавней победе над короновирусной пандемией основную роль сыграли не поспешно изобретенные вакцины, а именно применение кислородных масок и система доставка кислорода к каждой койке во всех специально созданных больницах.

Ну, и конечно, транспортировка сжиженного природного газа на специальных танкерах. Китай, Индию, Индонезию и континентальную Западную Европу природа не наделила крупными газовыми месторождениями. И роль морских пере-

возок сжиженного природного газа из Катара, США, Канады и Австралии стала особенно велика.

Отдельной *четвертой причиной* надо выделить получение сверхнизких температур для создания мощных магнитных полей (в единицы и десятки тесла), однородных в достаточно обширном пространстве. Нетрудно убедиться в том, что для этого необходимы соленоиды с силой тока в обмотках в десятки тысяч ампер, но их джоулево тепло расплавит металл проводов и сожжет изоляцию. Когда сто лет назад в Кембридже П.Л.Капица создавал сильные магнитные поля, он использовал токи короткого замыкания, разрушающие электрические цепи. При этом сильное магнитное поле существовало хотя и очень короткое время, но достаточное для изучения внутриаомных процессов.

Единственный способ создания сильных магнитных полей длительного, а не импульсного действия, это использовать явление сверхпроводимости, при котором джоулево тепло отсутствует полностью. А это явление возникает в электротехнических металлических материалах (проводах) при нормальном давлении только при сверхнизких температурах (несколько кельвинов). И только с помощью жидкого гелия можно создавать и поддерживать такую температуру.

Без жидкого гелия было бы невозможно создать современные мощные ускорители.

Но уже и сейчас произошло резкое увеличение производства жидкого гелия и использование сверхпроводимости не только для научных целей, но и для человеческих нужд. Это связано с применением сильных магнитных полей прежде всего для целей медицинской диагностики.

Так как же все-таки получают низкие температуры, необходимые для сжижения газов и изучения свойств веществ при таких температурах? Кратко остановимся на этом вопросе. Подробное рассмотрение увело бы слишком далеко от основной темы статьи – сверхпроводимости.

Основные способы криогенной техники – охлаждение жидкости при ее испарении, понижение температуры при адиабатичес-

ком расширении газа, использование эффекта Джоуля–Томсона, магнитное охлаждение. Для понижения температуры газа ниже критической часто бывает достаточно только первого способа – охлаждения при испарении жидкости. Для этой цели лучше всего подходят элементоорганические фторсодержащие углеводороды, получившие название фреонов или хладонов (их известно около 40). В полых стенках холодильной (или морозильной) камеры происходит испарение жидкости за счет тепла, отнимаемого от содержимого камеры. Пары фреона поступают в другую камеру, где подвергаются сжатию компрессором. При конденсации они отдают в окружающее пространство тепло, часть которого представляет и тепло, полученное из холодильной камеры (задняя стенка работающего кухонного холодильника всегда теплая). Значит, при этом тепло передается от тела с низкой температурой (содержимого холодильной камеры) к телу с более высокой температурой (окружающему холодильнику пространству). Но это ни в коем случае не является нарушением второго закона термодинамики, который запрещает такие *самопроизвольные* процессы. А холодильнику необходимо для этого внешнее воздействие – работа компрессора (и соответствующая оплата этой работы).

В кухонном холодильнике рабочая температура в морозильной камере $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$, в холодильниках пищевой промышленности $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для целей сжижения некоторых газов используют более дорогие хладоны, позволяющие получить и более низкие температуры. Но все равно они недостаточно низки для сжижения таких газов, как метан, кислород, азот, водород и гелий. Простой способ понижения температуры – адиабатическое расширение газа с совершением работы. В охлаждающих установках (детандерах) работа газа – это энергия движения поршня (поршневые детандеры) или вращения турбины (турбодетандеры). Быстрота процесса обеспечивает его адиабатичность и, следовательно, понижение температуры. Процесс повторяется несколько раз. При этом каждый

раз охлажденный газ нужно снова сжимать – необходим компрессор. Это понижает КПД установки и удорожает производство сжиженного газа.

В 30-е годы прошлого века знаменитый физик, будущий нобелевский лауреат, академик П.Л.Капица предложил новую конструкцию турбодетандера с общей осью вращения турбины и компрессора. Охлаждающийся газ при этом «работал» на поджатие следующей порции газа. Это резко повысило КПД установки, увеличило ее производительность и удешевило производство. Но потребовалась большая работа по подбору соответствующих типов турбин и компрессоров. И неслучайно в 1943 году именно П.Л.Капица был назначен начальником Главного управления Совнаркома по кислороду. Страна остро нуждалась в увеличении применения жидкого кислорода в металлургической промышленности, и решающее участие Капицы в этом деле – редкий случай активного участия ученого, занимавшегося фундаментальной физикой, в практическом деле. За короткое время производство жидкого кислорода в СССР значительно возросло. И сегодня во всем мире турбодетандеры Капицы являются составной частью установок по сжижению газов.

В этих установках используется и еще один способ понижения температуры – с помощью эффекта Джоуля–Томсона. Этот эффект был установлен в 1853–54 годах двумя английскими физиками, уже знаменитым тогда Джеймсом Джоулем (1818–1889) и его младшим другом и соратником в науке Уильямом Томсоном (1824–1907), не менее знаменитым под именем лорда Кельвина. Они экспериментально установили, что при адиабатическом расширении газа без совершения работы его температура изменяется. Согласно модели идеального газа, в которой пренебрегается силами взаимодействия между молекулами, этого не должно быть. Ведь по первому закону термодинамики изменение внутренней энергии при таком расширении равно нулю. Значит, и изменение температуры не должно иметь места. А оно существует. В чем же дело?

Джоуль и Томсон предположили, что все дело в неидеальности газа. Томсон предложил термин *real gas*, и долгое время этот термин переводился на русский язык как *настоящий газ*, *действительный газ*. В наше время неидеальный газ повсюду называется *реальным*. В отличие от модели идеального газа, в реальных газах нужно учитывать силы взаимодействия между молекулами и их потенциальную энергию. Это непростое дело. Ведь при малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания, а при несколько больших расстояниях – силы притяжения. При расширении газа вначале потенциальная энергия взаимодействия молекул увеличивается, а затем уменьшается. Следовательно, при постоянстве внутренней энергии газа вначале температура повышается, а затем начинает понижаться.

Для экспериментального подтверждения эффекта Джоуля и Томсон придумали устройство, в котором газ из сосуда с большим давлением, расширяясь, переходил в сосуд большого объема через пористую перегородку. При таком медленном расширении можно было пренебречь работой газа. Изменение температуры при этом и получило название эффекта Джоуля–Томсона.

Далеко не сразу этот эффект нашел практическое применение. Ведь в середине 19-го века молекулярные представления о веществе большинством физиков не признавались. И только через 20 лет Ван дер Ваальс впервые сделал теоретическое обоснование эффекта Джоуля–Томсона.

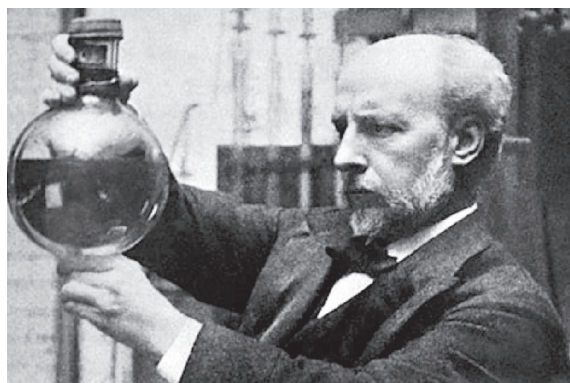
И еще через 20 лет талантливый немецкий инженер и предприниматель Карл фон Линде (1842–1934) применил эффект Джоуля–Томсона при изобретении и производстве холодильных установок для получения жидкого кислорода. В холодильной машине Линде медленность расширения газа достигалась с помощью специального профилированного клапана с очень узким отверстием, ограничивающим скорость истечения газа. Линде назвал этот клапан немецким словом *Drossel*, а сам процесс расширения без совершения работы – *дресселированием*. Эти термины

получили широкое применение в современной технике, в частности в электротехнике, и понимаются теперь как *ограничитель* и *ограничение*. А в теплотехнике дресселированием называют не только прохождение газа через узкое отверстие, но и процесс расширения газа сквозь пористую перегородку.

Сегодня масштаб применения дресселирования (эффекта Джоуля–Томсона) очень велик. Установка с дресселированием есть, например, на каждой газовой скважине. Дело в том, что природный газ всегда содержит в своем составе водяной пар. Температура газа при выходе из скважины обычно несколько выше 100 °С. Крайне нежелательно в трубопровод, идущий от каждой скважины к общему газопроводу, пустить водяной пар, который будет мощным разрушителем металла трубы. Поэтому газ подвергают дресселированию, после которого температура газа становится ниже 100 °С и вода, ставшая жидкой, уже не попадает в трубопровод. Представьте себе количество газовых скважин с применением эффекта Джоуля–Томсона в сегодняшнем мире!

Сжижение гелия

В конце 19-го века Линде и другие исследователи занимались созданием и усовершенствованием холодильных машин, как бытовых, так и промышленных, для получения жидкого воздуха (кислорода и азота). Но независимо от Линде шотландский физик и химик Джеймс Дьюар (1842–1923) тоже работал над сжижением газов. В 1898 году ему удалось получить водород в жидком состоянии, а в 1899 году – твердый водород. Немалую роль в его успехе сыграл изобретенный им сосуд для длительного хранения сжиженных газов. Теплоизоляция в таких сосудах достигалась за счет двойных стенок, в пространстве между которыми осуществлялся глубокий вакуум. Сосуды этого типа получили название сосудов Дьюара, под которым широко применяются в химических лабораториях (обычно для хранения и транспортировки жидкого азота).



Джеймс Дьюар

Вы скажете, а разве это не обычный термос? Ведь очень похоже! Да, действительно. Изобретение для хранения холода легко превратить в устройство для хранения тепла. Дьюар не имел практической жилки и не стал заниматься «термосами». Идею подхватила американская компания, которая и придумала это слово, чтобы отличать свое производство от того, что делал Дьюар. Бытовые термосы имеют более простую конструкцию и требования к вакууму у них не такие жесткие. А главное – людям они неизмеримо нужнее, чем научные сосуды для хранения холода. Дьюар не озаботился о патентовании своего изобретения и остался ни при чем, несмотря на многократные попытки судебных исков к разбогатевшей компании «Термос». Не правда ли, парадокс – изобретение для хранения космического холода стало символом житейского тепла и уюта! Но имя Дьюара все-таки не пропало – все химики его знают.

Естественно, что после сжижения водорода Дьюар стал пытаться получить жидкий гелий. Но он занимался слишком многими вопросами как в физике, так и в химии, как мы бы сказали, слишком разбрасывался в своих научных интересах. Возможно, его отвлекала от науки борьба за приоритет изобретения вакуумного сосуда. И не только. Так или иначе, Дьюар проиграл главную ставку в криогенных исследованиях – получение жидкого гелия. И проиграл он ее самому выдающемуся ученому в этой области, голландскому физiku Хейке Камерлинг-Оннесу (1853–1926).

В 1882 году Камерлинг-Оннес стал профессором Лейденского университета, где в 1894 году создал криогенную лабораторию и стал ее бессменным руководителем. Девизом лаборатории он провозгласил: «Через измерение к знанию».

Несколько лет спустя эта лаборатория стала признанным научным центром работ по низким и сверхнизким температурам. Она отличалась от других лабораторий мощной технологической базой, уникальным оборудованием и хорошей подготовкой вспомогательного персонала. Здесь жидкие газы производились не каплями, а литрами (в 1904 году установки лаборатории давали 4 литра жидкого водорода в час). В лаборатории изучались свойства веществ при температурах ниже 20 К – спектры поглощения, фосфоресценция, вязкость сжиженных газов, их магнитные и электрические свойства.

Но главной целью работы лаборатории Камерлинг-Оннес считал сжижение единственного оставшегося «непокоренным» газа – гелия. Была построена установка с каскадным использованием эффекта Джоуля-Томсона в охлаждаемом ниже 20 К газе. Но никто не знал, до какой температуры нужно охладить гелий, чтобы он стал жидкостью. Из расчетов по уравнению Ван дер Ваальса следовало только то, что она ниже 20 К.

И вот на 10 июля 1908 года был назначен этот эксперимент. В 8 часов утра начала работать установка по производству жидкого водорода. К 2 часам дня было наработано необходимое количество – 20 литров. В присутствии многих физиков из разных стран в 5 часов началась циркуляция охлаждаемого гелиевого пара по трубам, проходящим сквозь охлаждающийся из-за испарения жидкий водород. Все взоры были прикованы к стеклянной колбе в центре установки, где должна была собираться гелиевая жидкость.

Долгое время колба казалась пустой. Наступил вечер. И в 8 часов один из физиков обратил внимание на то, что температура замерла на значении 4,2 К и больше не опускается. Возникло предпо-



Хейке Камерлинг-Оннес

ложение, что фазовый переход сжижения гелия уже идет, поэтому температура и остается постоянной. А когда сильно осветили центральную колбу, оказалось, что она уже наполнилась жидкостью. Можно представить чувство удовлетворения и радости у всех сотрудников лаборатории! Вот слова самого Камерлинг-Оннеса: «Я был сверх ума от радости, когда смог продемонстрировать жидкий гелий моему другу Ван дер Ваальсу, чья теория была моей путеводной нитью, позволившей довести сжижение до конца».

В дальнейшем при охлаждении жидкого гелия в лаборатории Камерлинг-Оннеса была достигнута температура 0,9 К. В те годы это была наинизшая температура, полученная в лаборатории. И в научном сообществе, и в прессе Камерлинг-Оннес получил шутивно-уважительное звание «Господин Абсолютного Нуля». Для получения еще более низких температур понадобились другие, не теплотехнические методы (адиабатическое размагничивание парамагнитных солей, эффект Пельтье и др.). Получить гелий в твердом (кристаллическом) состоянии при нормальном давлении, по-видимому, невозможно. Это удалось сделать только в 1923 году при давлении 2,5 МПа (при температуре 1,5 К).

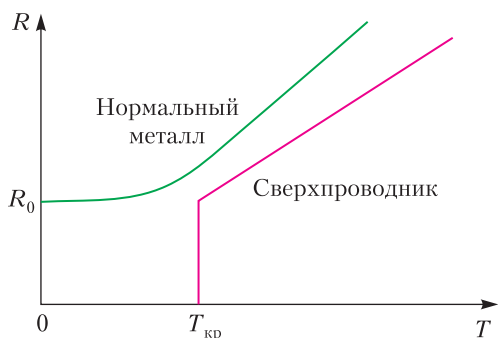
Сверхпроводимость. Открытие

Но основной интерес после получения жидкого гелия Камерлинг-Оннес направил на изучение температурной зависимо-

сти сопротивления металлов при температурах ниже 20 К. Прежде всего это нужно было для измерения низких температур. Уже было известно, что если при температурах выше 20 К эта зависимость линейная, то при более низких температурах она стремится не к нулю, а к некоторому остаточному сопротивлению, величина которого сильно зависела от чистоты металла. Наиболее чистыми в то время считались золото и платина. Однако и у золотых, и у платиновых проводников при температурах ниже 10 К сопротивление переставало заметно уменьшаться точно так же, как и у других металлов, которые заведомо не были достаточно хорошо очищены. Еще и еще раз подтверждались предсказания Лоренца о температурной зависимости сопротивления металлов при низких температурах, сделанные им на основании уточнения классической электронной теории электропроводности.

Превосходно зная химическую технологию, Камерлинг-Оннес выбирает для исследований проводники, сделанные из твердой ртути. Его не смущает то, что ртуть — это металл, далекий от электротехнического применения. Ведь она находится в жидком состоянии только до $-39\text{ }^{\circ}\text{C}$. Поэтому уличные термометры и не бывают ртутными (ртуть в них может замерзнуть и разорвать капиллярную трубочку). Но Камерлинг-Оннеса интересует сопротивление при гораздо более низких температурах. И он знает, что существует технология глубокой очистки ртути от всех примесей. Когда ртуть еще находится в жидком состоянии, для ее очистки можно применять различные методы, в том числе метод многократной перегонки. Анализы показали, что при этом можно добиться чистоты в «пять девяток», т.е. до 99,999%. (Это означает — один атом постороннего элемента на 100000 атомов ртути.)

И Камерлинг-Оннес со своими сотрудниками ждет подтверждения предсказаний Лоренца о характере уменьшения электрического сопротивления чистого металла при приближении к нулю абсолютной



Зависимость сопротивления металла от температуры

температуры. Он ведь уже с помощью жидкого гелия достиг понижения температуры до значений, меньших 1 К. Подготовка эксперимента с чистой ртутью заняла длительное время. Самым главным была установка более точной аппаратуры, измерявшей электрическое сопротивление. И вот все готово, на 8 апреля 1911 года назначен решающий опыт. Получены стержни из замерзшей ртути. Их последовательно соединяют так, что общая длина проводника составляет полметра. Стержни погружают в сосуд с гелием. Начинается охлаждение остывающей водородной жидкостью. Приборы показывают 10 К, 8 К, 5 К. Вот, наконец, при 4,2 К гелий становится жидким. На графике зависимости удельного сопротивления ртути от температуры четко вырисовывается прямолинейная зависимость, направленная к $T = 0$. Как вдруг... (в истории физики нередко случается это «как вдруг...»).

При температуре 3 К прибор, измерявший ток в цепи с ртутным сопротивлением, показал значение, вышедшее за пределы шкалы. Первая мысль – прибор неисправен. Заменили. Взяли прибор с другой шкалой. И новый прибор показал такой большой ток, который мог быть, только если сопротивление ртутного проводника практически равнялось нулю. Этот совершенно неожиданный результат заставил поставить еще серию опытов, в которых температура фиксировалась с большей точностью. И что же оказалось? Если при 4,2 К сопротивление ртути имело еще некоторое малое значение, то при 4,15 К

оно практически полностью исчезало. При дальнейшем понижении температуры сопротивление оставалось нулевым. А при повышении температуры до 4,15 К оно восстанавливалось до прежней величины.

Так было открыто явление, которое сам Камерлинг-Оннес назвал *сверхпроводимостью*. Для проверки явления с помощью переменного магнитного поля в кольце из ртутного проводника, находящегося в сверхпроводящем состоянии, был возбужден индукционный ток. При выключении магнитного поля ток не исчезал и его сила оставалась постоянной. Прошел час, другой, прошли сутки, неделя, а ток все продолжал свое существование, нисколько не убывая. Сила тока фиксировалась по тому магнитному полю, которое возникало от этого тока на оси кольца. Конечно, при этом нужно было следить, чтобы сверхпроводящее кольцо всегда находилось при температуре ниже 4,15 К – все время добавлять жидкий гелий. Позднее, когда жидкий гелий стал значительно дешевле (его стали производить не из воздуха, а из природного газа, где его содержание заметно выше), такой эксперимент продлился полтора года. Он позволил утверждать, что величина удельного сопротивления в веществе, находящемся в сверхпроводящем состоянии, отличается от нуля не более чем на 10^{-25} Ом·м.

В своих статьях 1911 и 1912 годов Камерлинг-Оннес сформулировал вывод, что при температуре 4,15 К происходит фазовый переход кристаллической ртути из одного твердого состояния в другое. В 1913 году он обнаружил переход в сверхпроводящее состояние у чистого свинца (при 7,26 К) и у чистого олова (при 3,69 К). Обратите внимание на высокую точность, которой удалось достичь при измерении критической температуры фазового перехода.

В 1913 году Хейке Камерлинг-Оннес стал нобелевским лауреатом по физике «за исследование свойств вещества при низких температурах, что привело, в числе прочего, к получению жидкого гелия». В этой формулировке главное достижение

Камерлинг-Оннеса, открытие сверхпроводимости, попало в «прочие» исследования. Надо полагать, что члены нобелевского комитета по физике посчитали сверхпроводимость явлением, которое из-за необходимости сверхнизких «гелиевых» температур никогда не удастся использовать на практике. К тому же теоретически оно было совершенно непонятно. С точки зрения тогдашней физики, оно не имело права на существование.

Сверхпроводимость.

Экспериментальные и теоретические достижения

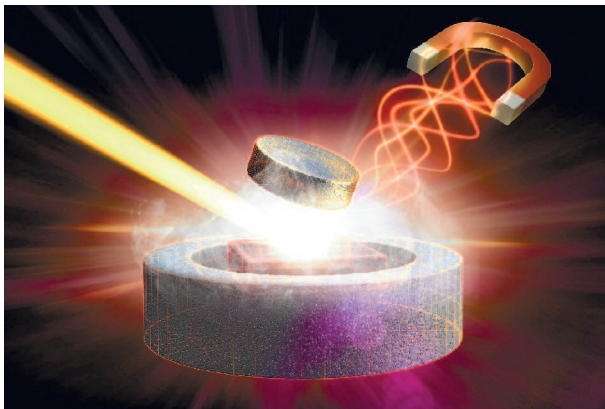
Камерлинг-Оннес стал нобелевским лауреатом за свои экспериментальные достижения, в которых он стремился получить максимальную точность. Жидкий гелий получили бы и без него (Дьюар, Линде и др.), только несколько позднее. А вот сверхпроводимость еще долгое время могли и не заметить. Камерлинг-Оннес сделал свое открытие, целенаправленно идя к нему почти три года.

Он при этом обратил внимание и на другое низкотемпературное явление – практически полное отсутствие вязкости в жидком гелии при температуре ниже 2,17 К. В стеклянном сосуде тонкий слой жидкого гелия поднимался по стенкам сосуда, гелий мог самопроизвольно вытекать из сосуда или перетекать из одного сосуда в другой. Камерлинг-Оннес не стал изучать это явление, у него было слишком мало жидкого гелия. Честь открытия этого явления принадлежит академику П.Л.Капице, который стал изучать его в 1938 году и назвал сверхтекучестью (Нобелевская премия по физике 1978 года «За фундаментальные изобретения в области низких температур»). Сопратник Капицы теоретик Л.Д.Ландау создал теорию сверхтекучести и участвовал в создании первых теоретических объяснений сверхпроводимости (Нобелевская премия по физике 1962 года «За новаторские теории конденсированных сред, в особенности жидкого гелия»).

А «Господин Абсолютного Нуля» продолжал заниматься сверхпроводимостью. В 1914 году он решил применить явление сверхпроводимости к созданию мощных магнитов, где в обмотках соленоида из сверхпроводящей свинцовой или оловянной проволоки сила тока от внешнего источника достигала бы тысяч ампер и рождала магнитное поле с индукцией в несколько тесла. В этих работах Камерлинг-Оннес обнаружил, что сверхпроводящие объекты в сильно неоднородном магнитном поле выталкивались из него с силой, даже превосходящей действующую на них силу тяготения, т.е. могли даже подняться в воздух. Он назвал это свойство сверхпроводников «левитирующим», т.е. «летательным». Опубликованные в его статьях фотографии висящих над магнитом сверхпроводящих предметов произвели сенсацию.

Первая мировая война надолго отложила дальнейшее изучение сверхпроводимости. Несмотря на то, что Нидерландам удалось сохранять нейтралитет, все экономические и научные связи были оборваны – и с Германией, и со странами Атлантики. Камерлинг-Оннес проявил себя в эти годы как деятельный пацифист. Он участвовал в конструировании и производстве железнодорожных вагонов-рефрижераторов и на свои деньги организовывал приюты для детей-сирот.

После войны научная работа в Лейденской лаборатории возобновилась. Сверхпроводимость была обнаружена у целого ряда

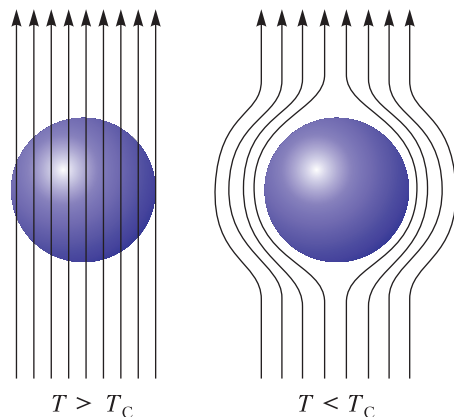


Левитация сверхпроводника

металлов (в том числе у железа и урана) и металлических соединений. Но почти у всех веществ критическая температура фазового перехода была равна нескольким кельвинам. А главное, сверхпроводимость разрушалась при индукции магнитного поля в десятые и сотые доли тесла. Применение таких сверхпроводников не давало особых преимуществ в электротехнических устройствах и в передаче энергии по проводам, ведь жидкий гелий, который необходим для поддержания сверхпроводящего состояния, обходился очень дорого.

Существенно, что в те годы теория не могла помочь поискам новых подходящих для практики сверхпроводников. Все попытки физиков-теоретиков были неудачны. Знание структуры металлов и электронная теория проводимости никак не объясняли это явление. Оказалось, что сверхпроводимость была первым явлением чисто квантовой природы, обнаруженным при исследовании макроскопического объекта. Это отметил еще в 1922 году Альберт Эйнштейн в своей небольшой статье «Теоретические замечания о сверхпроводимости металлов». Эйнштейн писал: «Для исследования этих свойств (сверхпроводимости и поведения жидкого гелия) пока что придется полагаться на эксперименты, поскольку мы еще далеки от понимания квантовой механики сложных систем». Эти слова великого физика о сверхпроводимости стали рождением термина *квантовая механика*. Эта новая наука получила от Эйнштейна имя за пару лет до своего рождения. А может быть, появление этого термина спровоцировало появление новой науки.

Уже в 1923 году Луи де Бройль бросил вызов классической ньютоновской механике, приписывая волновые свойства каждому объекту, имеющему импульс и энергию, а не только фотону. При этом связь между волновыми и корпускулярными характеристиками объекта задавалась теми же соотношениями, что и для фотона. Длина дебройлевской волны для макрообъектов столь мала, что их волновые свойства можно не учитывать. А вот для



Эффект Мейснера

электронов с их малой массой она может быть сравнима с пространством их обитания и тогда их волновые свойства выступают на первый план.

Эта гипотеза вдохновила плеяду блестящих физиков-теоретиков – Макса Борна, Вернера Гейзенберга, Эрвина Шрёдингера, Вольфганга Паули, Поля Дирака, которые в короткий срок (1925–27 годы) создали основы квантовой механики. Но применить ее к сверхпроводимости было непросто. Ведь кристаллическая металлическая структура – это сложная система, состоящая из ионов и свободных электронов. Требовалось больше экспериментальных фактов. Свойство сверхпроводников выталкивать магнитное поле было замечено Камерлинг-Оннесом еще в 1914 году, но наиболее полно оно позднее, в 1930-е годы, было экспериментально исследовано немецкими физиками под руководством Рудольфа Мейснера и поэтому носит имя «эффект Мейснера». Суть его заключается в том, что сверхпроводящие вещества являются идеальными диамагнетиками. Что это означает?

Термины «диамагнетизм», «диамагнитный эффект» и «диамагнетики» были введены в физику еще М. Фарадеем в 1845 году. Диамагнитным эффектом было названо возникновение в веществе под действием внешнего магнитного поля собственного магнитного поля, встречного внешнему. Причиной его является вращательное движение электронов вещества – как соб-

ственное (спиновое), так и орбитальное. Фарадей, еще ничего не зная об электронах и их вращении, понял, что это – своеобразное проявление правила Ленца (знака «–») в законе электромагнитной индукции. В обычном веществе величина этого встречного поля очень невелика, она составляет всего лишь 10^{-6} от величины внешнего магнитного поля. Диамагнетизм есть у всех веществ. Только он часто маскируется другим эффектом, усиливающим внешнее поле и называемым парамагнитным. Если парамагнитный эффект отсутствует, вещество называется диамагнетиком. Величина силы, выталкивающей диамагнетик из области сильного неоднородного поля, очень мала и обычно не учитывается в электротехнических конструкциях. Но оказалось, что у сверхпроводников встречное поле равно по величине внешнему, а внутри вещества магнитного поля нет. Следствием этого и является, в частности, большая сила, выталкивающая сверхпроводник из неоднородного магнитного поля. Эти исследования были проведены Р.Мейснером и его сотрудниками.

