

ISSN 0130-2221

2024 · № 5–6

МАЙ-ИЮНЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Монгольское письмо

Лингвистические задачи

Даны слова монгольского языка, записанные в старой монгольской письменности (в печатной форме), а также в русской транскрипции:

суртал  «учение»

туса  «польза»

тарики  «мозг»

ёри  «долг»

усун  «вода»

мускилта  «искривление»

амитан  «животное»

Задание 1. Запишите монгольские слова в русской транскрипции. Постарайтесь догадаться, что означают слова 2 и 3

 «кризис»

1

2 

3 

Задание 2. Запишите старым монгольским письмом:
сёри (стог), аимурлал (испорченность), итали (Италия)

(Из книги «Задачи лингвистических олимпиад»)

КВАНТ

МАЙ-ИЮНЬ 2024 № 5–6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

Московский

физико-технический институт

Московский центр непрерывного
математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфулин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, К.А.Кноп,
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,
К.П.Кохась, С.Л.Кузнецов, А.А.Леонович,
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов (заместитель главного
редактора), А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В.И.Берник, А.А.Боровой,
В.В.Козлов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов,
А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Милюциончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шайдер

- 2 Кто нас хранит. *Л.Ашкинази*
8 Пересечения и раскраски. *А.Райгородский*

УЧЕНЫЕ РАЗМЫШЛЯЮТ

- 13 Физика и метафизика Вселенной. *А.Стасенко*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи M2794–M2801, Ф2801–Ф2808
18 Решения задач M2782–M2785, Ф2789–Ф2792
25 Задача о замкнутой ломаной. *Е.Бакаев,
Д.Магжанов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Координаты

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Воздушный шар. *А.Либерман*

ОЛИМПИАДЫ

- 37 Региональный этап LVII Всероссийской
олимпиады школьников по физике

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 42 Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Физический смысл уравнений,
характеризующих механические процессы.
Б.Мукушев
- 48 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (12,14,31)

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье *А.Стасенко*
II Лингвистические задачи
III Шахматная страничка
IV Прогулки с физикой

Кто нас хранит

Л. АШКИНАЗИ

Зачем нужны предохранители

Рассмотрение физики работы технических устройств полезно – мы видим практическое применение и связь разных физических законов. Это облегчает изучение и запоминание самой физики, и ее практического применения. Однако при таком подходе желательно соблюдать три ограничения. Устройства, которые мы будем рассматривать, должны быть нам хотя бы в какой-то мере знакомы. Физика, которой мы будем пользоваться, должна быть в основном школьная, превышение уровня возможно, но его должно быть немного. При анализе работы любого устройства мы можем добраться до слишком сложного материала, и (хотя бы просто потому, что объем статьи ограничен) нам придется в таком месте либо остановиться, либо принять какие-то утверждения автора на веру. Но и в этих случаях граница между тем, что мы поняли, и тем, во что просто поверили, должна быть указана явно.

Начнем с предмета, который есть у всех нас дома, – с электрического предохранителя. Это устройство, которое разрывает цепь питания при существенном увеличении потребляемого тока, т.е. отключает нас от электрической сети. Предположим, какой-то из имеющихся у нас электрических приборов вышел из строя, причем так, что стал потреблять из сети существенно больший, чем ему положено, ток. Следствие – он стал потреблять существенно большую мощность (при каком условии это происходит?), а это почти наверняка связано с дальнейшими разрушениями самого прибора, а также с тепловыделением и, возможно, пожаром. Кроме того, аномально повышенное потребление может быть вредно и для каких-то устройств,

которые подключены к сети до предохранителя. Так что предохранитель косвенно защитит и их.

Применяются предохранители и в быту, и в промышленности, причем их можно разделить на две группы. Одни из них стоят в конкретном устройстве и защищают только его. Другие располагаются ближе к источнику энергии, а после них стоят еще несколько устройств. Например, в быту это предохранители, которые защищают квартиру или ее часть, или весь подъезд в доме. Параметры предохранителя зависят от того, кого он защищает, и понятно, что предохранитель, защищающий подъезд, рассчитан на больший ток, нежели предохранитель в квартире. От параметров предохранителя зависит принцип его работы, его физика. Известно не менее шести вариантов, – некоторые мы рассмотрим подробно, о некоторых лишь упомянем.

Основная характеристика предохранителя – это зависимость времени, за которое он разрывает цепь, от тока, который течет через него. Казалось бы, идеальная ситуация такова – есть некое номинальное значение тока, которое он может пропускать бесконечно время, а при любом превышении должен рвать цепь, и как можно быстрее. Однако это не так – есть нагрузки с «пусковым током», когда ток при включении нагрузки в первое мгновение больше, чем установившееся значение, и предохранитель должен отнестись к этому с пониманием. Например, у лампы накаливания вольфрамовая нить в рабочем режиме горячее, чем до включения, и имеет сопротивление раз в десять больше, чем когда она холодная. Поэтому при включении имеет место десятикратный бросок тока, но длится он миллисекунды. (Вы можете оценить это время, считая, что

потребляемая мощность постоянна и вся энергия идет на нагрев, а потом подумать, как уточнить эту оценку.)

Бросок тока при включении есть и у электродвигателей, у которых пусковой ток (если не принято специальных мер по его уменьшению) в 3–7 раз больше стационарного, но он длится дольше – пока не раскрутится ротор. А вот у электрического чайника броска тока при включении нет, хотя нагреватель там есть и в рабочем режиме его температура (естественно, в кельвинах) в несколько раз больше, чем когда он стоит выключенный. (Как вы думаете, почему?) Разумеется, имеется в виду не корпус нагревателя, который контактирует с водой, а спираль из никрома, которая у нагревателя в глубине. Она отделена от корпуса нагревателя высокотемпературной изоляцией из оксида магния MgO.

Но это ситуации, связанные с нагрузкой, а для работы предохранителя могут быть существенны и параметры питающей сети. Например, если источник энергии имеет большую индуктивность, то очень резко обрывать ток не стоит. Согласно формуле $\mathcal{E} = L(\Delta I/\Delta t)$ при попытке резко изменить ток возникнет высокое напряжение со всякими нехорошими последствиями, вплоть до пробоя изоляции или возникновения электрической дуги. В электротехнике этот эффект называют «экстратоки размыкания». Итог – хорошо бы уметь размыкать цепь предохранителем не максимально быстро, а именно так, как надо в каждом конкретном случае.

Цепи бывают постоянного и переменного тока, причем вторые – разных напряжений и разных частот. Напряжение и ток в такой сети зависят от времени по синусоидальному закону. И если короткое замыкание произошло в момент, когда напряжение и ток малы, предохранитель не должен ждать 5 мс, когда ток возрастет до максимума с максимально плохими последствиями, он должен оборвать цепь раньше. Вы, конечно, понимаете, откуда взялась число 5 мс? Да от частоты в сети, от 50 Гц.



Рис. 1. Предохранители в квартире

У предохранителя есть и другие важные параметры. Предохранители некоторых типов после срабатывания надо заменять (первым мы рассмотрим именно такой), у некоторых есть возможность восстановления после срабатывания (нажал кнопку – и все включилось). Важный параметр – рабочее напряжение, т.е. такое, при котором в момент разрыва цепи, когда все напряжение оказывается приложено к зазору в предохранителе, в нем не загорится дуга (которая и цепь замкнет, и предохранитель, скорее всего, разрушит). Удобно, если факт срабатывания предохранителя виден снаружи (рис. 1; белая кнопка выскочила) и не нужно гадать, который из нескольких сработал. И, разумеется, у них есть общетехнические параметры – стоимость, размер, вес, надежность, срок службы...

Наверное, самый древний

Это так называемый «плавкий предохранитель». Часто это просто проволочка, диаметр которой выбран так, чтобы она пропускала ток, который нормален для этой сети и этой нагрузки, но плавилась от того тока, который мы считаем недопустимым, причем за нужное нам время. Понятно, что эти два параметра связаны и любое сочетание получить не удастся. Однако расчетом его получить трудно по некоторым причинам.

Первое, что хочется сделать, это уменьшить мощность на время и приравнять к энергии, необходимой на нагрев до плавления. Однако возникает трудность – за-

висимость сопротивления, а значит, и мощности от температуры. Но мы знаем эту зависимость, так что может и справимся. Труднее учесть теплоотвод в воздухе и элементы конструкции. Для некоторых упрощенных условий, например для горизонтальной или вертикальной нити, есть готовые формулы, но нить может быть и наклонной... Далее, окружающий воздух может свободно циркулировать, а могут элементы конструкции мешать его движению. На практике используют проволоки, находящиеся в свободной атмосфере, и в относительно тонкой трубке, а иногда используются даже не проволоки, а ленты, причем находящиеся не в воздухе, а погруженные в рыхлый порошок оксида кремния SiO_2 или алюминия Al_2O_3 . Такая среда используется в качестве «дугогасящей» – для исключения возможности зажигания дуги при срабатывании предохранителя, т.е. разрыве проволоки. И уж совсем непонятно, как учитывать тот факт, что для срабатывания предохранителя проволоке нужно не только нагреться, но и расплавиться, причем не обязательно плавиться всей проволоке. На практике пользуются эмпирическими данными; на рисунке 2 представлены данные для одного из типов предохранителей. Двумя кривыми, соединенными вертикальными стрелочками, показан диапазон зависимостей для разных экземпляров предохранителя одного и того же типа, предназначенному для защиты от токов, существенно больших 100 А, 250 А и 400 А соответственно. Видно, что разброс по времени срабатывания достигает порядка величины.

Существуют хитрые приемы для ускорения срабатывания плавкого предохранителя. Например, можно натягивать проволоку пружиной или грузиком, это заодно ускоряет увеличение расстояния при разрыве проволоки и затрудняет зажигание дуги. Другой прием – использование не проволоки, а пластин с узкими перемычками (рис. 3). При перегрузке тонкие перемычки разогреваются более быстро, потому что остальная часть не успевает отвести от них тепло.

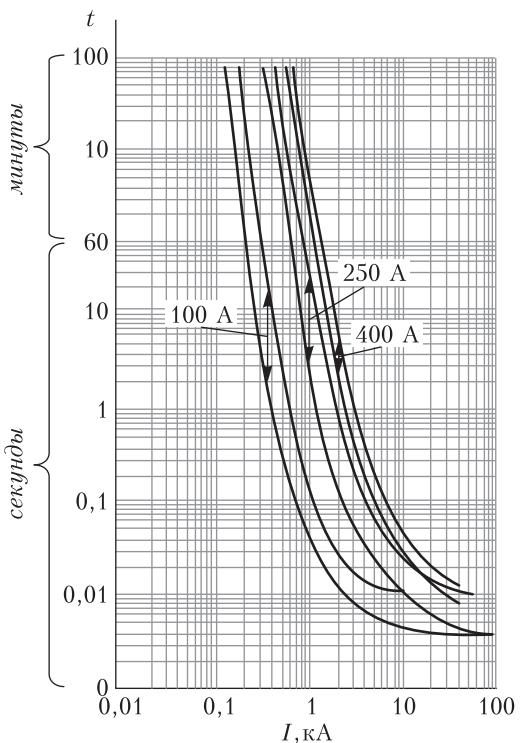


Рис. 2. Пример параметров предохранителя

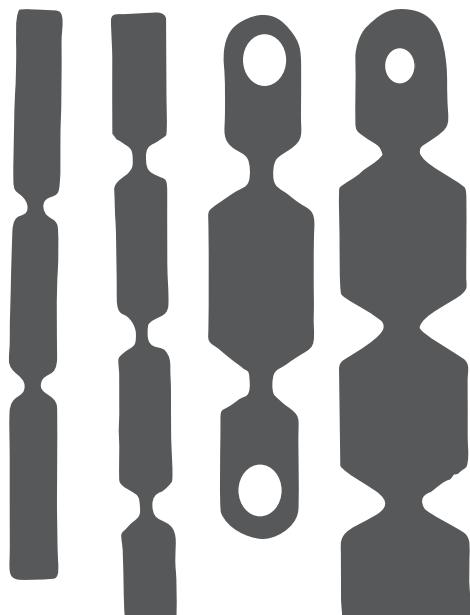


Рис. 3. Предохранители с перемычками

Биметаллический, т.е. из двух металлов

Термин *биметалл* используется в технике для материалов, состоящих из двух металлов, а иногда и для элементов конструкций, изготовленных из таких материалов. Например, биметаллическая фольга – это фольга из какого-либо металла, на которую нанесен слой другого металла.

Возьмем два стержня одинаковой длины L из металлов с разными коэффициентами термического расширения k_1 и k_2 , соединим их концами (или по всей длине) и изменим температуру (одинаково для обоих стержней) на ΔT (рис. 4). Если бы они не были соединены, то изменили бы свои длины по-разному. Теперь они не могут это сделать и вынуждены изменять свою длину на какую-то промежуточную величину, причем один оказывается сжат некоторыми силами, а другой – такими же (согласно третьему закону Ньютона) силами растянут. Если мы знаем сечения стержней S_1 и S_2 , модули Юнга E_1 и E_2 , то итоговое удлинение ΔL оказывается равным $L\Delta T(k_1S_1E_1 + k_2S_2E_2)/(S_1E_1 + S_2E_2)$. При этом в стержнях появятся механические напряжения (на рисунке они показаны стрелочками). Но у биметаллической конструкции есть другое решение – изогнуться. Правда, избавиться от механических напряжений в этом случае не удастся, и они станут неоднородными – «спинка» у каждого стержня будет растянута, а «пузико» сжато. Но модуль напряжений уменьшится, а значит, и потенциальная энергия деформации тоже уменьшится, поскольку в энергию входит квадрат напряжений и де-

формаций. (Радиус, по которому изогнется биметалл, вы можете посчитать сами. Для упрощения вычислений используйте такую модель – каждый стержень состоит из двух половинок, причем в каждой половинке каждого стержня напряжения однородны. Такой прием – замена непрерывной функции дискретной – вообще часто приводит к решению, естественно, приближенному.) Ну а дальше все, вроде бы, просто – изогнутое или повернутое размыкает контакт.

Но мы прошли мимо двух более серьезных задач, из которых одна имеет решение. Это задача «потери устойчивости». То, что изогнутое положение энергетически выгодно, еще не означает, что изгиб начнется сразу, как только начнем греть, он возникнет скачком. Знаменитая задача о потере устойчивости сжатым стержнем была решена не кем-нибудь, а самим Леонардом Эйлером. А вторая задача, о решении которой, как вы уже понимаете, речь не идет, это задача о нагреве стержней. Они могут нагреваться отдельным нагревателем, по которому протекает ток, но чаще ток может течь по самим стержням. Однако в любом случае вычислить температуру трудно – она зависит, как и для плавкого предохранителя, от многих факторов.

Впрочем, очевидно, что это медленный предохранитель – нагрев относительно массивных стержней происходит медленнее, чем плавление тонкой проволочки. Второе важное отличие – это восстанавливаемый предохранитель. После охлаждения предохранителя контакт восстанавливается, и если неисправность в нагрузке устранена, то все возвращается к норме.

Теперь – электромагнит

Если вас спросят на экзамене, что происходит, когда течет ток, не спешите отвечать, что выделяется тепло. Есть ситуации, когда тепло не выделяется. А вот магнитное поле появляется всегда, и этим можно воспользоваться. Вы, конечно, знаете формулу для индукции магнитного поля бесконечного прямого тока, а в школьном учебнике посередине

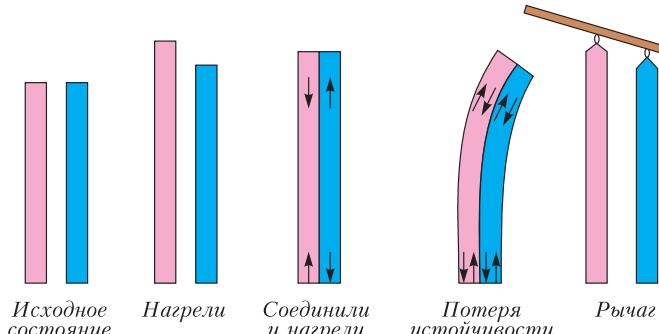


Рис. 4. Работа биметаллического предохранителя

будет и формула для поля на оси кольцевого витка. А уж из нее легко получается формула для поля на оси соленоида. На этом простое кончается, потому что на оси соленоида находится кусок железа, он намагничивается и втягивается в соленоид, попутно нажимая на контакты и размыкая цепь тока. При этом ток исчезает и контакты должны бы снова замкнуться — но после размыкания они удерживаются защелкой в разомкнутом положении. Чтобы их замкнуть, надо (предварительно поняв, в чем дело, и ликвидировав аварийную ситуацию) нажать на соответствующую кнопку (белая кнопка на втором справа предохранителе на первом рисунке).

Такие предохранители действуют быстрее, чем тепловые, но медленнее плавких. И они восстанавливающиеся. Однако сам такой предохранитель содержит соленоид, а значит, имеет небольшую, но заметную индуктивность. С некоторым следствием этого мы сейчас познакомимся.

Зазор для искры

Ток, который внезапно возрастал и который надо было обрывать, до сего момента был связан с неисправностями на стороне потребителя, на стороне нагрузки. Этот ток может нарасти с большой, но все же ограниченной скоростью. Хотя бы потому, что к потребителю идут провода, а у них есть сопротивление и индуктивность. Возможна, однако совершенно иная ситуация, когда нечто катастрофическое произошло на стороне источника энергии, на стороне генератора. Например, в линию ударила молния. В этом случае ток нарастает настолько быстро, что индуктивности магнитного предохранителя хватит для того, чтобы на ней возникло такое напряжение, что в воздухе произойдет пробой. Соответственно, загорится дуга, предохранитель перестанет предохранять (дуга зашунтирует соленоид), а сам он необратимо выйдет из строя. Чтобы этого не произошло, применяется по сути предохранитель, но странный — это «искровой промежуток», т.е. зазор между проводом и землей или между проводами, выполненный так, чтобы при серьезном превышении напряжения этот

зазор пробился и заряд стек в землю.

Кстати, такие «предохранители» применялись в начале прошлого века, причем не в электротехнике, а в радиотехнике — для защиты радиоаппаратуры при попадании молнии в антенну. На рисунке 5 слева показан антенный переключатель тех лет, справа приведена инструкция по установке, «искровой промежуток» — это зазор между зубчиками.

Искровые разрядники применяются и сейчас (на случай, если вы заинтересуетесь именно защитой от молний). Ситуация на самом деле весьма сложная, и дело доходит до того, что цепи питания устройств защищают не каким-то одним предохранителем, а системами из двух или трех предохранителей разных типов, причем с согласованными параметрами. А некоторые фирмы разрабатывают специальные предохранители именно для таких применений. Причин этих сложностей три. Во-первых, во многих случаях нужно защитить объект от удара молнии, но не отключая питания. Во-вторых, большинство молний многократны, в среднем это пять импульсов через 60–70 мс, и защитная схема должна все это выдержать и, в-третьих, не выйти из строя сама.

Самовосстанавливющийся, но медленно

Следующий предохранитель — это тихий, маленький и неторопливый «самовосстанавливающийся предохранитель», так его называют. С точки зрения внешнего наблюдателя, это сопротивление, которое остается постоянным до некоторого тока, но если его превысить, то через некоторое время сопротивление сильно возрастет и это ограничит ток в цепи. Увеличение сопротивления сопровождается нагревом предохранителя примерно до 80 °C. Сделан этот предохранитель из полимера, который не проводит ток, и частиц углерода. В холодном состоянии полимер кристаллизован, а частицы углерода образуют цепочки. Если через предохранитель начинает протекать слишком большой ток, он начинает нагреваться, при какой-то температуре полимер переходит в аморфное

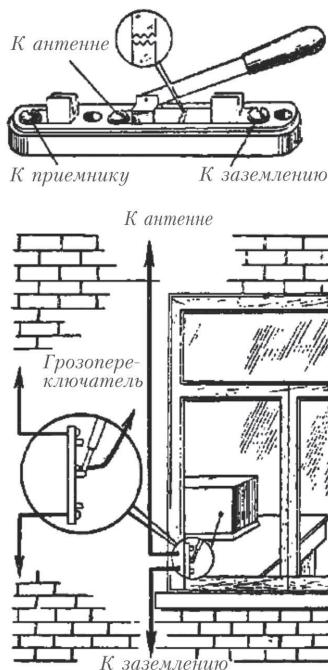


Рис. 5. Предохранитель с разрядником

состояние, при этом он увеличивается в размерах и разрывает углеродные цепочки. В итоге сопротивление увеличивается настолько, что устройство ограничивает ток. После отключения питания по истечении некоторого времени устройство остывает и уменьшит свое сопротивление – устройство само восстановится.

Сильная сторона этого устройства – естественно, самовосстановление. Из всех предохранителей это свойство есть только у разрядников, которые-то и предохранителями обычно не считают (у них все-таки узкая область применения). Слабые стороны – относительно медленное срабатывание, очевидно сильная зависимость параметров от температуры окружающей среды и малый срок службы – не в часах, а в количестве срабатываний. Впрочем, у плавного предохранителя он еще, как вы понимаете, меньше.

И наконец – цифровое царство

Вы, наверное, давно хотите спросить – почему не сделать все «цифрово». На превышение тока цифровая схема может реагировать сколь угодно умно и за любое

время. Да, разумеется. Но, во-первых, электротехника возникла полтора века назад, а транзистор – лишь в середине этого срока. И даже на Марсе, когда вы там высадитесь и будете создавать новую цивилизацию, вы начнете не с нуля, а с уже достигнутого на Земле уровня. Во-вторых, полупроводниковая цифровая техника того же уровня, который достигнут классическими решениями, сегодня в десятки или сотни раз дороже. Но есть и третье, принципиальное возражение. Обработать сигнал «цифрово» и обработать умно – это можно. Но кто будет разрывать цепь?

Есть два решения – электронная лампа и полупроводниковый прибор. Первое решение эффективно в области больших напряжений, но не слишком больших токов. Полупроводники в этом смысле перспективнее, но они имеют ограничения по напряжению. В целом, на сегодня ситуация такова – электронные предохранители выпускаются многими фирмами, их сильной стороной является возможность работы при малых токах и самовосстановление, причем как автоматическое, так и по внешнему сигналу. Со временем область применения будет, наверное, понемногу расширяться. Но рвать цепь приходится чем-то «аналоговым».

«Вишняка на торте»

Вы, конечно, знаете, что такое Токамак. Ну да, международный проект, ИТЭР, строится во Франции, неограниченная энергия, светлое будущее... А вы знаете, что его катушки защищает предохранитель, причем именно первого из разобранных нами типов? Только ленточки при срабатывании будут не плавиться, а испаряться! Об этом маленьком, но необходимом чуде подробно рассказано, например, в журнале «Приборы и техника эксперимента» (2023, № 3, с. 46).

Пересечения и раскраски

А. РАЙГОРОДСКИЙ

Введение

В статье [1] обсуждалась одна очень красивая и важная задача, связанная с раскраской подмножеств конечного множества. В этот раз мы вернемся к этой задаче, но посмотрим на нее с совсем другой стороны. Начнем с утверждения, которое носит, по сути, олимпиадный характер.

Утверждение 1. *Пусть дано некоторое конечное множество \mathcal{R} . Пусть \mathcal{M} – некоторая совокупность различных подмножеств множества \mathcal{R} , причем каждое из подмножеств, принадлежащих совокупности \mathcal{M} , содержит хотя бы 2 элемента и каждые два подмножества имеют хотя бы 2 общих элемента. Тогда можно так покрасить множество \mathcal{R} в два цвета (т.е. так присвоить каждому элементу из \mathcal{R} один из двух цветов), чтобы каждое подмножество из совокупности \mathcal{M} было неоднокрасочным (т.е. содержало элементы обоих цветов).*

Сила утверждения 1 в том, что оно верно вне зависимости от количества элементов в множестве \mathcal{R} и от количества подмножеств, составляющих совокупность \mathcal{M} . Однако в нем есть и некоторое существенное ограничение. А именно, каждые два подмножества пересекаются хотя бы по двум элементам. Очевидно, что при доказательстве этим и нужно воспользоваться. Что ж, давайте!

Доказательство утверждения 1. Занумеруем в произвольном порядке элементы множества \mathcal{R} . У каждого подмножества из совокупности \mathcal{M} покрасим в красный цвет последний элемент (т.е. элемент этого подмножества, имеющий самый большой номер). Если в \mathcal{R} останутся непокрашенные элементы, всем им присвоим синий цвет.

Очевидно, что подмножества, в которых все элементы синие, не бывает, ведь последний элемент каждого подмножества красный. Допустим, какое-то подмножество A целиком красное, т.е. в нем нет синих элементов. Посмотрим на элемент A , имеющий в этом подмножестве наименьший номер. Почему он красный? А потому, что есть еще одно подмножество B , в котором этот элемент, наоборот, имеет самый большой номер. Значит, это единственный общий элемент у A и B , что противоречит условию утверждения, которое говорит, что $|A \cap B| \geq 2$ (модулем мы обозначаем мощность множества, т.е. количество его элементов). Получается, что целиком красных подмножеств тоже не бывает, и утверждение 1 доказано.

В статье [1] есть очень близкий факт, расположенный в разделе про жадный алгоритм. Однако здесь мы совсем иначе станем развивать тему.

Прежде чем переходить к развитию, напомним еще ряд терминов, которые есть, например, все в той же статье [1]. Итак, пара $H = (\mathcal{R}, \mathcal{M})$ называется *гиперграфом*. Это очень естественно! В самом деле, если совокупность \mathcal{M} состоит из двухэлементных подмножеств множества \mathcal{R} , то образуется обыкновенный граф: элементы множества \mathcal{R} – это его вершины, а элементы совокупности \mathcal{M} – это его ребра (пары вершин). В общем случае «ребра» состоят из любого числа вершин. Для рисования это не очень удобно. Будем использовать

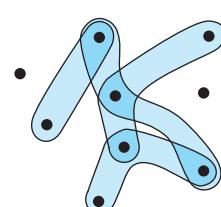


Рис. 1

картинки типа той, что можно видеть на рисунке 1. Получается эдакая «кастрюлька с сардельками». Но объект важный, и ниже мы продолжим учиться работать с ним.

Давайте еще назовем *хроматическим числом* гиперграфа H величину $\chi(H)$, равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины (элементы множества \mathcal{R}), чтобы все ребра были неодноцветными. Понятно, что хроматическое число не имеет смысла, если в гиперграфе есть ребра из одной вершины или – о ужас! – пустые ребра. Поэтому всюду далее мы считаем, что $|A| \geq 2$ для любого $A \in \mathcal{M}$. Также на раскраску не влияют кратные ребра, и мы не станем их рассматривать. В новых терминах утверждение 1 звучит так: *Если у данного гиперграфа H каждые два ребра имеют не менее двух общих вершин, то $\chi(H) \leq 2$.* Вернее, $\chi(H) = 2$, ведь вряд ли нам интересно иметь дело с гиперграфом, в котором вообще нет ни одного ребра.

Наконец, напомним, что гиперграф называется *n-однородным*, если в каждом его ребре ровно n вершин. Обыкновенный граф – это 2-однородный гиперграф.

Пересекающийся гиперграф

Мы уже знаем, что если у гиперграфа ребра пересекаются достаточно сильно (по двум и более вершинам), то его хроматическое число равно двум. А что, если ребра просто попарно пересекаются? Такой гиперграф принято называть *пересекающимся*. Оказывается, что у пересекающегося гиперграфа хроматическое число не больше трех!

Утверждение 2. *Если гиперграф $H = (\mathcal{R}, \mathcal{M})$ пересекающийся, то $\chi(H) \leq 3$.*

Сейчас мы его докажем, обобщив идею доказательства утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Действуем сначала в точности так же, как в доказательстве утверждения 1. Нумеруем произвольным образом вершины из \mathcal{R} . Последнюю вершину каждого ребра красим в красный цвет. Оставшиеся вершины делаем синими. Понятно, что целиком синих ребер нет. Но вот целиком красные ребра теперь могут быть. Давайте последнюю вершину каждого такого ребра перекрасим в зеленый цвет. Ясно, что синих ребер по-прежнему нет и красных ребер отныне нет тоже. Но вдруг есть зеленое

ребро A ? Посмотрим тогда на его первую вершину. Она зеленая потому, что есть ребро B , которое сперва оказалось целиком красным и в котором эта вершина последняя. В свою очередь, первая вершина ребра B потому сперва красная, что она последняя в некотором ребре C . В итоге получаем рисунок 2, из которого видно, что A и C не пересекаются. Но у нас каждые два ребра имеют непустое пересечение. Возникает противоречие, и, стало быть, в \mathcal{M} и зеленые ребра отсутствуют. Утверждение 2 доказано.

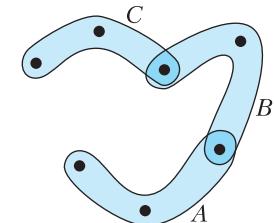


Рис. 2

Получается, что у непустого пересекающегося гиперграфа хроматическое число может принимать только два значения: 2 или 3. Возникает естественный вопрос: а есть ли какие-то структурные различия между пересекающимися гиперграфами с хроматическим числом, равным 2, и пересекающимися гиперграфами с хроматическим числом, равным 3? Интуитивно может показаться, что, например, число ребер должно как-то влиять на сложность раскраски. Однако картина в некотором смысле прямо противоположная! Действительно, рассмотрим гиперграф, у которого все ребра содержат ровно одну общую вершину, – эдакий цветок (рис. 3). Очевидно, лепестков-ребер можно построить сколь угодно много, а хроматическое число будет всегда равно двум. Оказывается, вопреки интуиции, что у гиперграфов с хроматическим числом 3 слишком много ребер быть не может. Об этом мы и поговорим в оставшейся части статьи. А здесь еще добавим, что, обобщая доказательства утверждений 1 и 2, читатель может самостоятельно доказать следующий замечательный признак того, что хроматическое число гиперграфа не больше некоторого числа r .

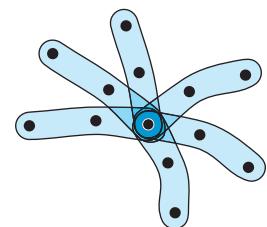


Рис. 3

Признак раскрашиваемости. Если существует такая нумерация вершин гиперграфа $H = (\mathcal{R}, \mathcal{M})$, что в нем отсутствуют цепочки ребер A_1, \dots, A_r , в которых номера вершин ребра A_i меньше номера общей вершины ребер A_i и A_{i+1} , а номера вершин ребра A_{i+1} больше номера общей вершины ребер A_i и A_{i+1} (рис. 4), то $\chi(H) \leq r$.

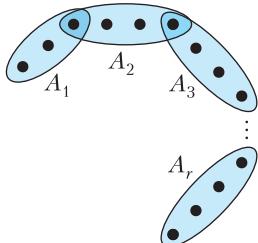


Рис. 4

Этот признак, на самом деле, является критерием, т.е. обратное тоже верно. Попробуйте это доказать.

Верхняя оценка числа ребер

Удобнее и нагляднее работать с однородными гиперграфами. В сущности, если мы поймем, как они устроены, то получим некоторое представление и о произвольном гиперграфе, ведь множество его ребер всегда можно разбить на подмножества, в которых ребра имеют одинаковые мощности (числа вершин). Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $H = (\mathcal{R}, \mathcal{M})$ – пересекающийся n -однородный гиперграф с хроматическим числом 3. Тогда число его ребер не больше n^n .

Доказательство теоремы 1. Предположим противное: $|\mathcal{M}| > n^n$. Рассмотрим любое ребро $A \in \mathcal{M}$. Разумеется, $|A| = n$ и все остальные ребра пересекаются с A . По принципу Дирихле найдется вершина в A , которая содержится более чем в n^{n-1} ребрах. Давайте считать установленный факт базой индукции для следующего утверждения: если $i \leq n$, то найдутся вершины $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{R}$, которые одновременно входят более чем в n^{n-i} ребер. Сразу ясно, что если мы докажем это утверждение, то

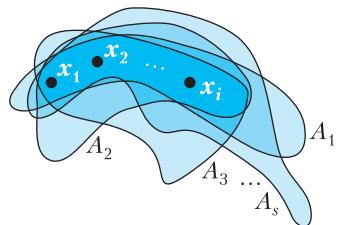


Рис. 5

возникнет противоречие, ведь при $i = n$ получится n вершин, которые образуют более 1 ребра (а кратных ребер у нас нет). Что ж, давайте сделаем предположение индукции и осуществим ее шаг. Пусть для некоторого $i < n$ (здесь знак строгого неравенства, так как это предположение индукции и это будет важно ниже) найдены такие вершины x_1, \dots, x_i и ребра A_1, \dots, A_s , $s > n^{n-i}$, что для любого $k \in \{1, \dots, s\}$ выполнено $\{x_1, \dots, x_i\} \subset A_k$ (рис. 5). Покажем, что существует ребро B , которое не пересекается с множеством $\{x_1, \dots, x_i\}$. Действительно, в противном случае все ребра гиперграфа имели бы непустое пересечение с $\{x_1, \dots, x_i\}$. Но тогда мы могли бы покрасить вершины из $\{x_1, \dots, x_i\}$ в красный цвет, а все остальные вершины – в синий цвет. В каждом ребре были бы красные вершины, ведь оно пересекается с $\{x_1, \dots, x_i\}$, и в каждом же ребре были бы синие вершины, ведь $i < n$ и любое ребро, пересекающее $\{x_1, \dots, x_i\}$, все-таки имеет и вершины вне $\{x_1, \dots, x_i\}$. Противоречие с тем, что $\chi(H) = 3$. Итак, есть ребро B , удовлетворяющее условию $B \cap \{x_1, \dots, x_i\} = \emptyset$. Как и любое другое ребро гиперграфа, оно пересекается со всеми остальными ребрами. В частности, оно пересекается и с ребрами A_1, \dots, A_s . Снова пользуемся принципом Дирихле, согласно которому найдется вершина x_{i+1} из B , которая принадлежит, как минимум, $s/n > n^{n-i-1}$ ребрам из множества A_1, \dots, A_s . Все эти ребра уже содержали внутри множество $\{x_1, \dots, x_i\}$, а значит, вместе с новой вершиной x_{i+1} они содержат и множество $\{x_1, \dots, x_{i+1}\}$. Шаг индукции сделан, и теорема 1 доказана.

Нижняя оценка числа ребер

В этом разделе будет показано, что оценка из теоремы 1 довольно точная.

Теорема 2. Существует пересекающийся n -однородный гиперграф $H = (\mathcal{R}, \mathcal{M})$ с хроматическим числом 3, у которого

$$|\mathcal{M}| \geq n! \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

Прежде чем перейти к доказательству, обсудим разницу между оценками в теоремах 1 и 2. Некоторые из читателей знают, что выражение, стоящее в скобках, похоже на ряд, который сходится к известному числу $e = 2,718281828459045\dots$. На самом деле, там не хватает одного слагаемого, так что это даже не e , а нечто вроде $e - 1$. Но это знание не является необходимым в нашем случае. Понятно, что в скобках написано нечто ограниченное при $n \rightarrow \infty$, и там уж хоть на компьютере, например, можно увидеть, что с ростом n выражение становится все более похожим на $1,71828\dots$. Гораздо важнее понять, как соотносятся величины $n!$ и n^n из теоремы 1. Совсем легко доказать, что $n! > (n/2)^{n/2}$, ведь среди сомножителей, образующих факториал, есть, как минимум, $n/2$ чисел, каждое из которых больше $n/2$. Зазор между этой оценкой и оценкой n^n довольно велик: отношение двух оценок – это $(2n)^{n/2}$. На самом деле, мы чересчур огрубили оценку факториала. Если знать определение числа e , то несложно доказать по индукции (мы не станем этого делать), что $n! > (n/e)^n$, а уже такая величина лишь в e^n раз меньше верхней границы.¹ Довольно забавно, наверное, читать про e^n , что это мелочь. Нет, совсем не мелочь! Но все же это сильно меньше, чем n^n . В следующем – послед-

нем – разделе настоящей статьи мы обсудим дальнейшие улучшения оценок, а сейчас перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Будем строить гиперграф $H_n = (\mathcal{R}_n, \mathcal{M}_n)$ для каждого n с помощью индукции по $n \geq 2$. Базой послужит обыкновенный граф. А именно, в качестве «гиперграфа» H_2 возьмем просто треугольник, т.е. полный граф на трех вершинах. Этот (гипер)граф пересекающийся, у него хроматическое число 3 и число его ребер равно $3 = 2! \left(1 + \frac{1}{2} \right)$.

Пусть гиперграф $H_n = (\mathcal{R}_n, \mathcal{M}_n)$ уже построен. Построим H_{n+1} . Для этого возьмем любое множество A мощности $n+1$, которое не имеет общих элементов с множеством \mathcal{R}_n . Положим $\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n \cup A$. Для каждого ребра $B \in \mathcal{M}_n$ рассмотрим $n+1$ новых ребер вида $B \cup \{a\}$, где $a \in A$. Отправляем все эти ребра в множество \mathcal{M}_{n+1} , а также добавляем туда A в качестве еще одного ребра. Очевидно, что гиперграф H_{n+1} пересекающийся и в 2 цвета не красится. Остается лишь посчитать его ребра:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{n+1}| &= (n+1)|\mathcal{M}_n| + 1 = \\ &= (n+1) \cdot n! \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + 1 = \\ &= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Что же дальше?

Давайте обозначим $M(n)$ максимальное число ребер в пересекающемся n -однородном гиперграфе с хроматическим числом 3. Мы знаем, что

$$n! \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq M(n) \leq n^n.$$

Оба этих результата известны с 70-х годов XX века. Сама задача отыскания величины $M(n)$ была поставлена в статье П.Эрдеша²

¹ Если говорить совсем точно, то известна так называемая формула Стирлинга, которая утверждает, что $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$. Подразумевается, что отношение факториала и выражения, стоящего в правой части формулы, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Эта формула очень красива, ибо содержит обе «мировые константы» e и π . Но ее доказательство трудное, и здесь мы его даже не касаемся.

² П.Эрдеш (1913–1996) – автор более 1500 статей по комбинаторике, теории графов, дискретной геометрии и теории чисел, создатель Международной математической школы XX и XXI веков.

и Л.Ловаса³ – двух классиков современной комбинаторики, которая вышла в 1973 году.

Долгое время существовала гипотеза Эрдеша–Ловаса, что нижняя оценка не улучшаема. Однако в 1996 году П.Франкл, К.Ота и Н.Токушиге в совместной работе опровергли ее, доказав, что $M(n) > (n/2)^n$. Эта оценка отличается от своей предшественницы примерно в $(e/2)^n$ раз, что весьма значительно. До сих пор ее никто не смог улучшить.

История верхних оценок более длинная. В 1994 году Ж.Туза совсем чуть-чуть уточнил оценку n^n , заменив ее на $(1 - 1/e + f(n))n^n$, где $f(n)$ – некоторая функция, стремящаяся к нулю с ростом n . В 2011 году Д.Черкашин показал, что существует константа $c > 0$, с которой $M(n) \leq cn^{n-1/2}$. В 2017 году А.Арман и Т.Реттер сделали дальнейшее уточнение оценки, установив, что $M(n) \leq (1 + g(n))n^{n-1}$, где $g(n)$ – снова некоторая стремящаяся к нулю функция. В 2019 году П.Франкл (тот же, что и соавтор текущего рекорда

³ Л.Ловас (родился в 1948 г.) – трижды золотой медалист Международной математической олимпиады, создатель нескольких классических методов в комбинаторике, в настоящее время президент Венгерской академии наук.

для оценки снизу) резко продвинулся и получил оценку

$$M(n) \leq e^{-cn^{1/4}} \cdot n^n,$$

где c – некоторая положительная константа. Сейчас тут рекорд все же не у Франкла. В 2023 к задаче подключился Д.Захаров. Это замечательный молодой математик, который несколько лет назад прославился, когда, еще будучи школьником, смог достичь прорыва в одной известной старой проблеме комбинаторной геометрии (см. [2], [3]). Его оценка выглядит так:

$$M(n) \leq e^{-n^{1/2+h(n)}} \cdot n^n,$$

где $h(n)$ – опять-таки некоторая функция, стремящаяся к нулю.

Таким образом, в итоге имеем пока цепочку неравенств

$$(n/2)^n \leq M(n) \leq e^{-n^{1/2+h(n)}} \cdot n^n$$

и непочатый край работы впереди!

Литература

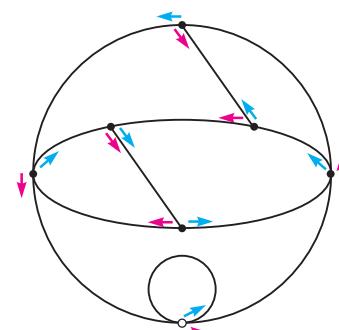
1. А.Райгородский. Одна задача о раскраске. – «Квант», 2019, №8.

2. А.Райгородский. Остроугольные множества. – «Квант», 2018, №3.

3. А.М.Райгородский. Остроугольные треугольники Данцера–Грюнбаума (2-е издание, исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2022.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА ГРАФЕ

Покажем, как с помощью изображенного на рисунке графа можно проверить делимость числа на 7. Например, рассмотрим число 3248. Будем действовать следующим образом. Стартуя из белой вершины, сделаем 3 шага вдоль красных стрелок, затем один шаг вдоль синей стрелки, затем 2 шага вдоль красных стрелок, затем снова один шаг вдоль синей стрелки, затем 4 шага вдоль красных и так далее. Если в конце мы снова окажемся в белой вершине, то число делится на 7. Попробуйте доказать этот замечательный факт. Подумайте, как соорудить



граф делимости на 13 и вообще на произвольное число. Как будет выглядеть граф делимости на 7, если мы начнем движением по графу с младших разрядов?

Физика и метафизика Вселенной

А. СТАСЕНКО

Моя религия – это глубоко прочувствованная уверенность в существовании Высшего Интеллекта, который открывается нам в доступном познанию мире.

Альберт Эйнштейн

Кто из здравомыслящих школьников и студентов не слышал о трех уравнениях Ньютона, четырех уравнениях Максвелла, ..., в конце концов, о том, что квантовые электродинамика и хромодинамика предполагают $(3+1)$ -мерное пространство, – ну, конечно, три пространственные и одну временную координаты.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20240503>

Более того, это загадочное сочетание « $3+1$ », похоже, было известно и на Никейском Вселенском соборе (325 г.) и сообщено народам на языке, приемлемом для масс. Попытаемся расшифровать его положения (выделенные курсивом), сопоставляя с современными знаниями. Не окажется ли при этом, что физика Вселенной тоже опирается на четыре фундаментальные столпа...

1. *Бог Отец, Вседержитель, Творец небу и земли* – всемирное тяготение, собравшее космическое вещество в тяжелые горячие звезды (ядерные реакторы) и прохладные планеты. Здесь царствует фундаментальная константа – постоянная тяготения $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$. «Тяготение – некоторый наиболее неуловимый божественный дух», – так считал Исаак Ньютон.

2. *Единый Господь Иисус Христос, Сын Божий, Единородный, Иже от Отца рожденный, Свет от Света* – излучение Солнца и всей Вселенной, посыпаемое на Землю ради человека и его спасения. Здесь



три константы: скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; постоянная Планка $h = 6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, связанная с энергией $h\nu$ кванта частоты ν ; постоянная Больцмана $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, определяющая среднюю тепловую энергию kT .

3. *Дух Святый, жизни податель, Иже от Отца исходящий* – теплота, принесенная излучением и берегущая всех живых существ.

4. ...*вечно рождающей и вечно юной Земле* – тут, конечно, опять появляется постоянная Больцмана k .

А что же дальше? Во имя сохранения теплового баланса планета обязана вновь рождать поток квантов – возвращать в космос в сумме такую же мощность, какую принесло поглощенное падающее излучение, хотя и в другом, инфракрасном диапазоне. Есть ли у человечества еще Учение, имеющее более прочный физический фундамент?

И это еще не все.

Законы физики не создают безнадежно жестко предначертанную линию поведения. Есть лазейка во спасение (всепрощение, умилостивление) от железной заданности траектории материальной точки, падающей в потенциальную яму! Физика не закрывает такой возможности. Она обес-

печена принципами неопределенности [1, 2]. В квантовой механике – это соотношение $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$, позволяющее оценить «размазанность» в пространстве траектории $x(t)$; в термодинамике – это соотношение $\left| \Delta E \cdot \Delta \frac{1}{T} \right| \sim k$. Здесь p и E – импульс и энергия, h и k – упомянутые фундаментальные константы.

В пространстве понятий примером неопределенности является теорема Гёделя о невозможности создания одновременно полной и непротиворечивой системы аксиом.

А еще броуновское блуждание частиц! А бифуркации в решающий момент [3]!!

Ученые уже поняли, что даже фундаментальные константы стареют со временем. Но космическая троица «Тяготение, Излучение, Теплота» плюс кормящая Земля всегда будут создателями и хранителями жизни.

Литература

1. А. Стасенко. Бог что-то скрывает от нас, или О принципах неопределенности. – «Квант», 1993, №9/10.
2. А. Стасенко. Пределы точности «точных» наук. – «Квант», 2012, №5–6.
3. А. Стасенко. Буриданов осел, или Немного о бифуркации. – «Квант», 2020, №2.

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964. Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mccme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2794 – М2796 предлагались на XLV Турнире городов. Задачи М2798 – М2801 предлагались на заключительном этапе L Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2801–Ф2804 предлагались на региональном этапе LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи М2794–М2801, Ф2801–Ф2808

M2794. Точки P и Q лежат внутри окружности ω (рис. 1). Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D . Окружность с центром D , проходящая через P и Q , пересекает ω в точках

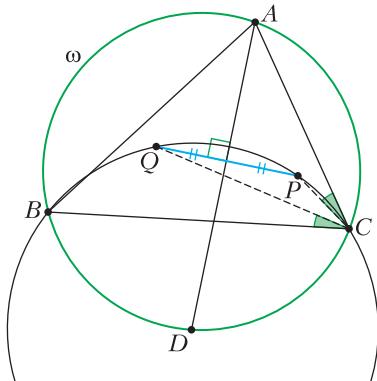


Рис. 1

B и C . Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC . Докажите, что $\angle ACP = \angle BCQ$.

А.Заславский

M2795. Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны и не совпадали?

П.Кожевников

M2796. Назовем полоской клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях – вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор $(-1; 1)$ (рис. 2). Докажите, что для любой полоски, состоящей из четного числа клеток, найдется такое нечетное k , что если объединить k

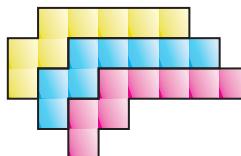


Рис. 2

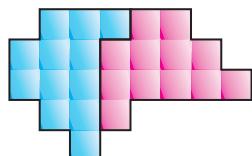


Рис. 3

таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке 3 приведен соответствующий пример.)

И.Маркелов, С.Маркелов

M2797. Для вещественных чисел $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ докажите неравенство

$$\left(\frac{a_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_n}{n(n+1)} \right) \times \\ \times \left(\frac{b_1}{1 \cdot 2} + \frac{b_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{b_n}{n(n+1)} \right) \leq$$

$$\leq \frac{a_1 b_1}{1 \cdot 2} + \frac{a_2 b_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_n b_n}{n(n+1)}.$$

A. Антропов

M2798. Данна прямолинейная дорога, выложенная из зеленых и красных дощечек (дорога – отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются; первая и последняя дощечки – зеленые. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнецик хочет пропрыгать вперед по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зеленую дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнецик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений.

T. Коротченко

M2799. Дано натуральное число n . Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), Саша тоже задумал пару различных многочленов степени n . Леня знает n ; его цель – выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Леня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ он вписывает в две клетки i -го столбца пару чисел $P(x_i)$, $Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q – задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Леня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?

L. Шатунов

M2800. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 4). Точка M – середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC . На отрезке AD отмечена точка E , а на отрезке CD – точка F . Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B , M , E и F лежат на одной окружности.

A. Терёшин

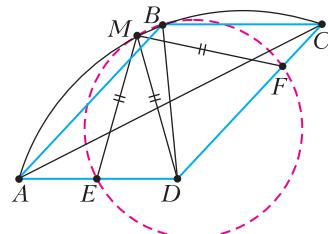


Рис. 4

M2801. Юрий подошел к великой таблице мая. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк. Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10000 строк может узнать, что в каждой из них изображено в каждом из столбцов?

I. Богданов, K. Кноп

Ф2801. Проточный водонагреватель – это устройство, которое обеспечивает подачу горячей воды из крана путем нагрева холодной воды, которая проходит через него. На графике (рис. 5) представлена зависимость температуры t_g горячей воды на выходе из крана от объемного расхода μ воды через проточный нагреватель.

- 1) Найдите мощность P водонагревателя.
- 2) Найдите температуру t_h холодной воды, поступающей в нагреватель.
- 3) При каком объемном расходе μ_1 температура горячей воды будет равна $t_k = 100^\circ\text{C}$? Удельная теплоемкость воды равна $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$. Считайте, что мощность

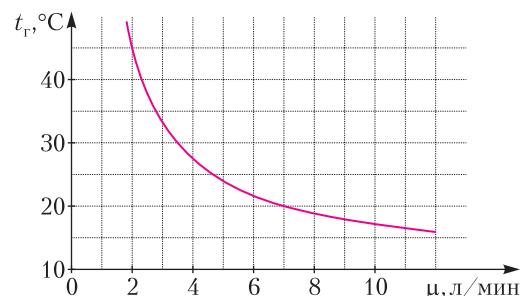


Рис. 5

нагревателя постоянна, тепловыми потерями можете пренебречь.

A.Вергунов

Ф2802. Готовясь к олимпиаде по физике, десятиклассник Денис собрал электрическую цепь (рис. 6,*a*), состоящую из четырех одинаковых амперметров, диода и регулируемого источника тока. Полярность подключения амперметров и направление тока через источник указаны на схеме, а зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нем представлена на рисунке 6,*b*. Изменяя силу тока I_0 , выдаваемую источником, Денис выяснил, что зависимость силы тока через один из амперметров от I_0 имеет вид, изображенный на рисунке 6,*c*, где I_1 – известный параметр.

- 1) Для какого из амперметров (A_1 , A_3 или A_4) справедлива зависимость, изображенная на рисунке 6,*c*? Свой ответ обоснуйте.
- 2) Определите, при каком значении I_0 ток через амперметр A_2 не течет.
- 3) Постройте качественный график зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, указав на нем координаты характерных точек.

Примечание. Источником тока называется устройство, через которое течет заданный ток, независимо от параметров внешней цепи.

D.Рубцов

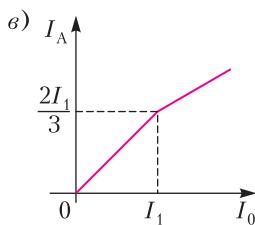
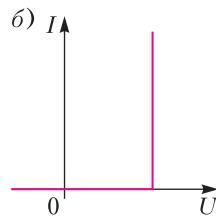
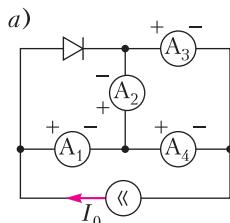


Рис. 6

Ф2803. В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке 7 представ-



Рис. 7

лен график зависимости модуля перемещения этой частицы r относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени $t = 0$, от времени ее дальнейшего движения t .

- 1) Определите модуль скорости v , с которой движется частица.
- 2) Определите угол α между вектором скорости частицы в момент $t = 0$ и вектором индукции магнитного поля.
- 3) Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а ее масса $m = 1,0 \cdot 10^{-26}$ кг.
- 4) Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам A и B на графике.

A.Заяц

Ф2804. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы, на котором были изображены тонкая линза, ее фокусы и луч, проходящий через один из фокусов. От времени чернила выцвели, и на чертеже (рис. 8) остались видны только луч и фокус F , через который он проходил. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) положение линзы.

Примечание. При построении данного чертежа Снеллиус предполагал, что данная

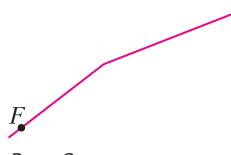


Рис. 8

линза любые лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч – это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от нее.

Д.Рубцов

Ф2805. Вода вытекает в вертикальном направлении из крана с круглым поперечным горизонтальным сечением отверстия диаметром $D_0 = 1$ см. Бутыль большой емкости – 100 л – с диаметром отверстия в горлышке $D = 0,8D_0$ стоит под краном (рис. 9). Расстояние между горлышком

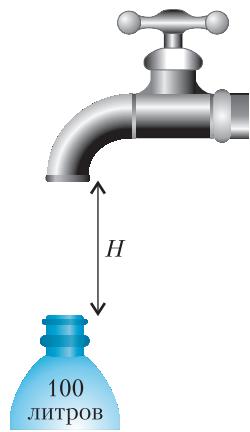


Рис. 9

бутыли и выходным отверстием крана $H = 50D_0$. За какой минимальный промежуток времени бутыль может быть наполнена водой при условии, что вся вода, выходящая из крана, попадает в бутыль? На сколько давление воздуха внутри бутыли во время заполнения ее водой будет больше внешнего (нормального) атмосферного давления? Вязкостью воды и ее поверхностным натяжением можно пренебречь.

С.Варламов

Ф2806. В отсутствие гравитации и атмосферного давления капля ртути радиусом R сжимается двумя параллельными стеклянными пластинами. Поверхности пластин абсолютно не смачиваются. Определите

зависимость давления в капле от расстояния между пластинами. Во сколько раз изменяется давление в капле при ее сжатии в два раза по высоте от $2R$ до R ?

А.Власов

Ф2807. Два одинаковых точечных положительных электрических заряда Q расположены в вакууме вдали от других тел на расстоянии L друг от друга. Естественно, они отталкиваются. Между ними поместили тонкую плоскую круглую металлическую пластину радиусом $R \gg L$, расположенную так, что прямая линия, на которой находятся заряды Q и Q , перпендикулярна этой пластине и центр пластины находится посередине между зарядами. Каков заряд этой пластины, если теперь силы, действующие на заряды, обратились в ноль? Краевыми эффектами можно пренебречь.

С.Варламов

Ф2808. На тороидальном сердечнике симметрично расположены четыре одинаковых обмотки в последовательности $A-B-C-D$. Обмотку A подключили к источнику переменного напряжения, а к обмотке B подключили идеальный вольтметр. При закороченной обмотке C и разомкнутой обмотке D вольтметр показывает 50% напряжения источника, а при закороченной D и разомкнутой C показывает 75%. Какую часть напряжения источника будет показывать вольтметр, если закоротить обе обмотки C и D ? Сопротивления материала обмоток и источника пренебрежимо малы.

В.Пойманов

Решения задач М2782–М2785, Ф2789–Ф2792

М2782. В стране некоторые города соединены (двусторонними) авиалиниями, причем из любого города в любой другой город можно попасть не более чем за n перелетов. Докажите, что все авиалинии можно распределить между n авиакомпаниями так, чтобы между любыми двумя городами можно было построить маршрут, в котором бы встретилось не более двух перелетов каждой авиакомпанией.

По условию задачи, в графе (города – вершины, авиалинии – ребра) между любыми двумя вершинами есть путь длины не более n . Требуется раскрасить ребра в n цветов (цвет означает принадлежность к соответствующей авиакомпании) так, чтобы для любых двух вершин между ними нашелся путь, в котором ребер каждого цвета не более двух.

Возьмем одну из вершин A и «подвесим» граф за эту вершину, т.е. проведем следующий процесс. Пусть A_0 – множество из одной вершины A . Пусть A_1 – множество вершин, из которых можно, пройдя по одному ребру, попасть в вершину из A_0 . И так далее: пусть на очередном шаге у нас уже определены множества вершин A_0, A_1, \dots, A_{k-1} . Определим A_k как множество вершин, не входящих в A_0, A_1, \dots, A_{k-1} , из которых можно, пройдя по ребру, попасть в некоторую вершину из A_{k-1} . Таким образом, множество A_k – это множество вершин, для которых кратчайший путь до A имеет длину k (иначе говоря, A_k – это все вершины, находящиеся на расстоянии k от A).

Тогда по условию все вершины нашего графа, кроме вершины A , будут распределены по n «этажам» A_1, A_2, \dots, A_n .

Покрасим все ребра, соединяющие вершину из A_{m-1} с вершиной из A_m , в m -й цвет, где $m = 1, 2, \dots, n$. (Остальные ребра, т.е. ребра «внутри этажей», покрасим как угодно.) Получим, что для любой вершины X есть путь от нее до A , в котором все ребра имеют разные цвета. Действительно, этот путь можно построить, переходя с «этажа» A_l , на котором находится X , последовательно на A_{l-1}, \dots, A_1, A_0 (на самом деле – это кратчайший путь от X до A). Тогда для любой пары вершин X, Y годится путь, получаемый как объединение указанных путей (без повторяющихся цветов ребер) – от X до A и от Y до A .

П.Кожевников

M2783. Сумма цифр натурального числа равна s . Какова наибольшая возможная сумма цифр: а) у квадрата этого числа; б) у четвертой степени этого числа, если $s \geq 4$?

Вначале сделаем некоторые замечания и докажем леммы о сумме цифр суммы и произведения чисел.

Покажем, что сумма цифр $s(n)$ числа n – это наименьшее t такое, что n можно представить в виде суммы t степеней десятки. Действительно, во-первых, по десятичной записи числа n можно легко получить нужное разложение, скажем для $n = 2024$ имеем

$$\begin{aligned}n &= 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = \\&= 10^3 + 10^3 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0 + 10^0\end{aligned}$$

– итого 8 слагаемых, равных степени десятки. Наоборот, пусть n представлено в виде суммы нескольких степеней десятки. Если в сумме нашлось 10 равных слагаемых, заменим их на одно: $10 \cdot 10^m = 10^{m+1}$, при этом количество слагаемых уменьшится (на 9). Продолжая далее, дойдем до ситуации, когда n представлено в виде суммы нескольких степеней десятки так, что в этой сумме не более 9 копий каждого слагаемого. Тогда в этой сумме легко сгруппировать слагаемые и получить десятичную запись числа n , при этом $s(n)$ будет равно количеству слагаемых.

Из приведенного выше «комбинаторного определения» суммы цифр легко следуют такие известные утверждения: $s(m+n) \leq s(m) + s(n)$ и $s(mn) \leq s(m)s(n)$. Действительно, пусть $s(m) = k$, $s(n) = l$, тогда m и n представим в виде суммы k и l степеней десятки соответственно. Сложив эти суммы, получим, что $m+n$ равно сумме $k+l$ степеней десятки, откуда $s(m+n) \leq k+l = s(m)+s(n)$. Впрочем, неравенство $s(m+n) \leq s(m)+s(n)$ несложно доказать и с помощью сложения столбиком. При этом можно заметить, что случай равенства $s(m+n) = s(m)+s(n)$ имеет место тогда и только тогда, когда при сложении в столбик не будет ни одного перехода через разряд.