Русским физиком А.Абрикосовым был разработан теоретический механизм этого явления. У части сверхпроводников, металлов и их сплавов индукция магнитного поля убывает до нуля уже на расстоянии нескольких десятков нанометров от поверхности. Абрикосов назвал их сверхпроводниками первого рода. Но он допустил и существование других сверхпроводников, у которых внешнее поле частично проникает глубоко внутрь вещества. Абрикосов назвал их сверхпроводниками второго рода. Впоследствии выяснилось, что таких сверхпроводников большинство. И температура сверхпроводящего перехода у них оказалась выше, чем у сверхпроводников первого рода. В дальнейшем это стало иметь большое практическое значение. С использованием методов, основанных на эффекте Мейснера и гипотезе Абрикосова, были открыты сотни сверхпроводящих веществ первого и второго рода.

Особенно важным было экспериментальное открытие сверхпроводников второго рода ниобий-олова Nb_3Sn и ниобий-германия Nb_3Ge . У первого критическая температура (температура перехода в сверхпроводящее состояние) оказалась равной 18,5 К, а критическая индукция магнитного поля, разрушающего сверхпроводимость, равнялась 28 Тл. У второго – соответственно, 23,9 К и 10 Тл. К тому же эти материалы достаточно пластичны для изготовления проводов. Это позволяет иметь в сверхпроводящих обмотках соленоида ток силой в десятки тысяч ампер, а на оси такого соленоида индукция магнитного поля превышает 10 Тл. Были созданы сверхпроводящие магниты для подъемных кранов, мощные электродвигатели малых размеров. Появились не фантастические, а реальные инженерные проекты передачи электроэнергии по сверхпроводящим кабелям. Да и сейчас соединение Nb_3Sn остается одним из самых главных для создания мощных сверхпроводящих электромагнитов.

Но теории сверхпроводимости долго не появлялось. Не было ответа на главный вопрос – почему же при температуре ниже критической электрическое сопротивление полностью исчезало скачком, а не просто постепенно уменьшалось. В чем заключалось изменение внутренней структуры вещества при этом фазовом переходе?

В 1957 году в самом престижном физическом журнале «Physical Review» появилась статья «Теория сверхпроводимости». Авторами статьи были американские физики Джон Бардин и его молодые ученики Леон Купер и Роберт Шриффер. Джон Бардин был уже всемирно известным физиком, в 1956 году он стал нобелевским лауреатом за работу в группе физиков, подаривших миру транзистор и тем самым открывших «транзисторный век», в котором мы живем вот уже семьдесят лет. Надо полагать, что в тройке авторов статьи именно Бардин был ведущим. И он щедро отдал свои идеи молодым ученым. Все трое стали в 1972 году нобелевскими лауреатами «за создание теории сверхпроводимости,



Роберт Шриффер, Джон Бардин и Леон Купер

обычно называемой БКШ-теорией». А Бардин стал единственным дважды нобелевским лауреатом по физике.

В 1958 год советский физик дважды Герой Социалистического Труда академик Н.Н. Боголюбов придал БКШ-теории безупречную математическую форму. Он стал четвертым соавтором этой теории. Но, как известно, еще с 1956 года установилась традиция присуждения нобелевской премии в одной номинации максимум трем участникам. Эта традиция ни разу не нарушалась, а Н.Н.Боголюбов был четвертым равноправным участником.

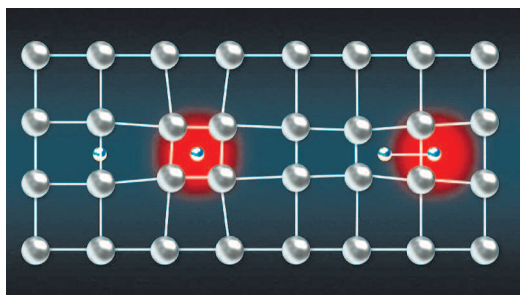
Основной механизм сверхпроводимости в БКШ-теории – *электрон-фононное взаимодействие с образованием так называемых куперовских пар*. И ни в одной статье о сверхпроводимости нет более простой короткой формулировки, которая была бы понимаемой на школьном уровне. Да, пожалуй, даже и на вузовском. Попытаемся хотя бы как-то расшифровать термины «фононы» и «куперовские пары».

Фононы похоже на фотоны. И это не случайно. Если фотоны можно рассматривать как кванты световых волн, то фононы – это кванты энергии согласованного колебательного движения атомов твердого тела, образующих идеальную кристаллическую решетку. Это похоже на звуковую волну, отсюда и происхождение термина (от древне-греческого *голос, звук*), тем более что частота колебаний ионов соот-

ветствует звуковым частотам. Придумали этот термин советские физики-теоретики И.Тамм и Я.Френкель в 1932 году. Правда, наличие такого кванта предугадывал еще А.Эйнштейн в 1908 году, хотя и не стал придумывать специальный термин. Кстати, термин «фотон» тоже не принадлежит Эйнштейну. Его ввел в науку даже и не физик, а химик Гильберт Ньютон Льюис в 1928 году (на основе древне-греческого *свет*). (Не правда ли, интересное сочетание имен у этого химика.)

Подобно свету, звуковые колебания можно рассматривать как волну, а можно как дискретный квант энергии и импульса колебательного движения. Учитывая негармоничность (несинусоидальность) и затухание колебаний, понятие фононов оказывается полезным, когда нужно рассматривать вынужденное колебательное движение частиц кристаллической решетки. Для продольных колебаний в волне описание ее с помощью фононов не так важно. Но оно целесообразно для поперечной волны и для интерференции волн. В этих случаях часто вводят термин «виртуальные фононы». Вот именно они и рассматриваются в БКШ-теории.

«На пальцах» взаимодействие электронов с фононами можно описать так (разумеется, ради наглядности описания явления придется жертвовать его полнотой и точностью). При достаточно низкой температуре, когда колебательное движение ионов становится очень слабым (энергия фононов мала), электрон, летящий в гущу ионов, притягивает к себе ионы, расположенные по сторонам его пути, они получают импульсы по направлению к нему. Но ионы движутся гораздо медленнее электрона. Электрон, вызвавший приближение ионов, улетает. А на его месте появляется другой электрон, который испытывает притяжение со стороны приближающихся ионов. Его добавочная скорость таким образом косвенно связана со скоростью пролетевшего электрона. Но самое главное, что его спин (момент импульса, равный $\hbar/2$) тоже реагирует на спин проле-



Два электрона и сжимающаяся кристаллическая решетка

тевшего электрона. У пары связанных электронов их спины оказываются антипараллельными и их общая величина становится равной нулю: $\hbar/2 - \hbar/2 = 0$. Эти два электрона представляют собой, как говорят физики, квазичастицу, образующуюся при взаимодействии электронов с ионами кристаллической решетки. А точнее — с фононами. Это взаимодействие так и называется — *электрон-фононное*. Пара электронов «чувствует» друг друга через фононы. При этом расстоянии между электронами пары может быть очень большим, порядка десятков нанометров, тогда как среднее расстояние между ионами и свободными электронами порядка одного нанометра. Между электронами пары могут «мельтешить» и другие «беспарные» электроны и «колыхаться» ионы, но электронам пары до них нет дела, они их не замечают. Есть такая аналогия: электроны такой пары — это два танцора противоположного пола (спина), которые танцуют в одном ритме иногда на большом расстоянии друг от друга, не теряя партнера из вида, как бы чувствуя его, хотя между ними могут танцевать и другие участники дискотеки, которые им не мешают. И таких пар в зале много.

В квантовой статистике показывается, что частицы с полуцелым спином (например, электроны) подчиняются принципу Паули и в одном ансамбле (кристалле) должны иметь разную энергию. Эта статистика носит название статистики Ферми–Дирака. Она описывает поведение электронов в полупроводниках и металлах при обычных температурах. Частицы, подчи-

няющиеся статистике Ферми–Дирака, называются *фермионами*. Это не только электроны, но и протоны, и нейтроны (кварки), и нейтрино.

Однако для частиц (и квазичастиц) с целым или нулевым спином действует другая квантовая статистика. Она называется статистикой Бозе–Эйнштейна. Ее главное отличие в том, что подчиняющиеся ей частицы могут быть в совершенно одинаковом квантовом состоянии, иметь одинаковую энергию. Главный пример таких частиц — фотоны, у которых спиновое число равно единице. В мощном лазерном луче все фотоны могут иметь одинаковую энергию (монохроматичность лазерного света). Частицы, подчиняющиеся статистике Бозе–Эйнштейна, называются *бозонами*. Квазичастица, состоящая из пары связанных электронов и имеющая нулевой спин, является бозоном. Она получила название *куперовская пара* (Леон Купер в 1956 году первым рассмотрел образование такой пары).

Следующей задачей исследователей было рассмотрение энергетического поведения ансамбля куперовских пар. Поскольку все пары имеют одинаковую энергию, в энергетическом спектре не остается других разрешенных энергий. Как энергии, большие энергии пар, так и меньшие энергии запрещены. Это — запрещенные зоны, как называются в статистике эти интервалы энергий. Теоретики называют при этом энергию куперовских пар *энергетической щелью*. Но ведь это и означает, что бозон (куперовская пара) не меняет своей энергии, проходя в сверхпроводнике. Сопротивления его движению нет. И нет потерь на нагрев проводника, сколь много ни образовывалось бы куперовских пар. А их количество и определяет силу тока, она может быть очень большой.

В это наглядное рассмотрение отсутствия сопротивления не включено объяснение второго свойства сверхпроводников — эффекта Мейснера, полного или частичного подавления магнитного поля. Непонятным остается разрушение сверхпроводящего состояния, когда сила тока

превышает определенную величину, и другие свойства сверхпроводников, объясняемые только квантовой механикой.

Высокотемпературная сверхпроводимость

После создания БКШ-теории появилось еще несколько других теорий. В них также рассматривалось взаимодействие бозонов с фононами. Но БКШ-теория получила имя «классической» теории сверхпроводимости, причем не в том смысле, что доквантовой, а в том что она была первой и основополагающей. В других же теориях вместо куперовских электронных пар действуют другие бозоны – магноны, экситоны и пр. Но все эти теории не помогали в поисках новых сверхпроводников. Эти поиски шли своим трудным экспериментальным путем. Достаточно отметить, что за 30 с лишним лет критическая температура сверхпроводящего перехода возросла всего на 5,4 К (от 18,5 К у Nb_3Sn до 23,9 К у Nb_3Ge). Десятки других найденных сверхпроводников не годились для практического использования по причине разрушения сверхпроводимости магнитным полем небольшой величины.

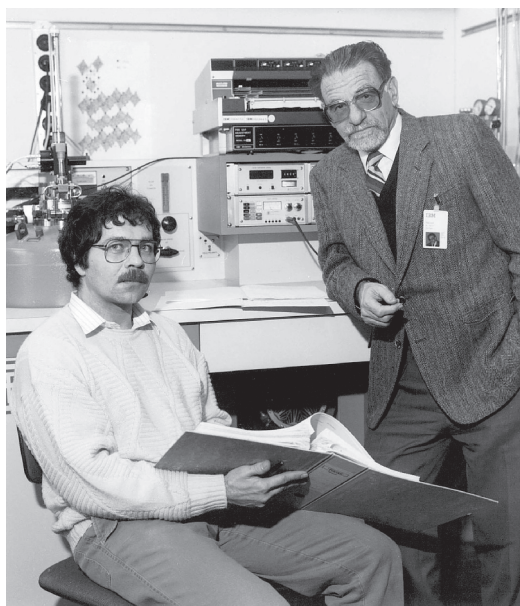
И вдруг, совершенно неожиданно для всех ученых, занимавшихся сверхпроводимостью, в 1986 году в одном немецком физическом журнале появилась статья Георга Беднорца и Карла Мюллера «Высокотемпературная сверхпроводимость». В статье описывалась сверхпроводимость у вещества, совершенно не похожего на все остальные сверхпроводники. Это был купрат лантана и бария $LaBaCuO_4$ (более правильно, это соединение окислов $LaO \cdot BaO \cdot CuO_2$). Вещества этого типа в химии было принято называть *керамиками*. Большинство этих соединений аморфны (например, стекло и другие силикаты). А заявленное в статье вещество имеет сложную кристаллическую структуру, в которой действуют разного рода силы, в том числе и металлические взаимодействия, дающие свободные электроны и ионы. При обычных температурах эти

вещества – полупроводники. У заявленного вещества температура перехода в сверхпроводящее состояние оказалась равной 35 К, а разрушающее магнитное поле больше 25 Тл.

Сначала Беднорц и Мюллер послали свою статью в ведущий физический журнал «Physical Review Letters», но этот журнал отказался печатать их статью. И они послали ее в журнал, где она и была опубликована. Сначала физики не поверили, что какие-то керамики могут обладать свойством, типичным только для металлов. Но после повторных «открытий» этого явления японскими и американскими учеными в начале 1987 года разразился настоящий «сверхпроводящий бум». Были открыты керамические сверхпроводники с «азотными» критическими температурами 92 К (иттриево-бариевый купрат) и 93 К (лантано-стронциевый купрат).

И в том же 1987 году Беднорц и Мюллер стали нобелевскими лауреатами по физике. Это было небывалым случаем – присуждение нобелевской премии (в полном соответствии с завещанием А.Нобеля) почти сразу же после того, как сделано открытие (публикация о нем). Впечатляет и обоснование премии: «за важный прорыв в физике, выразившийся в открытии сверхпроводимости в керамических материалах». И словно бы в исправление скоротечности этого присуждения, через 16 лет, в 2003 году, нобелевскими лауреатами по физике стали российские физики-теоретики Виталий Гинзбург и Алексей Абрикосов (совместно с Энтони Леггетом) «за пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей». Действительно, пионерский. Этот вклад В.Гинзбургом (совместно с Л.Ландау) был сделан за 65 лет до присуждения премии и за 20 лет до БКШ-теории, а А.Абрикосовым – за 50 лет до нобелевской награды!

Беднорц и Мюллер назвали открытую ими сверхпроводимость *высокотемпературной*. Что понимается под этим термином? Сначала так называли критические температуры перехода выше 30 К. Но уже с 1987 года – выше 76,4 К, т.е. температу-



Георг Беднорц и Карл Мюллер

ры кипения жидкого азота при атмосферном давлении. Действительно, сверхпроводимость при таких температурах – это прорыв, приближающий ее широкое применение. Ведь жидкий азот почти в 100 раз дешевле жидкого гелия и выкипает гораздо медленнее его. Сравнить этот экспериментальный прорыв в физике можно разве что с открытиями рентгеновского излучения, радиоактивности и транзистора.

Ведущим в этой паре физиков был швейцарский физик Карл Александр Мюллер (1927–2003), профессор Цюрихского университета, а с 1982 года – руководитель физического отдела в европейском научном подразделении всемирно известной корпорации IBM. Он начал по заданию IBM изучать электрические свойства минералов типа перовскита как перспективных полупроводниковых материалов и обнаружил аномальное поведение сопротивления этого вещества при понижении температуры. Что такое перовскит? Это довольно редкий минерал с химической формулой CaTiO_3 , который правильнее считать не солью титановой кислоты, а соединением окислов $\text{CaO} \cdot \text{TiO}_2$. По своему строению он представляет собой керамические кристаллы. Свое необычное, но

признанное во всем мире название он получил при его первой находке на Урале в 1839 году в честь российского сенатора Льва Перовского, одного из немногих прощенных Николаем I декабристов, спонсора многих геологических экспедиций, собравшему богатейшую коллекцию кристаллов, переданную им в Эрмитаж.

В 1984 году Мюллер привлек к сотрудничеству Йоханнеса Георга Беднорца (1950 г.р.), которого помнил как своего талантливого студента. Вдвоем они начали методически изучать похожие на перовскит вещества, каждый раз занимаясь их химическим синтезом, поочередно заменяя одни металлы окислов другими. Их путеводной звездой стал поиск сверхпроводящего перехода. И после двух лет напряженной работы пришел успех – была открыта высокотемпературная сверхпроводимость в керамических материалах.

Во многих лабораториях мира начались поиски новых высокотемпературных сверхпроводников. За 30 лет было открыто около тысячи таких веществ разных химических классов. Часть из них становились сверхпроводниками только при давлениях в сотни тысяч и миллионы атмосфер (сотни гигапаскалей). Большинство относилось к сверхпроводникам второго рода (с частичным проникновением магнитного поля внутрь), и разрушающее магнитное поле в них составляло десятки тесла. Рекордной температурой стала обнаруженная впервые российскими физиками (МГУ) в 2003 году при атмосферном давлении температура перехода в сверхпроводящее состояние в 135 К (-138°C) у купрата – вещества со сложным составом $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{CuO}_{10}$. А при огромном давлении 70 ГПа в 2020 году была обнаружена критическая температура 260 К (-13°C) у супергидрида лантана LaH_6 .

В этом соревновании (как и в современном спорте) многие результаты через некоторое время аннулировались. Обнаруживались ошибки в экспериментах, и повторные исследования заявленного результата не подтверждали. Последней такой

ложной сенсацией было «открытие» корейскими учеными сверхпроводимости при атмосферном давлении при 127 °С у вещества со сложным составом $Pb_9Cu_2(PO_4)_2O$. Публикация об этом появилась в июле 2023 года, в разгар лета, и во многих лабораториях мира, в том числе и в России, физики, прервав свои отпуска, бросились за проверкой. И ничего не обнаружили, никакой сенсации. А химики даже доказали, что такое вещество вообще не может существовать.

Так что на сегодня рекордной температурой сверхпроводящего перехода (при атмосферном давлении) остается 135 К (с 2003 года). И хотя уже и появился термин КТСП вместо ВТСП, в котором КТ означает «комнатные температуры» взамен ВТ, т.е. «высоких температур», все меньше остается надежд на открытие этой самой КТСП, комнатнотемпературной сверхпроводимости. И, к сожалению, все ВТСП нетехнологичны, они хрупки, химически неустойчивы и т.д.

Самое разочаровывающее – отсутствие теории сверхпроводимости в керамических и других материалах, кроме ставшей «классической» БКШ-теории для металлических сверхпроводников и работ Абрикосова и Гинзбурга о сверхпроводниках второго рода. Похоже, что для каждого типа сверхпроводников нужно создавать свою теорию. Или все же существует одна общая теория, о которой пока ничего не известно? Во всяком случае, новые сверхпроводники ищут чисто эмпирическим путем. В России таких лабораторий несколько, в основном в университетских научных центрах.

Но, независимо от этих поисков, все обширнее становится применение сверхпроводников, работающих при гелиевых температурах. Главное применение сегодня – это создание мощных магнитов для научных целей. Но из всего многосотенного списка сверхпроводников, которые бы технологически подходили для этой цели (т.е. допускали бы изготовление проводочных обмоток), всего несколько. И все они работают только при гелиевых температурах (ниже 4,2 К). Это – уже упомя-

нутые биметаллы ниобий-олово, ниобий-титан и ниобий-германий с критическими температурами 18,5 К, 9,2 К и 23,9 К соответственно. Сверхпроводимость в них не разрушается при магнитных полях с индукцией до 25 Тл и силой тока в проводах не менее 50000 А.

В 2022 году после технической паузы вновь заработал Большой адронный коллайдер (БАК) в Швейцарии. В 2025 году должны вступить в строй коллайдер NICA в подмосковной Дубне и крупнейший в мире ускоритель FAIR в немецком Дармштадте. Главная цель исследований на этих ускорителях – «заглянуть» в самое начало возникновения нашего мира, когда в кварк-глюонной плазме зарождались ядра будущих атомов. На 2025 год намечен запуск во Франции международного экспериментального термоядерного реактора ИТЭР, для которого в России уже произведена большая часть сверхпроводящих обмоток.

Но уже и сейчас произошло резкое увеличение использования сверхпроводимости для человеческих нужд. Это связано с применением сильных магнитных полей прежде всего для целей медицинской диагностики: магнитно-резонансная томография (МРТ) и другие томографические методы диагностики и лечения. За двадцать лет ежегодное число сеансов МРТ в России выросло в несколько десятков раз и продолжает расти.

Привлекательно использование сверхпроводимости для передачи электроэнергии без потерь на нагрев (атмосферы). В кабеле переменного тока сосредоточены три (поскольку передается трехфазный ток) сверхпроводящих провода с прокачиваемым жидким хладагентом. Такой кабель довольно тяжел, его не подвешивают на мачтах, а прокладывают на малой глубине под землей. Первая такая линия электропередачи заработала в Нью-Йорке в 2008 году. А, например, в Южной Корее общая длина таких линий электропередач уже превышает 1000 километров. Несмотря на затраты по изготовлению кабеля и расходы на хладагенты, эксплуатация таких линий обходится дешевле обычных



Шанхайский маглев

воздушных линий. Нет затрат на потери энергии, которые для обычных электропередач составляют около 15 %.

В Японии на 2034 год намечен пуск железной дороги на магнитной подвеске с использованием левитирующего свойства сверхпроводимости. Такие поезда называются «маглев» (магнитная левитация). Железная дорога длиной 286 км должна соединить крупнейшие города Токио и Нагоя. Расчетная скорость поезда 500 км/ч. Небольшие маглевы без применения сверхпроводящих материалов уже используются в США, Китае и Австралии. В них испытываются магнитные устройства, ускоряющие поезд и поднимающие его над полотном. Использование магнитов со сверхпроводящими обмотками должно значительно удешевить строительство и эксплуатацию маглевок. В них будет достаточно использовать жидкий азот и высокотемпературные керамические сверхпроводники, поскольку там не провода, а брусья из проводника.

Перспективно и реально создание электромоторов малых размеров и при этом большой мощности. Такие электромоторы не греются, а, наоборот, должны быть очень холодными. Они уже нашли применение в наружных механизмах космических аппаратов – там не нужно охлаждения жидкими хладагентами, поскольку и без них достаточно холодно. Совсем недавно пришло сообщение о разработке в КНР мощных магнитных устройств (наподобие маглевок) для выбрасывания с Луны на Землю лунных полезных ископаемых. Ведь вторая космическая скорость на Луне «всего

лишь» 2,4 км/с. В этих устройствах будут использоваться высокотемпературные сверхпроводники (но не комнатно-температурные). А получать мощный электрический ток для сверхпроводящих обмоток проектируется от солнечных и радиоактивных батарей. Большие перспективы открываются перед применением сверхпроводников в измерительных приборах высокой точности, в компьютерных устройствах, в частности в квантовых компьютерах, одним словом, везде, где ограничения накладываются нагревом в электрических схемах.

Это – факты и некоторые перспективы. А есть и мечты. Они связаны с истинным, а не ложно-сенсационным открытием сверхпроводимости при обычных температурах. Оно преобразит всю промышленность и технику человечества. Резко снизятся расходы на электроэнергию, на транспорт, все электродвигатели и генераторы станут мощнее и меньше, а аккумуляторы будут работать во много раз дольше без подзарядки. Произойдет переворот в компьютерных технологиях. На порядок дешевле станет использование сверхпроводимости в медицине. И много чего еще сможет придумать человечество для своих нужд. Но это пока только мечты!

А создание общей теории сверхпроводимости (если это возможно) будет означать мощный скачок в познании неведомых нам пока законов природы. Вот уже больше 30 лет назад Алексеем Алексеевичем Абрикосовым были сказаны вещие слова:

«Исследования ведутся очень большими силами, и не исключено, что они увенчаются успехом. Однако одно важное дело уже сделано – открытие высокотемпературных сверхпроводников: оно уничтожило многолетний предрассудок, что сверхпроводимость обязательно требует низких температур. Это окрыляет людей на дальнейшие поиски, и даже в том случае, если не удастся «приручить» сверхпроводящие керамики, то обязательно будут найдены другие классы сверхпроводников с более высокими критическими температурами и более пригодные для практического использования».

Самоподобие

В.КИРИЧЕНКО, В.ТИМОРИН

САМОПОДОБНАЯ СИСТЕМА – ЭТО система, подобная своей части. В этом описании слово «подобие» нужно воспринимать в обобщенном смысле, точнее говоря, нужно допускать различные интерпретации этого понятия. Например, подобие в музыке выражается повторением одной и той же темы в разных тональностях, как в фугах Баха.¹ Самоподобие в изобразительном искусстве возникает, когда на картину помещают уменьшенную копию самой картины. Такой прием называют эффектом Дросте и часто используют на рекламных плакатах (рис. 1). Литография Эшера «Галерея гравюр» – интересный с математической точки зрения образец самоподобия в искусстве.² Как только возникает очередная формализация подобия, вместе с ней приобретает смысл и концепция самоподобия.

Мы кратко обсудим все многообразие связанных с самоподобием *математических* понятий и явлений (см. также статьи [3]–[7]), а потом достаточно подробно остановимся на одном конкретном примере.

Логика

Лингвистическое самоподобие известно в логике и языкознании как *автореферентность*. Высказывание считается автореферентным, если оно ссылается, явно

¹ См. замечательную книгу [1], в которой более подробно обсуждаются самоподобные явления в музыке, искусстве и математической логике.

² Математическому смыслу «Галереи гравюр» посвящена статья [2]. На сайте авторов <https://www.math.leidenuniv.nl/smitbde/escherdroste/> размещены анимации, выявляющие самоподобие литографии.



Рис. 1. Реклама какао Дросте, художник Ян Миссет, 1904 г.

или неявно, само на себя. Скажем, истинность такого утверждения³:

В ЭТОЙ ФРАЗЕ ДВАДЦАТЬ ВОСЕМЬ БУКВ легко проверить, пересчитав в нем буквы.

Классический пример – *парадокс лжеца*. Человек утверждает следующее: та фраза, которую он произносит в настоящий момент, ложна (коротко: «я лгу»). Здесь автореферентность лежит на поверхности. Этот пример содержит в себе противоречие: допуская по очереди, что приведенное

³ Этот пример мы взяли из статьи [8], где можно найти множество других лингвистических примеров самоподобия.

высказывание является правдой или неправдой, мы каждый раз выводим из нашего предположения его противоположность. Вариация парадокса лжеца – история брадобрея (т.е. цирюльника, парикмахера), который бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, кто не бреется сам.

Невозможно понять, должен ли он сам при таком подходе бриться. Автореферентность состоит в том, что должностная инструкция брадобрея опирается на представление о группе людей (все те жители деревни, кто не бреется сам), которая может содержать и самого брадобрея, причем описание этой группы явно коррелирует с должностной инструкцией.

Мы видим из этого примера, что автореферентность может приводить к парадоксам. Однако так бывает не всегда. Если Вася говорит «я никогда не говорю правды», то в этом высказывании есть автореферентность, но нет противоречия. Вы можете легко понять, истинно или ложно данное конкретное высказывание. Предположив, что Вася сейчас говорит правду, получим противоречие. В том, что сейчас Вася лжет, никакого противоречия нет, поэтому нам так и следует считать: Вася лжет. Правда, из этого допущения вытекает, что Вася хотя бы раз в жизни сказал или скажет правду. Но у нас нет никаких данных для того, чтобы понять, что именно из сказанного Васей – правда. Может даже так быть, что Вася еще ни разу не сказал правды, но, чтобы мир и логика уцелели, должен совершить этот поступок в будущем... Звучит подозрительно (не правда ли?), когда корректность логической системы зависит от честности Васи.

Однако в математике автореферентность активно используется в позитивном ключе и не приводит к парадоксам. Более того, свободная от парадоксов автореферентность очень часто применяется для доказательства теорем и определения понятий. Важнейший пример: доказательства по индукции. Это метод доказательства, при котором мы предполагаем справедливость некоторого утверждения $P(n)$, зависящего от натурального параметра n , при опре-

деленном значении n_0 , и выводим это же утверждение для $n = n_0 + 1$. Можно считать, что здесь автореферентность отсутствует: мы выводим $P(n_0 + 1)$ из $P(n_0)$, например $P(2)$ из $P(1)$, а это разные утверждения. Тем не менее, суть доказательства по индукции состоит не в том, чтобы вывести $P(2)$ из $P(1)$, потом $P(3)$ из $P(2)$ и т.д., а в том, чтобы вывести $P(n + 1)$ из $P(n)$ сразу для всех n .