Далее займемся произведением mn и перемножим суммы степеней десятки, дающие m и n : $mn = (10^{a_1} + 10^{a_2} + \dots + 10^{a_k})(10^{b_1} + + 10^{b_2} + \dots + 10^{b_l})$. После раскрытия скобок будет kl слагаемых вида $10^{a_i+b_j}$, т.е. степе-

ней десятки. Значит, $s(mn) \leq kl = s(m)s(n)$. Здесь также можно отследить, в каком случае неравенство обращается в равенство: это происходит тогда и только тогда, когда в сумме степеней десятки $10^{a_i+a_j}$ будет не более 9 копий каждой конкретной степени десятки.

Перейдем к решению задачи.

a) **Ответ:** s^2 .

Оценка сразу получается из леммы:

$$s(n^2) \leq s(n)s(n) = s^2.$$

Предъявим пример. Возьмем $n = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \dots + 10^{a_s}$, где $a_i = 10^i$. Тогда после возведения n в квадрат будет сумма слагаемых вида 10^{2a_i} и вида $2 \cdot 10^{a_i+a_j}$ (по всем парам $a_i < a_j$). Все показатели вида $2a_i$ и $a_i + a_j$ будут различны, согласно нашему выбору a_i , поэтому в сумме не происходит переносов через разряд и $s(n^2) = s^2$. (На самом деле в описанном примере n^2 будет иметь в десятичной записи только цифры 0, 1 и 2.)

б) **Ответ:** $\frac{s^4 + 21s^2 - 18s}{4}$.

Оценка. Пусть $n = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \dots + 10^{a_s}$ (где степени a_i не обязательно различны). Тогда после раскрытия скобок в произведении $n^4 = n \cdot n \cdot n \cdot n$ будет s^4 слагаемых, равных степеням десятки. Если привести подобные слагаемые, то получим

$$n^4 = S_{4,0,0,0} + S_{3,1,0,0} + S_{2,2,0,0} + S_{2,1,1,0} + S_{1,1,1,1},$$

где

$S_{4,0,0,0}$ – сумма слагаемых вида 10^{4a_i} ,

$S_{3,1,0,0}$ – сумма слагаемых вида $4 \cdot 10^{3a_i+a_j}$, где $a_i \neq a_j$,

$S_{2,2,0,0}$ – сумма слагаемых вида $6 \cdot 10^{2a_i+2a_j}$, где $a_i \neq a_j$,

$S_{2,1,1,0}$ – сумма слагаемых вида $12 \cdot 10^{2a_i+a_j+a_k}$, где среди a_i, a_j, a_k нет равных,

$S_{1,1,1,1}$ – сумма слагаемых вида $24 \cdot 10^{a_i+a_j+a_k+a_l}$, где среди a_i, a_j, a_k, a_l нет равных.

Видим, что в случае $S_{2,1,1,0}$ получаются $\frac{s(s-1)(s-2)}{2}$ групп из 12 одинаковых степе-

ней десятки, при этом каждая такая группа вносит вклад в сумму цифр не более 3, т.е. хотя бы на 9 меньше количества степеней десятки в ней. Аналогично, в случае $S_{1,1,1,1}$ получаются $\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}$ групп из 24 одинаковых степеней десятки, при этом каждая такая группа вносит вклад в сумму цифр не более 6, т.е. хотя бы на 18 меньше количества степеней десятки в ней. Итого

$$s(n^4) \leq s^4 - 9 \cdot \frac{s(s-1)(s-2)}{2} - 18 \cdot \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24} = \frac{s^4 + 21s^2 - 18s}{4}.$$

Пример. Снова положим $n = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \dots + 10^{a_s}$, где $a_i = 10^i$, так что для разных (неупорядоченных) наборов (a_i, a_j, a_k, a_l) и (a'_i, a'_j, a'_k, a'_l) слагаемые $10^{a_i+a_j+a_k+a_l}$ и $10^{a'_i+a'_j+a'_k+a'_l}$ из разложения n^4 окажутся различными и даже будут отличаться не менее чем в 100 раз, так что при сложении других переносов через разряд, кроме описанных в оценке, не будет. Значит, в данном примере все неравенства, используемые в оценке, превратятся в равенства.

П. Кожевников

М2784. В треугольнике ABC провели биссектрисы BD и CE , они пересеклись в точке I . Затем все стерли, оставив только точки D и E . Найдите множество возможных положений точки I .

Зафиксируем полуплоскость относительно DE , в которой находится I (ясно, что искомое множество точек I симметрично относительно DE).

Заметим, что A лежит в другой полуплоскости относительно DE . При этом $\angle DIE = 90^\circ + a$, где $\angle DAE = 2a$, отсюда сразу видно, что I лежит внутри окружности Δ с диаметром DE (рис. 1). Далее, AI – биссектриса угла DAE , поэтому AI проходит через середину M дуги DE окружности (ADE) (здесь берется дуга DE , не содержащая точки A). Кроме того, углы DIA и EIA острые.

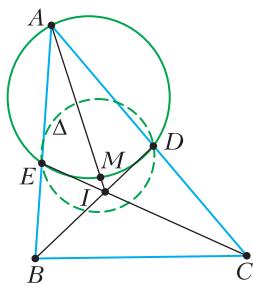


Рис. 1

Далее поймем, что если I и A удовлетворяют перечисленным условиям, то I – центр вписанной окружности одного из возможных треугольников ABC . Действительно, так как $\angle EAI$ – острый, то $\angle AID = \angle EID - \angle EIA < (90^\circ + a) - 90^\circ = a = \angle EAI$. Полученное неравенство означает, что прямые AE и DI пересекаются в некоторой точке (назовем ее B), принадлежащей лучам AE и DI . Аналогично получаем точку C пересечения лучей AD и EI . Пусть I' – центр вписанной окружности треугольника ABC . Тогда AI' – внутренняя биссектриса угла BAC , т.е. угла DAE , а значит, прямая AI' совпадает с AI . Кроме того, $\angle BIC = \angle BIC' = 90^\circ + a$. Но существует ровно одна точка с таким свойством, лежащая на биссектрисе угла BAC внутри треугольника ABC (пересечение дуги BIC с биссектрисой). Значит, $I = I'$.

Теперь зафиксируем величину угла a , тогда A и I будут находиться на фиксированных дугах DAE и DIE ; назовем эти дуги γ и ω . Начнем с интересного частного случая $a = 30^\circ$. В этом случае дуги γ и ω составляют вместе одну окружность, и так как AI должна проходить через середину M дуги ω , I должна совпадать с M (отметим, что этот случай очевидно возможен, например, когда A лежит на серединном перпендикуляре к DE).

Далее рассмотрим случай $a < 30^\circ$ (рис. 2). В таком случае дуга ω находится вне окружности (AED) . Мы знаем, что по точке I дуги ω однозначно восстанавливается точка A как точка пересечения IM с дугой γ . Выясним, какие точки I дуги ω нам подходят, т.е. для каких точек I дуги ω углы DIM и EIM острые. Пусть S –

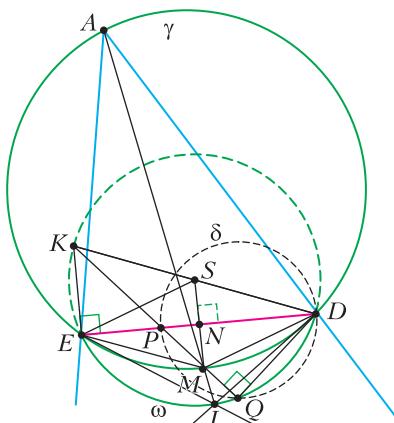


Рис. 2

центр окружности (EID) . Так как $\angle EID = 90^\circ + a$, то $\angle ESD = 180^\circ - 2a$, что равно углу EMD . Видим, что S и M симметричны относительно ED , иначе говоря, $DMES$ – ромб, центр этого ромба – середина N отрезка ED . Пусть KD – диаметр окружности (EID) , так что S – середина DK и $KE \perp ED$. Тогда $KEMS$ – параллелограмм (стороны EM и KS параллельны и равны), а $KEMN$ – трапеция с основаниями KE и MN такими, что $KE : MN = 2$. Тогда KM пересекает отрезок EN в точке P такой, что $EP : PN = 2$ (отметим, что P не зависит от выбора угла a). Пусть луч KM пересекает дугу ω в точке Q . Так как KD – диаметр окружности ω , имеем $\angle PQD = 90^\circ$, иначе говоря, Q и D – точки пересечения дуги ω с окружностью δ , построенной на отрезке PD как на диаметре. Если I лежит внутри δ , то $\angle DIA = \angle DIM \geq 90^\circ$, а значит, такие точки I нам не подходят. Аналогично построим окружность δ' , симметричную δ относительно серединного перпендикуляра к DE . Тогда точки I , лежащие внутри δ' , нам также не подходят. Если же точка I лежит на дуге ω строго между точками Q и Q' , где Q' – вторая точка пересечения δ' и ω (рис. 3), то I – строго вне окружностей δ и δ' , значит, оба угла DIM и EIM – острые, и такие точки I нам подходят.

Теперь позволим углу a изменяться в интервале $(0^\circ; 30^\circ)$ и получим множество подходящих точек I : все точки, лежащие внутри окружности Δ и вне δ и δ' .

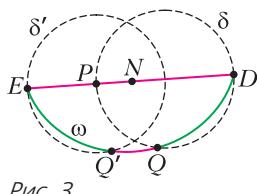


Рис. 3

Практически аналогично рассматривается случай $a > 30^\circ$. В этом случае дуга ω находится внутри окружности (AED) и для подходящих точек I должны быть тупыми углы DIM и EIM (смежные с углами DIA и EIA). В качестве множества подходящих точек здесь получаются точки, лежащие внутри Δ , δ и δ' . Отметим, что точки пересечения δ и δ' входят в множество подходящих точек I — они соответствуют рассмотренному ранее случаю $a = 30^\circ$. Окончательно, с учетом симметрии относительно DE , искомое множество точек I показано на рисунке 4. Решение закончено.

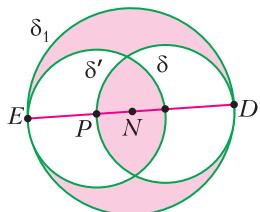


Рис. 4

Вариант постановки вопроса этой задачи является вопрос о нахождении множества центров вневписанных окружностей треугольника при фиксированных двух основаниях двух биссектрис (каждая из которых — внутренняя или внешняя). Этот вопрос можно решить похожими методами.

В завершение отметим, что эта задача предлагалась на математическом бою между призерами олимпиад — школьниками и бывшими призерами — выпускниками осенью 2023 г. в Ярославле. К сожалению, в редакции была получена неверная информация, из-за чего при публикации условия был ошибочно указан автор задачи. На самом деле автором этой красивой задачи является С.Токарев.

П.Кожевников

M2785*. Решение этой задачи приведено в статье «Задача о замкнутой ломаной».

П.Кожевников

Ф2789. Длинная гладкая однородная и гибкая веревка массой $M = 3,2 \text{ кг}$ переброшена через тонкую перекладину с круглым поперечным сечением и находится в равновесии. Веревку немного смещают, и она начинает соскальзывать с перекладины. С какой по величине силой F веревка действует на перекладину в тот момент, когда длина веревки L с одной стороны в три раза больше, чем с другой? Какой угол α с вертикалью образует эта сила, если отношение диаметра D перекладины к длине L веревки равно 10^{-2} ?

Считаем, что участки веревки, не лежащие на перекладине, вертикальны. При смещении одного из концов веревки на $x > 0$ от равновесного положения убыль потенциальной энергии равна $\frac{M}{L}x^2g$. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M}{L}x^2g.$$

Скорость растет пропорционально координате: $v = \sqrt{2\frac{g}{L}x}$, откуда

$$a_x = \sqrt{2\frac{g}{L}}v = 2\frac{g}{L}x.$$

В рассматриваемый момент при $x = \frac{L}{4}$ модуль ускорения частей веревки $a = \frac{g}{2}$, квадрат скорости веревки $v^2 = \frac{gL}{8}$. Мысленно поставим метки на тех точках веревки, которые в данный момент находятся на расстоянии D друг от друга и касаются перекладины. Участок веревки между этими метками, лежащий на перекладине, испытывает действие вертикальных сил натяжения $T_{\text{кор}}$ и $T_{\text{дл}}$ от свисающих вертикальных короткой и длинной частей веревки и не вертикальной силы от перекладины. Поскольку веревка ускоряется, то у силы, с которой перекладина действует на веревку, имеется и вертикальная, и горизонтальная составляющие. Сила, которую нужно по условию найти, и сила, действующая на веревку со стороны перекладины,

связаны – они, согласно третьему закону Ньютона, равны по величине и противоположно направлены. Участок веревки, лежащий на перекладине, имеет нулевую проекцию импульса на вертикальное направление, а его горизонтальная составляющая импульса со временем изменяется. Именно для этого участка между метками в рассматриваемый момент времени горизонтальная составляющая суммы сил, действующих на этот участок, равна

$$F_{\text{гор}} = \frac{MD}{L} a = \frac{MDg}{2L}.$$

Как видно, это совсем небольшая по величине сила в сравнении с силой тяжести Mg , поэтому можно считать, что силы $T_{\text{кор}}$ и $T_{\text{дл}}$ мало отличаются друг от друга. Будем обозначать величину вертикальной составляющей силы, с которой веревка действует на перекладину или перекладину действует на веревку, $F_{\text{в}}$. Тогда малый по длине участок веревки $v\Delta t$, находившийся вблизи метки снизу от нее на коротком вертикальном участке веревки, за промежуток времени Δt как бы пропадет на этом вертикальном участке и такой же по длине участок появится на длинном вертикальном участке. Иными словами, участок с такой массой за время Δt под действием приложенных к нему сил изменит свой вертикальный импульс на величину

$$2v \frac{Mv\Delta t}{L} = (T_{\text{кор}} + T_{\text{дл}} - F_{\text{в}})\Delta t,$$

или

$$\frac{v^2 M}{L} = \frac{T_{\text{кор}} + T_{\text{дл}} - F_{\text{в}}}{2}. \quad (1)$$

Теперь составим уравнения, описывающие ускоренное движение вертикальных участков веревки без участка, лежащего на перекладине, считая его массу пренебрежимо малой. Для короткого участка:

$$\frac{M}{4} a = T_{\text{кор}} - \frac{M}{4} g. \quad (2)$$

Для длинного участка:

$$\frac{3M}{4} a = \frac{3M}{4} g - T_{\text{дл}}. \quad (3)$$

Из полученных трех уравнений (1)–(3) с тремя неизвестными $T_{\text{кор}}$, $T_{\text{дл}}$ (эти две величины очень близки друг к другу) и $F_{\text{в}}$ можно найти все неизвестные. В итоге получается

$$F = F_{\text{в}} = \frac{Mg}{2}.$$

Угол, который образует сила F с вертикалью, мал, его величина примерно равна

$$\alpha \approx \frac{F_{\text{гор}}}{F_{\text{в}}} \approx \frac{D}{L} = 0,01.$$

С.Варламов, В.Плис

Ф2790. Вода на международной космической станции (МКС) находилась в пластиковой упаковке с тонкими стенками в форме небольшого кубика. Стенки упаковки порвались, и вода достаточно быстро (поколебавшись немного) приняла форму шарика. Теплообменом воды с окружающим воздухом можно пренебречь, однако температура воды в шарике стала выше начальной температуры $+20^\circ\text{C}$ (в кубике) на $\Delta t = 0,001^\circ$ (на пределе экспериментальных возможностей такую величину еще можно измерить). Из какого количества молекул состоит эта порция воды? Плотность воды $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, молярная масса $M = 18 \text{ г}/\text{моль}$, молярная теплоемкость $C = 9R \approx 75 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})$, где R – универсальная газовая постоянная, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,07 \text{ Дж}/\text{м}^2$.

Предположим, что кубик был таким, что его ребра имели длину L . Тогда объем кубика равен L^3 , площадь поверхности кубика равна $6L^2$. Объем шарика $\frac{4}{3}\pi R^3$ равен объему кубика, а площадь его поверхности равна $4\pi R^2$. Отсюда следует, что разница поверхностных энергий составляет

$$\sigma L^2 \left(6 - 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \right) = \sigma L^2 \cdot 1,1640.$$

Разница энергий поверхности воды, имевшей форму кубика и теперь имеющую форму шарика, пошла на нагрев воды.

Следовательно,

$$9R \frac{\rho L^3}{M} \Delta t = \sigma L^2 \cdot 1,1640,$$

откуда

$$L = \frac{\sigma M \cdot 1,1640}{9R\rho\Delta t} \approx 20 \text{ мкм.}$$

Число молекул в этой порции воды равно

$$N = N_A \frac{\rho L^3}{M} \approx 2,5 \cdot 10^{14}.$$

C.Варламов

Ф2791. Тонкую проволоку, замкнутую в кольцо, уложили на плоскую непроводящую и не намагничивающуюся поверхность так, что два участка проволоки лежат на смежных сторонах квадрата со стороной b , а третий изогнутый участок образует четверть дуги окружности, радиус которой тоже равен b (рис. 1). В

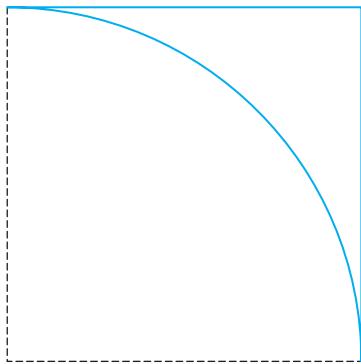


Рис. 1

разрыв проволоки вставили маленькую по размерам батарейку, и по проволоке пошел ток I . Какое по величине магнитное поле создано этим током в углу квадрата, к которому не подходит проволока (пунктирные линии на рисунке сходятся в этом углу)?

Магнитное поле (вектор его индукции) во всех точках плоскости, в которой лежит проволока, перпендикулярно этой плоскости. В частности, и в интересующем нас углу квадрата тоже. А величина поля складывается из части, созданной изогнутым участком, и двух одинаковых по величине вкладов, которые создает ток в прямых участках проволоки. Индукция маг-

нитного поля от изогнутого участка равна

$$\mu_0 I \cdot \frac{\pi b/2}{4\pi b^2} = \frac{\mu_0 I}{8b}.$$

Каждый маленький участок прямого провода дает свой вклад в магнитное поле (рис. 2), равный

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{b \cdot d\alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot b^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha.$$

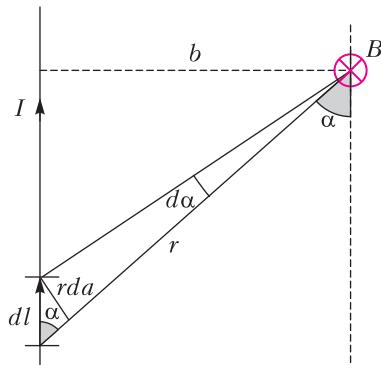


Рис. 2

Угол α для одного прямого участка изменяется от $\pi/4$ до $\pi/2$. Суммирование (интегрирование) таких вкладов для одного прямого участка дает

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Два прямых участка вместе создают поле, противоположно направленное полю, созданному изогнутым участком. В результате величина магнитного поля в указанной точке будет равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{b} \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \right) \approx \frac{\mu_0 I}{b} \cdot 0,0125.$$

C.Варламов

Ф2792. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит массивный брусков с выемкой в нем. Стенки выемки гладкие, а в сечении выемки любой плоскостью, перпендикулярной и стенке, и горизонтальной поверхности, вертикальная y и горизонтальная x координаты точек линии сечения выемки вертикальной плоскостью связаны зависимостью $y = (x - a)^2 / (10a)$,

где a – некоторая константа. Координата x отсчитывается от стенки, а координата y – от нижней точки выемки. На самом краю выемки возле стенки поместили маленькую шайбу массой $m \ll M$ и отпустили ее, не придав ей никакой скорости. В дальнейшем при движении брусков периодически останавливаются. Какое расстояние проходит брусков между двумя последовательными остановками?

Поскольку в условии дано сильное неравенство $m/M \ll 1$, а максимальное значение тангенса угла α наклона касательной плоскости к поверхности выемки к горизонту составляет $1/5$, что тоже много меньше единицы, то можно в первом приближении считать, что брусков почти не движется (движется очень медленно), а шайба совершает периодические движения, которые описываются гармонической функцией времени. Это справедливо потому, что при малых углах наклона $\sin \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$.

На самом деле брусков начинает движение, когда шайба в первый раз проходит нижнюю точку выемки. И останавливается каждый раз, когда шайба проходит нижнюю точку выемки в направлении от точки старта, т.е. в том же направлении, что и в первый раз. Центр масс системы «шайба + брусков» движется с постоянной скоростью. Следовательно, смещение брусков

будет равно скорости центра масс системы, умноженной на период колебаний. Скорость, которую имеет шайба при первом прохождении нижней точки выемки, находится из условия $v^2/2 = ag/10$, т.е. центр масс движется со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} \sqrt{\frac{ag}{5}}.$$

Уравнение движения легкой шайбы в выемке на почти неподвижном бруске дается условием, что ее ускорение равно

$$b_{(x-a)} = -\frac{g}{5a}(x-a).$$

Из этого уравнения получается период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5a}{g}}.$$

Между двумя последовательными остановками брусков смещается на расстояние

$$\frac{m}{m+M} \sqrt{\frac{ag}{5}} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{5a}{g}} = 2\pi a \frac{m}{m+M}.$$

С учетом неравенства $m \ll M$ величина смещения бруска за один период колебаний равна приблизительно $2\pi a \frac{m}{M}$.

С. Варламов

Задача о замкнутой ломаной

Е. БАКАЕВ, Д. МАГЖАНОВ

В этой статье мы приведем решение задачи М2785 «Задачника «Кванта» и обсудим некоторые родственные вопросы. Мы благодарны П.А. Кожевникову, предложившему четвертое и пятое решения пункта а) этой задачи и задачу 5.

Задача М2785

На плоскости дано конечное множество S из $n > 2$ точек общего положения (т.е.

никакие три точки не лежат на одной прямой). Количество несамопересекающихся замкнутых n -звенных ломанных с вершинами в этих точках будем обозначать $f(S)$. Докажите, что

- а) $f(S) > 0$ для любого S ;
- б) $f(S) = 1$ тогда и только тогда, когда все точки S лежат на выпуклой оболочке множества S ;
- в) если $f(S) > 1$, то $f(S) \geq n - 1$; это значение достигается, когда внутри вы-

пуклой оболочки множества S лежит ровно одна его точка;

г) если внутри выпуклой оболочки множества S лежат ровно две его точки, то

$$f(S) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Пусть $n > 2$. Будем обозначать $F(n)$ наибольшее возможное значение функции $f(S)$ по всем множествам S из n точек общего положения.

д) Докажите, что $F(n) \geq 3 \cdot 2^{\frac{n-8}{3}}$.

Решения пункта а)

Каждую из замкнутых ломаных, о которых идет речь в условии задачи, будем называть *поясом*.

Первое решение.

Упорядочивание по координате

Лемма 1. На плоскости дано конечное множество точек общего положения. Тогда можно соединить все точки отрезками так, чтобы получилась несамопересекающаяся ломаная (незамкнутая).

Доказательство. Введем декартовы координаты. Упорядочим точки по возрастанию абсциссы, а в случае равенства — по возрастанию ординаты. Обозначим упорядоченные точки как A_1, A_2, \dots, A_n , а значения их абсцисс как x_1, x_2, \dots, x_n соответственно (рис. 1).

Соединим последовательные точки отрезками, тогда проекция каждого отрезка $A_i A_{i+1}$ это $[x_i, x_{i+1}]$. Значит, отрезки могут иметь общие точки только в вершинах ломаной. Ломаная построена.

Лемма 2. Пусть точки $X, Y \in S$ такие, что XY — диаметр множества S (т.е. точки X и Y — максимально удаленные друг от друга точки в этом множестве).

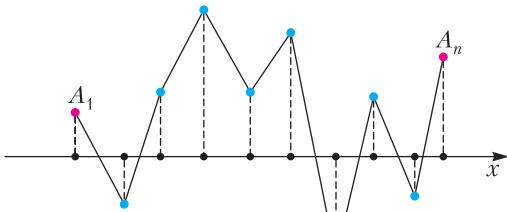


Рис. 1

Введем декартовы координаты так, что ось абсцисс содержит XY . Тогда, в обозначениях предыдущей леммы, X и Y — это точки A_1 и A_n .

Доказательство. Пусть проекция P' на отрезок XY какой-то точки $P \in S$ (отличной от X и Y) не лежит на отрезке XY (рис. 2). Тогда $PX > P'X \geq XY$ или $PY > P'Y \geq XY$, значит, XY это не диаметр, получаем противоречие. Следова-

тельно, проекции всех точек лежат внутри XY , поэтому координаты точек X и Y — минимальная и максимальная из координат всех точек. Лемма доказана.

С помощью этих лемм получим решение пункта а) задачи. Пусть $A, B \in S$ такие, что AB — диаметр S . Проведем координатную прямую, содержащую диаметр, — она разделит плоскость на две полуплоскости (рис. 3). Рассмотрим точки, лежащие в

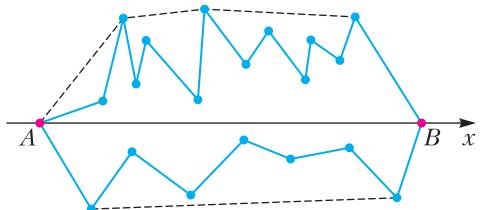


Рис. 3

первой полуплоскости, включая границу. Упорядочим их и построим ломаную, как в доказательстве леммы 1. По лемме 2, точки A и B — крайние точки получившейся ломаной, а все отрезки лежат в первой полуплоскости, включая прямую AB .

Проделаем то же самое для точек, лежащих во второй полуплоскости, включая границу. В результате по лемме 1 получим замкнутую ломаную, звенья которой не пересекаются в пределах полуплоскости. Очевидно, что звенья из разных полуплоскостей тоже не пересекаются.

Второе решение.

Упорядочивание по полярному углу

Рассмотрим точку $X \notin S$, лежащую внутри выпуклой оболочки S или на ней

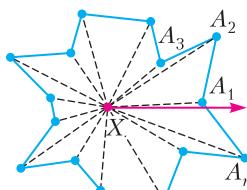


Рис. 4

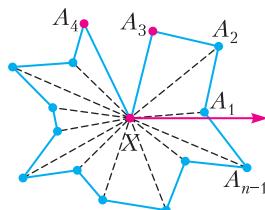


Рис. 5

(рис. 4). Введем полярные координаты с центром в этой точке и обозначим точки множества S через A_1, \dots, A_n так, что $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ – соответствующие полярные углы. Тогда ломаная $A_1A_2 \dots A_nA_1$ – пояс. Причем ясно, что X содержится в области, ограниченной этим поясом. Будем называть пояс, получаемый таким построением, *невключающим поясом вокруг X* .

Рассмотрим теперь точку $X \in S$, лежащую внутри выпуклой оболочки S (рис. 5), введем полярные координаты с центром в X и таким же образом упорядочим остальные точки множества, обозначив их как A_1, \dots, A_{n-1} . Тогда ломаная вида $A_iA_{i+1} \dots A_{n-1}A_1 \dots A_{i-1}XA_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ – пояс. Ясно, что таких поясов $n-1$.

Если же $X \in S$ лежит на выпуклой оболочке, то таким образом мы можем построить только один пояс $A_iA_{i+1} \dots A_{i-1}XA_i$.

Будем называть пояса, которые можно получить вторым способом (взяв за центр полярных координат точку из S), *включающими поясами вокруг X* .

Третье решение.

Соединение выпуклых оболочек

Рассмотрим выпуклую оболочку множества S . Назовем ее первой. Далее у оставшегося множества точек (заключенного внутри первой выпуклой оболочки) тоже рассмотрим выпуклую оболочку, ее назовем второй (пример показан на рисунке 6). Будем продлевать эту операцию до тех пор, пока это возможно. (Могло оказаться, что последний шаг совершен с множеством, состоящим из одной или двух точек.)

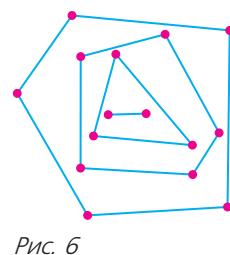


Рис. 6

Лемма 3. Пусть отрезок соединяет точку из i -й и точку из $(i+1)$ -й выпуклых оболочек. Тогда он не пересекает i -ую выпуклую оболочку.

Доказательство. Это так, потому что весь отрезок лежит внутри выпуклого многоугольника, образованного i -й выпуклой оболочкой (значит, он ее не пересекает).

Лемма 4. Концы любого отрезка AB (не последней) i -й выпуклой оболочки можно соединить с концами отрезка из $(i+1)$ -й выпуклой оболочки (или с точкой в случае, когда выпуклая оболочка состоит из одной точки) двумя отрезками так, чтобы они не пересекали выпуклые оболочки и друг друга.