А вот это уже автореферентность, потому что, как только n превращается в переменную величину, разница между $P(n + 1)$ и $P(n)$ становится очень тонкой. Эта разница, конечно, есть: высказывания $P(n + 1)$ и $P(n)$ не совпадают; они именно что *подобны*. Но если вы попытаетесь объяснить суть доказательства по индукции своему младшему брату или сестре, то вполне можете столкнуться с таким вопросом. Почему нельзя чисто логически вывести утверждение $P(n + 1)$ из $P(n)$, просто заменив n на $n + 1$ в предположении индукции? Ведь $n - 1$ это любое число! Первый автор прекрасно помнит, как в детстве мучила этим вопросом свою маму, когда та рассказывала дочке о методе математической индукции.

Свободная от парадоксов автореферентность также часто применяется в алгоритмах и компьютерных программах под именем *рекурсии*. Например, один из алгоритмов в известной игре «Ханойская башня» состоит в повторении подобных друг другу процедур ([9]). Процедуры на разных шагах не совпадают буквально – в каждой задействовано разное количество колец. С каждым шагом количество затронутых процедурой колец уменьшается на один, поэтому весь процесс рано или поздно заканчивается. Чисто математический пример рекурсии – классическое определение последовательности Фибоначчи f_n с помощью рекуррентного соотношения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и начальных условий $f_0 = f_1 = 1$.

Алгебра и теория чисел

Уравнение относительно неизвестной величины x по сути представляет собой неявное описание этой величины. Как правило, x встречается в уравнении более

одного раза (уравнения типа $\sqrt{x} = 2$ слишком просты). Уравнение относительно x можно интерпретировать как *самоподобное описание* вида $x = f(x)$, где $f(x)$ – некоторая функция от x . Вот конкретный пример:

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

С одной стороны, можно легко свести его к квадратному уравнению на x , а потом воспользоваться известной формулой для корней квадратного уравнения. Читатель проделает это самостоятельно, а мы этих формул писать не будем. С другой стороны, можно подставить вместо x в правой части саму эту правую часть (раз она равна x , что и утверждает уравнение):

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к бесконечному выражению, называемому *цепной дробью*. Нужно, конечно, уточнить, в каком смысле это бесконечное выражение может представлять или не представлять конкретное число (мы этого делать не будем). Заметим, однако, что любое рациональное число представляется конечной цепной дробью. Таким образом, наличие бесконечной цепной дроби для x свидетельствует о том, что число x иррационально. Вот примерно так можно выводить содержательные математические следствия из самоподобия.

Цепные дроби тесно связаны с так называемым *алгоритмом Евклида*. Этот алгоритм придумал Евдокс (ученик Платона), а Евклид просто записал результаты Евдокса, включив их в свой знаменитый учебник «Начала». Изначальная и самая непосредственная цель алгоритма: для данных величин a и b (будем про них думать как про положительные действительные числа, хотя концептуально это отличается от оригинального подхода Евдокса) понять, являются ли они *соизмеримыми*, т.е. можно ли найти такую величину c , которая послужит общей единицей измерения для a и b так, что и a , и b окажутся целыми

кратными величинами c . Возьмем неупорядоченную пару $\{a, b\}$ и построим новую пару следующим образом. Будем считать, что $a < b$ – это предположение не ограничивает общности, поскольку пара неупорядоченная. Новая пара тогда будет состоять из величин $b - a$ и a . Это шаг алгоритма Евклида; его нужно повторять до тех пор, пока в очередной паре не окажутся совпадающие величины. В этот момент алгоритм заканчивается: если последняя пара равна $\{c, c\}$, то c и есть общая единица измерения для a и b .

Если a и b соизмеримы, то алгоритм Евклида закончится за конечное число шагов. Таким образом, если действие алгоритма продолжается до бесконечности, то величины a и b несоизмеримы. Пусть, например, после одного или нескольких шагов алгоритма мы получили пару $\{a_1, b_1\}$, подобную исходной паре, т.е. такую, что $b_1/a_1 = b/a$. Сделаем еще столько же шагов и получим пару $\{a_2, b_2\}$, подобную парам $\{a_1, b_1\}$ и $\{a, b\}$. Фактически, шаги алгоритма Евклида начинают повторяться, только в меньшем масштабе. Таким образом, процесс никогда не остановится.

В случае описанного самоподобия алгоритма Евклида можно заключить, что a и b несоизмеримы. Именно таким способом пифагорейцы доказали, что сторона квад-

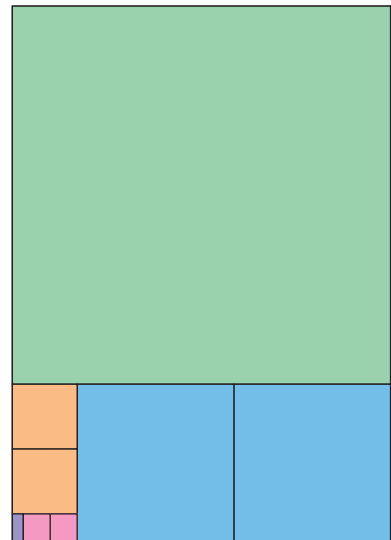


Рис. 2. Самоподобное описание прямоугольника формата А4

рата несоизмерима с его диагональю (и тем самым опровергли изначальный тезис своего учителя о том, что все на свете можно описать при помощи натуральных чисел – тезис пришлось модифицировать).

У приведенного примера имеется геометрическая интерпретация. Возьмите обычный лист бумаги формата А4. Отрежьте от него квадрат так, чтобы сторона квадрата совпала с меньшей из сторон листа (рис. 2). Получится узкая полоска бумаги, от которой таким способом можно отрезать уже не один, а два квадрата. А после этого увидите самоподобие: оставшаяся маленькая узкая полосочка будет подобна (в смысле евклидовой геометрии) предыдущей узкой полоске. Длинная сторона листа формата А4 относится к короткой стороне (примерно) как $\sqrt{2}$ к 1 (подробнее см. в [10]). Геометрический процесс с отрезанием квадратов приводит к самоподобному описанию величины $\sqrt{2}$.

Комбинаторика

Двоичные, или бинарные, слова – это конечные последовательности из нулей и единиц, т.е. те слова, которые «понятны» широким массам компьютерных процессоров. Нетрудно написать компьютерную программу, которая получает на входе двоичное слово и осуществляет подстановку

$$0 \mapsto 01, 1 \mapsto 0,$$

т.е. вместо каждого нуля подставляет комбинацию двоичных символов 01, а каждую единицу заменяет нулем. Такая подстановка называется *подстановкой Фибоначчи*, и скоро будет понятно почему. Начнем с двоичного слова 0, т.е. со слова, состоящего из одного нуля. Применяя подстановку Фибоначчи к этому слову несколько раз, получаем следующие слова:

$$0 \mapsto 01 \mapsto 010 \mapsto 01001 \mapsto 01001010 \mapsto \dots$$

Можно заметить несколько закономерностей и доказать их по индукции. Во-первых, каждое слово полученной последовательности является начальным фрагментом следующего за ним слова. Даже более того: следующее слово получается

как *конкатенация* текущего слова и предыдущего слова, т.е. если слово, выписанное на n -м месте, обозначить через w_n , то слово w_{n+1} получается из w_n дописыванием слова w_{n-1} справа. Отсюда сразу же вытекает, что количество букв в слове w_n выражается последовательностью Фибоначчи:

$$f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3 = 2 + 1, \\ f_4 = 5 = 3 + 2, f_5 = 8 = 5 + 3, \dots$$

Поскольку w_n при $n < t$ является начальным фрагментом в w_m , имеется бесконечное вправо слово, т.е. бесконечная последовательность α из нулей и единиц, такая, что каждое w_n встречается в качестве начального отрезка этой последовательности. *Самоподобие* последовательности α состоит в том, что $s(\alpha) = \alpha$, где s – подстановка Фибоначчи. Другими словами, если в последовательности α заменить каждый ноль словом 01, а каждую единицу заменить нулем, то в результате получится та же самая последовательность. Бинарные последовательности с такого рода самоподобием часто возникают в динамических системах, как мы еще увидим ниже.

Геометрия

Подобие в геометрии, пожалуй, богаче всего математическим и визуальным содержанием. Как мы уже упоминали, геометрическое самоподобие вдохновляет художников на создание произведений искусства с интересным математическим подтекстом. Самоподобные фигуры часто называют *фракталами*.

Вот один из простейших примеров фракталов. Для его описания нам потребуется следующая терминология: *замкнутым треугольником* будем называть треугольник, рассматриваемый вместе с границей и внутренностью; если же речь пойдет только про внутренность треугольника, то так и будем писать. Начнем с замкнутого треугольника. Выкинем из него внутренность треугольника с вершинами в серединах всех сторон исходного треугольника. Останутся три замкнутых треугольника, каждый из которых подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Повторим эту процедуру

для каждого из трех оставшихся замкнутых треугольников: останется девять замкнутых треугольников. И так далее. У нас теперь есть описание бесконечного процесса, в частности, бесконечного множества внутренностей треугольников, которые нужно выкинуть. Выкинув все эти внутренности одновременно, мы получим очень дырявое множество точек плоскости, которое называется *треугольником Серпинского*.

Треугольник Серпинского обладает самоподобием. А именно, в нем помещается три уменьшенных копии самого этого треугольника; при этом каждая из копий в два раза меньше исходной фигуры. Если предположить, что треугольник Серпинского имеет площадь S , то площадь каждой из трех уменьшенных копий должна составлять $\frac{1}{4}S$ (при уменьшении масштаба в два раза площади уменьшаются вчетверо), и мы получаем уравнение $S = \frac{3}{4}S$, из которого вытекает, что $S = 0$. Таким образом, площадь должна быть нулевой просто потому, что она неправильно масштабируется. Иначе говоря, площадь не является подходящей мерой для треугольника Серпинского. Можно, однако, вообразить себе подходящую меру, которая при уменьшении фигуры в два раза (т.е. при сжатии фигуры, когда все расстояния делятся пополам) умножается не на $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, а на $\left(\frac{1}{2}\right)^d$ для некоторого положительного $d > 0$, которое еще нужно подобрать. Поскольку треугольник Серпинского составлен из трех копий, каждая в два раза меньше оригинала, подходящая мера S треугольника

Серпинского равна $3\left(\frac{1}{2}\right)^d S$. В этом случае равенство $S = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d S$ окажется возможным для конечного положительного значения величины S . Это значит, что $d = \log_2 3$. Число d , которое отвечает за масштабирование подходящей меры, называется *размерностью* фигуры. Размерность треугольника Серпинского, таким образом, равна иррациональному числу между 1 и 2.

Динамические системы

До сих пор мы обсуждали очень общие вещи на общеизвестных примерах. Пример в этом разделе носит более специальный характер, но по этой причине снижается вероятность того, что вы его уже где-то видели. Многие классические головоломки, такие как танграм, стомахион или пентамино, основаны на следующем принципе. Имеется форма в виде многоугольника и ее замощение несколькими многоугольными кусочками. Для начала кусочки нужно вытащить и перемешать, а потом попытаться составить из них исходную фигуру. Иногда это можно сделать несколькими способами.

Если имеется два разных способа составить одну и ту же фигуру Δ из одинаковых кусочков, то мы можем определить отображение f фигуры в себя. Возьмем точку p из Δ и отметим, какая точка какого куска первого замощения совпала с p . Затем этот кусок первого замощения нужно переместить в то положение, которое он занимает во втором замощении; вместе с куском переместится и точка. Конечное положение точки обозначим через $f(p)$.

На рисунке 3 представлен пример подобного отображения. Пусть Δ — это прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ;

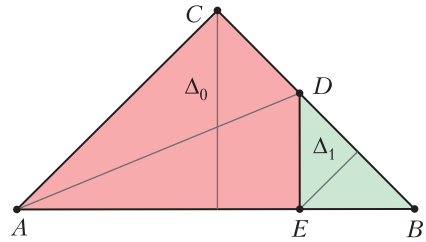


Рис. 3. Части Δ_0, Δ_1 треугольника Δ , на которых отображение f действует как движения плоскости

он симметричен относительно высоты, опущенной на гипотенузу из вершины C . Отрезок DE , разбивающий треугольник на две части и перпендикулярный (в точке E) гипотенузе AB , выбран так, чтобы обе части имели осевую симметрию. Заметим, что треугольник $\Delta_1 = DEB$ в любом случае подобен всему треугольнику Δ и по этой

причине имеет осевую симметрию автоматически. А вот четырехугольник $\Delta_0 = ACDE$ будет симметричен относительно диагонали AD только при специальном выборе точки D – как именно ее нужно выбрать, вы легко разберетесь.

Замечание. Разбиение треугольника Δ на симметричный четырехугольник Δ_0 и треугольник Δ_1 , подобный треугольнику Δ , дает особенно простое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ через самоподобие. Обозначим через a и b , соответственно, гипотенузу и катет треугольника Δ . Тогда несложно убедиться, что гипотенуза и катет треугольника Δ_1 равны $2b - a$ и $a - b$ соответственно. Поэтому если стороны треугольника Δ имеют общую меру, или общую единицу измерения $c > 0$, т.е. c укладывается целое число раз как в a , так и в b , то эту же общую меру имеют и стороны меньшего треугольника Δ_1 . Теперь проделаем все те же построения и рассуждения с треугольником Δ_1 вместо Δ . Продолжая процесс, мы получим бесконечную последовательность подобных треугольников, длины сторон которых стремятся к нулю, поэтому не могут иметь никакой общей меры.⁴

Вернемся к динамике. Обозначим через v_0, v_1 , соответственно, преобразования кусков Δ_0, Δ_1 , осуществляющие их осевую симметрию. Через u мы обозначим преобразование осевой симметрии для всего треугольника Δ . Теперь заметим, что преобразование $u \circ v_1$ (состоящее в том, что мы сначала применяем v_1 , а потом u) является вращением треугольника Δ_1 относительно некоторой точки (найдите эту точку!). Аналогичным образом $u \circ v_0$ совпадает с некоторым вращением четырехугольника Δ_0 .

Рассмотрим отображение f , которое на Δ_0 действует как $u \circ v_0$, а на Δ_1 как $u \circ v_1$. Это отображение перекладывает два куска Δ_0, Δ_1 треугольника Δ , как в пазле. Заметим, что f определено всюду на Δ , кроме отрезка DE , являющегося общей стороной для Δ_0 и Δ_1 . Теперь – и это концептуально важный шаг – будем смотреть на f как на динамическую систему, т.е. будем применять это отобра-

жение много раз. Начнем с какой-нибудь точки p , лежащей в Δ , но не на отрезке DE . Применим к этой точке отображение f , получим точку $f(p)$. Если $f(p)$ снова не попала на отрезок DE , то мы можем применить наше отображение еще раз и получить точку $f^2(p) = f(f(p))$ и так далее – процесс можно продолжать до тех пор, пока очередная точка не окажется на отрезке DE , а если этого не случится никогда, то процесс можно продолжать до бесконечности. В частности, $f^m(p)$ обозначает результат m -кратного применения отображения f к точке p . Последовательность $p, f(p), f^2(p), \dots, f^m(p), \dots$ называется *орбитой* точки p . Орбиты могут быть конечные и бесконечные, в зависимости от того, все ли итерации определены. Кроме того, часто продолжают указанную последовательность влево, добавляя точки $\dots, f^{-2}(p), f^{-1}(p)$, полученные как итерации обратного отображения f^{-1} , примененные к p , и считают орбитой всю – возможно, бесконечную в обе стороны – расширенную последовательность.

Точка p называется *периодической* *периода* m , если все итерации $p, f(p), f^2(p), \dots, f^m(p)$ определены, причем $f^m(p) = p$. Интересное свойство рассматриваемого перекладывания состоит в наличии точек сколь угодно большого периода. Более того, периодические точки образуют интересное самоподобное множество, состоящее из восьмиугольников (рис. 4). Все эти восьмиугольники подобны друг другу (в обычном геометрическом смысле), но могут иметь сколь угодно маленький размер. Точки, для которых определены все итерации отображения f , но которые при этом не

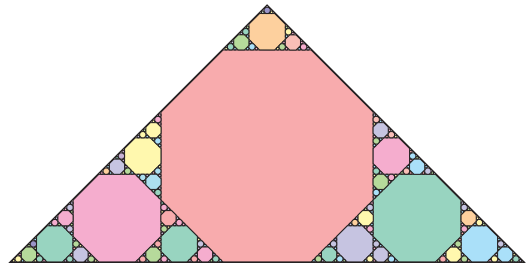


Рис. 4. Периодические области образуют самоподобную, фрактальную, фигуру

⁴ Это доказательство мы позаимствовали из статьи [11].

являются периодическими точками, называются *апериодическими*. Наконец, те точки, для которых не все итерации определены, т.е. которые после нескольких итераций попадают ровно на границу между кусками Δ_0 и Δ_1 , а именно на отрезок DE , называются *границными*. Все точки треугольника Δ тем самым классифицируются как периодические, апериодические и граничные.

Укажем одну периодическую, и даже неподвижную, точку p_0 . Это точка, в которой ось симметрии четырехугольника Δ_0 пересекает ось симметрии треугольника Δ . Такая точка, в силу своего определения, должна быть неподвижной как относительно v_0 , так и относительно u , а следовательно, $f(p_0) = u(v_0(p_0)) = p_0$. Более того, на все точки, близкие к p_0 , отображение f действует как вращение вокруг p_0 ; угол вращения равен удвоенному углу между осями отражений v_0 и u . Итак, вокруг точки p_0 имеется некоторая область U_0 , которая поворачивается вокруг p_0 под действием f и таким образом переходит в саму себя. Можно показать, что U_0 – восьмиугольник, вписанный в Δ .

Чтобы точно описать динамическое подобие отображения f , нам понадобится определение отображения первого возвращения. Вообще говоря, можно определять отображение первого возвращения в произвольную фигуру Q , но мы ограничимся случаем, когда Q – многоугольник, являющийся частью треугольника Δ .

Определение 1. Пусть орбита точки q из Q вернулась в Q через время t , т.е. оказалось, что точка $f^t(q)$ снова лежит в Q . В данном случае время t – это целое положительное число. Минимальное такое t называется *временем первого возвращения* точки q в область Q ; обозначим это время через t_q .

А если никакого t с данным свойством не существует, по положим $t_q := \infty$.

Определение 2. *Отображением первого возвращения* в Q называется отображение $R_Q f$, переводящее точку q в точку $f^{t_q}(q)$.

Вообще говоря, это отображение определено не везде в Q , а только на тех точках q , для которых $t_q < \infty$. Может так случиться,

что орбита точки q выпадает из области определения отображения f , т.е. оказывается на отрезке DE еще до того, как вернуться в Q , – такие точки q обязаны быть граничными. Еще, теоретически, может случиться так, что вся орбита точки q определена, но никогда не возвращается в Q .

Попробуйте найти отображение первого возвращения в Δ_1 . Для этого вам нужно взять бумагу и нарисовать несколько картинок. Никаких формул можно не писать. Поскольку f действует как $u \circ v_1$ на треугольнике Δ_1 , то он при первой итерации отображения f переходит в симметричный ему треугольник $u(\Delta_1)$. Вторая итерация действует в два шага, сначала отправляя $u(\Delta_1)$ в $v_0 \circ u(\Delta_1)$, а потом – в $u \circ v_0 \circ u(\Delta_1)$. И тем самым на второй итерации существующий кусок треугольника Δ_1 вернется в этот треугольник. Этот существующий кусок – четырехугольник, подобный куску Δ_0 . От Δ_1 останется только маленький треугольник, который вернется в Δ_1 не на второй итерации, а на пятой (рис. 5, но прежде читателю рекомендуется попытаться самостоятельно нарисовать картинки и понять, как части треугольника Δ_1 возвращаются в Δ_1).

Если вы уже нарисовали картинки и тем самым представили себе, как выглядит отображение первого возвращения $f^* := R_{\Delta_1} f$, то дальнейшее описание вам ничего нового уже не скажет. Все же приведем это описание, чтобы зафиксировать обозначения. Треугольник Δ_1 разбивается на две части, которые мы будем обозначать через Δ_0^* и Δ_1^* . Кусок Δ_0^* является симметричным четырехугольником, он возвращается в Δ_1 на второй итерации. А кусок Δ_1^* является прямо-

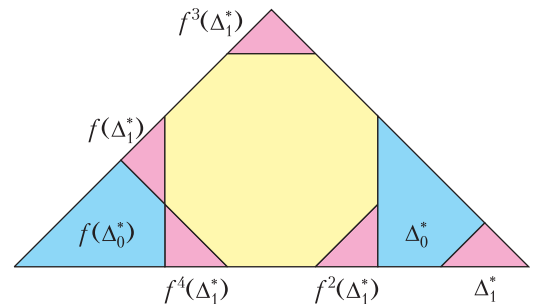


Рис. 5. Итерации отображения f

угольным равнобедренным треугольником, и он возвращается на пятой итерации. Таким образом, f^* совпадает с f^2 на Δ_0^* и с f^5 на Δ_1^* . Отрезок, отделяющий Δ_0^* от Δ_1^* , состоит из граничных точек, и на этом отрезке f^* не определено. Это полное описание отображения первого возвращения.

Вот что интересно: разбиение треугольника Δ_1 на два куска Δ_0^* , Δ_1^* подобно (в смысле обычной евклидовой планиметрии) разбиению треугольника Δ на Δ_0 , Δ_1 . Обозначим через h соответствующее преобразование подобия, т.е. такое преобразование плоскости, которое все расстояния уменьшает в одно и то же число раз и которое удовлетворяет равенствам

$$h(\Delta) = \Delta_1, \quad h(\Delta_0) = \Delta_0^*, \quad h(\Delta_1) = \Delta_1^*.$$

Это преобразование мы уже фактически использовали выше, когда доказывали иррациональность $\sqrt{2}$ через цепочку треугольников Δ , $h(\Delta)$, $h^2(\Delta)$,... Подобие h не только связывает геометрию двух разбиений, оно же связывает динамику отображения f с динамикой отображения f^* . А именно, имеет место формула

$$f^* = h \circ f \circ h^{-1},$$

в которой h^{-1} означает обратное отображение к h . Формулу следует читать так: чтобы понять, как отображение f^* действует на Δ_1 , переведем Δ_1 в Δ отображением h^{-1} (тем самым увеличив масштаб), потом применим f , затем вернемся обратно в масштаб треугольника Δ_1 отображением h . Все, что происходит в большем масштабе с треугольником Δ под действием отображения f , происходит и в меньшем масштабе с Δ_1 под действием f^* .

Самоподобие помогает установить связь между динамикой отображения f и подстановками. Для этого нам понадобится определение маршрута.

Определение 3. Рассмотрим точку $p \in \Delta$. Если точка p лежит в Δ_0 (соответственно, в Δ_1), то назовем *адресом* точки p символ 0 (соответственно, 1). У точек на отрезке DE адреса нет.

Определение 4. Если у точек p , $f(p)$, $f^2(p)$,... (это может быть конечная или

бесконечная последовательность) есть адреса, то последовательность этих адресов называется *маршрутом* точки x .

Можно говорить про конечные или бесконечные маршруты. Бесконечные маршруты возможны только для неграничных точек.

Неподвижная точка p_0 имеет маршрут 0^∞ (бесконечная последовательность из нулей). Нетрудно убедиться в том, что точка $h(p_0)$ имеет маршрут $(10)^\infty$ (последовательность 10, повторенная бесконечно много раз). В самом деле, маршрут 10 возвращает четырехугольник Δ_0^* обратно в Δ_1 , а точка $h(p_0)$ при этом возвращается на место, поскольку отображение h вообще обязано переводить неподвижные точки отображения f в неподвижные точки отображения f^* . Далее, рассмотрим точку p с произвольным маршрутом $\alpha_0\alpha_1\dots$; здесь α_i — это символы 0 или 1. Чему равен маршрут точки $h(p)$? Из самоподобия вытекает, что маршрут точки $h(p)$ относительно f^* совпадает с $\alpha_0\alpha_1\dots$, т.е. при итерациях отображения f^* точка $h(p)$ попадает в Δ_0^* и Δ_1^* в той же последовательности, в которой точка p попадает в Δ_0 и, соответственно, в Δ_1 при итерациях отображения f . Однако, чтобы преобразовать маршрут относительно f^* в маршрут относительно f , нужно вместо каждого символа f^* -маршрута подставить маршрут соответствующего первого возвращения в Δ_1 . Например, адрес 0 в f^* -маршруте означает, что точка орбиты попала в Δ_0^* . Маршрут ее возвращения в Δ_1 равен 10, поэтому вместо 0 нужно подставить 10. Далее, вместо 1 нужно подставить маршрут возвращения точки из Δ_1^* в Δ_1 , т.е. 10000. Итак, маршрут точки $h(p)$ получается из маршрута точки p применением подстановки

$$s : 0 \mapsto 10, \quad 1 \mapsto 10000.$$

В частности, маршрут точки $h^2(p_0)$ равен $s(s(0^\infty)) = (1000010)^\infty$, а значит, эта точка имеет период 7 (маршрут возвращения точки $h^2(p_0)$ в треугольник $\Delta^{**} := h^2(\Delta)$ имеет, очевидно, период 7, а с другой стороны, при возвращении в треугольник Δ^{**} точка сразу же вернется

на место, поскольку она неподвижна относительно отображения первого возвращения в Δ^{**}).

В заключение сформулируем несколько задач для читателей.

Задачи

1. Чему равен период точки $h^n(p_0)$?
2. Слово $s^n(1)$ составляет некоторый начальный фрагмент в $s^{n+1}(1)$. Убедитесь, что найдется такая бесконечная бинарная последовательность ω , для которой $s^n(1)$ является начальным фрагментом для каждого n .
3. Убедитесь в том, что ω из предыдущей задачи – маршрут некоторой аперидической точки. Как найти эту точку в пределах заданной точности?
4. Выкинем из Δ внутренности всех периодических областей. Останется самоподобная фигура. Попробуйте понять, чему равна размерность этой фигуры.

Литература

1. *Д. Хофштадтер*. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. — Самара: Бахрах-М, 2001.

2. *B. Smit, H. Lenstra*. The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery. — Notices of the American Mathematical Society, 2003, vol. 50, p. 4.

3. *И. Соколов*. Фракталы. — «Квант», 1989, №5.

4. *Н. Долбиллин*. Игра «Хаос» и фракталы. — «Квант», 1997, №4.

5. *Н. Долбиллин*. Самоподобные мозаики. — «Квант», 1998, №2.

6. *Н. Долбиллин*. Множества Жюлиа. — «Квант», 2008, №1.

7. *Дж. Х. Конвей, М. С. Патерсон*. Каверзная задача. — Математическое просвещение, 2021, сер. 3, № 28.

8. *С. Табачников*. У попа была собака... — «Квант», 1989, №6.

9. *А. Савин*. Ханойская башня. — «Квант», 1991, №11.

10. *Е. Смирнов*. Арифметика листа бумаги. — «Квантик», 2017, №1.

11. *T.M. Apostol*. Irrationality of The Square Root of Two — A Geometric Proof. — The American Mathematical Monthly, 2000, vol. 107, p. 9.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Э. Ландау и ученики

Профессор Эдмунд Ландау, автор книги «Основы анализа», ежегодно устраивал банкет для своих дипломников. При этом места для гостей обозначались не по именам или фамилиям, а в виде цитат (формул или иных ярких мест) из дипломных работ, выписанных на специальные карточки.

Один из выпускников очень волновался, что будет написано на его карточке, так как прекрасно понимал, что в его работе ничего толкового сделано не было. Тем не менее, никаких трудностей с определением своего места за столом у него не возникло: одну из карточек Ландау оставил пустой.