Доказательство. Случай, когда $(i+1)$ -я оболочка состоит из одной точки, очевиден – просто проведем к ней два отрезка из A и B . Случай, когда $(i+1)$ -я оболочка состоит из двух точек C и D , также очевиден: отрезки AC и BD не пересекаются или отрезки AD и BC не пересекаются.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $(i+1)$ -я оболочка состоит более чем из двух точек. Будем считать, что AB проходит горизонтально и точка A расположена левее B (рис. 7). Пусть X – ближайшая к

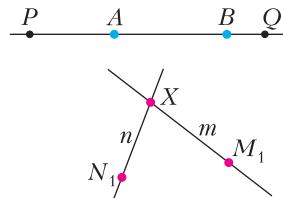


Рис. 7

прямой AB точка из $(i+1)$ -й оболочки (если таких несколько, то выберем самую левую). Тогда отрезки AX и BX не пересекают $(i+1)$ -ю выпуклую оболочку (иначе X – не ближайшая точка).

Рассмотрим прямые, содержащие отрезки, которые соединяют X с соседними вершинами из $(i+1)$ -й выпуклой оболочки. Назовем их m и n так, что m пересекает прямую AB левее, чем n пересекает прямую AB . Точку пересечения m с прямой AB назовем M (если же одна из прямых m и n параллельна AB , то обозначим именно ее за m , а другую за n ; в этом случае за точку M примем левую беско-

нечно удаленную точку на AB). Точку пересечения n с прямой AB назовем N . Соседнюю для X вершину, лежащую на m , назовем M_1 . Соседнюю для X вершину, лежащую на n , назовем N_1 . Пусть $P, Q \in AB$ – любые точки такие, что P – слева от A , Q – справа от B .

Рассмотрим три случая.

1) Точка A лежит на луче MN (рис. 8; в случае, когда M это левая бесконечно

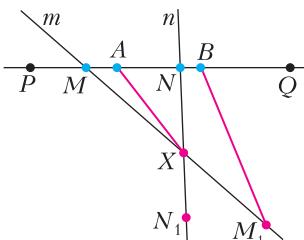


Рис. 8

удаленная точка, луч MN это вся прямая). Проведем отрезки AX и BM_1 .

2) Точка B лежит на луче NM (рис. 9). Этот случай «симметричен» первому. Проведем отрезки AN_1 и BX .

3) Точка A лежит на луче MP , точка B лежит на луче NQ (рис. 10). Тогда можно без пересечений соединить A с X , а B с M_1 .

Во всех случаях пересечений с i -й оболочкой не будет по лемме 3.

Лемма 4 доказана.

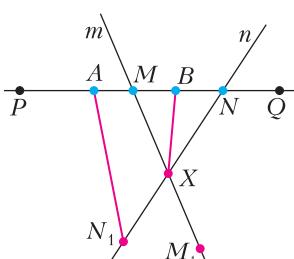


Рис. 9

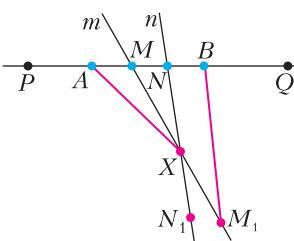


Рис. 10

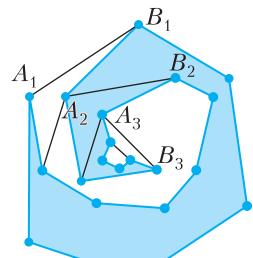


Рис. 11

Теперь выберем любой отрезок A_1B_1 в 1-й оболочке, соединим его с отрезком из 2-й (рис. 11). Затем отрезок A_2B_2 из 2-й оболочки, который не соединялся с первой, соединим с отрезком из 3-й и т.д. В каждой выпуклой оболочке с нечетным номером закрасим часть между двумя последовательными выпуклыми оболочками, исключая тот четырехугольник, который образуется двумя соединяющими отрезками. В каждой оболочке с четным номером закрасим этот четырехугольник. Контур закрашенной фигуры – пояс множества.

Четвертое решение.

Ломаная минимальной длины

Понятно, что множество замкнутых ломанных, которые можно провести через S , конечно. Докажем, что ломаная минимальной длины является поясом.

Пусть есть какое-то пересечение X двух звеньев AB и CD ломаной (рис. 12). Заме-

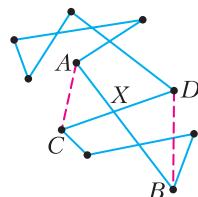


Рис. 12

ним эти два отрезка на AC и BD или на AD и BC , в одном из двух случаев ломаная останется связной. Но в то же время ее длина сократится, в силу двух неравенств треугольника: $AC < AX + XC$ и $BD < BX + XD$, из чего следует, что $AC + BD < AB + CD$. Аналогично, $AD + BC < AB + CD$. Значит, замкнутая ломаная минимальной длины – несамопересекающаяся, т.е. является поясом.

Пятое решение. Индукция

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 5. *Дан многоугольник M и точка A такие, что есть прямая l , отделяющая M от A (т.е. M и A лежат по разные стороны от l). Тогда какая-то сторона M целиком видна из точки A (будем говорить, что сторона PQ видна из точки A целиком, если внутри треугольника APQ нет других точек многоугольника).*

Доказательство. Покрасим каждую сторону многоугольника в свой цвет. Рассмотрим центральную проекцию многоугольника из точки A на прямую l (пример показан на рисунке 13). На прямой l

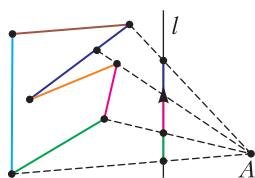


Рис. 13

будет отображаться, как многоугольник виден из точки A . Например, если фрагмент красной стороны загораживает фрагмент синей стороны, то на прямой l показана проекция именно красной стороны. Если вершина проецируется в точку на прямой l , то будем в проекции рисовать направление (стрелку), в котором какая-то одна сторона загораживает другую, т.е. концом какой стороны является проецируемая вершина.

Пусть при проекции получилось k сегментов. Между ними $k - 1$ точек, в некоторых из которых указаны направления. Так как сегментов больше, чем точек, то в какой-то сегмент не указывает ни одна стрелка. Значит, это проекция целой стороны, т.е. сторона видна из точки A целиком.

Лемма доказана.

Докажем пункт а) с помощью этой леммы. Будем вести решение индукцией по n . База для $n = 3$ точек очевидна. Возьмем точку A – вершину выпуклой оболочки и уберем ее из множества. Точку A можно отделить прямой от множества остальных точек. Применим к нему предположение индукции: через это множество можно провести пояс. По лемме, одна сторона PQ

пояса видна целиком из точки A . Заменив в многоугольнике сторону PQ на ломаную PAQ , получим искомый многоугольник.

Решение пункта б)

Докажем сначала, что если все точки лежат на выпуклой оболочке, то $f(S) = 1$. Предположим противное. Тогда помимо пояса, совпадающего с выпуклой оболочкой, найдется еще хотя бы один пояс. Он содержит звено AB , являющееся диагональю выпуклой оболочки. Прямая, содержащая AB , делит плоскость на две полу平面, в каждой из которых есть точки S . Точки одной полуплоскости не могут быть соединены с точками другой, так как иначе они пересекут AB . Значит, пояс не может быть замкнутым. Противоречие.

Теперь докажем, что если $f(S) = 1$, то все точки лежат на выпуклой оболочке. Предположим противное. Внутри выпуклой оболочки есть точка A из множества S . Рассмотрим включающие пояса вокруг A . Их $n - 1 > 1$, так как A лежит внутри выпуклой оболочки. Противоречие.

Решение пункта в)

Воспользуемся построением из решения второй части пункта б). Для n точек в случае, когда есть точка внутри выпуклой оболочки, оно дает оценку $f(S) \geq n - 1$.

Докажем, что если внутри выпуклой оболочки только одна точка, то $f(S) = n - 1$. Обозначим через X точку внутри выпуклой оболочки. Она соединена с двумя точками A и B из выпуклой оболочки, причем соседними. Иначе пояс самопересекающийся, так как звено, соединяющее части пояса, составленные из групп точек между A и B , обязано пересечь AXB . Каждый из соседей в свою очередь может быть соединен только со своими соседями, иначе пояс самопересекающийся из тех же соображений. Получаем, что всевозможные построения дают множество включающих поясов вокруг X . Значит, их $n - 1$.

Решение пункта г)

Пусть внутри выпуклой оболочки лежат точки P и Q данного множества. Рассмот-

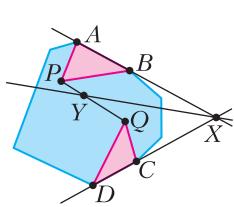


Рис. 14

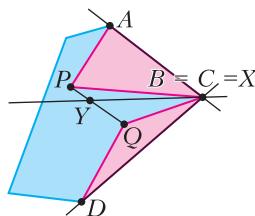


Рис. 15

рим две произвольные стороны AB и CD выпуклой оболочки. На рисунке 14 изображен случай, когда у этих двух сторон нет общей вершины, на рисунке 15 – когда есть. Количество способов их выбирать равно $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, так как в выпуклой оболочке $n-2$ отрезка.

Покажем, что можно в выпуклой оболочке сделать хотя бы одно из двух:

1) заменить AB на отрезки AP и BP , а CD на отрезки CQ и DQ так, что получится многоугольник (т.е. не будет самопересечений),

2) заменить AB на отрезки AQ и BQ , а CD на отрезки CP и DP так, что получится многоугольник.

Пусть X – точка пересечения прямых AB и CD , а Y – точка на отрезке PQ . Тогда отрезки AB и CD лежат в разных полуплоскостях относительно XY (их вершины могут лежать на XY , только если это их общая вершина, при этом она будет совпадать с X), и точки P и Q тоже. (Если точки X нет, из-за того что AB и CD параллельны, то будем рассматривать вместо прямой XY прямую, проходящую через Y и параллельную AB и CD .)

Сначала рассмотрим случай, когда P и Q не лежат на XY . Тогда если AB и P в одной полуплоскости, то отрезки AP и BP лежат в той же полуплоскости, а отрезки CQ и DQ – в другой. Поэтому отрезки AP , BP , CQ , DQ не пересекаются и возможно построение из пункта 1). Если же AB и Q в одной полуплоскости, то аналогично возможно построение из пункта 2).

Если же P лежит на XY , то и Q лежит на XY . Рассуждение выше работает и в этом случае, если у отрезков AB и CD нет общей вершины. Если же у них есть общая вер-

шина, то она совпадает с точкой X , но тогда получается, что точки X , P и Q из нашего множества коллинеарны, но мы рассматриваем только точки общего положения.

Доказательство завершено.

Замечание. Кажется, что может быть интересно подумать над следующим вопросом, на который у нас нет ответа.

Пусть внутри выпуклой оболочки k точек. Какие могут быть оценки на $f(S)$? Можно рассмотреть сначала маленькие значения k :

1) Верно ли, что если внутри выпуклой оболочки множества S **хотя бы** две точки, то существует квадратичная нижняя оценка на $f(S)$ (т.е. можно оценить $f(S)$ снизу многочленом второй степени)?

2) Верно ли, что если внутри выпуклой оболочки множества S **ровно** три точки, то существует кубическая нижняя оценка на $f(S)$?

Решение пункта д)

Рассмотрим сначала случаи $n \leq 5$. Нетрудно понять, что $F(3) = 1$, $F(4) \geq 2$, $F(5) \geq 2$, в то время как значение выраже-

ния $3 \cdot 2^{\frac{n-8}{3}}$ меньше 1 при $n=3$ и меньше 2 при $n=4$ и $n=5$, поэтому неравенство выполнено.

При $n \geq 6$ рассмотрим последовательные вложенные выпуклые оболочки, как в третьем решении пункта а). Пусть выбрано такое множество точек, что в первой оболочке содержится 3, 4 или 5 точек, а остальные $k-1$ выпуклых оболочек являются треугольниками (соответственно, n равняется $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, $k \geq 2$). Тогда вариантов выбрать первый отрезок не менее 3. При соединении выпуклых оболочек, как в третьем решении, способов выбрать отрезок в каждом треугольнике (в каждом из $k-1$ треугольников, кроме последнего) – два. Используя неравенство $3k+2 \geq n$, получим

$$F(n) \geq 3 \cdot 2^{k-2} \geq 3 \cdot 2^{\frac{n-8}{3}}.$$

Задача решена.

На самом деле, доказано, что функция $F(n)$ растет как b^n , где $4,642 \leq b \leq 56$. Известные результаты об этом можно прочитать в главе «Задачи о точках в общем положении» книги П.Брасса, У.Мозера, Я.Паха «Открытые проблемы дискретной геометрии» (МЦНМО, 2021), а также на сайте Erik Demaine: <https://erikdemaine.org/polygonization/>

Родственные задачи

1. Пусть даны многоугольник и точка P внутри него. Обязательно ли какая-то сторона многоугольника видна целиком из точки P ? А если точка P снаружи многоугольника?

2. На плоскости расположено несколько непересекающихся отрезков. Всегда ли можно соединить концы некоторых из них отрезками так, чтобы получилась замкнутая несамопересякающаяся ломаная?

3. Триангуляция множества точек – это плоский граф, где вершины это все точки множества, ребра это отрезки, соединяющие точки, а все грани, кроме внешней, это треугольники. Рассмотрим триангуляцию множества S . Верно ли, что любую триангуляцию множества S можно превратить в пояс удалением некоторых ребер?

4. Рассмотрим множество S точек общего положения. Рассмотрим всевозможные пояса. Пусть их больше одного. Может ли у них у всех быть общее звено?

5 (П.Кожевников, Кубок памяти А.Н.Колмогорова, 2013 г.). На плоскости дано конечное множество S из $n > 2$ точек общего положения (т.е. никакие три точки не лежат на одной прямой). Рассматриваются все многоугольники, множество вершин которых совпадает с S . Верно ли, что объединение всех таких многоугольников обязательно совпадет с выпуклой оболочкой множества S ?

МОНГОЛЬСКОЕ ПИСЬМО

(см. 2-ю с. обложки)

Можно видеть, что каждое слово записывается последовательностью знаков, расположенных на общей вертикальной черте. Два слова, начинающихся со звука **т**, начинаются с одного и того же

знака

Отсюда можно предположить, что письмо алфавитное и направление его – сверху вниз. Нетрудно установить, чему соответствуют некоторые знаки:



Согласные **л** и **т** и гласные **и** и **а** встречаются в условии задачи в двух вариантах записи:

в начале слова	в середине слова	в конце слова
т		
л		
и		
а		

(на конце слова **а** и **и** не различаются).

Гласный **у** во всех случаях записывается как . Если он в начале слова, то перед ним ставится знак , совпадающий со знаком для **а** в середине слова. Этот знак всегда ставится в начале слова, если оно начинается с гласного; если слово начинается с **а**, знак повторяется дважды.

Тогда **ö** записывается как

Задание 1

«Кризис» – кимурал, 2 – марка, 3 – алтай. Слово 2, по-видимому, означает «марка» (в монгольский язык это слово заимствовано в значении «почтовая марка»). Слово 3 означает Алтай (географический регион или Алтайские горы).

Задание 2

Сёри «стог»	аймурлал «испорченность»	итали «Италия»
----------------	-----------------------------	-------------------



КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Чтобы изучить какое-то событие в мире физических явлений, нужно прежде всего знать, где и когда оно произошло. Ответить на вопрос где? – значит указать место происшествия...

Артур Чернин

То, что трем точкам плоскости возможно сопоставить такие грузы, чтобы заданная четвертая точка оказалась их центром, ... привело меня к новому методу задания точек на плоскости.

Август Мёбиус

Нарисуем две пересекающиеся под прямым углом линии (оси координат) и будем задавать положение частицы... расстояниями от нее до каждой из осей.

Ричард Фейнман

...закон природы не позволяет нам знать и положение, и скорость частицы с любой точностью, которой нам хотелось бы.

Вerner Гейзенберг

Случилось это в фазовом пространстве Одной из многих замкнутых систем. Координата после долгих странствий Устала и измучилась совсем.

Лев Блюменфельд

А так ли хорошо знакомы вам координаты?

Ненароком – с раннего возраста. По крайней мере, с первых школьных лет, когда вы начинаете пользоваться тетрадями «в клеточку» и глобусом, расчерченным параллелями и меридианами. А еще – когда ищите место в кинозале либо на стадионе по указанным в билете числам, записываете шахматные ходы или отсчитываете километровые столбы вдоль дороги...

А позже узнаёте, что координаты – ключевой физический инструмент, что это числа, характеризующие положение точки на линии, на плоскости, на поверхности или в пространстве. И что системы координат бывают не только декартовы и полярные, но и косоугольные, сферические, цилиндрические, фазовые... Стоп!

Обойдемся сегодня теми из них, с которыми имеем дело в школьном курсе физики.

Вопросы и задачи

1. Какой древнейший астрономический прибор позволял определить широту места?

2. Чему равна высота Полярной звезды над горизонтом (в градусах) для жителей Северного полушария?

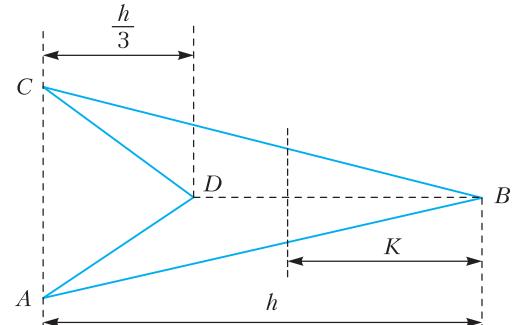
3. Связан ли пройденный путь с изменением координат движущегося тела?

4. Два тела A и C движутся в плоскости xy , причем их координаты изменяются со временем по законам: $x_A = 2t$, $y_A = 5t$ и $x_C = t + 1$, $y_C = t + 4$ (в единицах СИ). Встречаются ли эти тела?

5. Как следует расположить координатные оси и сколько их потребуется для определения положения настенного выключателя, если за точку отсчета принять:
а) угол комнаты у стены, где находится выключатель; б) точку на полу под выключателем?

6. Однородный стержень длиной l поставили на гладкую плоскость и отпустили. Как будет меняться горизонтальная координата центра тяжести стержня при его падении?

7. Какова координата x центра тяжести однородной плоскости фигуры $ABCD$, изображенной на рисунке? Известно, что



центр тяжести однородной пластины в форме треугольника находится на пересечении медиан, а масса пластины пропорциональна ее площади.

8. Изменяются ли при полете с включенными двигателями координаты центра тяжести самолета в системе отсчета, связанный с ним?

9. «Мерность» движения зависит от того, сколько координат изменяются с течением времени. Какова «мерность» движения точки по окружности радиусом R ?

10. Известны полярные координаты точки: $r = 3 \text{ м}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$. Определите ее декартовы координаты.

11. У искусственного спутника Земли остаются неизменными азимут и высота. Какой из этого можно сделать вывод о вращении Земли и параметрах движения спутника?

12. Почему северные сияния чаще наблюдаются в Канаде, чем, например, в Сибири, хотя эти регионы находятся примерно на одной географической широте?

Микроопыт

Попробуйте перенести лестницу-стремянку одной рукой. Как вы за нее возьметесь? Не подсказывают ли ваши действия способ определения центра тяжести лестницы?

Любопытно, что...

...древнегреческий ученый Аполлоний Пергский предвосхитил метод координат еще за 200 лет до новой эры. Несколько позже понятия широты и долготы ввел Гиппарх из Никеи, а математически точную их концепцию предложил Клавдий Птолемей уже во II веке.

...применив впервые в истории науки графическое представление движения, соответствующее современному методу координат, французский ученый XIV века Николай Орем установил закон равнопеременного движения.

...Декарт первым отождествил точку на прямой с числом, тем самым разив координатный метод, открывший глубокие связи между алгеброй и геометрией. Сам же термин «координаты» ввел в обращение немецкий ученый Готфрид Лейбниц в 1692 году.

...великий Архимед, считавшийся основателем рациональной теории центров тяжести, обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью их свойств, став тем самым родоначальником так называемого барицентрического метода.

...в середине XIX века немецкий ученый Август Мёбиус предложил новую, не похожую ни на декартову, ни на полярную, систему координат – барицентрическую, оказавшуюся богатой приложениями к геометрии, химии, генетике, статистике, электростатике и т.д.

...крупный вклад в учение о статике внес ученик Галилея Эванджелиста Торричелли, которому принадлежит формула для координаты центра тяжести твердого тела или плоской фигуры. Увы, позже ни в одном учебнике эту формулу не связывали с именем ученого.

...в основе теории относительности лежит неразрывная связь пространства и времени. Поэтому естественно считать четвертой координатой какого-либо события, помимо трех пространственных, момент времени, когда это событие происходит. Такое четырехмерное пространство называется пространством Минковского.

...в 2003 году две команды строителей, возводившие навстречу друг другу мост через реку между Германией и Швейцарией, не смогли состыковать его половины. Оказалось, что немцы отсчитывали вертикальную координату моста от Северного моря, а швейцарцы – от Средиземного, хотя разница в их уровнях составляла 27 сантиметров.

...получить информацию о точном местоположении объекта позволяет глобальная система позиционирования. По принимающим от спутников на орбите вокруг Земли радиосигналам приемник вычисляет расстояние до них, а затем – и свои координаты.

Что читать в «Кванте» о координатах

(публикации последних лет)

1. «Метод координат: решения без лишних вычислений» – 2017, №8, с.25;
2. «Картография и кривизна» – 2019, №9, с.9;
3. «Фазовые диаграммы колебательных систем» – 2021, №9, с.29;
4. «Конфигурационное и импульсное пространства» – 2023, №6, с.40.

Материал подготовил А. Леонович

Задачи

- 1.** Белая, серая, черная, рыжая и желтая мышки едят сыр только своего цвета. Федя знает, что мышки живут в пяти норках вдоль стены, при этом



белая мышка живет рядом с серой и рядом с черной, а рыжая и серая не живут рядом. Федя положил перед норками сыр: перед первой (самой левой) норкой — серый, перед второй — рыжий, перед третьей — белый, перед четвертой — желтый, перед пятой — черный. В результате ни один кусок не оказался съеден. Для каждой норки запишите, какая мышка в ней живет.

Т.Казицына

- 2.** Из прямоугольника 3×6 вырезали одну клетку. «Пришейте» эту клетку в другом месте так, чтобы получилась

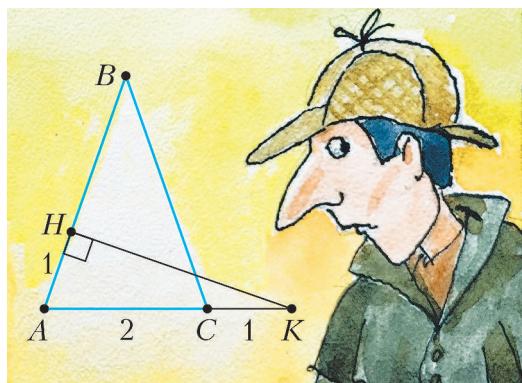


Эти задачи предлагались на Математическом празднике.

фигура, которую можно разрезать на две одинаковых.

Т.Казицына

- 3.** На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку K так, что $CK = 1$. Точка



H на стороне AB такова, что CH и AB перпендикулярны, $AH = 1$. Найдите периметр треугольника ABC , если $AC = 2$.

Т.Голенищева-Кутузова

- 4.** В школе все ученики — отличники, хорошисты либо троечники. В круг встали 99 учеников. У каждого среди трех соседей слева есть хотя бы один троичник, среди пяти соседей справа — хотя бы один отличник, а среди четырех соседей — двух слева и двух справа — хотя бы один хорошист. Может ли в этом круге быть поровну отличников и троичников?

А.Шаповалов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Воздушный шар

А.ЛИБЕРМАН

Допустим, что Земля представляет собой однородный недеформируемый шар. Вокруг Земли находится воздух, удовлетворяющий условиям идеального газа, который не оседает на поверхность Земли и не улетучивается в космическое пространство, благодаря равенству энергии гравитации Земли и средней кинетической энергии его молекул. Кинетическую энергию молекулы воздуха получают от солнечного излучения.

На поверхности Земли находится шар. Диаметр шара неизмеримо мал в сравнении с диаметром Земли, но неизмеримо велик в сравнении со средней длиной свободного пробега молекул воздуха, находящихся у ее поверхности. Центр масс шара совпадает с его геометрическим центром. Оболочка недеформируема. Внутри шара – вакуум, а снаружи воздух (вот почему статья называется «Воздушный шар»).

В данной ситуации на шар действуют две силы: гравитационная и выталкивающая. (Шарообразная форма и центральная симметрия выталкиваемого тела взяты для удобства – выталкивающая сила от этих факторов не зависит.) Эти силы приложены к центру шара и направлены по линии, соединяющей центры Земли и шара. Гравитационная сила направлена к центру Земли, выталкивающая – в противоположную сторону. Гравитационная сила равна по величине

$$F_{\text{гр}} = G \frac{M \rho_{\text{ш}} V}{R^2},$$

выталкивающая сила, или сила Архимеда –

$$F_A = G \frac{M \rho_0 V}{R^2},$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – радиус Земли, $\rho_{\text{ш}}$ – плотность шара, V – объем шара, ρ_0 – плотность воздуха у поверхности Земли. Причиной возникновения выталкивающей силы является то, что давление, оказываемое на газ

(жидкость), распространяется без изменений и равномерно во всех направлениях. Это – закон Паскаля. Значит, давление, оказываемое воздухом на нижнюю половину шара, больше, чем на верхнюю. Соответственно, сила давления воздуха на нижнюю половину шара больше, чем на верхнюю. Положительная разность величин этих сил и есть выталкивающая сила.

Из выражений для величин гравитационной и выталкивающей сил следует, что при $\rho_{\text{ш}} < \rho_0$ направление равнодействующей сил \vec{F}_A и $\vec{F}_{\text{гр}}$ совпадает с направлением $\vec{F}_{\text{гр}}$. Это означает, что шар будет двигаться в направлении радиального удаления от поверхности Земли. Но при удалении от поверхности Земли плотность воздуха уменьшается. Зависимость плотности от высоты выражается формулой

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где h – высота от поверхности Земли, m – масса «молекулы» воздуха, $g = G \frac{M}{R^2}$ – ускорение свободного падения на поверхности Земли, k – постоянная Больцмана, T – температура поверхности (воздуха на поверхности) Земли.

При $\rho(h) = \rho_{\text{ш}}$ силы станут равными. Значит, движение шара прекратится. Конечно, по инерции шар проскочит положение равновесия, но тут же подпадет под превалирующее действие гравитационной силы и начнет двигаться обратно, снова по инерции проскочит положение равновесия, подпадет под превалирующее действие выталкивающей силы и так до бесконечности, но с уменьшающейся амплитудой. Иными словами, асимптотически приближаясь к положительному равновесию. Определим значение h , при котором движение шара прекратится. Для этого запишем равенство сил в виде

$$\rho_{\text{ш}} = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Решение этого уравнения относительно h дает

$$h = \ln \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}} \cdot \frac{kT}{mg},$$



или, обозначив $\delta\rho = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}}$,

$$h = \ln \delta\rho \cdot \frac{kT}{mg}.$$

Но при удалении от поверхности Земли температура воздуха снижается. Примем, что снижение температуры линейно зависит от радиального удаления, т.е. от высоты, а зависимость температуры от высоты имеет вид

$$T - \Delta Th,$$

где ΔT – изменение температуры на единицу длины. Тогда выражение для h примет вид

$$h = \ln \delta\rho \cdot \frac{k(T - \Delta Th)}{mg}$$

и результат решения этого уравнения относительно h можно будет записать в виде

$$h = \frac{\ln \delta\rho \cdot kT}{mg + \ln \delta\rho \cdot k\Delta T}.$$

Произведем расчет высоты, на которой движение шара прекратится, для реальных земных условий. Линейная зависимость температуры от высоты (радиального удаления) сохраняется до верхней границы тропосфера, т.е. как минимум до 10 км (от полюса Земли). Следовательно, если в результате расчета для взлета шара с полюса значение h окажется большим, чем 10 км, его нельзя будет считать верным. Вначале выясним каково отношение ускорения свободного падения на этой высоте к ускорению

g на поверхности Земли. Соответствующая формула имеет вид

$$\delta g = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2.$$

После подстановки численных значений ($R = 6357$ км, $h = 10$ км) получаем

$$\delta g = 0,997.$$

Таким образом, ускорение свободного падения для наших условий можно оставить равным g . Теперь можно сделать расчет. Примем (для удобства) $\delta\rho = e$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T = 273$ К (средняя температура для Северного полюса), $m = 4,82 \cdot 10^{-26}$ кг, $g = 9,82 \text{ м/c}^2$, $\Delta T = 6,5 \cdot 10^{-3}$ К/м. В результате получим

$$h = 6692 \text{ м} \approx 6,7 \text{ км.}$$

Этот результат не вышел за пределы зоны линейной зависимости снижения температуры от высоты, так что его можно считать верным.

Поставим обратную задачу: определим, при каком $\delta\rho$ шар на Северном полюсе поднимется до верхней границы тропосферы, т.е. до высоты $h = 10$ км. Из формулы

$$h = \ln \delta\rho \cdot \frac{k(T - \Delta Th)}{mg}$$

получим

$$\ln \delta\rho = \frac{hmg}{k(T - \Delta Th)},$$

откуда

$$\delta\rho = e^{\frac{hmg}{k(T - \Delta Th)}} = 5,2.$$

Региональный этап

LVII Всероссийской олимпиады

ШКОЛЬНИКОВ по физике

Теоретический тур

7 класс

Задача 1. Робот-пылесос

Экспериментатор Глюк приобрел робот-пылесос iBot PylSosung (рис. 1) и решил его опробовать. Оказалось, что робот может качественно убрать пустую комнату в квартире площадью 250000 [...] за 30 [...]. Для того чтобы убраться качественно, пылесос проходит по каждому участку комнаты ровно 3 раза. Глюк посчитал, что средняя скорость пылесоса при уборке равна 50000 [...]. Однако он забыл указать, в каких единицах записаны эти величины. Опираясь на ваш жизненный опыт, восстановите пропущенные единицы измерения, а также найдите ширину (диаметр) пылесоса. Глюк точно помнил, что расстояние и площадь он измерял, соответственно, в обычных и квадратных миллиметрах, сантиметрах, метрах или километрах, а время – в секундах, минутах или часах. Площадью мертвых зон комнаты (мест, в которые пылесос не может добраться, например углов) можно пренебречь.

А. Евсеев

Задача 2. Час пик

В часы пик на движущемся вверх с неизвестной скоростью v эскалаторе метрополитена на каждой ступеньке находятся по два человека. Справа люди просто стоят, а слева – поднимаются с неизвестной постоянной скоростью v . Человек, стоящий справа, подсчитал, что за время его подъема по эскалатору слева от него успевают пройти N_1 людей. Человек, идущий по эскалатору, подсчитал, что за время его подъема он проходит мимо N_2 стоящих людей.



Рис. 1

1) Что больше: N_1 или N_2 ?

2) Сколько людей N одновременно находятся на эскалаторе? Ответ необходимо выразить через величины N_1 и N_2 .

Д. Рубцов

Задача 3. Рекорды скорости

Семиклассник Стас тренируется бегать на длинные дистанции. Во время пробежки смартфон следит за положением Стаса при помощи сигнала GPS и рассчитывает темп бега T в минутах на километр. После окончания пробежки смартфон показывает график зависимости темпа бега от расстояния s , которое пробежал спортсмен с момента старта (рис. 2). С помощью графика определите следующее.

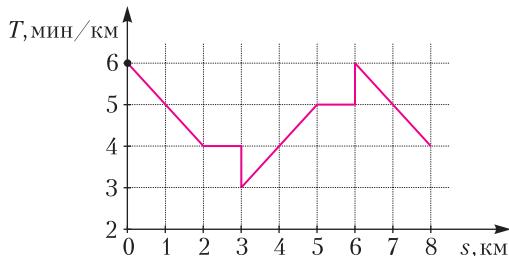


Рис. 2

1) Чему равнялись максимальная и минимальная скорости во время пробежки? Выразите эти скорости в километрах в час.

2) За какое минимальное время Стас пробегал участок длиной в один километр? Участок может начинаться в любой части дистанции.

3) За какое минимальное время Стас пробегал участок длиной в пять километров? Участок может начинаться в любой части дистанции.

Н. Богословский

Задача 4. Консервированные снежки

У Бабы Яги в школе никогда не было уроков физики, но были уроки домоводства и огромное желание заготовить на лето снеж-

ки. Помня школьные уроки, она решила воспользоваться рецептом по засолке огурцов. Зимой Баба Яга слепила очень плотные снежки, которые снаружи покрыла тонкой корочкой льда. Этими снежками она до краев наполнила березовую кадушку объемом $V = 12 \text{ л}$, масса снежков при этом оказалась $m_1 = 4 \text{ кг}$. Все пустоты между снежками она засыпала поваренной солью, затем залила кадушку доверху холодной водой и выставила ее на улицу. На следующий день она с удивлением обнаружила в кадушке только очень соленую воду. Известно, что в кадушку помещается $m_2 = 6 \text{ кг}$ плотно утрамбованного снега, плотность которого совпадает с плотностью снега в снежках. Считайте, что за время заполнения кадушки вода проникает между крупинками соли, но ледяная корочка предохраняет снежки от намокания. Консервирование снежков происходит быстро, и соль не успевает прореагировать со снежками. При растворении соли в воде объемы воды и соли складываются. Поваренная соль, купленная Бабой Ягой, была насыпана в пачки размерами $18 \times 10 \times 6 \text{ см}$ и массой $m_{\text{п}} = 1 \text{ кг}$. Плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, плотность кристаллической поваренной соли $\rho_c = 2150 \text{ кг}/\text{м}^3$. Массой и объемом ледяной корочки снежка можно пренебречь.

- 1) Определите насыпную плотность $\rho_{\text{нас}}$ поваренной соли.
- 2) Какая масса m_c соли была насыпана в кадушку?
- 3) Какой объем $V_{\text{в}}$ занимает соленая вода?
- 4) Чему равна масса M соленой воды в кадушке?
- 5) Чему равна плотность ρ_k соленой воды в кадушке?

Н.Богословский

8 класс

Задача 1. Чертити

В момент времени $t = 0$ катер обогнал свободно плавающий по течению реки плот. В момент времени τ катер поравнялся с теплоходом, идущим против течения реки, а в момент времени 2τ катер быстро развернулся и поплыл с той же скоростью (относительно реки) в обратном направлении. При этом через некоторое время после разворота катер встретил плот, а еще через такое же время

второй раз поравнялся с теплоходом. В какой момент времени теплоход встретился с плотом? Чему равно отношение собственных скоростей катера и теплохода?

Д.Рубцов

Задача 2. Два автомобиля

Автомобильный мост установлен на опорах A и B (рис. 3). Под опорой A расположен

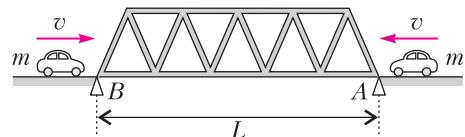


Рис. 3

датчик, снимающий зависимость силы реакции опоры N от времени t . В начальный момент на мост со стороны опоры A со скоростью 18 км/ч въезжает небольшой легковой автомобиль. Спустя время Δt со стороны опоры B на мост с той же скоростью въезжает другой такой же автомобиль. Из-за нестабильной связи с датчиком на графике зависимости $N(t)$ удалось получить лишь несколько точек (рис. 4).

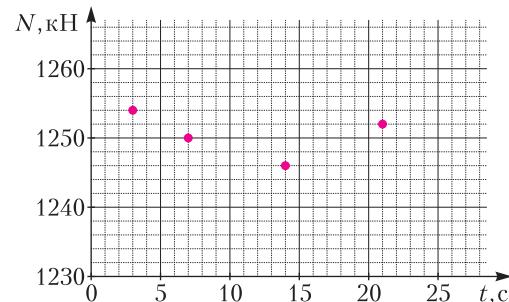


Рис. 4

- 1) Восстановите график до 30-й секунды.
- 2) Определите длину L моста, время Δt , массу M моста, массу m автомобиля.

Примечание. Мост можно считать однородным, а размеры автомобиля пренебрежимо малыми. Другие участники движения на мосту за время наблюдения не появлялись. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ Н}/\text{кг}$.

А.Евсеев

Задача 3. Сообщающиеся сосуды

Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения S соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте $\frac{H}{4}$ от их dna (рис. 5). В сосуды налили жидкость

плотностью ρ_1 . После этого в левый сосуд добавили жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$, высота столба которой оказалась равной h . Высота столба жидкости в правом сосуде равна H , а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна $\frac{3H}{2}$. Жидкости не смешиваются.

1) Чему равна плотность ρ_2 , если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

2) Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосудах в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

Н.Богословский

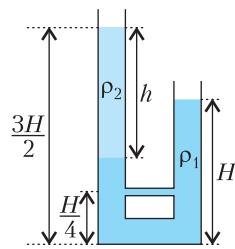


Рис. 5

3) Чему равна плотность ρ_2 , если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

2) Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосудах в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

Н.Богословский

Задача 4. Нагреватель

См. задачу Ф2801 «Задачника «Кванта».

9 класс

Задача 1. Лифт

Лифт начинает движение из состояния покоя и останавливается на два этажа выше через время $t_2 = 5,0$ с, а на четыре этажа выше – через $t_4 = 8,0$ с. Лифт, не останавливаясь между этажами, преодолевает необходимую дистанцию за минимально возможное время, при этом модули его скорости и ускорения не превышают некоторых неизвестных значений v_0 и a_0 соответственно. Высота всех этажей одинакова, временем открытия и закрытия дверей можете пренебречь. Используем без доказательства тот факт, что при подъеме на два этажа вверх лифт достигает предельного значения скорости v_0 .

1) За какое время t_3 лифт поднимется на три этажа?

2) За какое время t_1 лифт поднимется на один этаж?

Д.Рубцов

Задача 2. Сообщающиеся сосуды

См. задачу 3 для 8 класса.

Задача 3. Эквилибр

На неоднородном рычаге, установленном на опору, стоит вертикальный сосуд прямоугольного сечения (рис. 6). Слева рычаг привязан тонкой невесомой нитью к жесткому основанию. При этом нить не натянута, рычаг горизонтален. В сосуд кладут кусок льда, после чего нагревают его с постоянной мощностью (тепловыми потерями, а также теплоемкостью сосуда можно пренебречь). Одновременно с этим строят график зависимости силы натяжения нити от времени (рис. 7;

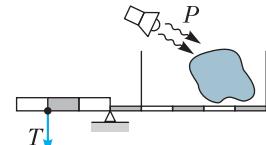


Рис. 6

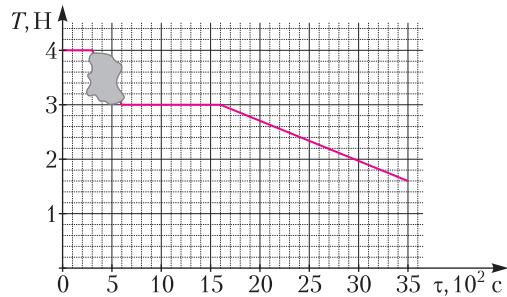


Рис. 7

начало графика совпадает с моментом начала нагрева). Один из участков графика утерян по неосторожности экспериментатора (на него пролилась тушь). Определите, что произошло в конце утерянного участка графика (момент перелома). А также найдите:

- 1) массу m куска льда;
- 2) мощность P , с которой нагревали содержимое сосуда;
- 3) начальную температуру t_0 льда.

Отметки на рычаге делят его на 8 равных по длине частей. Боковая грань сосуда параллельна плоскости рисунка. Известны удельная теплоемкость льда $2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда $330 \text{ кДж}/\text{кг}$, удельная теплота парообразования воды $2300 \text{ кДж}/\text{кг}$.

А.Евсеев

Задача 4. Запутанная схема

Школьник из трех одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров собрал

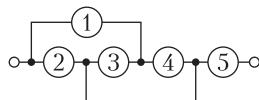


Рис. 8

и забыл, какие приборы были установлены в каком месте схемы, но записал показания приборов. Вольтметры показывали 2 В, 12 В и 14 В, показания амперметров были 200 мА и 520 мА.

1) Определите, на каких местах в схеме стояли амперметры, а на каких – вольтметры.

2) Определите внутренние сопротивления вольтметров и амперметров.

Н.Богословский

Задача 5. Архив Снеллиуса

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической системы (рис. 9). От времени чернила выцвели, и на чертеже осталась видна только ход параллельных лучей через две тонкие линзы и точка L , принадлежащая плоскостям обеих линз.

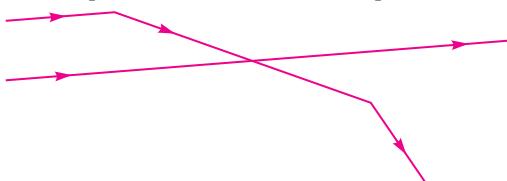


Рис. 9

лись видны только ход параллельных лучей через две тонкие линзы и точка L , принадлежащая плоскостям обеих линз.

1) Восстановите построением положения плоскостей обеих линз.

2) По имеющимся данным определите тип каждой линзы (собирающая или рассеивающая).

3) Найдите положения оптических центров и главных фокусов линз.

Примечание. Принципы построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры считайте известными. Указанные геометрические построения не доказывайте.

А.Вергунов

10 класс

Задача 1. Хитрая пушка

Скорость вылета снаряда из игрушечной пушки зависит от угла с вертикалью, под которым производится выстрел. Особенность

электрическую цепь, схема которой показана на рисунке 8. Школьник был не очень внимательным

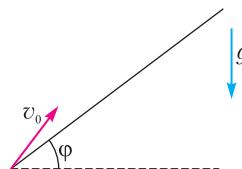


Рис. 10

этой зависимости состоит в том, что угловая скорость вращения вектора скорости снаряда сразу после выстрела не зависит от угла, под которым произведен выстрел, и равна $\omega = 0,5$ рад/с. Пушка располагается у подножия длинной горки, образующей угол $\phi = 30^\circ$ с горизонтом (рис. 10). Траектория снаряда лежит в плоскости рисунка и такова, что в определенный момент снаряд падает на горку. Сопротивлением воздуха, а также размерами пушки и снаряда можно пренебречь. Чему равно максимально возможное время полета снаряда t_{\max} до падения на горку?

А.Умин

Задача 2. Шайбами по барабану

На гладкой горизонтальной поверхности лежит большой твердый цилиндрический барабан массой M и радиусом R (рис. 11). Две одинаковые маленькие, но тяжелые

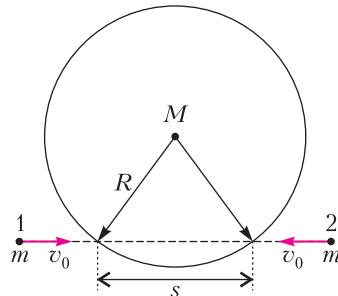


Рис. 11

шайбы массами $m = 2M$ скользят по поверхности с одинаковыми неизвестными скоростями v_0 вдоль одной прямой, пересекающей барабан. Расстояние между точками пересечения этой прямой с боковой поверхностью барабана равно s . Шайба 1 сталкивается с барабаном на мгновение раньше, чем с ним столкнулась бы шайба 2, если бы не было столкновения с шайбой 1. Если расстояние s равно $s_1 = R/2$, то после всех соударений шайбы с барабаном скорость последнего оказалась равной u_1 . Считайте известным, что во всех случаях шайбы друг с другом не сталкиваются. Трения между шайбами и барабаном нет, барабан никогда не отрывается от поверхности, а все их столкновения являются упругими и настолько быстрыми, что

барабан никогда не контактирует с обеими шайбами одновременно.

1) Определите величину скорости v_0 налетавших шайб.

2) Чему будет равна скорость барабана u_2 , если расстояние s изменить до значения $s_2 = R$?

А.Уймин

Задача 3. Загогулина

Изогнутая в трех местах металлическая трубка состоит из четырех прямых параллельных участков: трех – одинаковой длины l и четвертого, длина которого существенно больше (рис. 12). Длина изогнутых участков трубы мала по сравнению с l , их объемом можно пренебречь. Площадь внутреннего сечения трубы S , поперечные размеры трубы также много меньше l . Трубка установлена вертикально открытыми концами вверх. В самое длинное колено начинают медленно наливать воду. Плотность воды ρ , атмосферное давление p_0 , ускорение свободного падения g . Все процессы в трубке протекают при постоянной температуре. Капиллярными эффектами и влиянием колебаний уровня воды можно пренебречь.

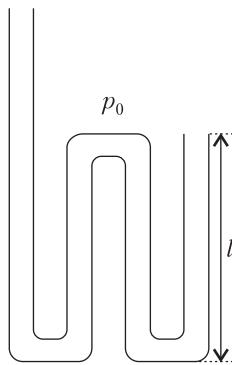


Рис. 12

1) До какой высоты вода заполнит левое колено трубы к моменту, когда она начнет вытекать из крайнего правого колена? Считайте, что из левого колена вода не вытекает.

2) Какой объем воды будет находиться в трубке в этот момент?

А.Аполонский

Задача 4. Источник стабильности

См. задачу Ф2802 «Задачника «Кванта».

Задача 5. В фокусе внимания

См. задачу Ф2804 «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Вспоминая 90-е

Вспоминая 1997 год, теоретик Баг продолжил исследования следующей ситуации (рис. 13). Доска a лежит на такой же доске b . Они, как единое целое, движутся с неко-

торой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности и сталкиваются с такой же доской c , верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. Трения между досками a и b нет, а трение между досками a и c есть. При ударе доски b и c прочно склеиваются. Длина досок равна L . Доска a перестала перемещаться относительно досок b и c в момент, когда она целиком расположилась на доске c . Найдите перемещение Δx доски a от момента соударения до момента прекращения относительного движения досок.

В.Слободянин

Задача 2. Нагревание насосом

Сосуд с теплоизолирующими стенками заполнен атмосферным воздухом при температуре T_0 и давлении p_0 . Через малый клапан в стенке сосуда с помощью насоса, соединенного с клапаном, в сосуд начинают закачивать воздух. Малая порция воздуха из атмосферы поступает в насос, сжимается, после чего в результате теплообмена с окружающей средой охлаждается до температуры T_0 , при этом после охлаждения давление воздуха в насосе всегда незначительно выше, чем в сосуде. Затем открывается клапан, и порция воздуха из насоса поступает в сосуд при практически постоянных давлении и температуре, сразу после чего клапан закрывается. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Теплопотерями за время, в течение которого клапан открыт, можно пренебречь. Считайте, что в процессе закачивания давление воздуха в насосе всегда больше, чем давление воздуха в сосуде, а газ, находящийся в сосуде, из него никогда не вытекает. В результате многократного повторения описанного процесса давление в сосуде повышается до p_1 .

1) Во сколько раз изменилось количество вещества газа в сосуде?

2) Определите температуру T_1 в сосуде.

А.Уймин

Задача 3. Равновесие в полях

Нерастяжимая невесомая нить длиной L заряжена равномерно по длине положительным зарядом с линейной плотностью λ . Один конец нити закреплен, а к другому

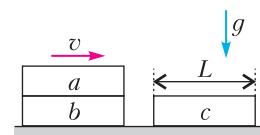


Рис. 13

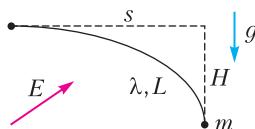


Рис. 14

в положении равновесия система расположилась таким образом, что касательные к нити в точке крепления и в месте расположения груза оказались горизонтальной и вертикальной соответственно. Груз расположился на расстоянии H ниже и на расстоянии s правее точки крепления. Собственным электростатическим полем зарядов нити можно пренебречь. Ускорение свободного падения равняется g . Определите величину напряженности E электростатического поля.

А.Умин

Задача 4. Полный улет

См. задачу Ф2803 «Задачника «Кванта».

Задача 5. Троеточие

При очередном разборе архива Снеллиуса на глаза одному из специалистов попался небольшой рисунок с тремя точками A , B и C , лежащими на одной прямой MN (рис. 15). Из комментариев к рисунку следовало, что

прикреплен маленький груз массой m (рис. 14). Систему поместили в однородное электростатическое поле. В

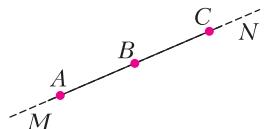


Рис. 15

прямая MN проходила через оптический центр тонкой линзы под небольшим углом к главной оптической оси,

а точки A , B и C обладали любопытным свойством: при помещении точечного источника света в любую из них изображение оказывалось в одной из двух других точек. Также было указано, что расстояния между точками A и B и между точками B и C , в которые помещали источник, были одинаковы и равнялись l , а модуль фокусного расстояния линзы был равен F .

1) Определите, о собирающей или рассеивающей линзе шла речь.

2) С какой стороны (слева или справа) от точки B располагался оптический центр линзы?

3) На каком расстоянии от точки B располагался оптический центр линзы?

4) Под каким углом к прямой MN наклонена главная оптическая ось линзы?

А.Аполонский

Публикацию подготовил В.Слободянин

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Политехническая олимпиада школьников

В 2024 году в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого состоялась очередная Политехническая олимпиада школьников по математике. Олимпиада состояла из двух туров. Отборочный тур был проведен в форме интернет-сессии, участники имели одну попытку продолжительностью 180 минут. Заключительный тур

проводился в очном формате, на решение задач было отведено 180 мин.

Математика Отборочный тур

- Найдите остаток от деления $7^{5^{9^3}}$ на 9.
- В арифметической прогрессии a_n с ненулевой разностью сумма членов с пятого по девятый равна 25. Найдите номер члена, равного 5.

3. Последовательность x_n задана следующими соотношениями: $x_1 = 1$, $x_n = -\frac{2}{2 + x_{n-1}}$ при $n > 1$. Найдите сумму первых 34 членов последовательности.

4. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения

$$2 \sin \pi x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

В ответе укажите произведение этого решения на 12.

5. Из двух городов навстречу друг другу отправились поезда. Пройдя треть пути, первый поезд остановился на 45 минут. Возобновив движение, он через 6 минут встретил второй поезд. Поезда прибыли в пункты назначения одновременно. Сколько минут был в пути второй поезд?

6. Сколько целых решений имеет неравенство

$$\sqrt{3 - \sqrt{5 - x}} < \sqrt{1 - x}?$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^{\log_2 y} + y^{\log_4 x} = 3, \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

В ответе запишите $x + y$.

8. В прямоугольный треугольник с катетами $9\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$ вписана окружность. Найдите расстояние от ее центра до вершины прямого угла.

9. Правильная четырехугольная пирамида имеет боковое ребро длины $3\sqrt[6]{3}$. Найдите наибольшее возможное значение объема этой пирамиды.

10. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left|2x^2 - 3x\right| = 2 + \frac{ax}{3}$$

имеет ровно три решения? В ответе укажите сумму всех таких a .

Заключительный тур

1. Сколько двузначных натуральных чисел не делятся ни на 6, ни на 15?

2. Из пункта A в пункт B ведет тропа, представляющая собой последовательность горизонтальных участков, подъемов и спусков с уклоном в 30° . Пешеход преодолевает

подъем, горизонтальный участок и спуск со скоростями 4 км/ч, 6 км/ч и 7 км/ч соответственно. Оказалось, что путь из A в B занимает на 9 минут больше, чем обратно. На сколько метров над уровнем моря пункт B выше, чем A ?

3. Сколько целых решений имеет уравнение

$$\sin \frac{\pi x}{6} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{6} = \sqrt{3}$$

на промежутке $[0; 50)$?

4. Боковые грани правильной треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники. Найдите сторону основания пирамиды, если радиус вписанного в нее шара равен $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

5. Какое наименьшее значение принимает наибольшее из чисел x , y , $\frac{4}{x+y}$ при положительных x и y ?

6. Окружность, вписанная в треугольник, последовательно делит одну из его медиан на отрезки, имеющие длины $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ соответственно. Найдите длину большей стороны треугольника.

7. На клетчатой бумаге нарисованы два многоугольника: прямоугольник 258×3 без двух единичных клеток, примыкающих к противоположным вершинам, и прямоугольник 258×3 без двух единичных клеток, примыкающих к вершинам наибольшей стороны. Число способов разрезать по линиям клетчатой бумаги первый и второй многоугольники на прямоугольники 2×1 обозначим a и b соответственно. Найдите $a - b$.

8. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой и при любых вещественных x и y

$$f(x+y) - (f(x))^2 = e^x (f(x) + f(y)).$$

Найдите все такие функции.

9. Решите уравнение

$$(5-x)(6-x)(\sqrt{x} + \sqrt{4-x}) = 4.$$

10. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-a}, \\ x = \sqrt{y-a} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Публикацию подготовили А.Моисеев,
А.Одинцов, С.Преображенский

Физический смысл уравнений, характеризующих механические процессы

Б. МУКУШЕВ

Известно, что при решении большинства физических задач математические вычисления являются последним этапом. На этом этапе рассматриваются математические уравнения (или системы уравнений) и находятся их решения. Эта часть, как правило, называется *математическим этапом* решения физической задачи. Кажется, что при выполнении этого этапа нет необходимости обращаться к *физическому осмыслинию* полученных математических уравнений. Оказывается, это не так.

Следующие примеры из механики наглядно показывают необходимость физического подхода к математическим этапам решения задачи.

Задача 1. Зависимость координаты тела, брошенного вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0 , от времени выражается в таком виде: $h = h_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}$.

Какой физический смысл имеет это уравнение при условии $h_0 + v_0t < \frac{gt^2}{2}$?

Решение. Высота h отсчитывается от поверхности Земли. Условие $h_0 + v_0t < \frac{gt^2}{2}$ означает, что $h < 0$. Это утверждение имеет физический смысл, например, в случае, если в месте падения тела находилась яма.

Задача 2. Шайбе сообщили скорость 10 м/с вдоль горизонтальной поверхности катка. Коэффициент трения между шайбой и лёгкой поверхностью катка $\mu = 0,1$, ускоре-

ние силы тяжести $g = 10 \text{ м/с}^2$. а) Через какое время после начала движения шайба окажется на расстоянии $x_1 = 40 \text{ м}$ от начальной точки движения? б) За какое время шайба проходит расстояние $x_2 = 60 \text{ м}$?

Решение. Шайба совершает прямолинейное равнозамедленное движение с ускорением $a = \mu g$. Запишем уравнение движения шайбы:

$$x = v_0t - \frac{at^2}{2} = v_0t - \frac{\mu gt^2}{2}.$$

а) При перемещении шайбы на расстояние $x_1 = 40 \text{ м}$ должно выполняться следующее уравнение:

$$x_1 = v_0t - \frac{\mu gt^2}{2},$$

откуда находим время:

$$t_{1,2} = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 4x_1\mu g}}{2\mu g} = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{2} \text{ с},$$

$$t_1 \approx 14,47 \text{ с}, t_2 \approx 5,53 \text{ с.}$$

Этот математический этап решения задачи нужно проанализировать с позиции механики. Иными словами, нужно определить, имеют ли физический смысл полученные ответы. Законы механики подсказывают, что когда тело движется равнозамедленно под действием силы трения, то в какой-то момент времени оно останавливается. Значит, только одно значение времени удовлетворяет уравнению движения шайбы. Найдем сначала значение общего времени движения шайбы. Конечная скорость шайбы выражается формулой $v = v_0 - \mu gt$. Тогда общее время движения шайбы до остановки равно $t = \frac{v_0 - v}{\mu g} = 10 \text{ с}$. Из двух значений времени физический смысл имеет только значение $t_2 = \frac{2v_0 - \sqrt{4v_0^2 - 4x_1\mu g}}{2\mu g} \approx 5,53 \text{ с}$. К этому моменту времени шайба проходит расстояние 40 метров, а через 10 секунд она останавливается.

б) Аналогично записываем уравнение координаты шайбы:

$$x_2 = v_0t - \frac{\mu gt^2}{2}$$

и находим время:

$$t_{3,4} = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 4x_2 \mu g}}{2\mu g} = \frac{20 \pm \sqrt{-80}}{2} \text{ с.}$$

Поскольку время не измеряется комплексными числами, это уравнение не имеет физического смысла. Шайба просто не доходит до точки x_2 и останавливается, пройдя расстояние $x = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 50$ м.

Задача 3. Баллистический пистолет выстреливает мячик под углом α к горизонту из-под укрытия (наклонная плоскость), которое расположено под углом β к горизонту (рис. 1). Пистолет находится в точке A на расстоянии d от основания укрытия (точка B). Траектория мячика лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости укрытия и пола. С какой скоростью должен выстрелить мячик, чтобы он лишь коснулся укрытия без отскока?

Решение. Выберем оси координат так, как показано на рисунке 1. Известно, что уравнение траектории мячика, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 , записывается в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Уравнение наклонной плоскости (укрытия) BC выглядит так:

$$y = kx + b, \text{ где } k = \operatorname{tg} \beta, b = d \operatorname{tg} \beta.$$

Для того чтобы мячик коснулся потолка, наклонная плоскость и траектория мячика должны иметь лишь одну точку пересечения — точку касания. Для нахождения координат этой точки запишем следующую систему уравнений:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

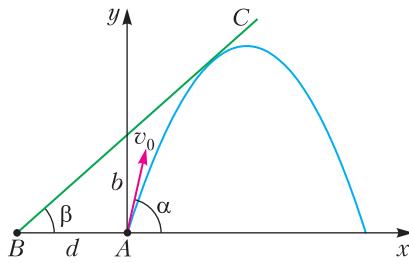


Рис. 1

$$y = x \operatorname{tg} \beta + d \operatorname{tg} \beta.$$

Решая эту систему, получим уравнение

$$x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + d \operatorname{tg} \beta = 0.$$

В этом уравнении имеются две неизвестные величины: координата точки касания x и начальная скорость мячика v_0 . С позиции математики, это уравнение нерешаемое. Подойдем к нему с позиции физики. Поскольку графики рассмотренных двух уравнений имеют только одну точку пересечения (касания), то имеется только один корень полученного квадратного уравнения. Только этот корень имеет физический смысл. Требование единственности решения квадратного уравнения означает, что его дискриминант равен нулю. Итак,

$$D = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2 - \frac{2dg \operatorname{tg} \beta}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gd \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}}.$$

Задача 4. Необходимо поразить самую верхнюю точку сферического здания, изображенного на рисунке 2, бросив мячик с наименьшей возможной скоростью. До поражения цели отскоки мячика от здания не допускаются. Радиус сферического сооружения 40 м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Нужно найти скорость мячика v_0 в момент поражения цели и наименьшую скорость v , с которой мячик был брошен с Земли.