Э. Ландау и ферматисты

Профессор был не первым и не единственным математиком, кому приходилось отвечать на назойливые письма людей,



считавших, что им удалось доказать Великую теорему Ферма. Но он оказался первым, кто использовал в такой переписке современные технологии.

Ландау заказал в университетской типографии 500 бланков со следующим текстом: «Уважаемый ...! Благодарю Вас за присланную Вами рукопись с доказательством Великой теоремы Ферма. Первая ошибка находится на стр. ... в строке ...».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи Ф2837–Ф2840 предлагались на региональном этапе LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2830–М2833, Ф2838–Ф2840

М2830. В ходу монеты номиналом в a и b дублонов, где a и b – данные взаимно простые натуральные числа, причем $a < b < 100$. Целое неотрицательное число n называется *удачным*, если сумму в n дублонов можно набрать, используя не более 1000 монет. Найдите количество удачных чисел.

Фольклор

М2831. Впишем в параболу треугольник DEF (рис. 1). Проведем в точках D ,

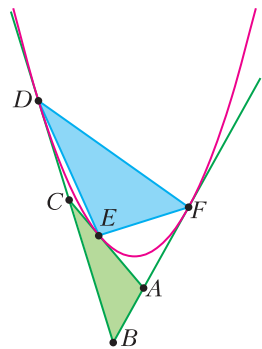


Рис. 1

E , F касательные, пусть они ограничивают треугольник ABC . Докажите, что $S_{DEF} = 2S_{ABC}$.

Из книги F.S. Macaulay «Geometrical Conics», предложил М. Панов

М2832. На координатной плоскости отмечены 2024 точек общего положения (т.е. точки, среди которых нет трех, лежащих на

одной прямой). Существует ли многочлен от двух переменных $f(x, y)$ а) степени 2025; б) степени 2024 такой, что он обращается в ноль в точности в этих отмеченных точках?

Н. Сафаеи (Иран)

М2833*. По кругу лежат а) 26; б) 30 одинаковых на вид монет. Известно, что ровно две из них фальшивые. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, лежат фальшивые монеты рядом или нет?

А. Грибалко

Ф2837. Два маленьких тяжелых шарика массами m закреплены с помощью трех невесомых и нерастяжимых нитей между двумя вертикальными стенками в поле тяжести (рис. 2). Расстояние между стенка-

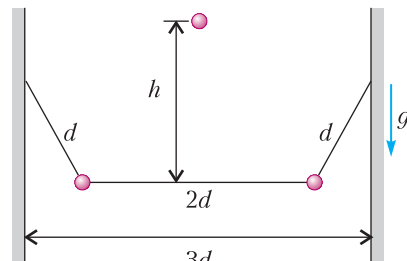


Рис. 2

ми $3d$, длины нитей, прикрепленных к стенкам, равны d , длина нити между шариками $2d$. С высоты h , отсчитывая от середины горизонтальной нити, падает еще один такой же шарик, к которому прикреплен крючок.

Пролетая рядом с горизонтальной нитью, шарик зацепляется за нить крючком. Определите силы натяжения нитей в этот момент. Ускорение свободного падения равно g .

А.Аполонский

Ф2838. Тонкая трубка площадью поперечного сечения S изогнута в виде перевернутой буквы П (рис. 3). В горизонтальной части трубки находится невесомый поршень

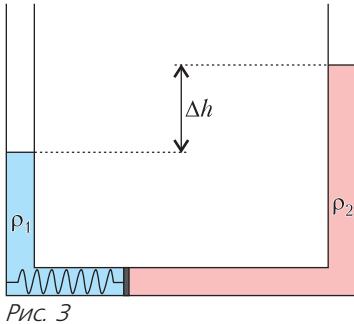


Рис. 3

который связан с левой стенкой пружиной. В вертикальных концах трубки в равновесии находятся две жидкости: в левой – жидкость плотностью ρ_1 , а в правой – жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$. При этом разность уровней верхних границ жидкостей в вертикальных коленах составляет Δh , а пружина находится в недеформированном состоянии. Коэффициент жесткости k пружины подобран таким образом, чтобы при добавлении в левое колено жидкости плотностью ρ_1 разность уровней Δh все время оставалась постоянной.

- 1) Чему равен коэффициент жесткости k ? В левую часть трубки добавляют объем ΔV жидкости плотностью ρ_2 , при этом верхние границы жидкостей в вертикальных частях оказываются на одном уровне.
- 2) Определите, какой объем ΔV добавили в левое колено?

Поршень скользит без трения. Жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает и не выливается из сосуда. Объемом пружины можно пренебречь, жидкости не смешиваются и не перетекают в другое вертикальное колено. Ускорение свободного падения равно g .

А.Вергунов

Ф2839. Идеально гибкая однородная нерастяжимая цепочка постоянной толщины,

массой m и длиной L подвешена с помощью короткой нити к закрепленной точке A (рис. 4,а). В некоторый момент времени нить пережигают, а цепочку начинают тянуть за ее нижний конец с постоянной силой F в направлении точки A (рис. 4,б).

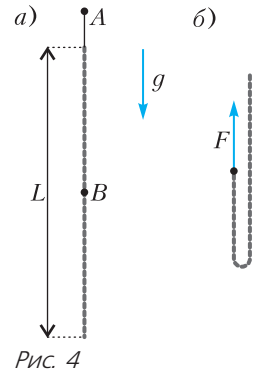


Рис. 4

- 1) С каким по модулю ускорением a_0 начинает двигаться верхний конец цепочки сразу после пережигания нити?
 - 2) Через какое время τ после пережигания нити вся цепочка снова выпрямится?
 - 3) Определите модуль скорости цепочки v сразу после ее распрямления.
 - 4) Какое количество теплоты Q выделится за время τ ?
 - 5) Определите силу натяжения T цепочки в точке B , расположенной в ее середине, после распрямления цепочки.
- Ускорение свободного падения равно g . Соппротивлением воздуха необходимо пренебречь. Размеры звеньев в цепочке много меньше ее длины. Считайте, что столкновения звеньев в цепи неупругие.

А.Киреев

Ф2840. Рассмотрим два процесса A и B , в каждом из которых ν молей одноатомного идеального газа квазистатически переводят из состояния 1 с объемом V и температурой T в состояние 2 с объемом $2V$ и температурой $2T$ так, что в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится. При этом процесс A осуществляется таким образом, что количество теплоты, которое подводят к газу, оказывается максимально возможным при выполнении данных условий, а в процессе B количество теплоты оказывается минимальным.

- 1) Определите максимальные V_A^{\max} , V_B^{\max} и минимальные V_A^{\min} , V_B^{\min} значения объемов газа в каждом из этих процессов.
- 2) Каково количество теплоты Q_A и Q_B , подведенное в каждом процессе?

А.Аполонский

Решения задач M2818–M2821, Ф2821–Ф2828

M2818. *Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N . Оказалось, что N делится на M . Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N .*

Пусть $M = p_1 p_2 \dots p_k$ – разложение M на простые множители. Тогда

$$N = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1).$$

Поскольку N делится на M , то разложение M на простые множители является частью разложения N на простые множители, т.е. $N = p_1 p_2 \dots p_k \cdot q_1 \dots q_m$ (где q_i – некоторые простые числа). Значит, из числа N операцией, описанной в условии, получится число

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)(q_1 + 1) \dots (q_m + 1).$$

Как видим, это число делится на

$$N = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1).$$

Задача решена.

Приведем еще одно решение. Оно несколько длиннее, но в нем мы получим явное описание всех чисел, удовлетворяющих условию.

Пусть $M = p_1 p_2 \dots p_k$, причем простые множители p_i упорядочены по возрастанию: $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$. Если

$$N = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)$$

делится на M , то одна из скобок, скажем $(p_i + 1)$, должна делиться на p_k . При этом $p_i \leq p_k$, поэтому единственная возможность: $p_i + 1 = p_k$. Видим, что $p_i < p_k$ – два соседних натуральных числа, являющихся простыми числами, значит, $p_i = 2$, $p_k = 3$ (например, потому, что единственное четное простое число – это 2).

Итак, наибольшее простое число в разложении M равно 3 и, кроме того, M делится на 2, т.е. $M = 2^t \cdot 3^s$ для некоторых натуральных t и s . Значит, из M нашей операцией получается число $N = 3^t \cdot 4^s = 2^{2s} \cdot 3^t$. Получаем (сравнивая показатели при мно-

жителях 2 и 3), что N делится на M тогда и только тогда, когда $2s \geq t \geq s$. Но в таком случае из N получается число $2^{2t} \cdot 3^{2s}$, делящееся на N (поскольку $2t \geq 2s$ и $2s \geq t$). (Интересно отметить, что новое (третье) число – квадрат первого числа M .)

А.Грибалко

M2819. *У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось – округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет, если: а) мешков всего 8; б) мешков всего 9?*

Ответ: а) не может; б) может.

а) Если из одного мешка убрать 10 конфет, то каждый из этого мешка получит на одну конфету меньше, что не скажется на различии результатов. Поэтому можно считать, что в каждом мешке меньше 10 конфет. При этом каждый ребенок из каждого мешка получит не более одной конфеты, а всего – не более 8 конфет. Среди 10 чисел от 0 до 8 найдутся два одинаковых. Тем самым, задача решена.

Можно рассуждать и по-другому. Заметим, что для каждого мешка некоторое количество детей, подхитивших вначале, взяли поровну конфет, а оставшиеся – на 1 конфету больше; например, первые i детей взяли поровну, а следующие $10 - i$ детей – на 1 конфету больше (возможно, $i = 0$). В таком случае скажем, что между подходом i -го и $(i + 1)$ -го ребенка произошло переключение (соответствующее данному мешку). Так как мешков всего 8, то переключений было не более 8, значит, в одном из 9 промежутков между подходами 1-го и 2-го, 2-го и 3-го, ..., 9-го и 10-го детей ни одного переключения не было. Но это означает, что соответствующие этому промежутку двое детей получили по одинаковому количеству конфет из каждого мешка.

(Продолжение см. на с. 34)

Самоподобие в картинках

Дополним статью «Самоподобие» несколькими яркими примерами.

1. Разноцветные многоугольные области самоподобного «ковра» на рисунке 1 переходят друг в друга при отражении

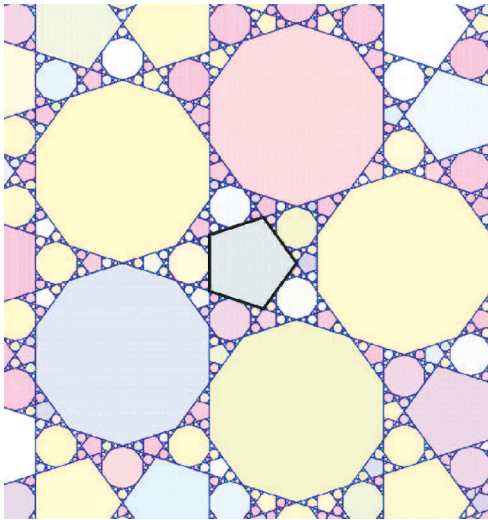


Рис 1

(или, что то же самое, при повороте на 180°) относительно подходящей вершины центрального правильного пятиугольника. Каждая область отражается относительно самой правой вершины пятиугольника, если смотреть из данной области. Этот фрактал получается из динамической системы с переключением кусков, в чем-то похожим на приведенное в статье.

2. Аналогичный фрактальный «ковёр», но только центральный многоугольник — правильный семиугольник, изображен на рисунке 2. Здесь тоже имеется самоподобие, но невооруженным глазом его разглядеть невозможно — нужен микроскоп с тысячекратным увеличением.

3. На рисунке 3 показано построение фрактала, который

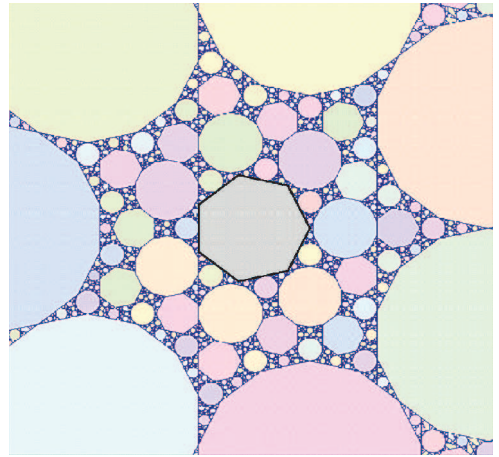


Рис 2

можно рассматривать как геометрическую интерпретацию слов Фибоначчи. Первая ломаная соответствует слову ω_3 , вторая — ω_4 , затем ω_5 , ω_6 , ω_7 , ω_8 , ω_9 , далее самая правая в нижнем ряду — ω_{12} , левее — ω_{15} и, наконец, ω_{22} .

Фрактал строится по следующему правилу: если в последовательности встретилась 1, то рисуем единичный отрезок; если в последовательности встретился 0, то рисуем единичный отрезок и поворачиваем влево на 90° , если 0 на четном месте, и на 90° вправо, если 0 на нечетном месте. Как и слова, фрактал удовлетворяет свойству конкатенации: каждая сле-

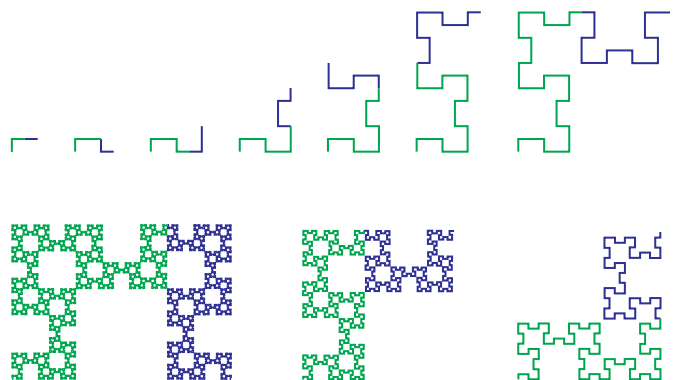


Рис 3

дующая часть фрактала есть объединение двух предыдущих.

4. На рисунке 4 показана плоскость с координатами $(x; y)$ (оси системы координат не изображены). На этой «динамической» плоскости действует отобра-

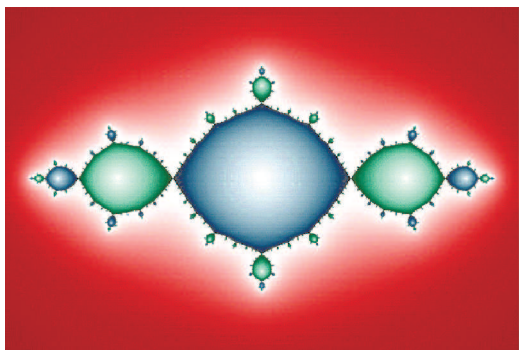


Рис 4

жение f , переводящее точку $(x; y)$ в точку $(x^2 - y^2 - 1; 2xy)$. Орбиты красных точек убегают на бесконечность. Орбиты синих и зеленых точек сходятся к циклу, состоящему из двух точек: центральной точке рисунка, имеющей координаты $(0; 0)$, и белой точке в левой зеленой области, имеющей координаты $(-1; 0)$. При этом синие точки отображаются в зеленые и наоборот. Синие и зеленые точки тем темнее, чем медленнее их орбиты приближаются к периодическому 2-циклу, а красные точки, наоборот, тем темнее, чем быстрее они убегают на бесконечность. Эта картинка называется базиликой. Базилика содержит копии самой себя во всех масштабах: эти копии сохраняют углы, хотя и нарушают пропорции.

5. Динамическая плоскость отображения, заданного весьма явно, но чуть сложнее примера с базиликой, представлена на рисунке 5. Здесь тоже имеется притягивающий цикл периода 2, а множество точек, орбиты которых никогда не приближаются к этому циклу, представляет собой самоподобную фигуру, родственную треугольнику Серпинского. Цикл состоит из точек 0 и бесконечность (это то, что получается при делении на 0), все желтые и зеленые точки притягиваются к этому циклу, причем желтые точки переходят в

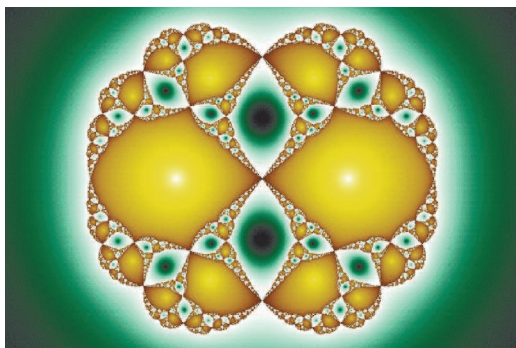


Рис 5

зеленые и наоборот. Желтые точки тем светлее, чем быстрее они притягиваются к циклу, а зеленые – наоборот, темнее.

6. Множество Мандельброта (рис. 6) состоит из таких точек $(u; v_1)$, для которых последовательности u_n, v_n , заданные рекуррентными соотношениями

$$u_{n+1} = u_n^2 - v_n^2 + u_n, \quad v_{n+1} = 2u_n v_n + v_n,$$

остаются ограниченными. Каждой точке множества Мандельброта соответствует своя динамическая система наподобие базилики.

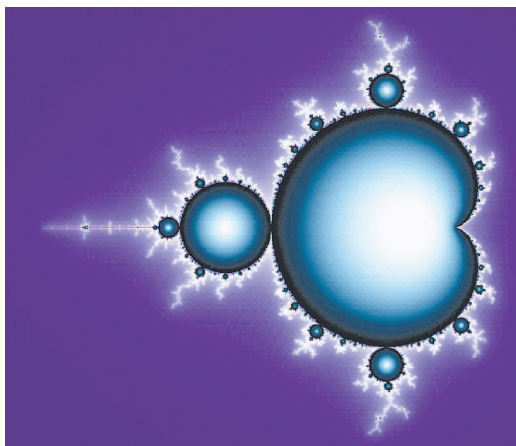


Рис 6

Соответствующие системы претерпевают существенные изменения (бифуркации) при пересечении границы множества Мандельброта. Кроме того, множество Мандельброта содержит свои многочисленные уменьшенные копии – в том же смысле, как и у базилики.

*Материал подготовили
В.Курченко, В.Тиморин*

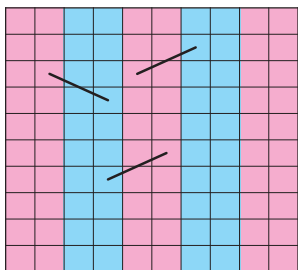
(Начало см. на с. 29)

б) Приведем пример: пусть в мешках 1, 2, ..., 9 конфет. Тогда, как легко проверить, первый заберет 0 конфет, второй 1, третий 2, ..., десятый 9 конфет.

А.Глебов

M2820. Назовем ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, горизонтальными, а остальные – вертикальными. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46 , после чего чередовать его горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

Разделим доску на 23 вертикальные полосы 46×2 и покрасим полосы красным и синим: первую полосу покрасим красным и далее чередуем цвета (см. рисунок).



Пусть конь сделал h горизонтальных ходов. Каждый из горизонтальных ходов определяет пару клеток (это клетки, в которых конь находится до и после выполнения хода); итак, у нас h пар клеток. Легко видеть, что в такой паре одна из клеток красная, а другая синяя. Кроме того, по условию задачи конь не может выполнить два горизонтальных хода подряд, поэтому никакая клетка не может входить в две пары для двух различных горизонтальных ходов. Поэтому h не превышает количества синих клеток: $h \leq 11 \cdot 2 \cdot 46 = 1012$.

Аналогично показываем, что количество вертикальных ходов не превышает 1012. Итого, было сделано не более $1012 + 1012 = 2024$ ходов.

А.Грибалко

M2821. Дорогой на плоскости будем называть прямую, по которой можно двигаться только в одну сторону.

а) Петя и Вася по очереди проводят дороги, начинает Петя. Разрешается проводить только горизонтальную или вертикальную дорогу; направление на дороге выбирает тот, кто проводит дорогу (при создании этой дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрестка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

б) Пусть на плоскости проведены несколько (конечное множество) дорог, любые две из которых пересекаются. При каком наименьшем t всегда можно добавить t дорог и сделать так, чтобы можно было проехать от любого перекрестка до любого другого?

Ответ: а) всегда; б) 2.

а) Пока все проведенные дороги параллельны, пусть Вася продолжит проводить прямые, параллельные проведенным, так, чтобы после его хода крайние дороги были разных направлений. Когда Петя проведет пересекающую их дорогу, Вася может с одной из сторон от нее провести дорогу противоположного направления так, чтобы выполнялось такое условие (*): самая левая дорога l , самая правая дорога r , самая верхняя дорога t и самая нижняя дорога b образуют прямоугольник Π с круговым движением (рис. 1).

Покажем, что 1) Вася сможет играть так, чтобы после каждого его хода условие (*) выполнялось; 2) если условие (*) выполняется, то от любого перекрестка можно доехать до любого другого. Отсюда сразу последует решение.

1) Пусть, для определенности, на очередном ходе Петя проводит горизонтальную дорогу x . Если x проведена между t и b , то Вася также проводит горизонтальную прямую между t и b , так что прямоугольник Π не поменялся. Допустим теперь, что Петина прямая x расположена выше прямой t . Тогда пусть Вася проведет горизонтальную

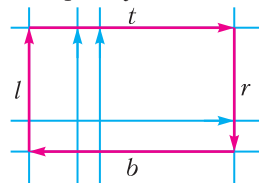


Рис. 1

прямую t' , расположенную выше x (так, чтобы t' стала самой верхней прямой), и выберет на ней такое же направление, как на прямой t . Тогда условие (*) останется выполненным. Аналогично разбирается случай, когда Петя проводит прямую ниже b .

2) При выполнении условия (*) все перекрестки находятся внутри или на границе прямоугольника $П$. Пусть A и B – два произвольных перекрестка. Из A можно выехать в точку A' , лежащую на границе прямоугольника $П$. Из B можно против правил движения («задним ходом») выехать в точку B' , лежащую на границе $П$. Теперь готов маршрут из A в B по правилам: от A до A' , от A' до B' по границе $П$, и далее от B' до B .

б) Покажем, что добавить две дороги всегда достаточно. Нарисуем достаточно большую окружность Ω , которая содержит внутри себя все перекрестки. Тогда каждая дорога пересекает Ω в двух точках, в одной из них дорога входит (по направлению движения) внутрь Ω – эту точку пересечения покрасим красным, а в другой точке дорога выходит из Ω – эту точку покрасим синим. Красные и синие точки разделяют Ω на дуги. Найдем среди этих дуг дугу AB с концами разных цветов: A – красная, B – синяя. Пусть дорога, проходящая через A , пересекает Ω вторично в синей точке C , а дорога, проходящая через B , пересекает Ω вторично в красной точке D (рис. 2). Выберем «далеко» на продолжениях отрезков AC и BD за точки A, C, B, D соответственно точки A', C', B', D' так, чтобы отрезки $A'D'$ и $B'C'$ не пересекали окруж-

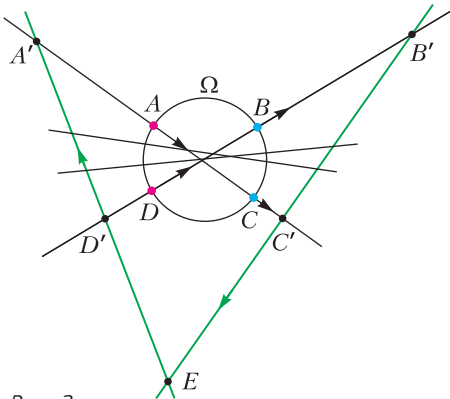


Рис. 2

ность Ω , а прямые $A'D'$ и $B'C'$ пересекались в некоторой точке E , лежащей на лучах $A'D'$ и $B'C'$.

Теперь добавим две дороги – $B'C'$ с направлением движения из B' в C' и $D'A'$ с направлением движения из D' в A' . Поймем, что теперь условие выполнено. Действительно, любая «старая» дорога, отличная от AC и BD , пересекает отрезки AD и BC (так как пересекает дороги AC и BD внутри Ω), а значит, пересекает и отрезки $A'D'$ и $B'C'$. Поэтому по любой старой дороге можно выйти на один из отрезков $A'D', B'C'$ как по направлению движения, так и против направления движения. И так как у нас есть два циклических пути $A'C'E$ и $D'B'E$ (на которых лежат все перекрестки с новыми дорогами $A'D'$ и $B'C'$), мы сможем от любого перекрестка доехать до любого другого.

Приведем пример, показывающий, что добавление одной дороги может быть недостаточно. Рассмотрим треугольник ABD и точку C внутри него. Проведем дороги AC, AD, BC, BD с движением из A в C , из A в D , из B в C , из B в D соответственно (рис. 3). Предположим, что достаточно добавить одну дорогу l . Тогда l должна пересекать одну из сторон угла, вертикального к углу ADB (иначе, выйдя из D , нельзя будет попасть ни в какой другой перекресток). Аналогично, l должна пересекать одну из сторон угла, вертикального к CBD , и одну из сторон угла, вертикального к CAD . Но никакая прямая не пересекает все три указанных угла. Противоречие.

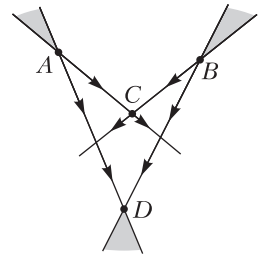


Рис. 3

А.Перепечко

Ф2821.¹ *Равноплечный двухзвенный маятник удерживают в неподвижном положении, показанном на рисунке 1. В некоторый момент времени систему освобождают и маятник приходит в движение. Определите максимальную величину на-*

¹ Автор решений задач Ф2821, Ф2823, Ф2824 – А.Власов. Решение задачи Ф2822 будет опубликовано позже.

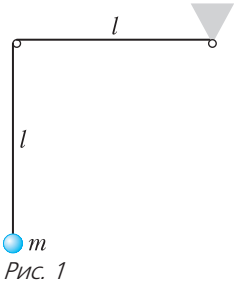


Рис. 1

тяжения стержней (после переходного процесса). Известны l – длина одного стержня, m – масса шарика, g – ускорение свободного падения. Считайте стержни невесомыми, радиус шарика

малым по сравнению с длиной стержня. Трения в невесомом шарнире, соединяющем стержни, нет.

От того, какой из двух стержней занимает в начальный момент горизонтальное, а какой вертикальное положение, ответы на заданные вопросы не зависят.

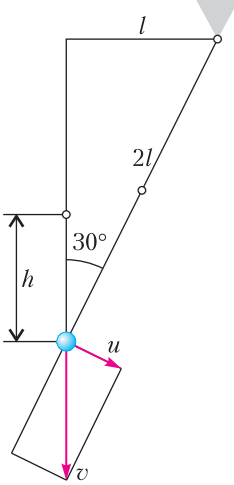


Рис. 2

Сделаем рисунок системы в последний момент свободного падения шарика (рис. 2). В этот момент времени происходит «удар» вдоль составного стержня. Проекция импульса вдоль стержня гасится, остается только поперечная его часть. Определим величину оставшейся скорости, используя энергетические соображения:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= mgh = mg(2l \cos 30^\circ - l) = \\ &= mg \left(2l \frac{\sqrt{3}}{2} - l \right) = mgl(\sqrt{3} - 1), \\ v^2 &= 2gl(\sqrt{3} - 1), \quad v = \sqrt{2gl(\sqrt{3} - 1)}, \end{aligned}$$

оставшаяся скорость

$$u = v \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2gl(\sqrt{3} - 1)}.$$

Скорость u^* в точке равновесия найдем опять с помощью закона сохранения энергии:

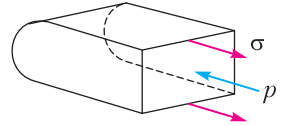
$$\begin{aligned} mgl \frac{\sqrt{3} - 1}{4} + mg \left(2l - 2l \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= m \frac{u^{*2}}{2}, \\ gl \frac{3 - \sqrt{3}}{4} = \frac{u^{*2}}{2}, \quad u^{*2} &= gl \frac{3 - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Натяжение стержней в точке равновесия определяем, используя динамическое уравнение:

$$\begin{aligned} T - mg &= m \frac{u^{*2}}{2l} = mgl \frac{3 - \sqrt{3}}{2 \cdot 2l}, \\ T &= mg \left(1 + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \right) = mg \frac{7 - \sqrt{3}}{4} \approx 1,3mg. \end{aligned}$$

Ф2823. На горизонтальной поверхности разлита жидкость, не смачивающая эту поверхность и образующая большую круглую лужу с начальным радиусом R_0 , который во много раз больше глубины лужи. Дует слабый ветер и жидкость медленно испаряется. Удельная скорость испарения $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t \Delta S}$ (это величина испарившейся массы с единицы площади за единицу времени) не зависит от радиуса лужи. Определите время, за которое радиус лужи уменьшится в 2 раза. Известны ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, g – ускорение свободного падения.