Решение. Оптимальная траектория мячика касается поверхности сферы в какой-то боковой точке C здания, как показано на рисунке 2. Из соображений обратимости траектории рассмотрим ситуацию, когда мя-

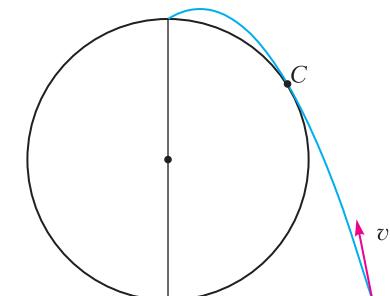


Рис. 2

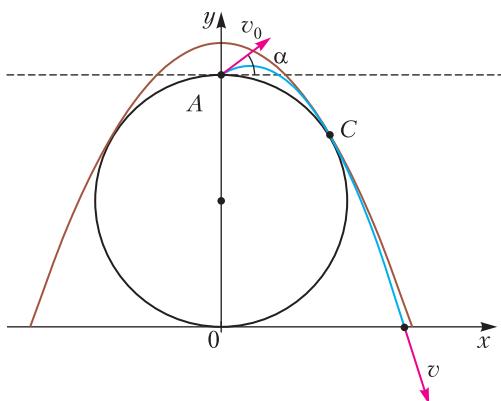


Рис. 3

Чик брошен с верхней точки здания с минимальной скоростью v_0 так, чтобы он не задел здание (пролетел бесконечно близко к нему) при падении на землю (рис. 3). Нам нужно найти точку касания окружности и оптимальной траектории мячика. Запишем уравнения окружности:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

и траектории мячика:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + 2R,$$

или

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2R.$$

С помощью последнего уравнения невозможно найти координаты точки пересечения с осью x , поскольку оно содержит четыре неизвестных: x , y , v_0 и α . Поэтому сначала исследуем уравнение поверхности границы простреливаемой области в условиях, когда из верхней точки сферы были брошены со скоростью v_0 одинаковые мячики под различными углами. Это уравнение известно (см., например, статью автора «Движение тел в гравитационном поле» в «Кванте» №9 за 2018 г.) и в нашем случае имеет такой вид:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R.$$

График такого уравнения (коричневая линия на рисунке 3) проходит через точку пересечения (касания) окружности и траектории мячика. Неизвестных кинематических параметров стало три: x , y и v_0 . Точка пересечения (касания) определяется следующей системой уравнений:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} + 2R.$$

Подставив y в первое уравнение, получаем биквадратное уравнение относительно x^2 :

$$x^4 \left(\frac{g}{2v_0^2} \right)^2 + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right) + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R \right) \frac{v_0^2}{g} = 0.$$

Его решение – это уравнение с двумя неизвестными x^2 и v_0 . Физический смысл имеет только один корень относительно x^2 , а именно

$$x^2 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right) \pm \sqrt{D}}{\frac{g^2}{2v_0^4}}.$$

Поскольку существует только одна траектория, обеспечивающая прохождения мячика через точку C , биквадратное уравнение имеет только один корень (x^2) и его дискриминант D равняется нулю:

$$D = \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \right) = 0.$$

Теперь приступим к ответам на поставленные в задаче вопросы. Из последнего равенства найдем

$$v_0^2 = \frac{gR}{2}, \quad v_0 \approx 14,0 \text{ м/с.}$$

В соответствии с законом сохранения энергии, на нулевом уровне (на земле) скорость мячика равна

$$v = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}} \approx 42,0 \text{ м/с.}$$

Таким образом, мы нашли значение наименьшей возможной скорости, необходимой для поражения самой верхней точки сферического здания, и скорость в момент поражения цели.

Задача 5. Сплошной однородный диск, который лежит на гладкой поверхности, может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси без трения. На краю диска стоит спортсмен. Система находится в покое. Спортсмен делает один прыжок по направлению против часовой стрелки, чтобы попасть на другой край диска. Когда спортсмен приземлится на вращающемся диске, то окажется в той точке, где он

прыгнул. При этом диск не успеет совершить полный оборот. Нужно найти отношение массы спортсмена к массе диска.

Решение. Если смотреть сверху, то картина должна выглядеть так, как на рисунке 4. Пусть за время прыжка спортсмен переме-

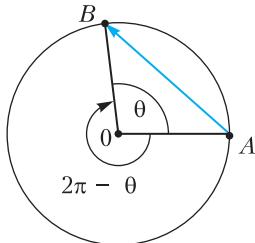


Рис. 4

щается на расстояние AB . Диск, отреагировав на силу при толчке спортсмена, должен начать вращаться в противоположном направлении с такой скоростью, чтобы к моменту приземления спортсмена повернуться на угол $2\pi - \theta$. В этом случае спортсмен приземлится на месте, где он прыгнул. Пусть v и α – начальная скорость и угол наклона этой скорости к горизонту соответственно, R – радиус диска. Тогда время полета $t = \frac{2v \sin \alpha}{g}$, а расстояние по горизонтали $s = vt \cos \alpha$. С другой стороны, $s = 2R \sin \frac{\theta}{2}$.

Отсюда найдем время прыжка спортсмена:

$$t = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2}}{v \cos \alpha}.$$

При толчке диск приобретает момент импульса, равный горизонтальной проекции момента импульса спортсмена:

$$I\omega = mvR \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2},$$

где ω – угловая скорость вращения диска, $I = MR^2/2$ момент инерции диска, M – его масса, m – масса спортсмена. По условию задачи $\omega t = 2\pi - \theta$, откуда

$$\omega = \frac{2\pi - \theta}{t}.$$

Исключив $\cos \alpha$, t , R из уравнения моментов, приходит к тому, что угол θ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{2m}{M} \sin \theta = 2\pi - \theta.$$

Введем обозначение $\frac{m}{M} = \gamma$ и получим урав-

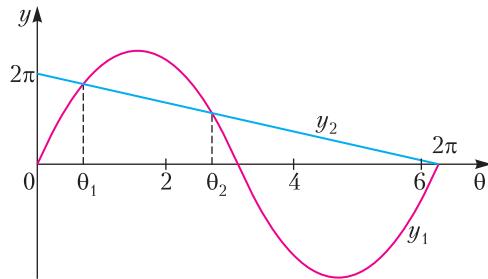


Рис. 5

нение с двумя неизвестными γ и θ :

$$2\gamma \sin \theta = 2\pi - \theta.$$

Математики считают, что это уравнение не имеет точного решения. График функции $y_1 = 2\gamma \sin \theta$ может иметь до трех точек пересечения с графиком функции $y_2 = 2\pi - \theta$ в интервале $[0; 2\pi]$ (рис. 5). Однако точки пересечения θ_1 и θ_2 не имеют физического смысла, поскольку отношение массы спортсмена к массе диска одновременно не может иметь двух различных величин $\gamma = \frac{2\pi - \theta}{2 \sin \theta}$.

Третье пересечение тоже не имеет физического смысла, поскольку при $\theta = 2\pi$ получается неопределенность: $\gamma = \frac{0}{0}$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет лишь случай, изображенный на рисунке 6. Физический смысл имеет только точка C , в которой график функции $y_2 = 2\pi - \theta$ касается графика функции $y_1 = 2\gamma \sin \theta$. Запишем уравнение касательной в точке C :

$$f(\theta) = f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + f(\theta_0) = 2\pi - \theta,$$

где θ_0 – абсцисса точки касания этой прямой

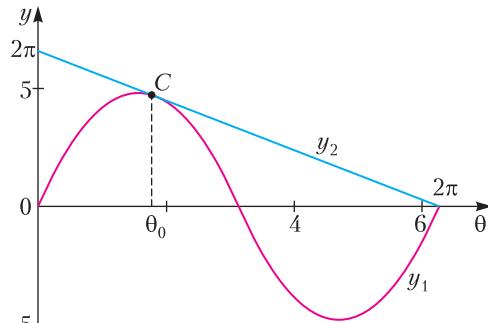


Рис. 6

и синусоиды. Известно, что

$$f(\theta_0) = 2\gamma \sin \theta_0 \text{ и } f'(\theta_0) = 2\gamma \cos \theta_0.$$

Для точки $(0; 2\pi)$

$$f(0) = 2\gamma(0 - \theta_0)\cos \theta_0 + 2\gamma \sin \theta_0 = 2\pi, \quad (1)$$

а для точки $(2\pi; 0)$

$$f(2\pi) = 2\gamma(2\pi - \theta_0)\cos \theta_0 + 2\gamma \sin \theta_0 = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \theta_0 - 2\pi.$$

Это трансцендентное уравнение. Численные методы решения уравнения дают следующий результат: абсцисса точки касания касательной к синусоиде равна $\theta_0 \approx 1,790$ рад. Тогда из уравнения (1) находим искомое отношение массы спортсмена к массе диска:

$$\gamma = \frac{m}{M} = \frac{\pi}{-\theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_0} = 2,301.$$

О Т В Е ТЫ , У К А З А Н И Я , Р Е Ш Е Н И Я

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. Больше всего соседей у центральной клетки — поставим туда 1. В соседние с центральной клеткой поставим числа поменьше — 2, 3, 4, 5. На центральное число все они делятся (на 1 делится любое число). А чтобы условие выполнялось и для угловых клеток, поставим в каждый угол произведение его соседей. Так получается один из возможных примеров (рис. 1).

Можно придумать и другие примеры.

2. 27 (пример: $0,5 + 1,6 + 7,4 + 8,3 + 9,2 = 27$) и 18 (пример: $0,9 + 1,8 + 3,7 + 5,4 + 6,2 = 18$). Сумма Я + Б + Р + Б + Й должна оканчиваться нулем. Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию). Максимальная сумма пяти цифр $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, так что получить можно только суммы 20 и 30. Заметим, что все буквы различны, т.е. все десять цифр участвуют в записи по одному разу. Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта цифра 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна $45 - 20 = 25$, и мы находим ответ 27. Аналогично, если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет $45 - 30 + 3 = 18$.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много — есть 86400 способов получить сумму 27 и 72000 способов получить сумму 18.

Рис. 1

10	2	8
5	1	4
15	3	12

3. Мудрец может расположить шкатулки, например, так, как показано на рисунке 2, и указать шаху те шкатулки, где на крышках указаны веса 2, 3 и 5. Если шах назовет сумму 10, значит, он ничего не менял. Если он менял местами какие-то монеты, сумма всякий раз

Рис. 2

будет другой (см. таблицу):

4	5	1
2	6	3

Что менял шах	Сумма
ничего	10
4 и 2	12
5 и 6	11
1 и 3	8
4 и 5	9
2 и 6	14
5 и 1	6
6 и 3	13

Как видим, все суммы разные, так что по сумме мудрец сможет понять, менялись ли монеты и какие, и назвать их правильно.

Комментарий. Как мог рассуждать мудрец, придумывая пример? Раскрасим прямоугольник 2×3 в шахматном порядке. Ясно, что надо назвать либо три белые клетки, либо три черные — в противном случае среди названных (или не названных) будут две соседние, и мудрец не сможет определить, поменял в них шах монеты или нет. Возможные суммы в трех шкатулках меняются в диапазоне от 6 до 15, причем сумма от замены монет может увеличиться или уменьшиться на 1, 2, 3, 4 или 5. Чтобы восемь сумм (исходная и при любом из семи обменов) были различны, исходная сумма должна быть примерно в середине ряда (равняться 10 или 11). Дальше можно действовать подбором.

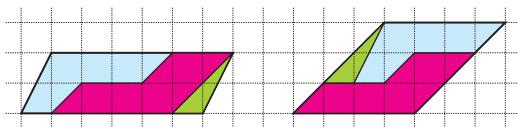


Рис. 3

4. Ответ показан на рисунке 3.

Комментарий. 1. Любой параллелограмм несложно разрезать на две части и сложить из них другой параллелограмм с такими же основанием a и высотой h (рис. 4). Отсюда, кстати, можно увидеть, что все такие параллелограммы имеют одинаковую площадь, и найти эту площадь: она равна площади прямоугольника $a \times h$. В частности, параллелограммы из условия имеют одинаковую площадь: $6 \times 2 = 4 \times 3$.

2. Если первую фигуру можно разрезать на части и сложить из них вторую, будем говорить «перекроить первую фигуру во вторую», а вторую можно перекроить в третью, то и первую можно перекроить в последнюю (подумайте, почему!). Это помогает найти решение задачи: можно сначала перекроить первый параллелограмм в параллелограмм с нужным наклоном боковой стороны (как показано на рисунке 4), а потом

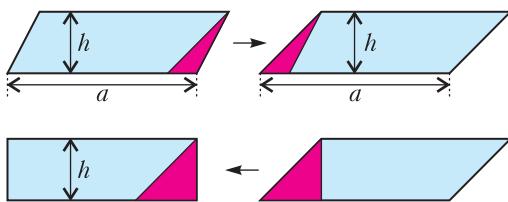


Рис. 4

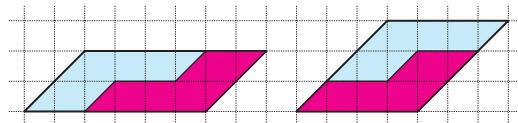


Рис. 5

изменить пропорции параллелограмма, не меняя наклон боковой стороны (рис. 5). Можно поступить и по-другому: сначала «перекосить» (действуя, как в первом комментарии) первый параллелограмм так, чтобы у него появилась сторона длины 4, потом перекосить этот параллелограмм во второй. Получится другое разрезание — вершины частей, правда, уже не будут лежать в узлах сетки.

3. Теорема Бойяи–Гервина говорит, что вообще любые два многоугольника одинаковой площади можно перекроить один в другой (рис. 6). (Доказательство можно прочитать в брошюре В.Г.Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры». Важную роль в нем играют



Рис. 6

две идеи из предыдущих комментариев.) Но, вообще говоря, может потребоваться много частей. Например, чтобы перекроить квадрат 1×1 в прямоугольник $1/100 \times 100$, понадобится разрезать квадрат на несколько десятков частей.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №3)

25. а) Да; б) да; в) можно для нечетных $N > 1$ и для кратных четырем $N > 4$.

Пусть основания трапеции равны a и b , причем $a < b$ (рис. 7). Будем считать, что основания расположены горизонтально. Трапеция составлена из $b - a$ горизонтальных полосок. В верхней $2a + 1$ треугольников, а в нижней $2b - 1$, в каждой полоске на 2 треугольника больше, чем в полоске, которая над ней. Получается, чтобы выразить N , т.е. общее количество треугольников, надо найти сумму арифметической прогрессии (с шагом 2): $(2a + 1) + (2a + 3) + \dots + (2b - 1)$. Это можно сделать, умножив количество членов прогрессии на полу要紧ную первого и последнего членов, получим $N = (b - a)(b + a) = b^2 - a^2$. Это же можно было понять иначе: если продлить боковые стороны трапеции до пересечения, получим, что трапеция получается из равностороннего треугольника со стороной b удалением равностороннего треугольника со стороной a . Количество треугольников в равностороннем треугольнике со стороной n равно n^2 (об этом см., например, статью Е.Бакаева «Рисуем сумму нечетных чисел» в журнале «Квант» №3 за 2015 г.). Отсюда получаем $N = b^2 - a^2$.

Итак, осталось понять, какие числа N представимы в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Заметим, что числа $(b - a)$ и $(b + a)$ одной четности, поэтому $N = (b - a)(b + a)$ либо нечетно, либо делится на 4.

Если $N = 2k + 1$, где $k \geq 1$, то можно взять $b = k + 1$, $a = k$, и тогда действительно

$$N = (k + 1 - k)(k + 1 + k) = 2k + 1.$$

Если $N = 4k$, где $k \geq 2$, то можно взять $b = k + 1$, $a = k - 1$, и тогда действительно

$$N = (k + 1 - (k - 1))(k + 1 + k - 1) = 4k.$$

Если же $N = 1$, то должно выполняться равенство $1 = (b - a)(b + a)$, но нельзя представить 1 в виде произведения двух различных натуральных чисел.

Если $N = 4$, то $b - a = 1$, $b + a = 4$, так как это единственное представление числа 4 в виде произведения двух различных натуральных чисел. Но тогда b – не целое число, что невозможно.

Таким образом, для пункта а) получим $99 = 2k + 1$, поэтому есть трапеция с основаниями $b = k + 1 = 50$, $a = k = 49$. Для пункта б) получим $100 = 4k$, поэтому есть трапеция с основаниями $b = k + 1 = 26$, $a = k - 1 = 24$.

26. Нет.

Заполним таблицу, как показано на рисунке 8.

11	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	11	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	11	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	11	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	11	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	11	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	11	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	11	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	11	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	11

Рис. 8

После перестановки один столбец может поместиться целиком только один набор из 9 или 10 одинаковых чисел. Столбцов всего 10, а наборов повторяющихся чисел в данной таблице 11, поэтому, как ни перставляй числа в строках, числа хотя бы одного набора окажутся в разных столбцах.

27. На среду или на пятницу.

Рассмотрим два последовательных невисокосных года. Одноковые даты в них отстоят друг от друга на 365 дней. А так как $365 = 52 \cdot 7 + 1$, то, если в первый из этих годов день рождения у человека был во вторник, то во второй – в среду. Следовательно, первый или второй год високосный. Разберем два случая.

1) Если таким был первый год, то второй и третий были невисокосными, а потому дни рождения в последний приходились чаще всего на среду.

Приведем пример, на какие дни приходятся дни рождения в компании из 7 человек:

1-й год (високосный) – в январе 2 в воскресенье, в марте 2 в понедельник и 3 во вторник, тогда:

2-й год (обычный) – в январе 2 во вторник, в марте 2 во вторник и 3 в среду;

3-й год (обычный) – в январе 2 в среду, в марте 2 в среду и 3 в четверг.

2) Если же високосным был второй год, то у каждого человека день рождения в третий год был через $365 + 366 = 731$ день после дня рождения в первый год. При этом (в силу равенства $731 = 104 \cdot 7 + 3$) соответствующий день недели сдвинулся на 3 дня вперед; в частности, все дни рождения, приходившиеся на вторник, пришлись на пятницу.

Приведем пример, на какие дни приходятся дни рождения в компании из 7 человек:

1-й год (обычный) – в январе 2 во вторник, в марте 2 во вторник и 3 в воскресенье, тогда:

2-й год (високосный) – в январе 2 в среду, в марте 2 в четверг и 3 во вторник;

3-й год (обычный) – в январе 2 в пятницу, в марте 2 в пятницу и 3 в среду.

28. Во всех решениях считаем, что $AB = BC$.

Первое решение (предложила команда Академического лицея, Магнитогорск). Достроим треугольник ABC до ромба $ABCD$, его площадь будет равна 1 (рис. 9). Векторы \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{CD} равны,

поэтому точка D тоже имеет целые координаты. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, поэтому произведение длин AC и BD равно 2. Длина отрезка с вершинами в узлах

находится по теореме Пифагора, поэтому она является корнем из целого числа. А значит, либо $AC = 1$, либо $AC \geq \sqrt{2}$. Но если $AC = 1$, то A и C – это соседние узлы целочисленной решетки, и тогда серединный перпендикуляр к AC не проходит ни через один узел – а он должен проходить через B и D . Следовательно, $AC \geq \sqrt{2}$ и, аналогично, $BD \geq \sqrt{2}$, а раз их произведение равно 2, то $AC = BD = \sqrt{2}$. Если два узла решетки расположены на расстоянии $\sqrt{2}$ друг от друга, то они являются противоположными вершинами единичного квадрата. Следовательно, $ABCD$ – это квадрат со стороной 1, и треугольник ABC прямоугольный.

Второе решение. Отметим точку K такую, что B – середина CK , это будет целая точка (рис. 10). Треугольники ABC и ABK имеют площадь $1/2$. Эта площадь наименьшая возможная для треугольника с вершинами в целых точках (это можно получить, например, из формулы Пика). Отсюда следует, что на отрезках AC и AK нет других узлов. Но на двух перпендикулярных

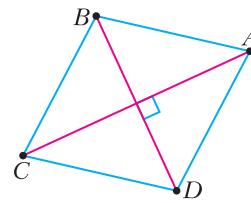


Рис. 9

прямых расстояние между соседними узлами решетки должно быть одинаковым – это можно понять из того факта, что вся решетка переходит в себя при повороте вокруг точки A на прямой угол. Поэтому $AC = AK$ и тогда треугольник ABC прямоугольный.

О формуле Пика можно прочитать, например, в статье Н. Васильева «Вокруг формулы Пика» («Квант» №12 за 1974 г.) или в статье Г. Мерзона «Формула Пика и тающий лед» («Квант» №9 за 2018 г.).

Третье решение (предложила команда Нахимовского военно-морского училища, Мурманск). Обозначим $AB = BC = a$, $\angle ABC = \beta$. Площадь треугольника ABC равна, с одной стороны, $\frac{1}{2}a^2$, с другой стороны, $\frac{1}{2}a^2 \sin \beta$. Возведем в квадрат и преобразуем:

$$1 = a^4 \sin^2 \beta = (a^2)^2 - (a^2 \cos \beta)^2.$$

Так как a – это длина отрезка с вершинами в узлах решетки, то a^2 – целое число. Выражение $a^2 \cos \beta$ – это скалярное произведение векторов \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BC} , эти векторы имеют целые координаты, поэтому их скалярное произведение является целым числом. Таким образом, мы получили, что 1 – это разность квадратов двух целых чисел. Значит, эти квадраты равны 1 и 0. Таким образом, $\cos \beta = 0$, поэтому угол β прямой, т.е. треугольник ABC прямоугольный.

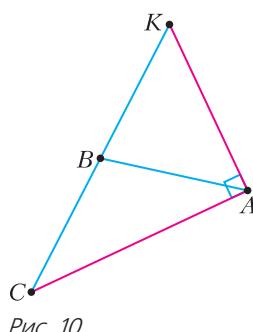


Рис. 10

6. В процессе падения как горизонтальная составляющая импульса стержня, так и горизонтальная составляющая скорости его центра тяжести будут оставаться равными нулю. Поэтому в момент падения на плоскость центр тяжести стержня будет там, где первоначально стоял стержень.

7. Если вернуть «вырезанный» треугольник ADC на прежнее место, то общий центр тяжести фигуры $ABCD$ и треугольника ADC окажется в точке D (рис. 11). Тогда координата x может быть найдена из уравнения

$$\frac{2}{3}h = \frac{m_{ADC}\left(h - \frac{h}{9}\right) + (m_{ABC} - m_{ADC})x}{m_{ABC}},$$

откуда $x = \frac{5}{9}h$.

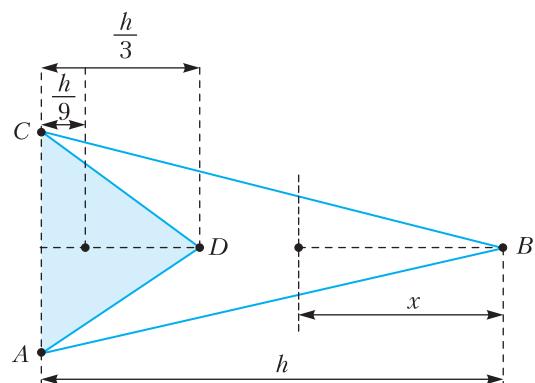


Рис. 11

8. Нет, не изменяются. Топливные баки в самолете располагаются так, чтобы центр тяжести самолета с топливом и без топлива оставался на одном месте – иначе изменились бы аэродинамические характеристики самолета.

9. В декартовых координатах у точки меняются и ее абсцисса, и ордината, т.е. движение *двумерно*. В полярной системе координат, в которой полюс совмещен с центром окружности, полярный радиус R не меняется, а изменяется лишь полярный угол ϕ , т.е. движение *одномерно*.

10. $x = 0$, $y = 3$ м.

11. Постоянство азимута и высоты спутника означает, что он – геостационарный. Такой спутник может существовать только у вращающейся планеты. У Земли его орбита – единственная, она круговая и располагается в экваториальной плоскости планеты.

12. Северный геомагнитный полюс, в зоне которого наблюдаются сияния, не совпадает с географическим полюсом и смешен в сторону Канады. Области же Сибири, имеющие ту же географи-

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

- Это гномон – вертикальный шест. С его помощью по длине тени от Солнца можно определить направление полуденной линии и найти широту места.
- Примерно географической широте места.
- Не всегда. Например, пройденный путь отличен от нуля, а изменение координат равно нулю – если тело прошло по замкнутой траектории.
- Да, встретятся. Через $t = 1$ с координаты тел станут одинаковыми: $x_A = x_C = 2$ м и $y_A = y_C = 5$ м.
- а) Ось x надо направить по полу вдоль стены, ось y – вертикально вверх; б) нужна только ось y , направленная вертикально вверх.

ческую широту, расположены в более низких геомагнитных широтах.

Микроопыт

Поднимая лестницу, мы невольно беремся за место над ее центром тяжести. Используя отвес, можно найти, конечно, приблизительно, вертикальную линию, на которой он находится. Если удастся провести еще хотя бы одну такую линию, то центр тяжести будет в точке их пересечения.

Задача о замкнутой ломаной

- Нет в обоих случаях. Контрпримеры показаны на рисунках 12 и 13.
- Нет. Контрпример показан на рисунке 14.
- Нет. Контрпример показан на рисунке 15.

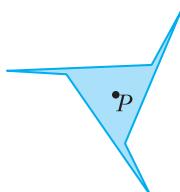


Рис. 12

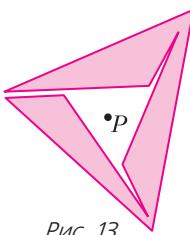


Рис. 13

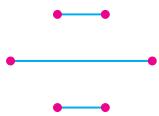


Рис. 14

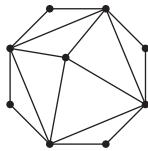


Рис. 15

- Нет.

Из пункта б) основной задачи следует, что есть точка $X \in S$ внутри выпуклой оболочки S . Рассмотрим все включающие пояса вокруг X . Это ломаные вида $A_iA_{i+1}\dots A_{n-1}A_1\dots A_{i-1}XA_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. У них нет общего звена, так как для всех i найдется пояс, не содержащий звено XA_i , и найдется пояс, не содержащий звено $A_{i-1}A_i$.

- Да.

Возьмем некоторую точку P внутри выпуклой оболочки S или лежащую на ней. Рассмотрим невключающий пояс вокруг P . Точка P содержится в области, ограниченной этим поясом. Значит, все точки внутри выпуклой оболочки или на ней входят в объединение. Если же точка вне выпуклой оболочки, то она снаружи любого пояса, поэтому объединением является выпуклая оболочка.

XLV Турнир городов

Задачи весеннего тура

(см. «Квант» №4)

Базовый вариант

8–9 классы

1. Могли.

Вот один из примеров. Пусть масса пирога была 17 унций. Сначала разделим его на куски в 2, 7 и 8 унций, затем кусок в 7 унций – на куски в 1, 2 и 4 унции. Теперь будем делить все куски, кроме «единичных», пополам, пока все не станут «единичными».

См. также задачу 3 для 10 – 11 классов.

2. 3 цвета.

Оценка. По условию клетки, отмеченные на рисунке 16, должны быть разного цвета.

Пример. Окрасим каждый столбец в свой цвет, периодически че-

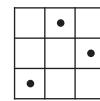


Рис. 16

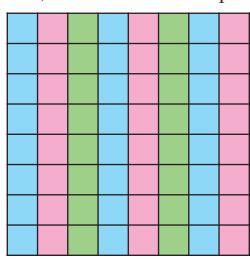


Рис. 17

редуя цвета 1, 2 и 3 (рис. 17).

3. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

Добавим на рисунок еще два маленьких треугольника, как показано на рисунке 18. Так как

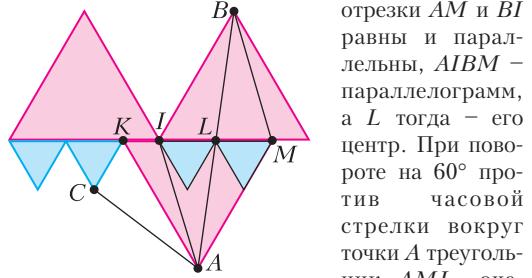


Рис. 18

отрезки AM и BI равны и параллельны, $AIBM$ – параллелограмм, а L тогда – его центр. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML , очевидно, переходит

в треугольник AKC . Значит, в треугольнике ABC

сторона AB в два раза больше стороны AC и

$\angle CAB = 60^\circ$, поэтому он прямоугольный.

4. Неверно.

Пусть монета, лежащая в центре, стоит больше всех остальных, вместе взятых. Пусть второй

пират ходит центрально симметрично первому, пока не «освободится» центральная монета. Тогда он забирает ее и выигрывает.

5. $(N - 1)^2$ яблок.

Если у какого-то яблока диаметр нецелый, увеличим его до ближайшего целого числа, от этого ничего не изменится: например, все удавы оди-

наково «реагируют» на яблоки диаметра из промежутка $(2;3]$. Так добьемся того, что диаметры всех яблок будут целыми.

Оценка. Рассмотрим яблоки диаметра d , где $2 \leq d \leq N$. Пусть таких яблок не дадут каким-то двум удавам. Пасты этих удавов могут оказаться размёром $d-1$ и d . Оба удава съедят все меньшие яблоки и оставят все большие, поэтому этих удавов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно яблок диаметра d требуется хотя бы $N-1$, а всего яблок тогда нужно хотя бы $(N-1)^2$.

Пример. Дадим каждому удаву, кроме последнего, яблоки всех диаметров от 2 до N включительно. Получив такой набор, удав выдаст размер своей пасты: он равен максимальному диаметру съеденного яблока или 1, если ни одно яблоко не съедено. Размер пасты у последнего удава определим методом исключения.

Замечание. Оказывается, тот же самый набор яблок можно раздать удавам как угодно, лишь с одним условием: не давать одинаковые яблоки одному и тому же удаву.