Определим толщину слоя жидкости в луже. Выделим небольшой элемент края лужи (см. рисунок). Запишем условие равновесия этого элемента по горизонтали:



$$2\sigma l = \frac{\rho gh}{2} lh, \quad h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Вычислим массу лужи:

$$m = \rho \pi R^2 \cdot 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 2\pi R^2 \sqrt{\frac{\rho \sigma}{g}}.$$

Теперь можно записать уравнение испарения:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\mu S, \quad \frac{d}{dt} \left(2\pi R^2 \sqrt{\frac{\rho \sigma}{g}} \right) = -\mu \pi R^2, \\ 2R \frac{dR}{dt} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\rho \sigma}{g}} &= -\mu \pi R^2, \quad \text{или} \\ \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} &= -\frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{g}{\rho \sigma}}. \end{aligned}$$

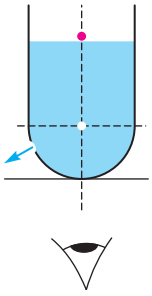
Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^R \frac{dR}{R} &= -\frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{g}{\rho \sigma}} t, \\ -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) &= -\frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{g}{\rho \sigma}} t, \quad \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{g}{\rho \sigma}} t. \end{aligned}$$

Если $R = R_0/2$, то

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{g}{\rho\sigma}} t, \quad t = \frac{4}{\mu R_0} \sqrt{\frac{\rho\sigma}{g}}.$$

Ф2824. Тонкостенный стеклянный сосуд с полусферическим дном радиусом R частично заполнен водой (см. рисунок). На вертикальной оси симметрии сосуда над



поверхностью воды на совсем небольшой высоте «парит» маленький светлячок. Уровень воды очень медленно опускается из-за утечки через небольшое отверстие в стенке сосуда. Расход воды постоянный (так устроено отверстие) и равен

$$\frac{dm}{dt} = -\mu.$$

На сосуд смотрят снизу вдоль его оси симметрии. Определите координату изображения светлячка и его скорость движения в момент, когда уровень воды совпадает с плоскостью полусферы (находится на расстоянии R от дна сосуда). Плотность воды ρ , показатель преломления $n = 4/3$.

«Отрезаем» от дна сосуда тонкую линзу (считаем толщину стенки равной нулю). Фокусное расстояние линзы равно

$$F = \frac{R}{n-1}.$$

Слой воды толщиной x сдвигает изображение на величину $\Delta f = x \frac{n-1}{n}$ (по ходу лучей). Для расчета координаты изображения используем формулу тонкой линзы в виде

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F}.$$

Эта формула справедлива для любой линзы (собирающей, рассеивающей). Величины подставляются в эту формулу со знаком, который они имеют в системе координат, начало которой совмещено с оптическим центром линзы.

Расстояние d после «сдвига» водной пластиной равно

$$d = x - x \frac{n-1}{n} = \frac{x}{n}.$$

Вычисляем координату изображения (в системе координат «рабочий» фокус линзы равен $-\frac{R}{n-1}$):

$$f = -\frac{dF}{d+F} = \frac{x \left(-\frac{R}{n-1} \right)}{\frac{x}{n} - \frac{R}{n-1}} = -R \frac{x}{x(n-1) - nR}.$$

Скорость движения изображения определяем производной по времени:

$$v = \frac{df}{dt} = -R \frac{x(n-1) - nR - (n-1)x \frac{dx}{dt}}{(x(n-1) - nR)^2} = R^2 \frac{n}{(x(n-1) - nR)^2} \frac{dx}{dt}.$$

Запишем скорость движения уровня:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = -\rho \frac{dV}{dt} = -\rho \pi R^2 \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{\rho \pi R^2}.$$

В итоге получим

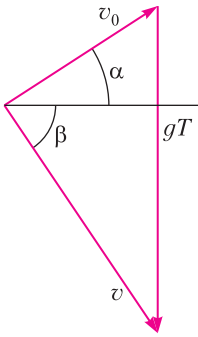
$$v = R^2 \frac{n}{(x(n-1) - nR)^2} \left(-\frac{\mu}{\rho \pi R^2} \right).$$

Теперь определим координату изображения и его скорость движения при $x = R$:

$$f = R, \quad v = -n \frac{\mu}{\rho \pi R^2}.$$

Подводим итоги. Изображение мнимое ($F = \frac{R}{n-1} = 3R, d = \frac{3}{4}R$). Координата изображения совпадает с координатой источника. Скорость изображения направлена вниз и в n раз больше скорости понижения уровня. Красивый результат, который обусловлен оптическими свойствами полусферы.

Ф2825. Камень брошен под углом α к горизонту. Точка старта находится на высоте H над горизонтальной площадкой. В полете высота, на которой находится камень, растет, достигает максимума, а затем убывает до нуля. В момент падения камня на площадку вектор скорости камня образует с горизонтом угол β . Найдите горизонтальное перемещение камня за время полета. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



В момент завершения полета вертикальная координата, отсчитанная от горизонтальной площадки, равна нулю:

$$H + v_0 \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2} = 0.$$

Из треугольника скоростей (см. рисунок) следует

$$gT = v_0 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Исключив продолжительность T полета из этих соотношений, получаем

$$(v_0 \cos \alpha)^2 = \frac{2gH}{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Горизонтальное перемещение камня за время полета будет равно

$$s = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{1}{g} (v_0 \cos \alpha)^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \frac{2H}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ю.Павленко

Ф2826. На гладкой горизонтальной плоскости расположен клин. Гладкая наклонная плоскость клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Шайбу удерживают на гладкой наклонной плоскости клина, а затем отпускают. Система приходит в движение, начальные скорости шайбы и клина нулевые. Масса клина $M = 0,6$ кг, масса шайбы $m = 0,3$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Клин и шайба движутся поступательно и прямолинейно. Определите модуль силы, с которой горизонтальная плоскость действует на клин.

Для определения ускорения клина рассмотрим движение каждого из тел. Силы, приложенные к телам, указаны на рисунке 1. Здесь \bar{P} – сила давления шайбы на клин, \bar{R} – сила реакции, действующая на клин со стороны плоскости, \bar{N} – сила реакции, действующая на шайбу со стороны клина. При этом $P = N$.

Запишем второй закон Ньютона для клина:

$$M\bar{a}_1 = M\bar{g} + \bar{P} + \bar{R}$$

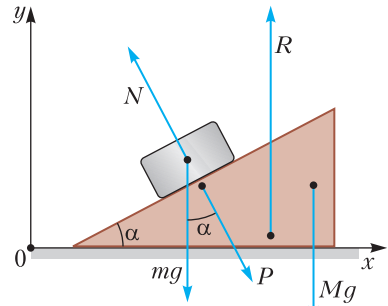


Рис. 1

и для шайбы:

$$m\bar{a}_2 = m\bar{g} + \bar{N}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на ось x , получаем

$$Ma_{1x} = N \sin \alpha, \quad ma_{2x} = -N \sin \alpha, \\ a_{2x} = -\frac{M}{m} a_{1x}.$$

Проекцию $a_{2\text{пл}}$ ускорения шайбы на направление наклонной плоскости найдем из второго закона Ньютона:

$$ma_{2\text{пл}} = mg \sin \alpha, \quad a_{2\text{пл}} = g \sin \alpha.$$

Ускорения клина и шайбы связаны законом сложения ускорений $\bar{a}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_{\text{отн}}$. Из треугольника ускорений (рис. 2) следует

$$a_{\text{отн}} = g \sin \alpha + a_{1x} \cos \alpha = \frac{a_{1x} - a_{2x}}{\cos \alpha}.$$

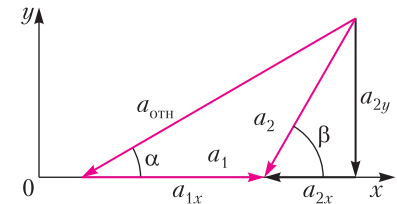


Рис. 2

Из приведенных соотношений находим ускорение клина:

$$a_{1x} = \frac{1}{2} \frac{m \sin 2\alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

Это ускорение создается горизонтальной проекцией силы \bar{P} :

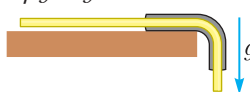
$$P \sin \alpha = Ma_{1x}.$$

Далее, искомая сила, с которой горизонтальная плоскость действует на клин, равна

$$R = Mg + P \cos \alpha = Mg \frac{M + m}{M + m \sin^2 \alpha} = 8 \text{ Н}.$$

В.Плис

Ф2827. Однородный гибкий выпрямленный во всю свою длину $L = 0,8$ м жгут движется поступательно со скоростью $v_0 = 1$ м/с, направленной вдоль жгута, по гладкому горизонтальному столу, а затем соскальзывает со стола через закрепленную на краю стола направляющую трубку с гладкими внутренними стенками (см. рисунок).



В какой момент времени T весь жгут примет вертикальное положение? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². В момент времени $t = 0$ правый конец жгута как раз добрался до поворота в трубку.

Приращение кинетической энергии жгута равно убыли его потенциальной энергии:

$$M \frac{(x')^2}{2} = \frac{M}{L} xg \left(\frac{x}{2} \right),$$

отсюда находим ускорение жгута:

$$x'' = \frac{g}{L} x.$$

Общее решение этого уравнения:

$$x(t) = A \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) + B \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right).$$

Здесь $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус, а $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус. С учетом начальных условий,

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{L}{g}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right).$$

При $t = T$

$$x(T) = L = v_0 \sqrt{\frac{L}{g}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} T \right).$$

Далее,

$$\frac{\exp \left(\sqrt{\frac{g}{L}} T \right) - \exp \left(-\sqrt{\frac{g}{L}} T \right)}{2} = \frac{\sqrt{gL}}{v_0},$$

откуда

$$\exp \left(\sqrt{\frac{g}{L}} T \right) = \frac{\sqrt{gL}}{v_0} + \sqrt{\frac{gL}{v_0^2} + 1}.$$

Переходим к логарифмам:

$$\sqrt{\frac{g}{L}} T = \ln \left(\frac{\sqrt{gL}}{v_0} + \sqrt{\frac{gL}{v_0^2} + 1} \right)$$

и находим искомое время:

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left(\frac{\sqrt{gL}}{v_0} + \sqrt{\frac{gL}{v_0^2} + 1} \right) \approx 0,5 \text{ с.}$$

В.Плис

Ф2828. Циклический процесс, проводимый с одноатомным идеальным газом, представлен на рисунке 1 в координатах (p, ρ) . В процессе 1–2 давление газа изменяется по закону $p = a + \frac{b}{\rho}$, где a и b – постоянные, ρ – плотность газа.

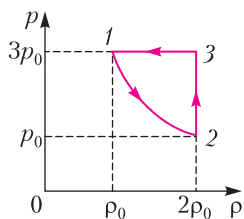


Рис. 1

Максимальная внутренняя энергия газа в процессе $U_{\max} = 4986$ Дж. Найдите работу газа за цикл.

В состояниях 1 и 2 справедливы соотношения

$$3p_0 = a + \frac{b}{\rho_0}, \quad p_0 = a + \frac{b}{2\rho_0}.$$

Отсюда

$$a = -p_0, \quad b = 4p_0\rho_0.$$

Тогда в процессе 1–2

$$p = -p_0 + \frac{4p_0\rho_0}{\rho} = p_0 \left(4 \frac{V}{V_0} - 1 \right).$$

Цикл в координатах p, V представлен на рисунке 2. Работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2p_0 \cdot \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

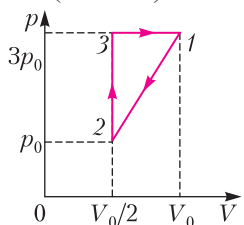


Рис. 2

В состоянии 1 внутренняя энергия газа в рассматриваемом процессе максимальна и равна

$$U_{\max} = \frac{3}{2} \cdot 3p_0 V_0 = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

Искомая работа газа за цикл составляет

$$A = \frac{U_{\max}}{9} = \frac{4986 \text{ Дж}}{9} = 554 \text{ Дж}.$$

В.Плис

Задачи

1. Четверым раздали семь карточек с различными числами от 1 до 7 так, чтобы никто не видел ни количество, ни значение карточек у других (у каждого есть хотя бы одна карточка).

Аня сказала: «Я знаю, что среди остальных есть кто-то ровно с одной карточкой. А у меня сумма чисел на карточках меньше 7».

Боря сказал: «Я знаю, что среди остальных есть как человек с четной суммой, так и человек с нечетной суммой».

Вова радостно воскликнул: «А я знаю, что у Ани!»

Какие карточки могут быть у Гены?

Е.Новодворская



2. Петя утверждает, что вырезал из полоски шириной 2 клетки многоугольник из 24 клеток, которым полностью обернул куб $2 \times 2 \times 2$. Может ли это быть правдой?

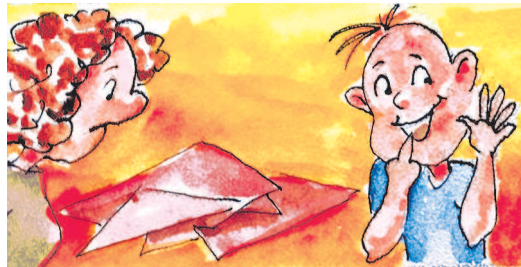
Т.Казицына, А.Грибалко



Эти задачи предлагались на XXIX Турнире имени А.П. Савина.

3. Равносторонний треугольник со стороной 10 разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1. Фигуру, составленную из этих треугольников, назовем *полоской*, если она заключена между двумя соседними параллельными линиями. Исходный треугольник разрезали на 18 полосок. Докажите, что хотя бы одна из них состоит не менее чем из семи треугольников разбиения.

А.Грибалко



4. В стране есть несколько городов, соединенных железными и автомобильными дорогами. От каждого города можно по дорогам доехать до любого другого. Из каждого города выходят дороги обоих видов, суммарно не менее трех. Переменчивый Вася хочет в каждом городе менять вид транспорта. Верно ли, что он всегда сможет добраться от каждого города до любого другого?

Т.Корчемкина



КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!

21. Из спичек сложен квадрат, а на двух его сторонах из спичек построены равно-сторонние треугольники. Получился невыпуклый шестиугольник (рис.1). Пере-

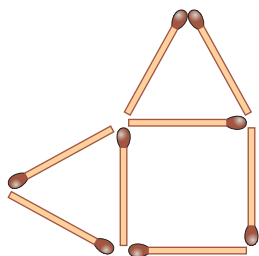


Рис. 1

ложите две спички внутри него так, чтобы он разделился на две части, одинаковые по форме и по размеру. (Спички не должны выходить за пределы шестиугольника, их нельзя ломать, нельзя накладывать друг на друга.)

Н.Авилов

22. Четверо ребят получили от воспитательницы по игрушке. Потом она собрала эти четыре игрушки и снова раздала ребятам так, что каждый получил ту игрушку, которой у него до этого не было.

а) Верно ли, что вне зависимости от того, как были выданы игрушки до этого, воспитательница сможет собрать игрушки и раздать их в третий раз так, чтобы каждый получил новую?

б) А в четвертый раз? Ответ объясните.

М.Прасолов

23. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на изображенные на

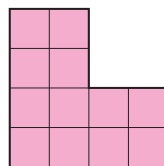
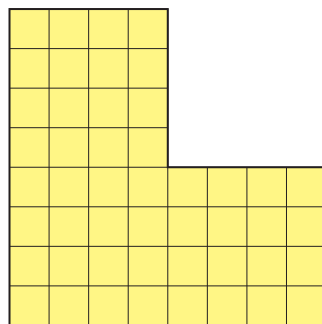


Рис. 2

рисунке 2 большие, средние и маленькие уголки так, чтобы уголков каждого типа в разрезании было поровну?

С.Костин

24. Музей представляет собой 10-угольник (не обязательно выпуклый). В музее вдоль стен расставлено 100 скульптур следующим образом: каждая сторона 10-угольника разбита на 10 равных отрезков, скульптуры стоят на концах этих отрезков. При каком наибольшем k можно гарантировать, что из любой точки внутри музея можно увидеть хотя бы k скульптур? (Стены загораживают обзор.)

Е.Бакаев

Затяжной прыжок и вихрь мыслей

А. СТАСЕНКО

*Испытай один раз полет,
и твои глаза всегда
будут устремлены в небо.*

Леонардо да Винчи

Однажды Джеймсу Бонду довелось совершить прыжок с парашютом с дирижабля. И тут вихрь мыслей пронесся в его голове, обдуваемой потоком воздуха: «Если пренебречь сопротивлением воздуха, как иногда рекомендуется в задачах, я буду падать с ускорением $a = -g$, скорость движения будет меняться по закону $v = -gt$, а координата – по закону $y = -gt^2$ (см. рисунок, кривые 1)». Конечно, при этом ось y будет направлена вверх, как и положено в средней школе.

Если прыгнуть с высоты $h = 2$ км, тело встретит землю со скоростью $v_1 = \sqrt{2gh} \approx 200$ м/с. «Это будет очень больно», – подумал Джеймс и решил быстро учесть силу сопротивления воздуха, которую обычно записывают в виде

$$F = \frac{c}{2} \rho_v s v^2.$$

Здесь ρ_v – плотность воздуха (индекс «в»), s – площадь поперечного сечения тела, c – безразмерный коэффициент сопротивления (можно проверить, что Джеймс не ошибся по крайней мере в размерности).

Пусть тело массой $m = 100$ кг от страха сжато в сферический комок, тогда его радиус r легко найти из равенства $m = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$:

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{m}{\rho_0} \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{10^2 \text{ кг}}{10^3 \text{ кг/м}^3} \right)^{1/3} \approx 0,3 \text{ м}.$$

Здесь средняя плотность человеческого тела ρ_0 порядка плотности воды 10^3 кг/м³: вдохнув, тело держится на поверхности, выдохнув – тонет. Коэффициент сопротив-

ления для шара $c = 0,42$ измерил еще Исаак Ньютон, а площадь диаметрального сечения шара $s = \pi r^2$. Поскольку $v = \frac{dy}{dt}$, то

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v = \frac{d(v^2/2)}{dy}.$$

Значит,

$$\frac{dv^2}{dy} = -2 \frac{F}{m} = \frac{c \rho_v \pi r^2}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0} v^2 = -\alpha v^2.$$

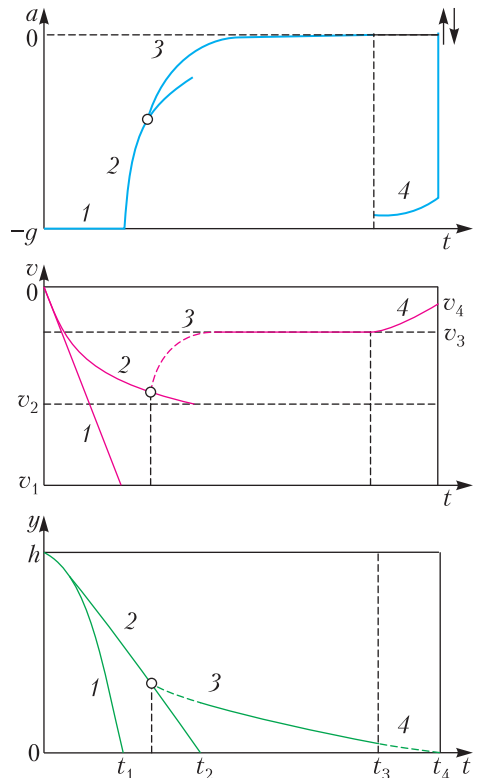
В результате дифференциальное уравнение для движения центра масс Джеймса Бонда можно записать в виде

$$\frac{dv^2}{dy} = -\alpha v^2, \text{ где } \alpha = \frac{3}{4} c \frac{\rho_v}{\rho_0 r} \approx 10^{-3} \text{ 1/м}.$$

Решение этого уравнения будет содержать экспоненту:

$$v^2 \sim e^{-\alpha y},$$

но Бонду было не до нее. Ясно, что на характерном расстоянии порядка $1/\alpha$ скорость падения выйдет на установившееся



Качественная зависимость от времени ускорения, скорости и координаты парашютиста. Кружок – момент раскрытия парашюта

значение (кривые 2), получаемое из равенства силы тяжести тела и силы сопротивления воздуха: $mg = F$, откуда

$$v_2 = \left(\frac{mg}{\frac{c}{2} \rho_B \pi r^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\alpha} \right)^{1/2} \approx 100 \text{ м/с.}$$

«Уже легче, однако, все еще нерелевантно и контрпродуктивно», – подумал Джеймс и вспомнил о парашюте. Ведь если, например, площадь парашюта S окажется в двести раз больше s , то, согласно предыдущему равенству, установившаяся скорость снижения $v_3 = v_2 \sqrt{\frac{s}{S}}$ окажется в 15 раз меньше (кривые 3)! «А к тому же, – успел подумать Джеймс, – что если использовать пару автоматов подмышками, стреляя строго вниз?».

В этом случае возникнет ретроракета, скорость которой определяется формулой Циолковского

$$\frac{v}{\omega} = \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t},$$

где ω – скорость «истечения» (скорость пули), m_0 – исходная масса, $\mu = 2m_{\text{п}}N$ – «расход топлива», $m_{\text{п}}$ – масса одной пули, N – число выстрелов в секунду (скорострельность) ав-

томата. При этом сила тяги такой «ракеты», направленная вверх, окажется равной

$$F_{\text{т}} = 2\mu\omega = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 15 \text{ 1/с} \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 100 \text{ Н,}$$

что по сравнению с силой тяжести нашего парашютиста $mg = 100 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 10^3 \text{ Н}$ – не так уж мало. К тому же и масса убывает по мере расхода боекомплекта, правда незначительно, но, как говорят, иногда и за соломинку хватаются. В результате находчивости нашего героя скорость его приземления еще несколько уменьшится (кривые 4).

А что это за стрелки в конце процесса? Это условные изображения ускорения тела при встрече с землей, которое зависит от степени упругости обоих участников.

«Однако, как полезно знать экспоненту и натуральный логарифм», – подумал Джеймс Бонд и, собрав парашют, приступил к выполнению очередного задания, бормоча нечто из Рея Бредбери: «Прыгай, и ты узнаешь, как расправить крылья во время падения».

Заметим, что грамотный студент, конечно, может нарисовать более детальную картину переходных процессов, например при раскрытии упругого парашюта, приземлении, ..., но у Джеймса просто не хватило бы на это времени.

ИНФОРМАЦИЯ



ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института проводит набор учащихся 7–10 классов для обучения в 8–11 классах на 2025/26 учебный год.

ЗФТШ успешно работает в сфере дополнительного профильного образования детей с 1966 года. Обучение ведется по пяти предметам научно-технической направленности – физике, математике, информатике, химии и биологии (шесть заданий в год по каждому предмету). Ежегодно в школе обучается более 13 тысяч детей. Практически все выпускники поступают в ведущие вузы страны, причем около 80% из них – в местные вузы.

В ЗФТШ работают три отделения: заочное, очно-заочное и очное. Обучение на всех отделениях ведется по единым программам естественно-научного профиля. Полная программа рассчитана на 4 года с 8 по 11 класс включительно, но начать обучение можно с любого из указанных

классов. Задания составляют опытные преподаватели МФТИ.

Учащиеся по окончании 11 класса получают свидетельство. Также выпускники могут добавить до пяти баллов в качестве индивидуальных достижений при поступлении в МФТИ.

Вступительные испытания на все отделения проходят с 1 апреля по 12 мая 2025 года в формате онлайн-олимпиады на сайте <https://zftsh.online>. Поступать можно на один или несколько предметов.

Обучение для школьников в рамках плана приема **БЕСПЛАТНОЕ**. Для школьников, не прошедших по конкурсу, возможно платное обучение.

Заочное отделение

На заочном отделении обучение ведется индивидуально. Учащиеся самостоятельно изучают теоретическую часть каждого задания, выполняют на платформе zftsh.online тесты и задачи и в установленные сроки отправляют все, что удалось решить, на проверку. За каждым учеником закрепляется преподаватель (студент, аспирант или выпускник МФТИ), осуществляющий проверку и рецензирование работ учащегося. После проверки учащимся становятся доступны авторские решения.

Очно-заочное отделение

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении по одному или нескольким предметам. Группы формируют учителя на основании списков школьников, успешно справившихся со вступительной олимпиадой ЗФТШ. Занятия проходят на базе общеобразовательных учебных заведений под руководством учителей.

Выбирая это отделение, учащемуся следует сначала уточнить у своих школьных учителей, работает ли в данном учебном заведении факультатив ЗФТШ по интересующим его предметам. Если такого факультатива нет и его организация не планируется, то поступление в ЗФТШ возможно только на заочное отделение.

Очное отделение

Для учащихся Москвы и Московской области по программам ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты.

Занятия с учащимися проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский, а также в школе 2107 города Москвы. Ведут занятия студенты, аспиранты и выпускники МФТИ.

Выбирая это отделение, учащийся должен объективно оценить свои возможности один раз в неделю посещать очные занятия продолжительностью 1 ч. 30 мин. в 8–10 классах и 2 ч. 15 мин. в 11 классе по каждому предмету.

Поступление в 7 класс

Обучение проходит по физике и математике (4 и 8 заданий в год соответственно) на заочном и очно-заочном отделениях. Ученики зачисляются без вступительных испытаний на платной основе. При условии успешного выполнения заданий в течение учебного года учащиеся переводятся в 8 класс на бюджетные места (бесплатное обучение). Подробная информация о наборе в седьмой класс размещена на сайте ЗФТШ.

Курсы повышения квалификации учителей

Два раза в год ЗФТШ приглашает учителей физики, математики и информатики на курсы повышения квалификации. В летний период курсы проходят в очном формате в учебных корпусах МФТИ, осенью – в дистанционном формате. Лекции читают преподаватели кафедр общей физики, высшей математики и кафедры информатики и вычислительной математики МФТИ, имеющие большой опыт работы с одаренными детьми. Вся информация о курсах размещается на сайте ЗФТШ в разделе «Учителям».

Контакты

Телефоны: (495) 408-51-45 – заочное отделение

(498) 744-63-51 – очно-заочное отделение

(498) 744-65-83 – очное отделение

E-mail: edu@zftsh.online

Web: <https://zftsh.online>

Why-точки, полуописанные окружности и прямая Эйлера

Ф. БАХАРЕВ, Г. ЧЕЛНОКОВ

Появление Why-точки

За последние несколько десятилетий олимпиадная геометрия обросла терминологией, значительную часть которой еще нельзя назвать общепринятой. Так, одни названия распространены только в русскоязычном пространстве (леммы о воробьях [1], задача 255 [2], лемма о велосипедистах [3]), другие – в основном в англоязычной литературе (Queue point, Iran lemma, Shooting/Death Star lemma [4, 5]). В этой статье мы поговорим о точке, название которой еще не прижилось. Иногда ее упоминают как ISL 2011 G4 point¹, а с недавнего времени встречается уже не столь неказистое, но все еще не слишком удачное название: Why-точка (см., например, [6]). Не претендуя на принятие окончательного решения по поводу названия, мы расскажем о связанных с этими точками конструкциях, часть из которых – непосредственные наблюдения авторов статьи. Перед тем, как перейти к определениям, разберем две задачи, предлагавшиеся на заключительных этапах Всероссийской олимпиады школьников. Наименования точек изменены по сравнению с оригинальными формулировками.