В самом деле, если найдется удав, съевший яблоко диаметра N , то его паста размера N . Иначе такая паста у удава, не получившего такого яблока. Среди остальных удавов с помощью яблок диаметра $N-1$ точно так же найдем пасту размера $N-1$ и так далее. Оставшийся в конце удав будет иметь пасту размера 1.

Среди участников Турнира это заметил, например, десятиклассник Низам Гаджиев из Махачкалы.

10–11 классы

1. Так как

$$\frac{1}{2}a_{n+1} + a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}a_n + a_{n+1},$$

то $(n+1)$ -я и n -я параболы пересекаются в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}$. Значит, все параболы имеют общую точку с абсциссой $\frac{1}{2}$.

2. Они равны.

Заметим сначала, что квадрат со стороной на гипотенузе AB вписывается в прямоугольный треугольник ABC однозначно.

(Например, потому, что если есть два таких квадрата, то гомотетия с центром в точке C переводит один из них в другой, оставляя при этом AB на месте, значит, коэффициент равен 1.) Далее заметим, что все прямоугольные треугольники в задаче подобны.

Значит, вписанные квадраты занимают в них одинаковую долю площади. Поэтому сумма площадей малых квадратов равна площади большого, так как это верно для содержащих их треугольников.

3. При каждом.

Кусок массой N (натуральное число) надо разбить на единичные куски. Все степени двойки разбиваются делением пополам. Для дальнейших рассуждений приведем два способа.

Первый способ. Число N разложимо в сумму различных степеней двойки (двоичное представление). Возможны три случая.

1) В этом разложении не два слагаемых (одно или хотя бы три). Тогда разбиваем сначала ровно как в этом двоичном разложении, а потом превращаем в единицы каждую степень двойки.

2) $N = 2^a + 2^b$, где $0 < a < b$. Тогда $b \geq 3$, так как $N \geq 10$. Разбиваем N на куски 1, 2^a и $2^b - 1$, последний из которых – на $b-1$ степеней двойки $(1, 2, \dots, 2^{b-1})$.

3) $N = 1 + 2^b$. Тогда $b \geq 4$, и мы разбиваем N на куски 1, 2 и $2^b - 2$, последний из них – на $b-1$ степеней двойки $(2, \dots, 2^{b-1})$.

Второй способ. Многократно отделяя пару кусков 1 и 2, сведем задачу к куску 10, 11 или 12. Кусок 10 сведем к 7, затем к 4. Кусок 11 сведем к 8. Кусок 12 разобьем на 1, 4 и 7. Все полученные куски мы уже умеем разбивать.

Замечание. Можно показать, что утверждение задачи неверно в точности для $N = 3, 5, 6, 9$.

4. Неверно.

Первое решение. Плоскую фигуру на рисунке 19 можно рассматривать как вырожденную треугольную пирамиду $ABCS$ с двугранным углом 0° при ребре AB

и двугранными углами 180° при ребрах AC и BC . Сумма внутренних углов при основании равна 360° , а внешних – равна 180° .

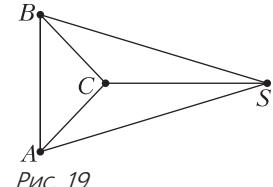


Рис. 19

Если немного приподнять вершину S над плоскостью ABC , двугранные углы изменятся не сильно, поэтому сумма внутренних углов останется больше суммы внешних.

Второе решение. На клетчатой плоскости рассмотрим узлы, указанные на рисунке 20. Пусть ABC – основание пирамиды, а высота SH пирамиды равна стороне клетки. Тогда внешний двугранный угол при CA равен $\angle SXH = 45^\circ$, а внутренний равен 135° . Аналогично при ребре CB . Значит, сумма внутренних двугранных углов при основании больше 270° , а внешних – меньше.

5. Докажем аналогичное утверждение для $3N$ школьников:

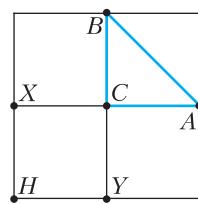


Рис. 20

если при любом разбиении их на N троек в какой-то тройке все будут друг с другом дружить, то всех школьников можно разбить на N троек так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.

Обозначим школьников точками и каждых двух друзей соединим отрезком (ребром). Будем формировать «полуполные» тройки – в которых есть хотя бы одно ребро и хотя бы одно «антиребро» (отсутствие ребра).

Пусть мы не можем из остатка сформировать очередную «полуполную» тройку. Тогда в остатке либо все попарно незнакомы, либо все попарно знакомы. (В самом деле, иначе в остатке есть хоть одно ребро и хоть одно антиребро. Если эти ребро AB и антиребро CD не имеют общей вершины, рассмотрим пару BC . Если BC – ребро, то BCD – неполная тройка, а если BC – антиребро, то ABC – неполная тройка, противоречие. Если же эти ребро и антиребро имеют общую вершину, то они образуют неполную тройку – снова противоречие.)

Но если в остатке все попарно незнакомы – получается разбиение без полных троек, что противоречит условию. Если же в остатке все попарно знакомы – получается разбиение из полуполных и полных троек, что решает задачу.

Сложный вариант

8 – 9 классы

1. Да, могло.

Пусть силы детей равны 1, 2, ..., 12. Разобьем их на 6 пар с равной суммарной силой 13. В одну команду возьмем любые три из этих шести пар, в другую – остальные три пары. Получится как раз 10 разбиений на команды равной силы – число способов разбить 6 объектов на две группы по 3 (разбиения, отличающиеся лишь порядком групп, считаем одинаковыми).

3. Первый игрок.

Докажем, что первый игрок может делать свои ходы так, чтобы в его n -й ход количество забранных из кучки камней равнялось n^2 (при n от 1 до 10). В свой первый ход он просто берет один камень. Пусть в свой n -й ход первому игроку удалось сделать общее количество забранных камней равным n^2 . В ответ второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Так как $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n+1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока.

Поскольку $100 = 10^2$, первый игрок своим 10-м ходом заберет оставшиеся камни и выиграет.

4. Можно считать, что m и n – натуральные взаимно простые числа. Назовем сначала дробь $\frac{1}{2}$. Петя вычислит дробь $\frac{2m+n}{2n}$.

Общий делитель числителя $2m+n$ и знаменателя $2n$ будет также общим делителем чисел $2(2m+n) - 2n = 4m$ и $2n$ и, поскольку m и n взаимно просты, может равняться 1, 2 или 4. Узнав числитель, который сообщит нам Петя, мы точно будем знать, что $2m+n$ не больше этого числителя, умноженного на 4. Следующим ходом назовем дробь $\frac{1}{p}$, где p – простое число, большее учетверенного числителя, тогда p будет больше и m , и n . Петя вычислит дробь $\frac{p \cdot m + n}{p \cdot n}$, она будет несократимой. Узнав ее числитель $p \cdot m + n$, возьмем от него остаток от деления на p и получим n . Вычтя из числителя n и поделив на p , получим m .

6. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP . Пусть I_A – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон BA и AC (рис. 21). Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN .

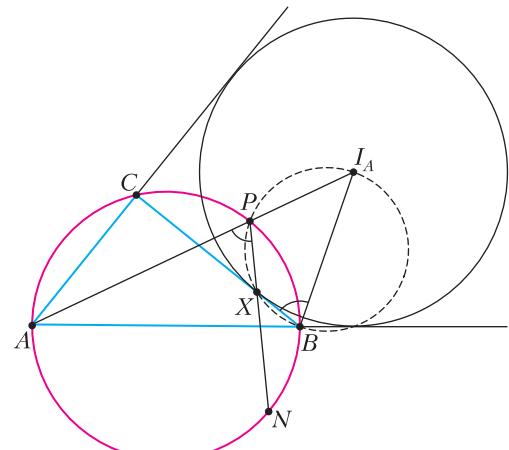


Рис. 21

Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B , то $\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$.

Так как I_A лежит на биссектрисе угла A , то точки A , P , I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\angle AN}{2} = \frac{\angle ABC}{4} = \frac{360^\circ - \angle AC}{4} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, т.е. четырехугольник $I_A P X B$ вписанный.

Вернемся к решению задачи. Точки X и A_1 со-

впадают тогда и только тогда, когда $\angle BXI_A = \angle BA_1I_A = 90^\circ$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BPI_A = 90^\circ$, а это эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$. Проведя аналогичные рассуждения со стороны вершины A , получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой эквивалентна тому, что угол ACB прямой, а следовательно, из одного утверждения следует другое.

7. 98!.

Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}, 1, 2, \dots, 98$. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна находиться сверху, а остальные карточки можно расположить любым из $98!$ способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2} + n$, где n – натуральное число, т.е. будет иррациональна.

Оценка. Разобъем все стопки карточек на $98!$ групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (т.е. перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из нее по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: a_1, a_2, \dots, a_{99} . Тогда все стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{99}, a_1, \dots, a_{i-1}$ для i от 1 до 99 .

Начнем идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнем идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1} , не является неудачной. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдется карточка a_t , с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t , а закончили карточкой a_{t-1} , т.е. прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS' , где n – количество пройденных кругов, а S' – сумма чисел на всех карточках. Однако nS' по

условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше, чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки

$$1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, \dots, 50 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, \dots, 49 - \sqrt{2}.$$

Назовем первые 50 карточек *положительными*, а остальные – *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных карточек должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также будет равно $98!$.

10–11 классы

1. $m = n = 1$ и $m = n = 2$.

Пусть $m!! = n!$. Заметим, что $n!$ четно при $n > 1$. Поэтому при нечетных $m > 1$ решений нет. Ясно, что $m = n = 1$ является решением.

Пусть $m = 2k$, где k натуральное. Тогда $n! = m!! = k!2^k$. Отсюда $(k+1) \cdot \dots \cdot n = 2^k$. Одно из чисел $k+1, k+2$ нечетно. Так как оно больше единицы, оно не является делителем для 2^k . Значит, единственno возможный случай – это $2^k = k+1$. При натуральном k это означает, что $k=1, m=2$. Очевидно, $m=n=2$ является решением.

2. Могло.

Рассмотрим звездчатый октаэдр (рис. 22). Его можно рассматривать как объединение двух пра-

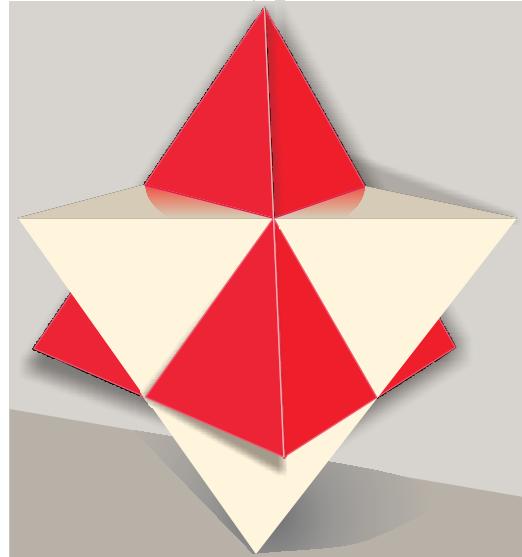


Рис. 22

вильных тетраэдров с общим центром, пересекающихся по октаэдру, или как октаэдр, у которого «продлены» грани. В центре каждой грани обоих тетраэдров поместим лампочку и возьмем круги, содержащие эту грань. Ясно что все лучи упираются в оболочку звездчатого октаэдра и тем более в наши круги.

Замечание. Аналогичные конструкции можно получить на основе додекаэдра или икосаэдра, но количество кругов будет больше. Подойдет также любой выпуклый многогранник, у которого все двугранные углы тупые: если в плоскости каждой его грани взять большой круг с центром в центре грани, то над каждой гранью соседние круги образуют «домик», который блокирует все лучи, выходящие из центра этой грани наружу многогранника, а лучи, идущие внутрь многогранника, блокируются его гранями (содержащимися в соответствующих кругах).

4. Пусть внешние биссектрисы углов AO_1B и CO_2D пересекаются в точке S , а прямые BO_1 и DO_2 – в точке T . Тогда $\angle TO_1S = \frac{1}{2} \angle TO_1A = \angle O_1BA$, т.е. O_1S и BX параллельны. Аналогично O_2S и DY параллельны. Заметим, что следующие площади треугольников равны:

$$S_{O_1AS} = S_{O_1XS} = S_{O_2YS} = S_{O_2CS}$$

(первое и последнее равенство следуют их полученных параллельностей, а второе – из равенства отрезков O_1X и O_2Y). Следовательно, точка S равноудалена не только от прямых O_1T и O_1A (O_2T и O_2C), но и от прямых O_1A и O_2C , т.е. является центром окружности, касающейся прямых AO_1 , BO_1 , CO_2 и DO_2 , что и требовалось.

5. Пусть наш многочлен

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \\ &= Q(x)x + a_0 = R(x)x^2 + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Подставив в многочлен любой его корень, видим, что все слагаемые, кроме a_0 , делятся на этот корень, а значит, и a_0 на него делится. Поэтому, если $|a_0| = 1$, то все доказано. Далее считаем, что $|a_0| > 1$.

По условию $P(a_0) = 0$. Если и $P(-a_0) = 0$, то $P(x)$ делится на $(x - a_0)(x + a_0) = x^2 - a_0^2$. Но тогда a_0 делится на a_0^2 , что не так. Значит, среди коэффициентов $-a_0$ отсутствует.

Так как $P(a_0) = 0$, то $R(a_0)a_0 + a_1 + 1 = 0$. Поскольку a_1 делит a_0 , получаем, что a_1 делит 1. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $a_1 = 1$. Тогда $R(a_0)a_0 = -2$, т.е. $|a_0| = 2$. Если $a_0 = -2$, то все доказано.

Пусть $a_0 = 2$. Тогда все остальные коэффициенты равны ± 1 или 2.

Поэтому равенство $P(2) = 0$ имеет вид $2S_2 + S_1 - S = 0$ (где в $2S_2$ входят слагаемые с коэффициентом 2, в S_1 – с коэффициентом 1, а в S – с коэффициентом -1), или

$$S_2 + S_2 + S_1 = S, \quad (*)$$

причем S_2 , S_1 , S – суммы различных степеней двойки.

При этом в силу равенства $P(1) = 0$, означающего, что сумма коэффициентов многочлена равна 0, получаем, что число слагаемых (степеней двойки) в левой части равенства $(*)$ равно числу слагаемых в правой. В левой части будем проделывать следующие операции: если в ней встречаются два одинаковых слагаемых 2^i , заменим их на 2^{i+1} . Хотя бы одна такая операция будет проделана: поскольку $a_0 = 2$, в сумму $S_2 + S_2$ дважды входит 1. Когда этот процесс остановится, как в левой, так и в правой части будут стоять суммы различных степеней двоек (но какие-то слагаемые левой части могут совпадать со слагаемыми правой). При этом число слагаемых в левой части будет меньше: каждая операция уменьшала его на единицу. Противоречие с единственностью разложения натурального числа в сумму степеней двойки.

Второй случай: $a_1 = -1$. Тогда $R(a_0)a_0 = 0$, т.е. $R(a_0) = a_n a_0^{n-2} + \dots + a_3 a_0 + a_2 = 0$. Если $n > 1$, то $n \geq 3$ (так как $a_2 \neq 0$). Далее, a_2 делится на a_0 , т.е. $a_2 = a_0$, а $a_3 a_0 + a_0$ делится на a_0^2 , т.е.

$a_3 + 1$ делится на a_0 , которое само делится на a_3 . Значит, 1 делится на a_3 , откуда $|a_3| = 1$.

Если $a_3 = 1$, то $P(1) = 0$. Кроме того, $|a_0| = 2$. Повторяя рассуждения случая 1, снова получим, что $a_0 = -2$.

Если $a_3 = -1$ и $n > 3$, то $P(a_0) = a_n a_0^n + \dots + a_5 a_0^5 + a_4 a_0^4 = 0$. Поделив на a_0^4 , видим, что $n \geq 5$, и, повторив предыдущие рассуждения, получаем, что либо $a_0 = -2$, либо $a_4 = a_0$, $a_5 = -1$. И так далее.

Так мы получим, что либо $a_0 = -2$, либо $n = 2m - 1$ нечетно и все коэффициенты при четных степенях многочлена равны a_0 , а при нечетных равны -1 . Тогда $P(a_1) = P(-1) = m(a_0 + 1) \neq 0$, так как $a_0 \neq -1$. Противоречие.

6 (решение предложено участником Московской математической олимпиады). Рассмотрим всевозможные мелодии из нот до и си длины 13 (их 2^{13} штук). Каждую такую мелодию периодически продолжим в обе стороны, получив бесконечную в обе сторону мелодию. Назовем две получившиеся бесконечные мелодии эквивалентными, если одна получается из другой сдвигом. У каждой такой бесконечной мелодии, кроме двух мелодий – состоящей только из нот до и

состоящей только из нот си, — есть еще 12 ей эквивалентных (никакая мелодия, кроме двух указанных, не перейдет в себя при сдвиге на число, меньшее 13, поскольку число 13 простое). Количество не эквивалентных друг другу бесконечных мелодий равно тогда $\frac{2^{13}-2}{13}+2=632$.

Посмотрим, сколько из них содержат запретные мелодии. Поскольку мы разрешаем сдвиг, можно выбрать в бесконечной мелодии кусок длины 13, начинающийся с запретной мелодии; оставшиеся ноты в этом куске длины 13 могут быть любыми. Поэтому из-за запретных мелодий длины $k = 5, 6, \dots, 12$ мы вычеркнем не больше соответственно $2^8, 2^7, \dots, 2^1$ бесконечных мелодий из нашего списка, а из-за запретных мелодий длины $k = 13, \dots, 30$ — не более одной для каждой. Итого запреты Кощея вычеркивают не больше

$$(2^8 + 2^7 + \dots + 2^1) + 18 = (2^9 - 2) + 18 = 528$$

бесконечных периодических мелодий из имеющихся 632. Любая из оставшихся мелодий не содержит запрещенных Кощем участков, и Ивану достаточно сыграть ее участок длины 300.

Устный тур для 11 класса

1. Нельзя.

У многочленов f и g нет общих корней, иначе это будет кратный корень суммы кубов, а у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ кратных корней нет.

Тогда многочлен $f^2 - fg + g^2$ имеет степень $2\max(\deg f, \deg g)$ (старшие коэффициенты не сократятся) и не имеет корней, поскольку выражение $a^2 - ab + b^2$ равно 0 только при $a = b = 0$. Но такого делителя у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ нет.

3. Наименьшее возможное количество хороших клеток равно N .

Пример (один из многих). Пусть в первой строке стоят единицы, а в остальных нули. Тогда все клетки первой строки хорошие, а остальные плохие.

Оценка. Разобьем все клетки таблицы на N групп по N клеток так, чтобы в каждой группе все клетки находились в разных строках и разных столбцах.

Пример такого разбиения для $N = 5$ показан на рисунке 23, для других N разбиение аналогично (например, в одну группу берем главную диагональ, идущую сверху слева вниз вправо, во вторую — диагональ над ней и число в левом нижнем углу, в третью — следующую диагональ и диагональ из двух клеток слева внизу и т.д.).

Предположим, что в какой-то группе все клетки плохие. Тогда для каждой клетки этой группы сумма чисел содержащей ее строки меньше суммы чисел содержащего ее столбца. Суммируя эти неравенства по всем клеткам группы, получаем, что сумма чисел во всей таблице, подсчитанная по строкам, меньше, чем эта же сумма, подсчитанная по столбцам, — противоречие. Значит, в каждой группе есть хорошая клетка и число хороших клеток не меньше числа группы, т.е. не меньше N .

5. Первое решение. Сделаем гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Пусть K'', M'', N'' — образы точек K', M', N' , а T — точка пересечения прямой SK с плоскостью ABC . Тогда $TK = TP$ как касательные к сфере, и, поскольку треугольники PKT и $K''KS$ подобны, то $SK'' = SK$. Аналогично, $SM'' = SM$, $SN'' = SN$. Но $SK = SM = SN$ как касательные, следовательно, S — центр окружности $K'M''N''$, а середина SP — центр окружности KMN .

Второе решение. Обозначим сферу с центром в точке S , проходящую через точки K, M, N , через ω , вписанную сферу пирамиды — через γ , а плоскость, проходящую через середины ребер пирамиды, — через α .

Сделаем инверсию с центром в точке P , переводящую γ в α . Тогда точки K, M, N перейдут в точки K', M', N' . Так как $\omega \perp \gamma$, то образ ω будет перпендикулярен α . Следовательно, образом ω будет сфера, построенная на окружности $(K'M'N')$ как на диаметральной окружности.

Тогда утверждение задачи следует из того, что центр инверсии, центр сферы и центр ее образа лежат на одной прямой.

Комментарий. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы S на плоскость π из точки $P \in S$. Пусть Q — точка вне сферы S , а окружность ω на S , образованная касательными к S из Q , не проходит через P . Тогда образом ω будет окружность ω' с центром в точке пересечения плоскости π с лучом PQ .

6. 45 кусков.

Пусть верхний слой состоит из центральной клетки. Далее пусть каждый нижележащий слой состоит из клеток предыдущего слоя и из клеток, примыкающих к ним по стороне, и имеет противоположный цвет.

Оценка. Можно считать, что первый наклеенный кусок — весь квадрат, от этого ничего не испортится. Считаем его нулевым. Докажем индукцией по k утверждение:

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Рис. 23

После еще k кусков между любыми двумя клетками есть путь с не более чем $2k$ сменами цвета.

База при $k = 0$ верна.

Рассмотрим наклеивание k -го куска S . Пусть до этого между двумя клетками был путь с не более $2(k-1)$ сменами цвета. Если он не заходил в S , то он таким и остался. Иначе заменим его кусок от первой его клетки в S до последней такой клетки на путь по S между этими клетками. Тогда количество смен цвета в новом пути увеличилось не более чем на 2 по сравнению со старым. Переход доказан.

В конце между противоположными углами любой путь имеет хотя бы 88 смен цвета. Значит, поверх нулевого куска наклеено еще хотя бы 44.

85-я Московская олимпиада школьников по физике (см. «Квант» №4)

10 класс

3. К некоторому моменту времени кончик хвоста удава переместился на расстояние x . В этот момент импульс удава (той его части, которая уже пришла в движение) равен

$$p = \frac{M}{L} \frac{x}{2} \frac{dx}{dt} = \frac{M}{4L} \frac{d(x^2)}{dt}.$$

Скорость изменения импульса равна силе:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{4L} \frac{d\left(\frac{d(x^2)}{dt}\right)}{dt} = At.$$

Интегрируем это уравнение два раза по времени и получаем

$$\frac{x^2 M}{4L} = \frac{At^3}{6} + C_1 t + C_2,$$

где C_1 – константа, связанная со скоростью кончика хвоста в начальный момент, а C_2 – это константа, зависящая от начальной координаты кончика хвоста. В начальный момент времени и скорость v_0 , и смещение x_0 кончика хвоста удава равны нулю. Отсюда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, поэтому

$$\frac{x^2 M}{4L} = \frac{At^3}{6}.$$

Смещение x связано со временем t так:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2AL}{3M}} t^{3/2},$$

а скорость кончика хвоста так:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2AL}{3M}} t^{1/2}, \text{ или } \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} t^{1/2}.$$

Для ответа на первый вопрос нужно найти время, когда $x = \frac{L}{2}$. Получаем

$$t = \left(\frac{3ML}{8A} \right)^{1/3}.$$

Подставив найденное значение времени в формулу для скорости, имеем

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} \left(\frac{3ML}{8A} \right)^{1/6}, \text{ или } \frac{dx}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{8M} \right)^{1/3}.$$

Для ответа на второй вопрос нужно взять значение $x = L$, тогда

$$t_{(L)} = \left(\frac{3LM}{2A} \right)^{1/3}.$$

Для ответа на третий вопрос нужно взять $x = 2L$. В этом случае

$$t_{(2L)} = \left(\frac{6LM}{A} \right)^{1/3},$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} \left(\frac{6LM}{A} \right)^{1/6}, \text{ или } \frac{dx}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{2M} \right)^{1/3}.$$

4. А. Внутри конденсатора вдали от его краев поле можно считать однородным и равным $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Разность потенциалов центров пластин равна $\Delta\Phi_0 = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$.

Б. Вблизи края конденсатора электрическое поле искривляется. Вертикальная составляющая напряженности поля вблизи края конденсатора может быть найдена на основе соображений симметрии. Обозначим $E_B^{(\perp)}$ составляющую напряженности электрического поля вблизи точки B , перпендикулярную пластинам конденсатора. Со-

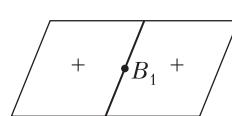


Рис. 24

вместим два одинаковых конденсатора так, чтобы совпадали их края (рис. 24, вид сверху). Напряженность поля вблизи точки B_1 внутри

составного конденсатора будет равна $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$. С другой стороны, эта напряженность равна $2E_B^{(\perp)}$, поэтому $E_B^{(\perp)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, а искомая разность потенциалов равна $\Delta\Phi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}$.

В. Рассмотрим конденсаторы, обкладки которых представляют собой ромбы с малым углом при вершине. Пусть для примера этот угол равен 1° . Совместим острыми углами 360 таких конденсаторов. Тогда на основе соображений симметрии, рассуждая аналогично предыдущему пун-

кту, можно найти перпендикулярную обкладкам составляющую напряженности электрического поля внутри конденсатора вблизи угла, получится $E_C^{(\perp)} = \frac{\sigma}{360\epsilon_0}$. Следовательно, для конденсатора с обкладками в виде ромбов с углом φ перпендикулярная обкладкам составляющая напряженности электрического поля равна

$$E_C^{(\perp)} = \frac{\sigma\varphi}{2\pi\epsilon_0},$$

где угол φ измеряется в радианах. Отсюда легко находим искомые разности потенциалов:

$$\Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\epsilon_0}, \quad \Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi - \alpha)h}{2\pi\epsilon_0}.$$

11 класс, тур 1

1. А. Потенциал в центре получается в результате интегрирования потенциалов центров тонких колец, на которые разбивается диск:

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^R \frac{\sigma dr}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}.$$

Б. Поскольку поле на расстояниях порядка d однородное, потенциал единичного диска на оси рядом с центром изменяется линейно в зависимости от координаты:

$$\varphi(x) = \varphi_0 - E|x| = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}|x|.$$

Рассмотрев суперпозицию трех дисков, найдем зависимость потенциала системы дисков от координаты:

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma|x-d|}{\epsilon_0} + \frac{3\sigma|x-2d|}{2\epsilon_0}.$$

Учитывая, что $d = \frac{R}{1000}$, получаем зависимость потенциала от безразмерной координаты на интересующем нас отрезке:

$$\varphi(a) = (4-2a)V \text{ при } 0 < a \leq 1;$$

$$\varphi(a) = (8-6a)V \text{ при } 1 < a \leq 2.$$

Искомый график изображен на рисунке 25.

2. А. Шайба 1 останавливается, передавая импульс шайбе 2. Далее происходит столкновение шайбы 2 с шайбами 3 и 4. Шайбы гладкие, следовательно, их скорости в процессе столкновения меняются только под действием сил нормальной реакции, поэтому после столкновения скорости третьей и четвертой шайб направлены под углом $\frac{\pi}{4}$ к горизонтальной прямой, направление скорости второй шайбы не меняется. Теперь расчет скорости второй шайбы v_2 и третьей шайбы v_3 после столкновения может быть сделан на основе законов сохранения:

$$\sqrt{2}v_3 + v_2 = v,$$

$$2v_3^2 + v_2^2 = v^2.$$

Решая систему, находим $v_2 = 0$, $v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Таким образом, вторая шайба останавливается, а третья и четвертая движутся со скоростью $\frac{v}{\sqrt{2}}$ по траекториям, составляющим одинаковые углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтальной прямой. Легко видеть, что в процессе дальнейшего движения шайбы 3 и 4 с пятой шайбой не сталкиваются, поэтому пятая шайба покоятся в исходном положении. В итоге имеем

$$v_1 = v_2 = v_5 = 0, \quad v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \text{ м/с.}$$

Б. В этом случае после столкновения второй шайбы с шайбами 3 и 4 скорости этих шайб u_3 и u_4 направлены под углом $\frac{\pi}{6}$ к горизонтальной прямой, вдоль которой до и после столкновения движется вторая шайба. Обозначив u_2 скорость второй шайбы после столкновения, запишем законы сохранения:

$$\sqrt{3}u_3 + u_2 = v, \quad 2u_3^2 + u_2^2 = v^2.$$

Решив систему, находим $u_2 = -\frac{v}{5}$, $u_3 = \frac{2\sqrt{3}v}{5}$. Таким образом, вторая шайба летит назад. Очевидно, далее она сталкивается с первой шайбой и передает ей весь свой импульс. Шайбы 3 и 4 при дальнейшем движении сталкиваются с шайбой 5. Рассмотрим это столкновение.

Из симметрии следует, что скорость шайбы 5 после столкновения будет направлена горизонтально. Пусть ось x системы координат также направлена горизонтально (рис. 26). Обозначим v_{\perp} проекцию скорости шайбы 3 после столкновения на направление, перпендикулярное линии, соединяющей центры шайб 3 и 5. Проекция скорости на это направление при столкновении

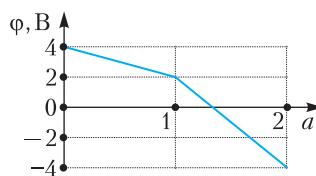


Рис. 25

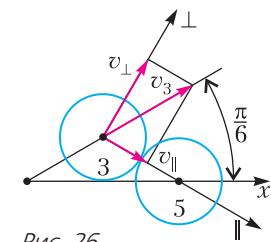


Рис. 26

новении не меняется, поэтому $v_{\perp} = u_3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3v}{5}$.