¹ ISL – IMO Short List – избранные задачи, из которых в конечном итоге составляется вариант Международной математической олимпиады (IMO). Номер G4 означает, что задача попала под номером 4 в список геометрических задач. В шортлисте 2011 года предлагалось 8 задач по геометрии. Задача G4 была предложена Россией, автор – Михаил Исаев.

Факт 1 (Всероссийская олимпиада, 2015). Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω (рис. 1). Пусть G – точка пересечения его медиан, а AD – высота. Луч GD пересекает Ω в точке Y . Тогда описанная окружность треугольника YDB касается прямой AB .

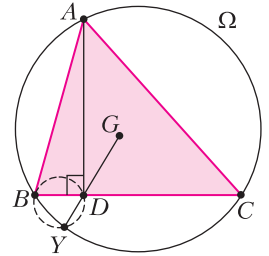


Рис 1

Доказательство.

Гомотетия с центром в точке G и коэффициентом (-2) переводит окружность девяти точек треугольника ABC в его описанную окружность Ω , поэтому образ точки D – точка K – лежит на Ω , причем $AK \parallel BC$ (рис. 2).

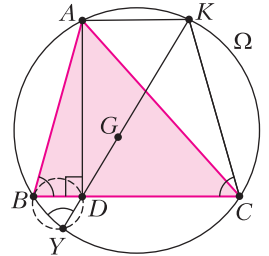


Рис 2

Таким образом, $BAKC$ – равнобокая трапеция и $\angle ABC = \angle KCB$. Привлекая равенство $\angle KCB = \angle KYB$, заключаем, что $\angle ABD = \angle DYB$ и, следовательно, окружность (BYD) , описанная около треугольника BYD , касается прямой AB .

Замечание 1. В доказательстве мы использовали обозначение (BYD) для описанной окружности треугольника BYD . Мы продолжим использовать это обозначение без дополнительных пояснений.

Замечание 2. В дальнейшем мы будем по умолчанию считать, что треугольник ABC остроугольный, $AB < AC$, и все доказательства проводить в этом случае. Отметим, что все доказываемые утверждения остаются верны и в случае неостроугольного треугольника.

Упражнение 1. Через вершину A треугольника проведена прямая, которая пересекает сторону BC в точке X и описанную окружность Ω повторно в точке Z . Используя введенные выше обозначения, докажите, что окружность (XYZ) проходит через точку D .

Следующее утверждение выглядит несколько сложнее, но значительное сходство и в условии, и в доказательстве бросается в глаза. Тем удивительнее, что обе задачи предлагались на финале Всероссийской олимпиады с разницей всего в три года.

Факт 2 (Всероссийская олимпиада, 2018). В треугольнике ABC точки N и L – середины сторон AB и AC соответственно, точка

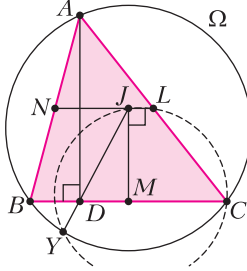


Рис 3

D – основание высоты, проведенной из вершины A (рис. 3). На отрезке NL найдется такая точка J , что $BJ = CJ$. Луч JD пересекает окружность Ω в точке Y . Тогда точки C, L, J и Y лежат на одной окружности.

Доказательство. Используем введенные ранее обозначения для точек M, G, K . Треугольник BJC равнобедренный, поэтому отрезки JM и BC перпендикулярны, и тогда MJ – высота треугольника MNL (рис. 4).

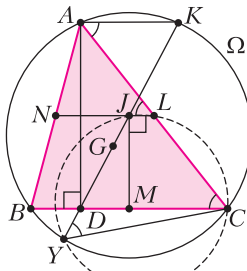


Рис 4

Гомотеция с центром в точке G и коэффициентом (-2) переводит треугольник MLN в треугольник ABC , а окружность (MLN) – в окружность Ω . При этом точка J переходит в точку D как соответствующее основание высоты, а D ,

в свою очередь, – в точку K , причем, как и ранее, $AK \parallel BC$. Следовательно, верна цепочка равенств

$$\angle KYC = \angle KAC = \angle ACB = \angle ALN,$$

т.е. четырехугольник $CLJY$ – вписанный.

Эти с виду не самые примечательные конструкции таят в себе большое количество сюрпризов. Перед тем, как ознакомиться с ними, введем терминологию:

- точка Y – Why-точка (или, более точно, A -Why-точка) треугольника ABC ;
- прямая AU – Why-чевиана (или, более точно, A -Why-чевиана);
- окружность (NLY) – Why-окружность.

Замечание 3. Мы будем использовать уже введенные обозначения для точек без дополнительных комментариев. Исключением служат лишь несколько задач, предложенных в виде упражнений, и вспомогательные леммы, где уместно использовать независимые обозначения.

Дальнейшие свойства Why-точки

Why-точку можно определить в треугольнике при помощи следующего утверждения.

Факт 3. Пусть касательная в точке A к описанной окружности Ω треугольника ABC пересекает прямую BC в точке T . Тогда Why-точка Y лежит на окружности $\Omega_a = (TDA)$ (рис. 5).

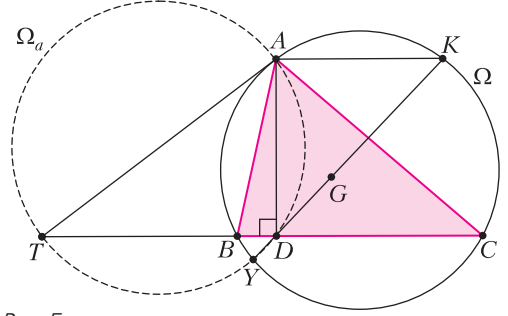


Рис 5

Доказательство. Угол DTA равен полуразности дуг AC и AB окружности Ω . Поскольку луч YD пересекает окружность Ω в точке K – четвертой вершине трапеции $AKCB$, – то угол AYK равен полуразности дуг AC и CK и равен углу DTA . Следовательно, точки A, D, Y, T лежат на одной окружности.

Замечание 4. Отметим, что точка T хорошо известна любителям геометрии – это центр так называемой окружности Аполлония треугольника (см., например, [7, глава VIII] и [8, 9]).

Упражнение 2. Докажите, что окружность (ADY) пересекает среднюю линию NL в точке, лежащей на биссектрисе угла A .

Следующее утверждение является переформулировкой уже упомянутой задачи из шорт-листа международной олимпиады 2011 года.

Факт 4 (ISL, 2011, G4). Why-окружность касается описанной окружности треугольника.

Доказательство. Для доказательства касания окружностей проверим, что Ω и (NLY) имеют общую касательную в точке Y . По факту 3 отрезок AT служит диаметром окружности (ATY) . Следовательно, центр O_a этой окружности лежит на прямой NL (рис. 6). Прямая O_aA касается окружности Ω , а значит, касается и окружности (ANL) , гомотетичной Ω с центром в точке A и коэффициентом $1/2$. Поэтому $O_aA^2 = O_aN \cdot O_aL$ по теореме о произведении отрезков секущей. Кро-

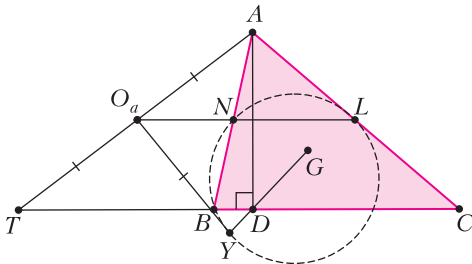


Рис 6

ме того, O_aY тоже является касательной к Ω , например, в силу той же теоремы о произведении отрезков секущей и равенства $O_aA = O_aY$. Теперь равенства

$$O_aY^2 = O_aA^2 = O_aN \cdot O_aL$$

показывают, что прямая O_aY касается и окружности (NLY) .

Замечание 5. В действительности, мы установили, что окружность $\Omega_a = (ATY)$ перпендикулярна окружности Ω . Это можно вывести и из соответствующего свойства окружностей Аполлония (см. [7, глава VIII, утв. 69]). Действительно, A -окружность Аполлония треугольника ABC получается из Ω_a гомотетией с центром в точке A и коэффициентом 2.

Докажем еще одно свойство Why-точки, но перед этим сформулируем важную лемму.

Лемма 1. Пусть на прямой даны четыре точки A, B, C, D с условием $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ и точка M – середина отрезка AB . Тогда $CA \cdot CB = CM \cdot CD$.

Доказательство. Рассмотрим прямую AB как координатную прямую с начальной точкой C . Координаты точек A, B, M, D обозначим через a, b, m, d соответственно, причем $m = \frac{a+b}{2}$. Пропорция из условия переписывается в виде $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a-d|}{|b-d|}$, т.е. $|ab - ad| = |ab - bd|$, но, поскольку точки A и B не совпадают, раскрыть модули можно только одним способом, а именно $ab - ad = bd - ab$, откуда $ab = \frac{a+b}{2} \cdot d$, что и требовалось.

Замечание 6. Последнее равенство в доказательстве леммы можно переписать в виде $d = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, поэтому четверку точек A, B, C, D

(в указанном порядке) называют гармонической четверкой. Более аккуратное опреде-

ление и примеры использования можно найти, например, в [10].

Упражнения

3. Убедитесь, что в системе координат с началом в точке A координата точки B является средним гармоническим координат точек C и D .

4. В треугольнике ABC проведены чевианы AD, BE и CF , пересекающиеся в одной точке. Прямая EF пересекает прямую AB в точке D' . Докажите, что четверка точек B, C, D, D' является гармонической.

5. В треугольнике ABC проведены чевианы AD, BE и CF , пересекающиеся в одной точке. Прямая EF пересекает окружность Ω в точках E' и F' . Докажите, что окружность $(DE'F')$ проходит через середину отрезка BC .

Факт 5. Пусть высоты BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая EF пересекает прямую BC в точке P . Тогда окружность (PHD) проходит через точку Y .

Доказательство. Применяя результат из упражнения 4 к высотам треугольника ABC и лемму 1 к гармонической четверке B, C, P, D , заключаем, что $DM \cdot DP = DB \cdot DC$. Поскольку $DB \cdot DC = DY \cdot DK$ как степень точки D относительно описанной окружности, точки P, Y, M, K лежат на одной окружности (рис. 7).

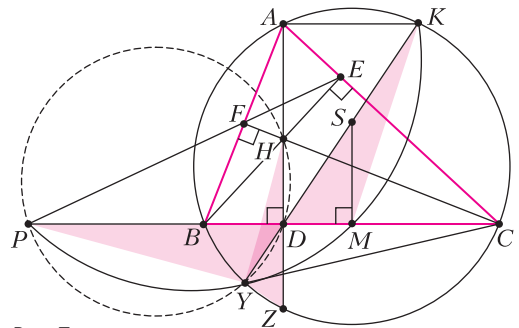


Рис 7

Для доказательства того, что P, Y, D, H лежат на одной окружности, достаточно проверить равенство углов DPY и DHY или же, что равносильно, YKM и DHY . Для этого сначала заметим, что по двум углам подобны прямоугольные треугольники DYZ и SMD , где S – середина DK , а затем, что подобны треугольники HYZ и KMD (каждый из них получен удвоением соответствующей стороны треугольников из предыдущей пары).

Упражнение 6. Докажите, что прямая ZY делит отрезок PD пополам.

Три Why-точки

Факт 6. *Why-чевианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера.*

Доказательство. Рассмотрим окружность Ω_a , появившуюся в факте 3, и аналогичные окружности Ω_b и Ω_c . Для ортоцентра треугольника верны равенства $HD \cdot HA = HE \cdot HB = HF \cdot HC$, поскольку высоты являются радикальными осями окружностей, построенных на сторонах треугольника как на диаметрах. Следовательно, точка H имеет одинаковые степени и относительно всех трех окружностей Ω_a , Ω_b и Ω_c . Кроме того, принимая во внимание, что OA , OB и OC (O , как обычно, центр окружности Ω) являются касательными к Ω_a , Ω_b и Ω_c соответственно, заключаем, что и степень точки O относительно всех трех окружностей тоже одинакова. Это означает, что прямая Эйлера треугольника ABC является общей радикальной осью этих окружностей. Таким образом, существует точка, имеющая одинаковую степень относительно всех трех окружностей Ω_a , Ω_b , Ω_c и относительно окружности Ω . Эта точка лежит на всех Why-чевианах и на прямой Эйлера.

Упражнения

7. Установите независимо, что точка G тоже имеет одинаковые степени относительно окружностей Ω_a , Ω_b , Ω_c .

8. Докажите, что точка пересечения Why-чевиан лежит на прямой, соединяющей точку D с точкой пересечения касательных к Ω в точках B и C .

Замечание 7. Предыдущее упражнение показывает, что точка пересечения Why-чевиан совпадает с центром гомотетии ортотреугольника DEF и треугольника, образованного касательными к окружности Ω в точках A , B и C . Эта точка известна геометрам как точка $X(25)$ из энциклопедии центров треугольника (см., например, [11]).

Связь с полуописанными окружностями

Окружности, проходящие через две вершины треугольника и касающиеся вписанной окружности внутренним образом, называются полуописанными окружностями. Оказывается, Why-точки тесно связаны с указанными точками касания полуописанных окружностей.

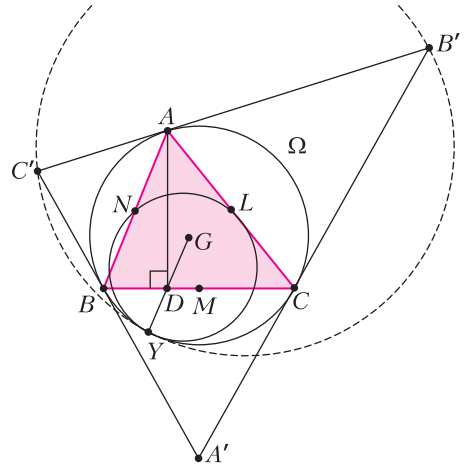


Рис 8

Для того чтобы увидеть эту связь, проведем в исходной конфигурации касательные к окружности Ω в вершинах треугольника. Пусть они ограничивают треугольник $A'B'C'$, вершины которого названы соответственным образом. Нетрудно видеть, что точки A' , B' и C' являются инверсными образами середин сторон M , L и N соответственно относительно окружности Ω (рис.8). Поскольку Why-окружность (NLY) касается Ω в точке Y , то ее инверсный образ $(B'C'Y)$ тоже касается окружности Ω в точке Y . Так как окружность Ω является вписанной для треугольника $A'B'C'$, заключаем, что точка Y является точкой касания полуописанной окружности в треугольнике $A'B'C'$. Сформулируем соответствующее утверждение.

Факт 7. *Точка Y – точка касания вписанной и полуописанной окружностей треугольника, образованного касательными в точках A , B , C к окружности Ω .*

Замечание 8. Отметим, что в случае тупоугольного треугольника в рассуждениях выше образуется не вписанная окружность, а вне-вписанная, а в случае прямоугольного и вовсе происходит вырождение – касательные в двух вершинах не пересекаются.

Точка касания полуописанной окружности сама по себе имеет множество замечательных свойств. Докажем одно из самых важных.

Факт 8. *Прямая $A'Y$ проходит через центр I_a вневписанной окружности треугольника $A'B'C'$ со стороны $B'C'$ (рис.9).*

Доказательство. Пусть W – середина дуги $B'C'$ окружности $(YB'C')$. По лемме

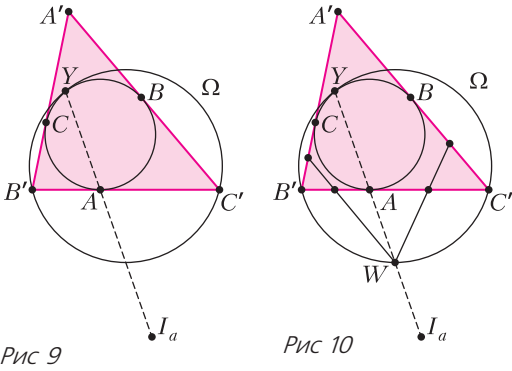


Рис 9

Рис 10

Архимеда точки Y , A и W лежат на одной прямой (рис. 10). Кроме того, $WB^2 = WC'^2 = WA \cdot WY$, т.е. точка W является радикальным центром окружности Ω и точек B' и C' . Радикальной осью точки B' и Ω служит средняя линия треугольника $B'AC$, поскольку степени середин отрезков $B'A$ и $B'C$ относительно B' и Ω равны. Поскольку $AC \parallel B'I_a$, прямая, содержащая указанную среднюю линию, проходит через середину отрезка $A I_a$. Аналогично, радикальной осью точки C' и Ω является средняя линия треугольника $C'AB$, которая также проходит через середину отрезка $A I_a$. Из этого следует, что серединой $A I_a$ является точка W . Значит, точки I_a, A, W и Y лежат на одной прямой.

Упражнения

9. Докажите, что прямая AU проходит через середину высоты треугольника $A'B'C'$, опущенной из вершины A' на сторону $B'C'$.

10 (Всероссийская олимпиада, 2003). Вписанная в треугольник $A'B'C'$ окружность касается его сторон $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ в точках A, B и C соответственно. Рассмотрим прямую, равноудаленную от точки A' и прямой BC , и две другие аналогично построенные прямые. Докажите, что треугольник, образованный этими тремя прямыми, имеет тот же центр описанной окружности, что и треугольник $A'B'C'$.

Радикальные центры

Закончим мы статью, доказав два красивых факта про радикальные центры трех полуописанных окружностей и трех Why-окружностей.

Факт 9. Радикальный центр трех полуописанных окружностей треугольника лежит на прямой Эйлера треугольника, образованного точками касания его вписанной окружности со сторонами.

Доказательство. Пусть, как и ранее, A, B, C – точки касания окружности Ω , вписанной в треугольник $A'B'C'$, с его сторонами $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ соответственно, I_a, I_b и I_c – соответствующие центры внеописанных окружностей треугольника $A'B'C'$ (рис.11), а точки Y_a, Y_b, Y_c – точки касания соответствующих полуописанных окружностей $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ с Ω (Why-точки треугольника ABC). Пусть касательные к Ω в точках Y_a, Y_b пересекаются в точке C'' . Тогда CC'' – радикальная ось окружностей ω_a и ω_b . На прямой $C'C''$

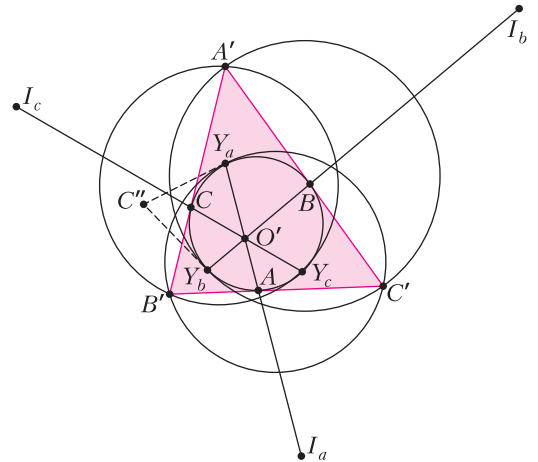


Рис 11

по теореме Брианшона лежит точка пересечения прямых $A Y_a$ и $B Y_b$, назовем ее O' . У треугольников ABC и $I_a I_b I_c$ попарно параллельные стороны, следовательно, они гомотетичны, и по факту 8 центром гомотетии является O' . Мы установили, что одна из трех радикальных осей проходит через точку O' , аналогично устанавливается, что и две другие проходят, а значит, O' и есть радикальный центр окружностей $\omega_a, \omega_b, \omega_c$. Центр гомотетии лежит на прямой, соединяющий ортоцентры треугольников, но ортоцентром треугольника $I_a I_b I_c$ служит центр окружности Ω , а значит, прямая, соединяющая ортоцентры, – прямая Эйлера треугольника ABC .

Для финального аккорда нам понадобится следующее утверждение, которое мы оставим читателям в качестве упражнения.

Лемма 2. Даны окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с радикальным центром A . При инверсии относительно окружности Ω с центром O они перешли в окружности $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ с

радикальным центром A' . Докажите, что точки A, A', O лежат на одной прямой.

Факт 10. Радикальный центр Why-окружностей лежит на прямой Эйлера.

Доказательство. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведенные в вершинах, пересекаются в точках A', B', C' . Тогда по факту 9 радикальный центр U полуописанных окружностей треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой Эйлера треугольника ABC . При инверсии относительно описанной окружности полуописанные окружности треугольника $A'B'C'$ перейдут в Why-окружности треугольника ABC . По лемме 2 радикальный центр U , центр инверсии и радикальный центр Why-окружностей лежат на одной прямой. Однако, первые две из перечисленных точек лежат на прямой Эйлера, поэтому лежит и третья.

Упражнения

11. В треугольнике ABC проведена высота AD , точка H – ортоцентр треугольника ABC . Точка Z симметрична точке H относительно D , Y – Why-точка, соответствующая вершине A . Докажите, что окружность (DYZ) касается прямой BC .

12. В треугольнике ABC проведена высота AD , точка D' на стороне BC такова, что $BD' = CD'$. Докажите, что $\angle BAY = \angle CAD'$, где Y – A-Why-точка.

13. Высоты BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что проекция H на EF лежит на прямой AU , где U – A-Why-точка.

14. Точки Y_a, Y_b и Y_c – Why-точки треугольника ABC соответствующие вершинам A, B и C . Продолжение медианы из вершины A повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что прямые $Y_b Y_c, Y_a D$ и BC пересекаются в одной точке.

15. Точки Y_b и Y_c – Why-точки треугольника ABC соответствующие вершинам B и C . Точки E и F – основания высот из вершин B и C . Докажите, что Y_b, Y_c, E и F лежат на одной окружности.

16. Точки Y_b и Y_c – Why-точки треугольника ABC соответствующие вершинам B и C . Точка D – основание высоты из вершины A . Докажите, что окружность $(DY_b Y_c)$ проходит через середину стороны BC .

17. Высоты AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки Y_a, Y_b и Y_c – Why-точки треугольника ABC соответствующие вершинам A, B и C . Докажите, что окружности $(HDY_a), (HEY_b), (HFY_c)$ имеют общую радикальную ось – прямую Эйлера треугольника.

Литература

1. А.Полянский. Воробьями по пушкам! – «Квант», 2012, № 2.
2. И.Шарыгин. Геометрия 9-11: От учебной задачи к творческой. – М.: Дрофа, 1997.
3. В.Протасов. О двух велосипедистах и вишневой косточке. – «Квант», 2008, № 3.
4. E. Chen. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. – The Mathematical Association of America Press, Problem books, 2016, vol. 27.
5. E. Chen. Lemmas in AoPS Geometry. 2023.
6. AoPS-user i3435. «Muricaaaaaa «American» Olympiad Triangle Geometry Configurations», 2021.
7. Д.Ефремов. Новая геометрия треугольника. – Одесса: Типография бланкоиздательства М.Шпенцера, 1902.
8. T.A.Moon. The Apollonian circles and isodynamic points. – Mathematical Reflections, 2010, vol. 6.
9. А.Пуинский. Заметки об окружности Аполлония. – Математическое образование, 1999, № 2.
10. В.Тадеев. Простые, двойные, гармонические. – «Квант», 1982, № 7.
11. C.Kimberling. Triangle Centers and Central Triangles. – Congressus numerantium, 1998, vol. 129.

Внимание наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Тянем-потянем резину

С.ВАРЛАМОВ

КАК ИЗВЕСТНО, СУЩЕСТВУЮТ ВОЗДУШНЫЕ (с резиновой оболочкой) не только шарики, но и цилиндры. Если толщина оболочки одинакова по всей поверхности, то изначально пустая оболочка сначала приобретает форму шарика с радиусом R_0 или цилиндра с радиусом поперечного сечения R_0 , при этом давление воздуха p_0 внутри такое же, как и снаружи. А затем появляется избыточное давление – радиус оболочки шарика и радиус и длина цилиндра начинают расти.

Сначала разберемся с шариками.

Шарик

Избыточное давление Δp внутри шарика по мере увеличения его радиуса на ΔR сначала растет, а затем, достигнув экстремального значения, начинает уменьшаться. Иными словами, некоторому относительному увеличению радиуса R_m/R_0 шарика соответствует экстремальное (максимальное) избыточное давление Δp_{\max} . При дальнейшем росте радиуса шарика, когда $R > R_m$, избыточное давление сначала падает, достигает минимального значения и затем вновь начинает расти. По достижению максимального значения радиуса R_{\max} избыточное давление в шарике становится даже больше величины в первом максимуме Δp_{\max} , а затем оболочка шарика разрушается – говорят: «шарик лопнул».

Экспериментальный график зависимости избыточного давления воздуха в шарике с резиновой оболочкой от его объема (взятый из интернета) приведен на рисунке 1. «Почему это так?» – вопрос, на который хотелось бы получить содержательный ответ.

Для получения ответа необходимо разобраться с устройством материала



оболочек таких шариков, т.е. с резиной. А это означает, что надо понять, каков механизм возникновения упругости и какова причина такой возможности резины, как огромные (в сотни процентов) упругие относительные деформации, и при этом (как показывает эксперимент) с хорошей точностью сохраняется объем, занятый резиной в пространстве.

По определению, резина – это высокоэластичный полимерный материал, получаемый вулканизацией каучука, т.е. смешиванием его с вулканизирующим веществом, обычно это сера, с последующим нагревом. Как известно, резина представляет собой вещество, состоящее из очень длинных молекул, которые не выпрямлены, а «скомканы», при этом концы таких длинных молекул-цепочек, состоящих из большого количества сцепленных друг с другом атомов, соединяются друг с другом в некоторых местах «мостиками» из атомов серы. Относительные деформации резины по выбранным направлениям могут характеризоваться сотнями процентов именно потому, что расстояние между точками крепления концов длинной цепочки в свернувшейся клубке гораздо меньше длины этой цепочки, если ее выпрямить.

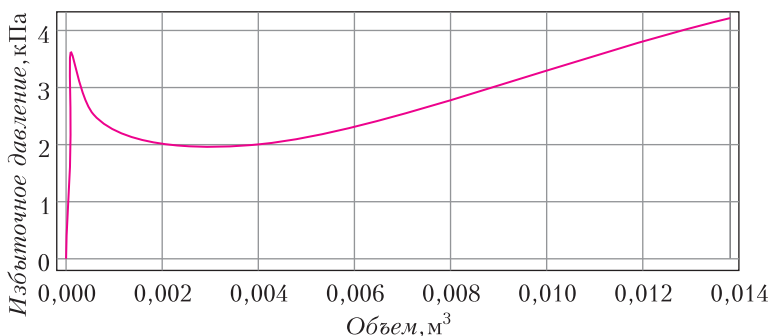


Рис 1

Рассмотрим небольшой участок цепочки атомов с фиксированным положением его концов, которые смещены от своих равновесных положений, т.е. резина деформирована (растянута). Если расстояние между точками фиксации концов меньше длины участка цепочки, то за счет теплового движения трясущаяся и вращающаяся массивная цепочка действует на места закрепления со средними по времени силами так, что они (места закрепления) стремятся сблизиться и вернуться в равновесные положения, а внешние силы, растягивающие резину, удерживают их на месте.

Совсем простая, но сохраняющая существенные свойства, нужные для объяснения рассматриваемого явления, модель для элементарного фрагмента цепочки атомов может состоять всего из одного грузика с массой m и двух одинаковых по длине L невесомых нитей, прикрепленных к этому грузику и к точкам фиксации (рис. 2). Ки-

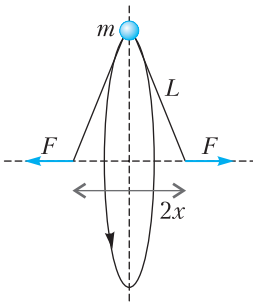


Рис 2

нетическая энергия движения грузика при фиксированной температуре резины считается неизменной и равной $mv^2/2$. Тепловое движение такого грузика заменим его вращением вокруг оси, проходящей через точки закрепления, и найдем средние по времени силы, с которыми концы нитей «тянут» места закрепления друг к другу.