Проекцию скорости шайбы 3 на направление вдоль линии, соединяющей центры 3 и 5, обозначим v_{\parallel} . Положительному значению проекции v_{\parallel} соответствует направление от шара 3 к шару 5. Закон сохранения импульса в проекции на ось x дает

$$\frac{6v}{5} = v_5 + 2v_{\perp} \cos \frac{\pi}{3} + 2v_{\parallel} \cos \frac{\pi}{6}, \quad \frac{3v}{5} = v_5 + v_{\parallel} \sqrt{3}.$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{24v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2, \quad \frac{6v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\parallel}^2,$$

откуда следует квадратное уравнение

$$5v_{\parallel}^2 - 2 \frac{3\sqrt{3}}{5} vv_{\parallel} + \frac{3}{25} v^2 = 0.$$

Решив его, найдем

$$v_{\parallel}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}v}{25}, \quad v_{\parallel}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}v}{5}.$$

Второй корень не имеет физического смысла, поэтому

$$v_5 = \frac{3v}{5} + v_{\parallel}^{(1)} \sqrt{3} = \frac{12v}{25} = 0,48 \text{ м/с.}$$

Для конечной скорости шаров 3 и 4 имеем

$$v_4 = v_3 = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60 \text{ м/с.}$$

3. А. После перевода переключателя в положение 2 за очень короткое время (порядка $\tau_C = rC$) произойдет перезарядка конденсаторов, так что напряжение на каждом из них станет равно $\frac{\mathcal{E}}{2}$, обкладки конденсаторов, обращенные к клемме 2, будут заряжены отрицательно.

В колебательном процессе в каждый момент времени токи, текущие через батарейки, будут одинаковыми, при этом через катушку будет течь ток вдвое больший: $I(t) = 2q'$. Запишем уравнение обхода (второе правило Кирхгофа) для контура, содержащего катушку и одну из батарей:

$$q'' + \frac{q'r}{2L} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Затухание колебаний происходит за время порядка $\frac{L}{r}$, которое значительно больше периода колебаний $\sim \sqrt{LC}$. Таким образом, достаточно рассмотреть уравнение колебаний без затухания

$$q'' + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = C\mathcal{E} + q_0 \cos(\omega t + \phi_0),$$

где $\omega^2 = \frac{1}{2LC}$, параметры q_0 и ϕ_0 определяются из начальных условий. Ток через катушку равен

удвоенной производной заряда, поэтому

$$I(t) = -2\omega q_0 \sin(\omega t + \phi_0).$$

Для нулевого момента имеем систему уравнений

$$\frac{C\mathcal{E}}{2} = C\mathcal{E} + q_0 \cos \phi_0, \quad \frac{\mathcal{E}}{R} = -2q_0 \omega \sin \phi_0.$$

Решая систему, получаем уравнение

$$\omega \operatorname{tg} \phi_0 = \frac{1}{RC}$$

для определения начальной фазы. По условию $\omega RC = \frac{RC}{\sqrt{2LC}} = 1$, поэтому $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$. Направление тока изменяется в момент времени t_L , удовлетворяющий соотношению

$$\omega t_L = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{откуда } t_L = \frac{3\pi}{4\sqrt{2LC}}.$$

Б. Количество теплоты можно найти, используя закон сохранения энергии

$$A_{\mathcal{E}} = \Delta W_C + \Delta W_L + Q.$$

Когда в цепи установится стационарный режим, ток через катушку течь не будет, а конденсаторы будут заряжены до напряжения \mathcal{E} , поэтому изменение энергии конденсаторов

$$\Delta W_C = 2 \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2},$$

а изменение энергии магнитного поля

$$\Delta W_L = -\frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} = -\frac{C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Одна из батарей перемещает нулевой заряд, другая перемещает заряд $C\mathcal{E}$, поэтому суммарная работа ЭДС

$$A_{\mathcal{E}} = C\mathcal{E}^2.$$

Таким образом,

$$Q = A_{\mathcal{E}} - \Delta W_C - \Delta W_L = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}.$$

4. А. Для того чтобы при температуре окружающей среды давление в камере стало p , следует «протолкнуть» в камеру количество воздуха

$$\Delta V = \frac{(p - p_0)V_0}{RT_0}.$$

Этот воздух занимал в сосуде объем

$$V' = \frac{\Delta V RT_0}{p_{\max}} = \frac{(p - p_0)V_0}{p_{\max}}.$$

«Проталкивая» порцию воздуха в камеру, силы давления совершают работу

$$A = p_{\max} V' = (p - p_0)V_0.$$

За счет работы A увеличивается внутренняя энергия воздуха в камере и воздуха в проталкиваемой порции:

$$(p - p_0)V_0 = \frac{5R(v + \Delta V)\Delta T}{2},$$

где v – начальное количество воздуха в камере. Для конечного состояния воздуха в камере (после охлаждения до температуры T_0) справедливо уравнение состояния

$$pV_0 = (v + \Delta v)RT_0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{p - p_0}{p} = \frac{5}{2} \frac{\Delta T}{T_0}, \quad T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{p - p_0}{p}\right) T_0 = 380 \text{ К.}$$

Давление находится из закона Шарля:

$$p_{\max} = p \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \text{ Па.}$$

Б1. Количество циклов «проталкивания» N можно определить, зная начальное и конечное количества газа в камере. За один цикл в камеру проталкивается воздух из насоса в количестве $\Delta v = \frac{p_0 V_C}{RT_0}$, поэтому

$$N = \frac{(p - p_0)V_0}{RT_0 \Delta v} = \frac{(p - p_0)V_0}{p_0 V_C}.$$

Б2. При адиабатическом сжатии от давления p_0 до давления p_i поршнем совершается работа, равная изменению внутренней энергии сжимаемого в насосе воздуха:

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} p_0 V_C \left(\frac{T'}{T_0} - 1 \right),$$

где T' – температура в конце сжатия. При помощи уравнения адиабаты $Tp^{-2/7} = \text{const}$ выражение для работы может быть записано в виде

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} p_0 V_C \left(\left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{2/7} - 1 \right).$$

Далее работа совершается при постоянном давлении. Она равна

$$A_p = p_i V' = p_i V_C \left(\frac{p_0}{p_i} \right)^{5/7} = p_i^{2/7} p_0^{5/7} V_C.$$

Суммируя эти две работы, получаем

$$A_i = A_{Q=0} + A_p = \frac{7}{2} p_i^{2/7} p_0^{5/7} V_C - \frac{5}{2} p_0 V_C.$$

Б3. За счет работы A_i изменяется внутренняя энергия того воздуха, который уже был в камере на момент начала i -го цикла, и той порции, которая «проталкивается» в камеру. Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U_i = \frac{5}{2} p_i V_0 - \frac{5}{2} (p_{i-1} V_0 + p_0 V_C).$$

Приравнивая изменение внутренней энергии и работу, с учетом равенства $\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$ имеем

$$\Delta p_i = \frac{7}{5} p_i^{2/7} p_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}.$$

Б4. Осуществляя интегрирование последней формулы, получаем

$$\frac{7}{5} \left(p_k^{5/7} - p_0^{5/7} \right) = \frac{7}{5} p_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0} k.$$

Сделав преобразования, находим

$$p_k = p_0 \left(1 + \frac{V_C}{V_0} k \right)^{7/5}.$$

Б5. Подставляем в последнюю формулу для давления количество циклов $k = N$ и находим

$$p_{\max} = p_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{p_0} \right)^{7/5} = p_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{7/5} \approx 4,7 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Из закона Шарля получаем

$$T_{\max} = T_0 \frac{p_{\max}}{p} \approx 466 \text{ К.}$$

5. А. В направлении вдоль оси О размер пучка, как следует из условия, не меняется. Найдем изменение размера пучка в направлении, перпендикулярном оси. Фокусное расстояние плосковыпуклой линзы, сделанной из материала с показателем преломления $\frac{4}{3}$, равно

$$f = \frac{R}{n-1} = 3R.$$

Таким образом, если бы экран располагался на расстоянии $3R$ от линзы, то пучок круглого сечения изобразился бы как сильно вытянутый эллипс – отрезок длиной $2r$. Однако экран находится на расстоянии $2R$ от линзы, поэтому на нем наблюдается светлое пятно в виде эллипса с полуосами r и $\frac{r}{3}$, площадь которого равна

$$S = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Б. Для лучей, идущих вблизи оси мензурки, последняя представляет собой две тонкие плосковыпуклые линзы (радиус выпуклой поверхности каждой из этих линз равен R), разделенные плоскопараллельной пластинкой толщиной $2R$. Эта оптическая система формирует перевернутое изображение прямой линии, которое имеет вид кривой из-за aberrации. Однако вблизи оси мензурки отрезки прямых приближенно изображаются как отрезки прямых. Поскольку цилиндрическая линза изменяет размер изображения вдоль горизонтальной оси, но не меняет его вдоль вертикальной, углы, которые составляют отрезки-изображения с горизонтальной осью, отличаются от углов между линиями-предметами и горизонталью. Построив на фотографии касательные к линиям-изображениям вблизи оси мензурки, можно сравнить углы, которые образуют касательные к изображениям и прямые (предметы) с горизонталью. На рисунке 27 сделано такое построение, углы обозначены α и β . Справедливо соотношение

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \Gamma_0,$$

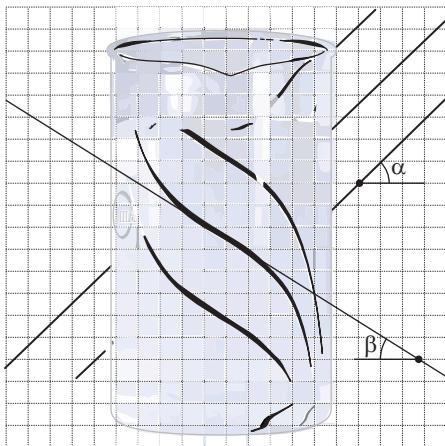


Рис. 27

где Γ_0 – увеличение (вдоль горизонтальной оси), с которым изображается предмет в системе двух тонких цилиндрических линз и плоскопараллельной пластины. По фотографии находим

$$\Gamma_0 \approx \frac{8}{5}.$$

Пусть предмет находится на расстоянии a_1 от мензурки (так что расстояние от оси мензурки до предмета $x = R + a_1$). Поскольку фокусное расстояние плосковыпуклой «водяной» линзы равно $3R$, расстояние a'_1 до изображения предмета в линзе

$$a'_1 = \frac{3Ra_1}{a_1 - 3R},$$

и увеличение изображения в первой линзе

$$\Gamma_1 = \left| \frac{3R}{a_1 - 3R} \right|.$$

Между линзами вставлена плоскопараллельная пластина толщиной D , которая приближает предметы ко второй линзе на расстояние, равное

$\Delta a = D \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{R}{2}$. Таким образом, расстояние от изображения в плоскопараллельной пластинке до второй линзы

$$a_2 = 2R - a'_1 - \Delta a = -\frac{3R(a_1 + 3R)}{2(a_1 - 3R)},$$

а расстояния до изображения

$$a'_2 = \frac{R(a_1 + 3R)}{a_1 - R}.$$

Отсюда находим увеличение во второй линзе:

$$\Gamma_2 = \left| \frac{a'_2}{a_2} \right| = \frac{\left| 2(a_1 - 3R) \right|}{3(a_1 - R)}$$

и общее увеличение:

$$\Gamma_0 = \left| \frac{2R}{a_1 - R} \right|.$$

Рассматривая значения a_1 , удовлетворяющие неравенству $a_1 > R$, раскрывая модуль и решая уравнение, получаем $a_1 = 2,25R$. Таким образом, расстояние от оси мензурки до стены

$$x = R + a_1 = \frac{13}{4}R = 130 \text{ мм.}$$

11 класс, тип 2

1. Поскольку потери энергии при падении груза малы, максимальное удлинение может быть найдено на основании закона сохранения энергии. Искомая величина в каждом случае есть решение уравнения $W(\Delta L) = mg\Delta L$, которое решается графическим способом. Сделав необходимые построения (рис. 28), находим значения максимально-го отклонения для каждого пункта: $\Delta L_{\max}^{(A)} \approx 0,10 \text{ м}$, $\Delta L_{\max}^{(B)} \approx 0,89 \text{ м}$.

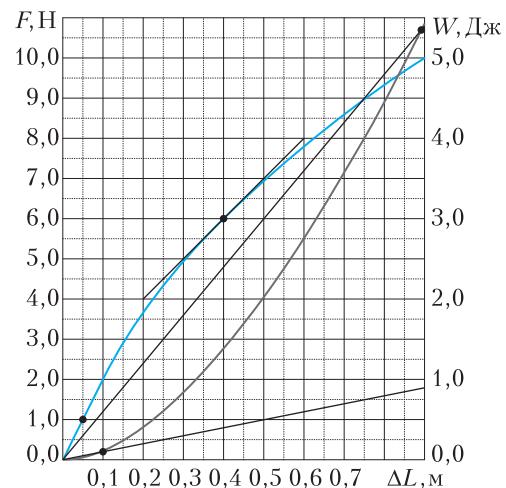


Рис. 28

Еще проще найти равновесное значение удлинения. Искомая величина в этом случае удовлетворяет уравнению $F(\Delta L) = mg$, которое легко решается графически. В результате получается $\Delta L_0^{(A)} \approx 0,05 \text{ м}$, $\Delta L_0^{(B)} \approx 0,4 \text{ м}$.

Для определения периода колебаний будем рассматривать груз на резинке как пружинный маятник, при этом коэффициент жесткости пружины будем считать равным тангенсу угла наклона касательной к графику силы в положении равновесия: $k^{(A)} \approx 20 \text{ H/m}$, $k^{(B)} \approx 10 \text{ H/m}$. Таким образом, период малых колебаний

$$T^{(A)} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \approx 0,44 \text{ с}, T^{(B)} \approx 1,54 \text{ с.}$$

2. Искомая энергия взаимодействия равна

$$W = k \frac{qQ}{R}.$$

3. Величины скорости и протона и электрона со временем не меняются, а вектор скорости поворачивается. Если обозначить угол, который образуют нормаль к границе раздела и вектор скорости частицы, через α , то глубина проникновения к моменту t

$$x(t) = \int_0^t v \cos \alpha \cdot dt.$$

На такой глубине индукция магнитного поля

$$B(x) = \frac{B(L)x(t)}{L},$$

где $B(L)$ – индукция на глубине проникновения в переходный участок, равной L .

Скорость вращения вектора скорости частицы

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{qB(L)}{Lm} x(t), \text{ или } \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{qB_L v}{Lm} \cos \alpha.$$

Поскольку угол поворота скорости фиксирован и равен π , то время разворота

$$T \sim \sqrt{\frac{Lm}{qvB_L}}.$$

Так как масса электрона в 1838 раз меньше массы протона, то на разворот электрону потребуется меньше времени в $\sqrt{1838}$ раз, т.е. $\tau_e \approx 0,023$ с. Во столько же раз будет меньше и глубина проникновения электрона в область с магнитным полем.

4. Поскольку изображения радиусов, проведенных из центра в крайние точки полуокружности, имеют одинаковый размер, то диаметр, закрывающий полуокружность, перпендикулярен главной оптической оси. При этом главная оптическая ось касается изображения в одной из крайних точек и совпадает с одной из линий сетки (рис. 29). Далее по рисунку определяем размер изображения радиуса, закрывающего полуокружность: $A_1B_1 = 12$, расстояние от дальней точки изображения до главной оптической оси: $A_2B_2 = 30$ и расстояние между ближней и дальней точками изображения: $B_2B_1 = 60$. Прямая A_1A_2 должна проходить через фокус. Из подобия треугольников получаем $B_1F = 40$. Обозначим R – радиус исходной окружности, a_1 – расстояние от диаметра, закрывающего полуокружность, до линзы, f – фокусное расстояние. Тогда

$$\frac{R}{a_1} = \frac{12}{f + 40}, \quad a_1 = \frac{f + 40}{12} R.$$

Аналогично, для расстояния a_2 от ближней (к линзе) точки полуокружности до линзы имеем

$$a_2 = \frac{f + 100}{30} R.$$

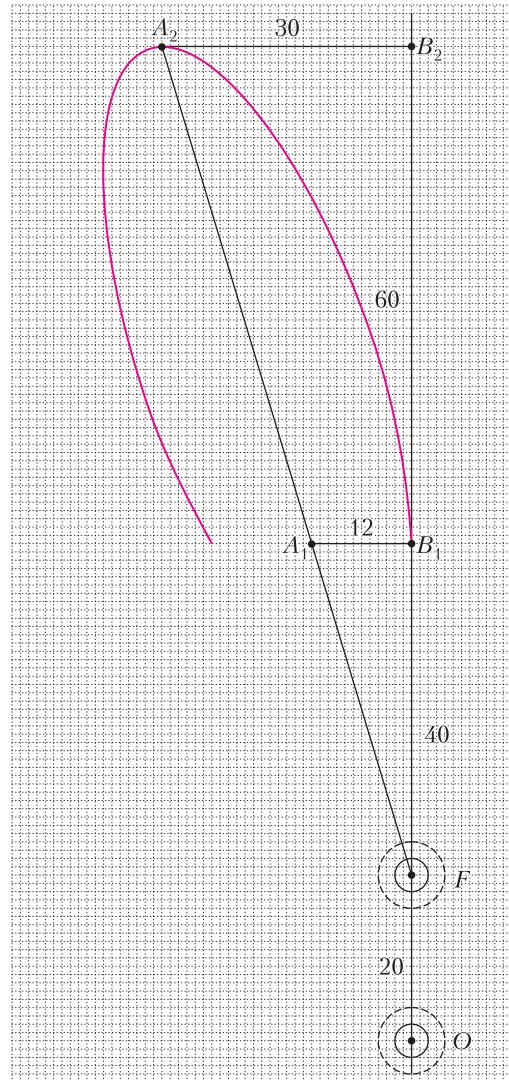


Рис. 29

Теперь записываем для точки изображения A_1 формулу линзы:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f + 40} + \frac{1}{a_1}.$$

Подставляя соотношение для a_1 , находим

$$R = 0,3f.$$

Учитывая, что $a_1 = a_2 + R$, имеем уравнение

$$\frac{f + 100}{30} + 1 = \frac{f + 40}{12}.$$

Решая его, получаем $f = 20$, а значит, $R = 6$.

5. А. Поскольку процесс происходит при постоянной температуре, давление под поршнем в процессе сжатия не меняется. Десятая часть количества водяного пара превращается в жидк-

кость. Работа внешних сил равна

$$A_{\text{вн}}^{(T)} = 0,1p_{\text{нас}}V = 0,1v_0RT,$$

где $v_0 = 1$ моль – количество вещества в сосуде под поршнем. Количество теплоты, выделяющееся при конденсации 0,1 моля пара, равно

$$Q_{\text{конд}} = -0,1v_0ML.$$

С другой стороны,

$$Q_{\text{конд}} = \Delta U^{(T)} - A_{\text{вн}}^{(T)}.$$

Отсюда следует второй ответ:

$$\Delta U^{(T)} = -0,1v_0ML + A_{\text{вн}}^{(T)} = -0,1v_0(ML - RT).$$

Б. Удельная теплота парообразования может быть найдена при помощи уравнения Клапейрона–Клаузиуса. Заменив производную отношением конечных разностей, для газовой фазы имеем

$$L = \frac{\Delta p}{\Delta T} \left(\frac{RT^2}{p_M} - \frac{T}{\rho_k} \right).$$

Легко видеть, что второе слагаемое на 5 порядков меньше первого, так что им можно пренебречь. Вычисляя разность давлений для температур 27 °C и 28 °C, получаем ответ:

$$L \approx 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг.}$$

В. Преобразуем первое начало термодинамики, используя соотношение $v_0Rdt = pdV + Vdp$:

$$\delta Q = (c_V + R)v_0dT - Vdp.$$

Уравнение Клапейрона–Клаузиса с учетом малости удельного объема имеет вид

$$\frac{dp}{dT} = \frac{mL}{TV}.$$

Подставим dp из этого равенства в предыдущее. После преобразований получим формулу для молярной теплоемкости насыщенного пара:

$$c = \frac{\delta Q}{v_0dT} = (c_V + R) - \frac{L_M}{T} = c_p - \frac{L_M}{T}.$$

При небольшом изменении температуры ΔT подведенное количество теплоты приближенно равно

$$Q = v_0 \left(c_p - \frac{L_M}{T} \right) \Delta T.$$

Используя данные таблицы, находим, что уменьшению объема на 10% соответствует увеличение температуры на 2 °C. Подставляя в формулу для Q значения $\Delta T = 2 \text{ К}$, $T = 300 \text{ К}$, $c_p = 4R$ (водяной пар – многоатомный газ), $L \approx 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ (из предыдущего пункта), получаем

$$Q \approx -228 \text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U^{(\text{нас})} = v_0c_V\Delta T \approx 50 \text{ Дж.}$$

Тогда

$$A_{\text{вн}}^{(\text{нас})} = \Delta U^{(\text{нас})} - Q \approx 278 \text{ Дж.}$$

Г. Сначала сделаем оценку и поймем, что при адиабатическом уменьшении объема становится ненасыщенным, тогда будем рассматривать его как идеальный газ. Используем уравнение адиабаты в виде $TV^{\frac{1}{3}} = \text{const}$ и находим температуру при уменьшении объема на 10%:

$$T_1 = T_0(0,9)^{-\frac{1}{3}} \approx 310,7 \text{ К.}$$

Теперь можно найти изменение внутренней энергии ненасыщенного пара:

$$\Delta U^{(Q)} = v_0 \cdot 3R(T_1 - T_0) \approx 266 \text{ Дж}$$

и работу внешних сил:

$$A_{\text{вн}}^{(Q)} = \Delta U^{(Q)} \approx 266 \text{ Дж.}$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцян**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР**
М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

**Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано
в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40**

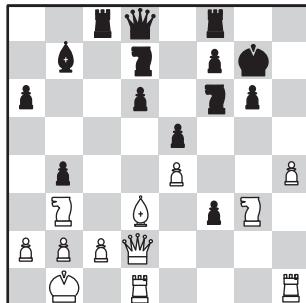
ШАХМАТНАЯ СТРАНИЧКА

Юниоры БЫОТ РЕКОРДЫ

13-летний Иван Землянский на турнире в Шардже в четвертый раз выполнил гроссмейстерскую норму и стал самым юным в истории России обладателем высшего шахматного звания (по правилам достаточно трех норм, но из них минимум одна должна быть получена в турнире, проводимом по швейцарской системе, – именно такой не хватало в коллекции молодого спортсмена). Примечательно, что предыдущий рекорд принадлежал Анишу Гири, который родился и вырос в Санкт-Петербурге и лишь в возрасте 15 лет сменил спортивное гражданство.

**Л. Мендонка – И. Землянский
Шарджа, 2024**

1. e4 c5 2. ♜f3 d6 3. d4 cd 4. ♜d4 ♜f6 5. ♜c3 a6 6. ♜d3 g6 7. f3 ♜g7 8. ♜e3 ♜bd7 9. ♜d2 b5 10. 0-0-0 ♜b7 11. ♜b1 0-0 12. h4 h5 13. ♜h6?! (точнее прямолинейное 13. g4! с последующим h5 в духе классической атаки в варианте дракона) e5 14. ♜b3 ♜c8 15. g4 b4 16. ♜e2 hg 17. ♜g3 gf 18. ♜g7 ♜g7.



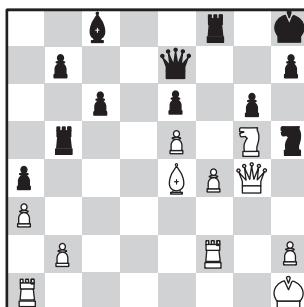
19. ♜g5? (ошибка; перевес давало предварительное вскрытие линии h: 19. h5 ♜h8 20. hg fg 21. ♜h8 ♜h8 22. ♜g5) ♜h7 20. ♜g4 ♜df6 21. ♜f3 d5?! (слишком рано, точнее 21... ♜h8) 22. h5 de 23. ♜e4 ♜e7 24. ♜hg1??

Грубый зевок, проигрывающий качество и партию. Компьютер приводит красивый ничейный вариант: 24. hg ♜e4 25. ♜e4!! ♜e4 26. ♜h7+ ♜f6 27. ♜e4 с последующим вечным шахом. 24... ♜e4 25. ♜e4 ♜g5 26. ♜g5 ♜e4 27. ♜e4 ♜g5 28. hg ♜cd8 29. ♜h1 fg 30. ♜b4 ♜de8 31. a3 ♜g2 32. ♜e1 ♜d5 33. ♜g1 e4 34. ♜g3 ♜e6 35. ♜e3 ♜ef6 36. ♜g5 ♜f5 37. ♜g2 ♜f3 38. ♜a7+ ♜f7 39. ♜a6 ♜3f6 40. ♜c8 ♜e5 41. ♜h3 ♜f3 42. ♜h4 ♜f4 43. ♜d8 ♜b3 44. ♜d4+ ♜h7 45. ♜a2 ♜f3 46. ♜g1 ♜h3, белые сдались.

Тем временем, 12-летний турецкий гроссмейстер Ягиз Каан Эрдогмуш побил рекорд Юдит Полгар, который держался целых 35 лет. Он смог поднять свой рейтинг ФИДЕ до отметки 2569 пунктов ЭЛО, это исторический максимум для шахматистов младше 13 лет.

**А. Предке – Я. Эрдогмуш
Баку, 2023**

1. ♜f3 d5 2. g3 ♜f6 3. ♜g2 e6 4. 0-0 ♜e7 5. c4 0-0 6. d4 c6 7. ♜c3 a5 8. ♜e5 ♜fd7 9. ♜e3 ♜e5 10. de dc 11. ♜c2 ♜d7 12. ♜e4 a4 13. a3 ♜a5 14. f4 ♜c5 15. ♜c5 ♜c5+ 16. ♜h1 f6 17. ♜c2 fe 18. ♜e4 ♜e7 19. ♜g5 g6 20. ♜c4 ef 21. gf ♜b6 22. ♜d4 ♜d5 23. ♜d2 ♜f6 24. ♜c3 ♜d5 25. ♜g3?! (точнее 25. ♜d2, не допуская активизации ладьи по линии a) ♜a5 26. e4 ♜f6 27. e5 ♜h5 28. ♜g4 ♜b5 29. ♜e4 ♜h8 30. ♜f2.

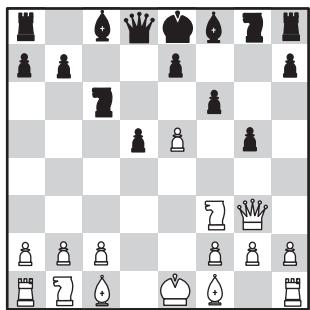


30... ♜e5! 31. fe? (ошибка в расчетах: необходимо сразу 31. ♜h7 ♜h7 32. ♜g6 ♜h6 33. fe ♜f2 34. ♜h5) ♜f2 32. ♜h7 ♜h7

33. ♜g6 ♜f6! В отличие от варианта, приведенного в примечаниях к 31 ходу, черные активизируют ферзя и остаются с лишней пешкой. 34. ♜g1 ♜h4 35. ef ♜f6 36. ♜e4 e5 37. ♜g3 ♜f4 38. ♜f4 ef 39. ♜g1 ♜e2 40. ♜d1 ♜g4 41. ♜d4 f3 42. h3 f2+ 43. ♜f1 ♜h3+ 44. ♜g2 ♜g2+ 45. ♜g2 b5 46. ♜d6 ♜b2 47. ♜c6 b4 48. ab a3, белые сдались.

**А. Миттал – Я. Эрдогмуш
Шарджа, 2024**

1. e4 c6 2. d4 d5 3. e5 c5 4. ♜f3 cd 5. ♜d4 ♜c6 6. ♜f4 f6 7. ♜g3 g5!?



Дебютная новинка, характерная для эпохи компьютерных шахмат. 8. ♜b5 ♜h6 9. ♜d4 (точнее 9. 0-0, но без подготовки найти такой ход сложно) ♜b6 10. c3 ♜f5 11. ♜c6+ ♜c6 12. ♜f5 ♜f5 13. 0-0 h5 14. ef ef 15. h4 gh 16. ♜h4 0-0-0 17. ♜e3 ♜g8 18. ♜d4 ♜d6 19. ♜d2 ♜g6 20. f4 ♜dg8 21. ♜f2 ♜d7 22. ♜f6?! (22. ♜e1) ♜g4 23. ♜h5?! Белые сами открывают линии для атаки на своего короля. 23... ♜f4 24. ♜d4 ♜g5 25. ♜e2 ♜h3 26. ♜f1 ♜g2 27. ♜g2 ♜h3 28. ♜g5+ 29. ♜f2 ♜h4+ 30. ♜g3 ♜g3+ 31. ♜e3 ♜f4+ 32. ♜d3 ♜h7+, ввиду неизбежного матя белые сдались.

A. Русланов

Индекс 90964

Как далеко может улететь
воздушный шарик?

«А шарик вернулся, а он голубой»

Уроки с физикой

ISSN 0130-2221 24005



9 770130 222245



PASCAL

(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 35 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)