В начальном положении (в недеформированном состоянии резины) точки крепления почти совпадают, т.е. расстояние D между ними мало в сравнении с величиной L , а при деформации резины расстояние между точками закрепления стало на $2x$ больше. Выполняются неравенства $L > x \gg D$. Угол β между натянутыми нитями и плоскостью, в которой движется грузик, таков, что $\operatorname{tg} \beta = x/L$. Внешние силы, с которыми нужно (в среднем по времени) тянуть места закрепления в проти-

воположных направлениях вдоль оси вращения, чтобы они не сдвигались со своих мест, равны по величине

$$F = \frac{xmv^2}{2L^2 \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)}.$$

Площадка, на которой располагались места закрепления концов двух таких цепочек в недеформированной резине, была по площади равной примерно D^2 . А после растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям (поскольку поверхность оболочки шарика увеличилась) этим же местам закрепления соответствует площадь $(D + 2x)^2$. А вот малый телесный угол, под которым из центра шарика видна такая площадка, для шарика не изменился и остался равным $(D/R_0)^2$. Поэтому давление внутри шарика увеличилось на

$$\Delta p = 2 \frac{D}{R_0} \frac{F}{(D + 2x)^2},$$

или на

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\left(\frac{D}{R_0}\right) xmv^2}{(D + 2x)^2 L^2 \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)} = \\ &= \left(\frac{D}{R_0}\right) mv^2 \frac{y}{4L^3 \left(y + \frac{D}{2L}\right)^2 (1 - y^2)} = \\ &= \operatorname{const} \frac{y}{\left(y + \frac{D}{2L}\right)^2 (1 - y^2)}. \end{aligned}$$

Вот именно по этой формуле, в которой $y = x/L$, и был построен график зависимости Δp от y^3 ,

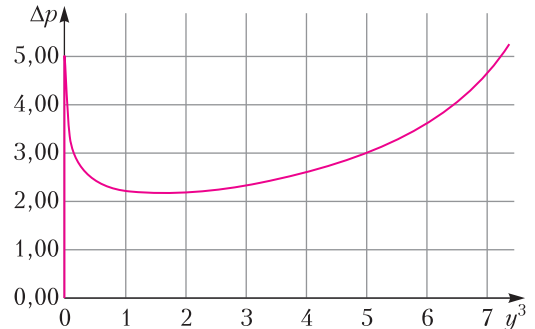


Рис 3

приведенный на рисунке 3. Варьируемым параметром является отношение D/L . График построен для отношения $D/(2L) = 1/40 = 0,025$.

Качественное совпадение экспериментального результата (рис. 1) и предсказания модели (рис. 3) для шарика очевидно. Значит, предложенная простая модель «работает» для шарика.

Попробуем применить эти же идеи, описывающие свойства резины, для цилиндра.

Цилиндр

Когда избыточное давление воздуха внутри длинного резинового цилиндра достигает некоторой величины Δp_{\max} , цилиндр начинает изменять свою форму: некоторая часть такого цилиндра сохраняет свой радиус $R_1 > R_0$ и свою длину, а в другой части и радиус цилиндра R_2 становится больше R_1 , и длина этой части увеличивается. При этом избыточное давление воздуха становится меньше максимального. Результаты экспериментов с накачкой воздухом цилиндра (игрушки) иллюстрируются фотографиями на рисунках 4–6.

Давление, которое показывал манометр на начальной фазе такого раздувания (см. рис. 4), было равным примерно $\Delta p_{\max} = 140$ мм рт.ст. Причем если раздувается только совсем малая часть цилиндра, то ее форма сначала

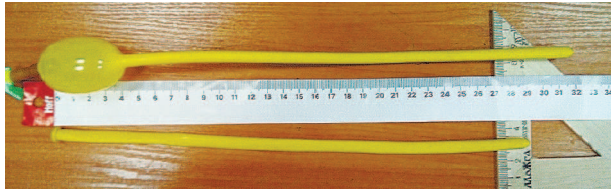


Рис 4



Рис 5

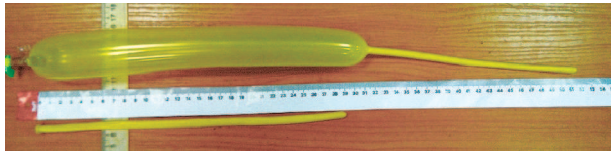


Рис 6

напоминает шарик – небольшой участок цилиндра раздувается по всем направлениям.

Обычно это раздувание начинается в том месте, откуда в цилиндр поступает воздух, но можно этот немного раздувшийся участок переместить даже в середину цилиндра. В случае, показанном на рисунке 5 (с манометром), это и было проделано. Раздутие к этому моменту уже не было маленьким – размеры раздувшегося участка в длину и в ширину (т.е. в направлениях вдоль и поперек оси симметрии цилиндра) увеличились в одинаковое число раз – примерно в три раза. И форма раздувшегося участка почти такая же, как у шарика. К этому моменту давление, регистрируемое манометром, от максимального значения $\Delta p_{\max} = 140$ мм рт.ст. уменьшилось до значения примерно $\Delta p_1 = 80$ мм рт.ст.

Таким образом, сначала характер поведения давления воздуха внутри цилиндра при росте объема воздуха внутри качественно совпадает с таким же поведением на начальном этапе раздувания шарика. И давление тоже падает от максимального значения $\Delta p_{\max} = 140$ мм рт.ст. до величины примерно в два раза меньшей – до $\Delta p_1 = 80$ мм рт.ст. (т.е. падает так же, как и у шарика). А при дальнейшем росте объема воздуха, поступившего в цилиндр (роста той части цилиндра, которая уже подверглась сильному раздуванию), давление стабилизируется и остается таким же (80 мм рт.ст.).



Чтобы выяснить, в какое количество раз отличаются величины роста поперечных и продольных размеров раздувшейся части, можно проанализировать фотографию, приведенную на рисунке 6. Рядом с раздувшимся (частично) цилиндром лежит цилиндр с такой же начальной длиной, т.е. с воздухом внутри при атмосферном давлении и при отсутствии избыточного давления. Длина нераздувшейся части составляет 20 см, следовательно, первоначальные 9 см длины цилиндра превратились в 31 см в раздувшейся части. Диаметр раздувшейся части 50 мм, а нераздувшейся примерно 7 мм, т.е. коэффициенты увеличения поперечных и продольных размеров цилиндра отличаются примерно в $(50/7)/(31/9) \approx 2,07$ раза.

Понятно, что при сохранении объема резины при ее растяжении по двум направлениям в $(50/7)$ и в $(31/9)$ раз толщина стенок оболочки должна уменьшиться в $(50 \cdot 31)/(7 \cdot 9) = 24,6 \approx 25$ раз. По мере дальнейшего медленного (чтобы успевала установиться равновесная температура) поступления воздуха в цилиндр избыточное давление Δp внутри остается неизменным, радиусы разных частей цилиндра R_1 и R_2 тоже не изменяются, но растет доля длины цилиндра, подвергшаяся значительному растяжению. Когда эта доля становится равной 100%, т.е. когда весь цилиндр растянется, снова избыточное давление внутри немного вырастет и оболочка разрушается.

Обратим внимание на то, что сильно растянутая часть резиновой оболочки в цилиндре напряжена по-разному: вдоль оси цилиндра силы натяжения оболочки на участке длиной $2\pi R$ сдерживают силу давления воздуха, равную $\Delta p \cdot \pi R^2$, а в поперечном к оси симметрии направлении два участка оболочки с суммарной длиной L компенсируют силу давления со стороны воздуха, равную $L \cdot 2R \cdot \Delta p$. Силы, приходящиеся на единицу длины растянутой поверхности, отличаются в 2 раза! В поперечном к оси симметрии цилиндра направлении каждый участок поверхности оболочки с небольшой длиной x вдоль оси симметрии натянут с удвоенной силой в сравнении с таким же по длине участком, но расположенном перпендикулярно к оси симметрии цилиндра.

Будем считать, что все пары точек крепления концов молекулярных цепочек в нерас-

тянутой резине расположены тремя различными способами. На линиях, параллельных оси симметрии цилиндра, находится 1/3 часть всех цепочек. На линиях в перпендикулярных к оси симметрии направлениях 1/3 часть лежит в плоскости, касательной к соответствующему участку поверхности цилиндра. Последняя 1/3 часть лежит на линиях, перпендикулярных и к оси симметрии цилиндра, и к касательной плоскости к соответствующему участку поверхности. Эти последние цепочки не участвуют в создании упругости оболочки, поскольку толщина стенок при растяжении резины уменьшается, а не увеличивается, т.е. соответствующие этим цепочкам «клубки» сохраняют свое нерастянутое состояние.

После растяжения в разной степени (вдоль и поперек) количества цепочек на единицу длины участка поверхности оболочки в этих разных направлениях изменились. Эти изменения обратно пропорциональны соответствующим удлинениям. Но отношение удлинений (экспериментальный результат) равно примерно двум и силы на единицу длины тоже отличаются в два раза. Из этого следует парадоксальный на первый взгляд результат: силы, которые создаются каждой продольной и каждой поперечной цепочкой в сильно растянутой части поверхности цилиндра, равны по величине!

Заинтересовавшиеся описанными явлениями читатели могут воспроизвести такие эксперименты и получить, например, график зависимости давления в резиновом цилиндре от объема воздуха, находящегося внутри, а также выяснить, при каком избыточном давлении рвутся оболочки шариков и цилиндров.

Муниципальный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Теоретический тур

7 класс

1. Канатная дорога

На горизонтальной канатной дороге есть участки (трасса), где вагончик движется со скоростью $v_{\text{тр}}$ относительно земли, и станции с платформами, вдоль которых вагончик движется медленнее со скоростью $v_{\text{ст}} < v_{\text{тр}}$

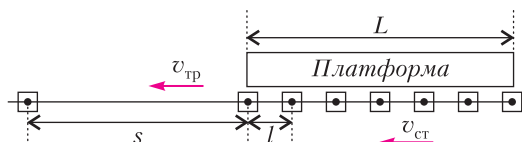


Рис. 1

(рис. 1, вид сверху). Переключение скоростей происходит мгновенно, когда вагончик находится точно над краем платформы. На станции всегда скорость изменяется у двух вагончиков одновременно и в этот момент между ними находятся еще 5 вагончиков. Между соседними вагончиками на станции сохраняется равное расстояние $l = 6$ м. Время медленного движения вагончика вдоль станции от одного края платформы до другого $\tau = 2$ мин. Расстояние между вагончиками на трассе $s = 40$ м, размерами самих вагончиков можете пренебречь.

- 1) Найдите длину L платформы.
- 2) Чему равна скорость $v_{\text{ст}}$ движения вагончиков на станции?
- 3) Чему равна скорость $v_{\text{тр}}$ движения вагончиков на трассе?

С.Кармазин

2. Метеосводка

Семиклассник Артем из Долгопрудного решил узнать, на сколько миллиметров отличаются сейчас высоты столбиков термометров у него и его товарища из Великого Устюга. Для этого Артем приложил конец измерительной ленты к шкале своего термометра (рис. 2). Согласно метеосводке, в Великом

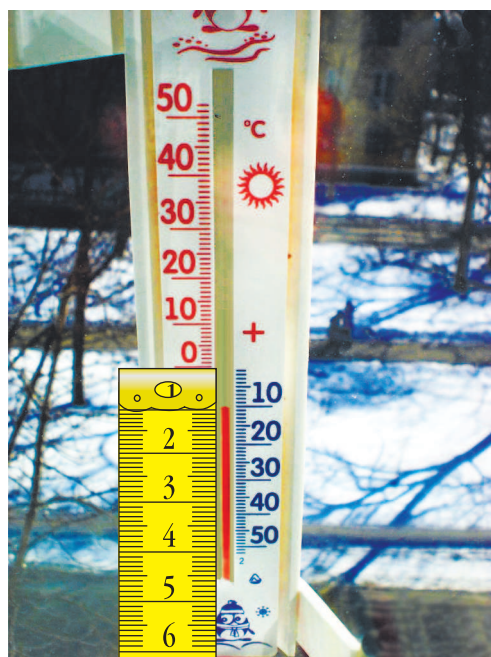


Рис. 2

Устюге установилась температура воздуха -37 °С. Помогите Артему сделать нужные расчеты, зная, что термометры Артема и его товарища одинаковые.

В.Бабинцев

3. Единицы измерения бывают разные

Экран ноутбука пользователя, размеры которого 345×194 мм, имеет разрешение 1920×1080 пикселей. Пользователь использует мышь с DPI, равным 800 пикселей. Выделяя часть одной строки текста, пользователь равномерно и прямолинейно перемещает мышь со скоростью 0,06 фута в микронеделю. Определите с точностью до трех значащих цифр:

- 1) DPI мыши пользователя в дюймах;
- 2) скорость перемещения мыши, равную 0,06 фут/микронеделю в дюйм/с;

3) скорость перемещения указателя мыши по экрану во время выделения текста пользователем в м/с;

4) скорость перемещения указателя мыши по экрану во время выделения текста пользователем в км/ч.

Указание. DPI компьютерной мыши показывает, сколько пикселей на экране компьютера преодолит указатель мыши, когда мышь пользователем перемещается на один дюйм; 1 дюйм = 1/12 фута = 2,54 см. Примеры чисел с тремя значащими цифрами: 123; 12,3; 1,23; 0,123; 0,0123; 0,00123.

А. Сеитов

4. Утрамбовали

В пустой стакан объемом $V_0 = 200 \text{ см}^3$ и массой $m_1 = 20 \text{ г}$ насыпали доверху песок и поставили на весы (рис. 3). Масса стакана

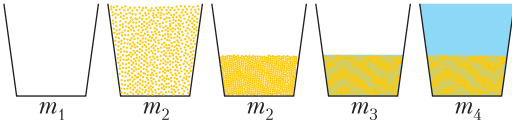


Рис. 3

с песком составила $m_2 = 336 \text{ г}$. Затем песок хорошо утрамбовали и залили водой плотностью $\rho_0 = 1,0 \text{ г/см}^3$ так, что все полости между песчинками заполнились жидкостью. При этом высота утрамбованного песка осталась прежней и верхние границы воды и песка совпали. Сами песчинки воду не впитывали. Новые показания весов выросли до $m_3 = 412 \text{ г}$. После этого в стакан долили доверху воду и снова измерили массу. Весы показали $m_4 = 425 \text{ г}$. По известным данным определите:

- 1) насыпную плотность ρ_1 неутрамбованного песка;
- 2) насыпную плотность ρ_2 утрамбованного песка;
- 3) отношение β объема пустот к полному объему утрамбованного песка;
- 4) плотность ρ песчинок.

Д. Рубцов

8 класс

1. Подвижные препятствия

Между источником сигнала и приемником перпендикулярно прямой, соединяющей их, запустили навстречу друг другу с постоянными скоростями v_A и v_B соответственно пластины A и B (рис. 4). Если сигнал по пути от источника S к приемнику P проходит через одну из пластин, приемник зажигает

на дисплее желтую лампочку, если через обе – красную. В одном из экспериментов в момент прохождения пластин мимо источника загоралась только красная лампочка. Известно, что мимо покоящейся пластины B пластина A , движущаяся со скоростью v_A , проходит за время $t_1 = 12 \text{ с}$, а пластина B , движущаяся со скоростью v_B , мимо покоящейся пластины A проходит за время $t_2 = 8 \text{ с}$.

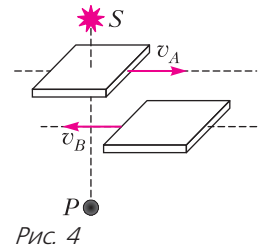


Рис. 4

1) Какая из пластин A или B длиннее и во сколько раз?

2) В течение какого времени t на дисплее горела красная лампочка?

А. Евсеев

2. Дырвое хранилище

В цилиндрическом сосуде высотой $L = 0,7 \text{ м}$ и площадью дна $S_d = 100 \text{ см}^2$ в центре дна есть круглое отверстие площадью $S_0 = 2,5 \text{ см}^2$. Для хранения в этом сосуде воды придумали устройство-поплавок, закрывающее отверстие. Невесомая круглая пластина чуть большего размера, чем отверстие, прижата снизу ко дну сосуда и нитью длиной $l = 5 \text{ см}$ привязана к пенопластовому поплавку. Поплавок длиной $l_n = 10 \text{ см}$ и площадью сечения $S_n = 20 \text{ см}^2$ помещен в сосуд (рис. 5). В сосуд, удерживая поплавок, налили воду, и поплавок оказался погруженным наполовину. После того, как поплавок отпустили, вода вытекать не стала. На сколько допустимо изменить объем воды в сосуде, чтобы она не вытекала? Плотность пенопласта $\rho_n = 200 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

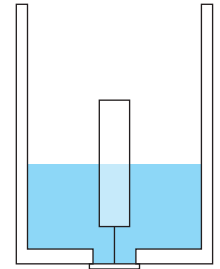


Рис. 5

В. Курносоев

3. Перенос массы

Небольшой груз, подвешенный к однородной доске, перенесли слева направо, как показано на рисунке 6. При этом сила натяжения одной из нитей увеличилась на $\Delta T = 15 \text{ Н}$.

1) Сила натяжения какой из нитей увеличилась?

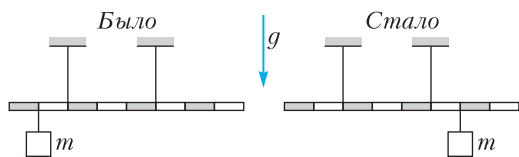


Рис. 6

2) Определите массу груза m .

3) При какой массе M доски все нити будут оставаться натянутыми независимо от места крепления груза массой m ?

Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Все необходимые расстояния можете взять из рисунка.

А.Вергунов

4. Холодный чай

Калориметр объемом $V_0 = 200$ мл наполовину заполнен водой температурой $t = 90^\circ\text{C}$. В калориметр добавляют колотый лед температурой $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$. Какой минимальной температуры содержимого калориметра можно добиться при условии, что никакая жидкость из него не выливалась? Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

А.Вергунов

9 класс

1. Петля времени

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми s , выехали два автомобиля: первый начал движение из состояния покоя с постоянным ускорением, второй, имея начальную скорость v , тормозил с постоянным ускорением так, что к концу пути в пункте B полностью остановился. Навстречу им из пункта B одновременно выехал третий автомобиль, имея неизвестную постоянную скорость u . Он закончил свое движение в пункте A одновременно с тем, как первые два автомобиля прибыли в пункт B .

1) Какую скорость v_1 имел первый автомобиль в конце своего пути?

2) С какой скоростью u двигался третий автомобиль?

3) Сколько времени прошло между встречами третьим автомобилем первого и второго?

М.Клепиков

2. Омметр и потенциометр

Определите показания омметра в цепи (рис. 7), если сопротивление резистора $R_1 = 30 \text{ кОм}$, полное сопротивление потенциометра $R_0 = 20 \text{ кОм}$, а ползунок потенциометра расположен так, что показания омметра максимальны.

М.Замятнин, А.Вергунов

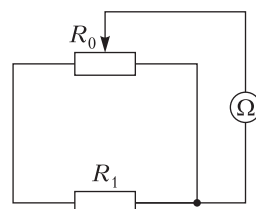


Рис. 7

3. Перенос массы

См. задачу 3 для 8 класса.

4. Холодный чай

См. задачу 4 для 8 класса.

5. Нагрузили

В U-образную трубку, состоящую из двух вертикальных соединенных цилиндров сечениями S и $3S$, налита жидкость плотностью ρ (рис. 8). В узкий цилиндр вставлен легкий поршень, который может двигаться без трения и подтекания жидкости. Поршень плотно прилегает к жидкости. От центра поршня протянута невесомая и нерастяжимая нить, которая перекинута через идеальный блок. Ко второму ее концу привязан цилиндр с площадью основания S и плотностью $1,5\rho$. Изначально уровень воды в цилиндрах одинаковый, а груз придерживают так, чтобы он едва касался воды. Нить не провисает, видимые участки нити вертикальные. Груз плавно отпускают. Определите, какая часть груза окажется погруженной в жидкость после установления равновесия.

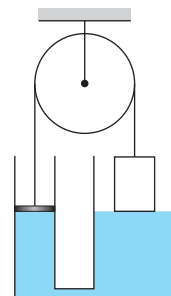


Рис. 8

А.Кузнецов

10 класс

1. Упал на кол

Маленький шарик радиусом r вертикально падает на цилиндрический колышек радиусом $R = 1 \text{ см}$ ($r \ll R$), главная ось симметрии цилиндра закреплена перпендикулярно скорости на высоте $H = 1 \text{ м}$ от пола. Скорость шарика перед ударом $v = 6 \text{ м/с}$.

1) Через какое время шарик окажется на высоте 0,5 м от пола, если он ударился о кольцо на расстоянии $b = \sqrt{2}R/2$ от вертикального поперечного сечения (рис. 9)?

2) На каком расстоянии по горизонтали от места удара упадет этот шарик первый раз?

Все удары считайте абсолютно упругими, трения нигде нет, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

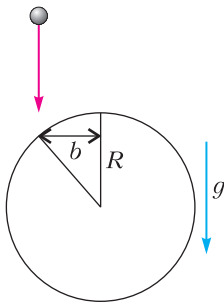


Рис. 9

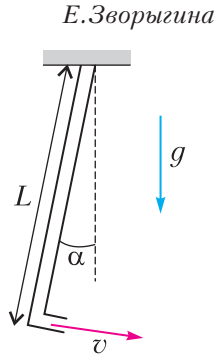


Рис. 10

Е.Зворыгина

2. Душ

Легкая полая труба длиной L с изогнутым под прямым углом концом висит на шарнирном подвесе (рис. 10). Через нее течет вода со скоростью v . Под каким углом α к вертикали располагается труба в состоянии устойчивого равновесия? Для каких скоростей существует такое устойчивое равновесие? Трения нет, ускорение свободного падения g .

Д.Рубцов

3. Начало скольжения

В системе, изображенной на рисунке 11, блоки невесомые, трения в осях блоков нет, нити невесомые и нерастяжимые. Нижний блок жестко прикреплен к верхнему бруску. Коэффициенты трения между брусками и между нижним бруском и столом равны $\mu = 0,2$. Массы брусков равны m , а их длины заметно больше их высот. Считая, что бруски не отрываются от горизонтальных поверхностей, найдите:

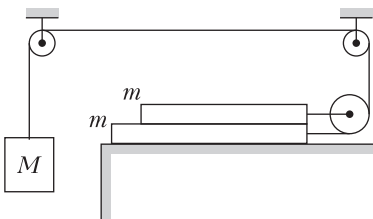


Рис. 11

1) при какой минимальной массе груза M он начнет двигаться;

2) при какой минимальной массе M оба бруска придут в движение.

А.Жигар

4. Втекает и вытекает

Определите показания идеальных приборов в цепи, схема которой изображена на рисунке 12. Так как приборы имеют полярность,

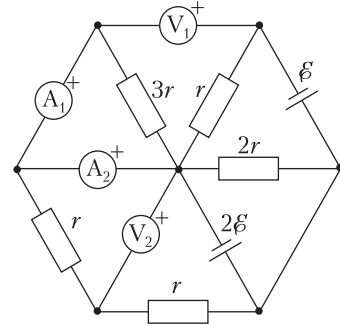


Рис. 12

считайте, что если ток втекает в контакт «+», то показания амперметра положительные, если в «-», то показания амперметра отрицательные. Для вольтметра считайте, что если потенциал у контакта «+» больше, то напряжение положительно и наоборот, если потенциал больше у контакта «-». Сопротивление резисторов $r = 5 \text{ кОм}$, ЭДС источников $\epsilon = 5 \text{ В}$.

М.Еськин

5. Система линз

Определите координату, увеличение и вид изображения предмета в системе двух тонких линз с общей главной оптической осью (рис. 13). Первая линза – собирающая с фокусным расстоянием $F_1 = 2F$ и находится в начале координат. Вторая линза – рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = F$. Расстояние между линзами $s = F$. Предмет расположен перед собирающей линзой на расстоянии $3F$. Ось системы координат направлена вправо. Постройте примерный ход двух лучей при преломлении света в системе линз.

Р.Зайцев

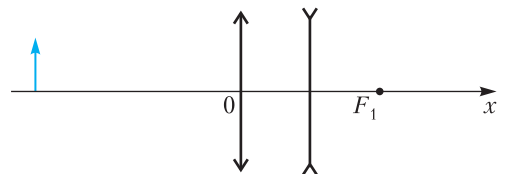


Рис. 13

11 класс

1. Безработица

Идеальный одноатомный газ участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изохор, изотермы и адиабаты (рис. 14). Графики процессов 1–2 и 3–4 пересекаются в точке B . Отношение объемов на изохорах равно α . Известно, что КПД тепловой машины, работающей по данному циклу, $\eta = 0\%$, а p_0 и V_0 – некоторые неизвестные постоянные значения давления и объема газа.

1) Найдите β (см. рис. 14).

2) Считая β известным (в независимости от того, решили первый пункт или нет), определите координаты точки B .

Примечание. Работа ν моль идеального газа в изотермическом процессе расширения (или сжатия) от начального объема V_n до конечного V_k при температуре T равна

$$A_T = \nu RT \cdot \ln \frac{V_k}{V_n}.$$

Уравнение Пуассона для адиабатного процесса с одноатомным газом имеет вид

$$pV^{5/3} = \text{const}.$$

М.Клепиков

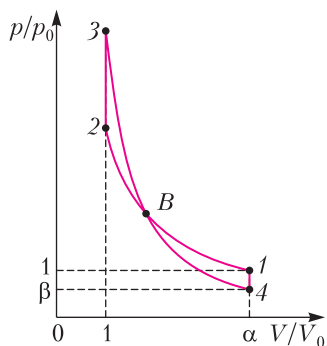


Рис. 14

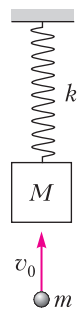


Рис. 15

2. Пуля

Брусок массой M висит на пружине жесткостью k (рис. 15). В начальный момент времени в него попадает летящая вертикально вверх пуля массой m и застревает в нем. Считайте, что удар происходит настолько быстро, что брусок за это время не успевают заметно сместиться. Известно, что брусок после соударения поднялся на x выше положения, при котором пружина не натянута. Ускорение свободного падения g .

1) Определите, какая скорость v_0 была у пули в момент перед ударом.

2) Найдите потери энергии в процессе удара.

3) Найдите величину максимальной деформации пружины x_{max} в процессе движения.

В.Савинцев

3. Дуговая склейка

Равномерно заряженную проволоку согнули в дугу полуокружности радиусом R и расположили в горизонтальной плоскости (рис. 16). К середине этой дуги в точке A приклеили дугу в четверть окружности с тем же радиусом в вертикальной плоскости из той же проволоки так, что центры дуг совпадали в точке O . Линейная плотность заряда проволоки λ . Определите:

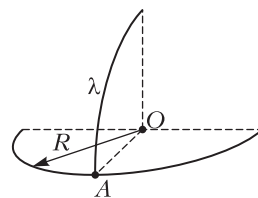


Рис. 16

1) угол наклона вектора напряженности электрического поля в точке O к горизонтальной плоскости;

2) модуль вектора напряженности электрического поля в точке O .

И.Юдин

4. Многоходовочка

Небольшое тело массой m и зарядом q располагается на горизонтальной шероховатой поверхности. Ему ударом в момент времени $t = 0$ сообщают начальную горизонтальную скорость v_0 , в результате чего оно скользит по поверхности, пока не остановится. Движение происходит в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B . Коэффициент трения между телом и плоскостью μ , ускорение свободного падения g . Определите:

1) зависимость модуля скорости тела v от времени движения t ;

2) время движения до остановки τ ;

3) путь s , который пройдет тело до остановки;

4) скорость тела v' сразу после прохождения первой трети пути $s/3$;

5) начальную угловую скорость вращения ω_0 вектора скорости тела;

6) модуль ускорения тела a_0 непосредственно сразу после удара;

7) зависимость угловой скорости вращения ω вектора скорости тела от времени t ;

8) на какой угол φ_0 суммарно повернется вектор скорости тела за время τ ;

9) угол поворота φ' вектора скорости тела за первую половину всего времени движения;

10) какую работу A совершат силы со стороны магнитного поля над телом на первой половине пути;

11) количество теплоты Q , выделившееся за все время τ в результате движения тела по шероховатой поверхности.

А.Киреев

5. Случайная перемычка

Квадратная рамка сделана из однородного проводника с конечным сопротивлением. Две ее противоположные стороны соединили перемычкой с пренебрежимо малым сопротивле-

нием (рис. 17). Полученные таким образом контуры поместили в однородное переменное магнитное поле. В некоторый момент времени в верхней ветке наблюдалась сила тока $I_1 = 7$ мА. При этом максимальная сила

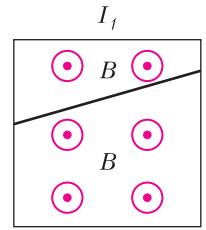


Рис. 17

тока в системе в этот момент времени была $I_{\max} = 10$ мА. Определите:

1) силу тока в перемычке I_{II} в этот момент времени;

2) отношение величин ЭДС индукции в верхнем и нижнем контурах.

К.Кутелев

Публикацию подготовил А.Вергунов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №1)

1. 5.

Рассмотрим 5 клеток, отмеченных красным на рисунке 1. Никакие две из них нельзя закрасить одновременно. Поэтому потребуется не меньше 5 действий. Такого количества действий действительно хватает: например, закрасим сначала прямоугольник 2×5 , далее закрасиваем горизонтальные полоски ширины 1.

Рис. 1

2. 97.

Приведем пример: пусть какое-то число встречается трижды, а остальные 97 чисел встречаются ровно один раз.

Докажем, что это наибольшее возможное количество. Пусть число A встречается хотя бы два раза. Один из ребят с числом A должен видеть два одинаковых числа, поэтому либо число A встречается хотя бы трижды, либо есть другое число B , встречающееся хотя бы дважды. В первом случае есть не больше 97 чисел, которые встречаются лишь один раз, во втором не больше 96.

3. 4.

Все 4 прямоугольника, содержащие центральную клетку, будут давать разные суммы, так как все числа в таблице попарно различны. Поэтому

ответ – не меньше 4. Приведем пример, где ровно 4 различные суммы (рис. 2).

4. Проведем отрезки AC и DF (рис. 3) и рассмотрим треугольники AEC и DEF . Так как $AE = DE$,

4	6	1
5	2	8
3	7	0

Рис. 2

$EC = EF$ и $\angle AEC = \angle AED + \angle CED = \angle CEF + \angle CED = \angle DEF$, то эти треугольники равны, откуда $AC = DF$ и $\angle CAE = \angle FDE$.

Проведем теперь диагональ DB , тогда $DB = AC = DF$, т.е. треугольник BDF равнобедренный. Кроме того, $\angle BDE = \angle ADE - \angle ADB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ и $\angle FDE = \angle CAE = \angle DAE - \angle DAC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Следовательно, DE – биссектриса угла при вершине D этого треугольника, поэтому прямая DE является серединным перпендикуляром к отрезку BF . Но из равенства $KB = KF$ следует, что точка K лежит на серединном перпендикуляре к BF , что и требовалось.

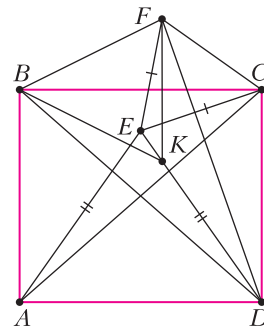


Рис. 3

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №11-12 за 2024 г.)

9. 18.

Обозначим стороны неполных клеток как a, b, c, d (рис. 4). Периметр прямоугольника равен

$$2(a + 3 + b + c + 3 + d) = 2a + 2b + 2c + 2d + 12.$$

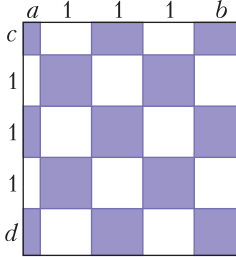


Рис. 4

А белая площадь, равная 10, составлена из прямоугольников $1 \times a, 1 \times b, 1 \times c$ и $1 \times d$, взятых по два раза, и четырех клеток 1×1 , т.е. равна $2a + 2b + 2c + 2d + 4$. Значит, периметр на 8 больше и равен $10 + 8$.

10. Рассмотрим представление данного числа 202420242024202420242024 в виде нужной суммы. Поделив на 4, получим, что вопрос задачи эквивалентен следующему: можно ли число 50605060506050605060506 представить в виде суммы шести натуральных чисел, каждое из которых записывается а) только цифрами 0 и 1; б) только цифрами 1?

а) Да, можно, так как в числе 5060...6 максимальная цифра – это 6. Пример:

$$\begin{aligned} 50605060506050605060506 &= \\ &= 5 \cdot 10101010101010101010101 + \\ &\quad + 100010001000100010001. \end{aligned}$$

б) Нельзя.

Каждое слагаемое состоит только из единиц и их не больше 9, поэтому при сложении не будет переноса единиц в другой разряд. Значит, сумма может быть только числом, где цифры идут в неубывающем порядке, а число 5060...6 таким свойством не обладает.

11. Да.

Так как записей трех цветов поровну, их общее количество кратно 3. Но записей на одну больше, чем было раундов. Значит, одна из команд победила со счетом $6 : 2$ или $6 : 5$. В первом случае проигравшая команда может лидировать не более двух раз, а нужно $(6 + 2 + 1) : 3 = 3$ раза. Второй случай возможен:

0 : 0, 0 : 1, 0 : 2, 1 : 2, 2 : 2, 2 : 3, 3 : 3, 4 : 3, 5 : 3, 5 : 4, 5 : 5, 6 : 5.

12. Да, можно.

Рассмотрим правильный 10-угольник $ABCDE...$ с длиной стороны 1. Построим прямую призму с

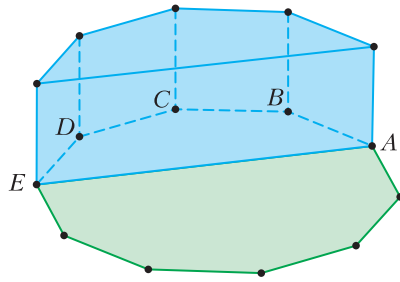


Рис. 5

основанием $ABCDE$ и высотой 1 (рис. 5). Два ее основания и одна прямоугольная боковая грань накрываются десятиугольником, остальные 4 боковые грани – это квадраты со стороной 1.

13. 41.

Лампочки, горевшие вначале, после переключения не горят. Разделим лампочки на три группы: 15 лампочек, которые горели вначале, но не горят сейчас; 24 лампочки, которые горят сейчас; оставшиеся 11, которые не горели ни до, ни после переключения. У 24 лампочек, которые горят сейчас, ни один выключатель переключать не надо. У 15 лампочек, горевших вначале, оба выключателя выключены, поэтому надо переключить 30 выключателей, чтобы зажечь их снова. Наконец, у оставшихся 11 лампочек сначала был выключен один выключатель, а после переключения – другой, а значит, чтобы зажечь их, надо переключить еще 11 выключателей.

14. а) $1/4$; б) 1.

а) Рассмотрим треугольники ABC и ABD . Площади ABC и ABD относятся так же, как относятся длины высот этих треугольников, проведенных к AB . Соответственно, все такие точки K внутри треугольника, что площадь ABK постоянна, лежат на отрезке, параллельном AB . Пусть площадь ABC равна 4, а площадь ABK равна s ; тогда пусть точки K лежат на прямых $l(s)$, для s , равных 1, 2, 3. Прямые $l(1), l(2), l(3)$ делят высоту на 4 равные части (рис. 6).

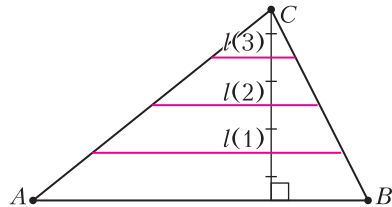


Рис. 6

Рассмотрим разбиение данного треугольника на 16 равных треугольников прямыми, параллельными сторонам (рис. 7). Рассмотрим точки пересечения, указанные на рисунке. Из рассужде-

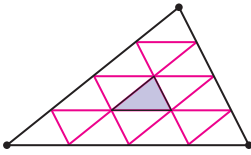


Рис. 7

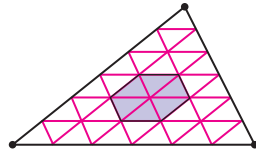


Рис. 8

ния, приведенного выше, ясно, что это хорошие точки. Из построения понятно, что треугольник подобен исходному и его площадь равна $1/16$ площади исходного, т.е. $1/4$.

б) Рассмотрим разбиение данного треугольника на 36 равных треугольников прямыми, параллельными сторонам (рис. 8). Аналогично, точки пересечения, указанные на рисунке, хорошие. Площадь шестиугольника равна $6/36$ площади исходного треугольника, т.е. 1.

15. а) Да; б) да.

а) Будем делить билеты на две равные кучки, спрашивать, есть ли выигрышный билет в первой из них, и, узнав ответ, делать то же самое с кучкой, где он есть. Первым вопросом мы найдем кучку из 8 билетов, где есть выигрышный, вторым – кучку из 4 билетов, третьим – из 2 и четвертым найдем один выигрышный билет. Деля оставшиеся 15 билетов на равные или «почти равные» кучки, за 4 вопроса (или меньше) найдем второй выигрышный. Итого мы выиграем 2000 рублей, потратив не более 800 рублей.

б) Чтобы получить 1300 рублей, найдем 2 выигрышных билета не более чем за 7 вопросов. Пойдем сначала, сколько есть вариантов расположения 2 выигрышных билетов среди лежащих в ряд 16. Первый билет может быть на любой из 16 позиций, второй – на любой из остальных 15; но нам не важно, в каком порядке они лежат, поэтому всего вариантов $15 \cdot 16 : 2 = 120$. Занумеруем их от 1 до 120 и будем каждый раз искать «подходящую» половину: спросим Федю, имеет ли расположение билетов номер от 1 до 60, вторым вопросом узнаем подходящие 30 вариантов, третьим – 15, четвертым – 8, пятым – 4, шестым – 2 и седьмым найдем искомый вариант.

16. 5.

Пример. Концы отрезка и три точки, делящие его на 4 равные части.

Оценка. Покажем, что шесть чисел быть не могло. Введем координаты так, что наименьшая из координат отмеченных точек – это 0, а наибольшая – это 4. Пусть есть еще хотя бы 4 числа: $0 < a < b < c < d < 4$. Чтобы точка a делила отрезок $[0; 4]$ в разрешенном отношении, нужно, чтобы $a > 1$. Чтобы точка b делила отрезок $[a; 4]$ в разрешенном отношении, нужно

$$b > a + (4 - a)/4 = 1 + 3a/4 > 7/4.$$

Чтобы точка c делила отрезок $[b; 4]$ в разрешенном отношении, нужно

$$c > b + (4 - b)/4 = 1 + 3b/4 > 1 + 21/16 = 2 + 5/16.$$

Аналогично, если рассуждать с другого конца:

$$d < 4 - 1,$$

$$c < 4 - 7/4 = 9/4 = 2 + 4/16.$$

Получаем противоречие: $2 + 5/16 < c < 2 + 4/16$.

Муниципальный этап LVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

7 класс

- 1) $L = 6l = 36$ м; 2) $v_{\text{ст}} = \frac{L}{\tau} = 0,3$ м/с;
- 3) $v_{\text{тр}} = 2$ м/с.
- 2) $\Delta h = 13,6$ мм.
- 3) 1) $DPT_{\text{мышь}} \approx 5,66$ дюйм;
- 2) $v_{\text{мышь}} \approx 1,19$ дюйм/с;
- 3) $v_{\text{указателя}} \approx 0,171$ м/с; 4) $v_{\text{указателя}} \approx 0,616$ км/ч.
- 4) 1) $\rho_1 = \frac{m_2 - m_1}{V_0} = 1,58$ г/см³;
- 2) $\rho_2 = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}} = 1,69$ г/см³;
- 3) $\beta = \frac{m_3 - m_2}{\left(V_0 - \frac{m_4 - m_3}{\rho_0}\right) \rho_0} = 0,41$;
- 4) $\rho = \frac{m_2 - m_1}{V_0 - \frac{m_4 - m_2}{\rho_0}} = 2,85$ г/см³.

8 класс

- 1) $\frac{l_B}{l_A} = \frac{t_1}{t_2} = 1,5$; 2) $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 4,8$ с.
- 2) $\Delta V_{\text{max}} = (S_d - S_n) \frac{l_n}{2} + S_d \left(h - \frac{l_n}{2} - l \right) = 5800$ см³
(здесь $h = \frac{(\rho_0 - \rho_n) S_n l_n}{\rho_0 S_0} = 64$ см).
- 3) 1) Увеличится сила натяжения правой нити;
- 2) $m = \frac{3\Delta T}{5g} = 0,9$ кг; 3) $M > 3m = 2,7$ кг.
4. Из уравнения теплового баланса

$$c_{\text{рв}} \cdot 0,5V_0(t - t_k) = \lambda m_{\text{л}} + c_{\text{рв}} \cdot 0,5V_0(t_k - t_{\text{л}})$$

найдем конечную температуру: $t_k \approx 5,7$ °С.

9 класс

- 1) 1) $v_1 = v$; 2) $u = \frac{v}{2}$; 3) $t = \frac{2s}{v}(\sqrt{5} - 2)$.
2. $R_{\Omega \text{max}} = \frac{R_1 R_0}{R_0 + R_1} = 12$ кОм (максимум показания омметра достигается при крайнем левом положении ползунка реостата).
5. Груз будет погружен в жидкость на $\alpha = \frac{3}{4}$.

10 класс

1. После удара шарик отскочит горизонтально со скоростью v . Перемещение шарика по вертикали $\Delta y = 0,5H + b = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t \approx 0,32$ с. Полное время полета T можно найти из уравнения $H + b = \frac{gT^2}{2}$, откуда $T \approx 0,45$ с. Тогда дальность полета шарика $L = vT \approx 2,7$ м.

2. Реактивная сила струи $F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v = \rho S v^2$. Из правила моментов относительно шарнирного подвеса $\rho \frac{L}{2} S g \sin \alpha = \rho S v^2$ находим $\sin \alpha = \frac{2v^2}{gL}$. Так как синус всегда меньше единицы, то устойчивое равновесие справедливо лишь для $v \leq \sqrt{\frac{gL}{2}}$.

3. 1) При увеличении массы M от нуля первым начнет двигаться верхний брусок, тогда $M_{\min} = \frac{\mu m}{1 + \mu} = \frac{m}{6}$.

2) Нижний брусок начнет скользить, когда сила трения между ним и столом достигнет силы трения скольжения $F_{\text{тр}2} = \mu N_2$. Запишем уравнение движения для всех трех тел в проекциях на вертикальные и горизонтальные оси:

$$\begin{aligned} Mg - T &= Ma, \quad N + T - mg = 0, \\ T - \mu N &= ma, \quad N_2 - N - mg = 0, \\ T - \mu N - \mu N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем $M_{\min} = \frac{3\mu m}{1 - \mu^2} = \frac{5m}{8}$.

4. Так как приборы идеальные, то можем заменить вольтметры на разрывы цепи, а амперметры на перемычки. Используя метод узловых потенциалов, расставим потенциалы в узлах (рис. 9). Видно, что ток по резистору OC не потечет из-за равенства потенциалов. Значит, не будет тока в амперметре A_1 , т.е. $I_1 = 0$.

Из рисунка видно, что разность потенциалов на первом вольтметре $U_1 = \xi = 5$ В. При этом больший потенциал находится у положительного контакта, а значит, показания вольтметра будут положительными.

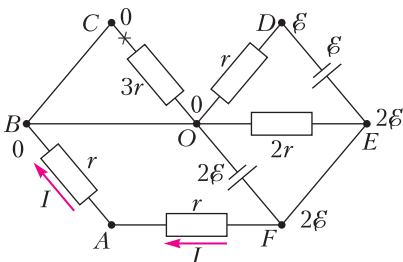


Рис. 9

Ток через второй амперметр определяется токами, протекающими через узел B . По ребру BC ток не протекает, а значит, ток через амперметр A_2 будет равен току I , протекающему по резистору BA . Этот ток определим из правила Кирхгофа для узлов B и F : $I = 2\xi \cdot 2r = 1$ мА, т.е. ток через амперметр A_2 будет равен $I_2 = 1$ мА. Но так как он втекает в отрицательный контакт амперметра, то знак тока будет «-». Итоговый ответ: $I_2 = -1$ мА.

Напряжение на вольтметре V_2 определяется как разность потенциалов между узлами O и A . Зная, что $Ir = \xi$, можем найти потенциал в точке A . Он будет равен ξ . Значит, разность потенциалов между узлами будет $U_2 = -\xi = -5$ В.

(Продолжение следует)

Математические бусы

(с.м. 2-ю с. обл.)

Бусины заменим точками, нарисованными на бумаге по кругу, и пронумеруем их числами от 1 до 32. Соединим отрезками те пары точек, в которых соответствующие им числа в сумме дают квадрат. Например, точку 1 соединим с четырьмя другими точками 3, 8, 15 и 24, затем точку 2 соединим с тремя точками 7, 14 и 23 и так далее. Проведя все возможные отрезки, мы получим граф (рис. 10).

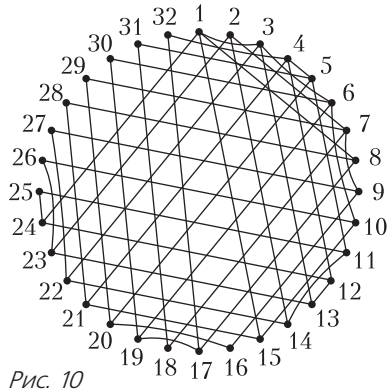


Рис. 10

На языке графов решить нашу задачу – значит построить замкнутый обход всех 32 вершин графа по его ребрам, причем дважды проходить по одному ребру нельзя.

Из каждой вершины графа выходит разное количество ребер – от 2 до 4. Обратим внимание на вершины 16, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 и 32, в которых сходятся ровно два ребра, значит, эти ребра должны быть в нашем маршруте. Выделим их синим цветом. Поскольку из каждой вершины должны выходить по два ребра, то в

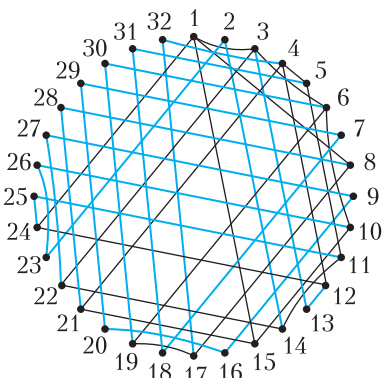


Рис. 11

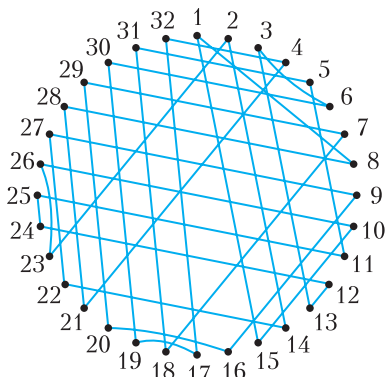


Рис. 12

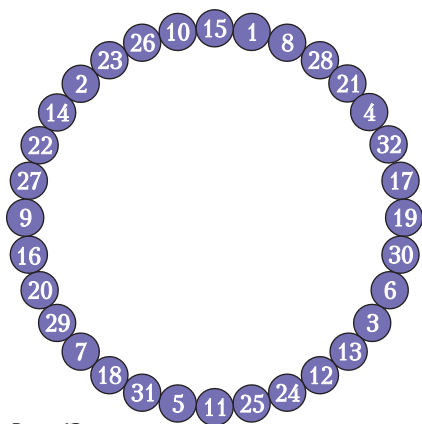


Рис. 13

тех вершинах, где сходятся два синих ребра, остальные надо удалить, они не будут использоваться в маршруте. Таковой является вершина 9, значит, ребро 9–7 удаляем, что повлечет за собой удаление ребра 7–2 (рис. 11). После этого в вершине 2 останется два ребра, значит, они будут в маршруте, выделяем ребра 2–14 и 2–23. Есть еще вершина 20 с двумя выделенными ребрами, значит, удаляем ребро 20–5. В вершине 23 есть два синих ребра, значит, ребро 23–13

лишнее, удаляем его. Тогда в вершине 13 остаются два ребра, выделяем ребра 13–3 и 13–12. Рассуждая таким образом, удаляя и выделяя ребра графа, можно показать, что существует только один маршрут, проходящий по всем 32 вершинам графа (рис. 12), который дает единственное решение головоломки, изображенное на рисунке 13.

Чудеса в сети

(см. 3-ю с. обл.)

1. ♜f8+!, и черные либо остаются без ладьи, либо получают мат после 1...♜f8 2. ♚d8+.
2. 39...♜f1+ 40. ♔f1 e3, и от белых потребуется точность, чтобы остановить проходную.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Грицук, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Н.В.Станцо

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Н.В.Станцо

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

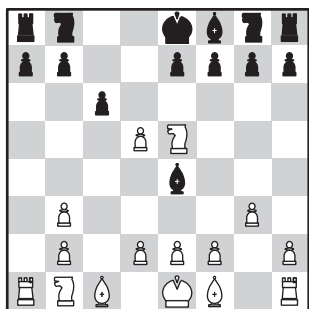
Тел.: (831) 218-40-40

Чудеса В СЕТИ

Представительные интернет-турниры, набравшие популярность во время пандемии, не утратили ее и после снятия ограничений. Теперь любители шахмат имеют возможность регулярно следить за игрой ведущих гроссмейстеров в сети. Сегодня мы рассмотрим наиболее яркие партии, сыгранные в серии Champions Chess Tour в 2024 году.

Ф.Каруана – А.Фирузджа
Интернет, 2024

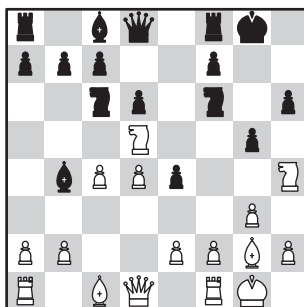
1. c4 c6 2. ♘f3 d5 3. g3 ♙g4
4. ♗e5 ♜f5 5. ♖b3 ♗b6 6. cd ♗b3
7. ab ♙e4? (единственный ход
7... ♙b1! 8. ♖b1 cd с равенством).



8. dc! ♙h1?? Удивительно, но Фирузджа не чувствует опасности, хотя похожий мотив известен в варианте ферзевого гамбита. Продолжение 8... ♙c6 9. f3! ♙e5 10. fe позволяло черным продолжить борьбу, пусть и без пешки. 9. ♗a7!!, и пешка неизбежно проходит в ферзи (возможен вариант 9... ♗a7 10. c7 ♙c6 11. c8 ♗+ ♙d8 12. ♗d7!), поэтому **черные сдались**.

Ф.Каруана – В.Кеймер
Интернет, 2024

1. c4 ♙f6 2. ♙c3 e5 3. ♘f3 ♙c6
4. g3 ♙b4 5. ♙g2 0-0 6. ♙d5 e4
7. ♙h4 d6 8. 0-0 g5 9. d4 h6.

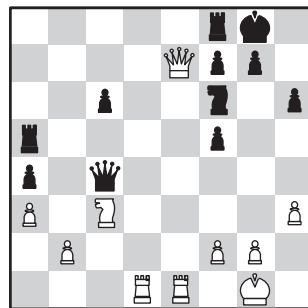


10. g4! Настолько неожиданый ход, что первое впечатление, будто белые случайно нажали мышкой на пешку (обычно играют 10. ♙b4 ♙b4 11. f3 gh 12. ♙h6 с равными шансами). 10... ♗e8? Черные сразу ошибаются. Правильное продолжение сложно найти за доской: 10...gh! 11. ♙h6 ♙d5 12. cd h3! (освобождая поле h4 для ферзя) 13. ♙e4 ♗e8 14. ♙f3 ♙b8 с преимуществом черных. 11. ♙f5. Пешка g4 помогает коню спастись, а черный король слишком раскрыт. 11... ♙g4 12. f3 ef 13. ef ♙h2 14. ♙h6+ ♗g7 15. ♙h2 ♗h8 16. a3 ♙a5 17. b4 ♗h6+ 18. ♙g1 ♙h3 19. ♗a2! ♙b6 20. c5 ♙e6 21. f4 gf 22. cb ♗h4 23. ♙f4? (23. ♙f4!) ♗h2+ 24. ♙f1 ♗g6? Черные упускают шанс усложнить игру: 24... ♗h1+! 25. ♙h1 ♗h1+ 26. ♙e2 ♗d1 27. ♙d1 ♙d5, и преимущество белых выглядит не столь явным из-за малого числа пешек на доске. 25. ♗f3 ♗g3 26. ♗e4 ♗e8 27. ♗h4! ♗h3 28. ♗h7+, и ввиду неизбежно-го мата **черные сдались**.

Поскольку игра в интернете проходит с укороченным контролем времени, то порой даже ведущие шахматисты упускают довольно простые возможности. Поэтому мы предлагаем вам задачи, в которых вы сможете попробовать усилить игру гроссмейстера.

Сыграй сильнее чемпиона!

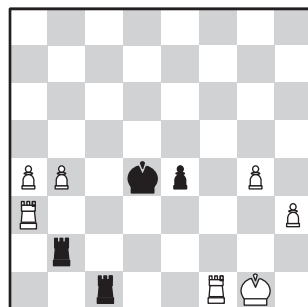
1. М.Карлсен – М.Вашье-Лаграв
(Интернет, 2024, ход белых)



Эта позиция вполне могла бы войти в учебник шахматной тактики.

Какой нокаутирующий удар за белых просмотрели оба гроссмейстера?

2. А.Фирузджа – М.Карлсен
(Интернет, 2024, ход черных)



Магнус Карлсен известен филигранной техникой эндшпиля, однако в этой позиции он грубо ошибся: 39... ♗cc2?? 40. ♗g3! e3 41. g5 ♗f2 42. ♗e1 ♗fe2 43. ♗e2 ♗e2 44. g6 ♗e1+ 45. ♗g2 ♗e2+ 46. ♗f1 ♗f2+ 47. ♗e1 ♗b2 48. g7 ♗d3 49. ♗f1 ♗b1+ 50. ♗g2 ♗b2+ 51. ♗f3, и **черные сдались**.

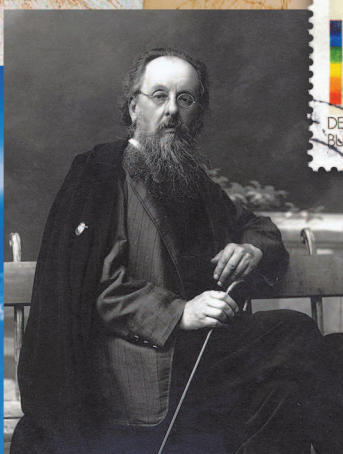
Какой ход сохранял небольшое преимущество за черными?

А.Русанов

Индекс 90964

ПОЛЕТЫ В КИНО И НАЯВУ

Иллюзии с физикой



А о чем думали бы вы, совершая прыжок с парашютом?

ISSN 0130-2221 25002
9 770130 22252

(Подробнее – на с. 42 внутри журнала)