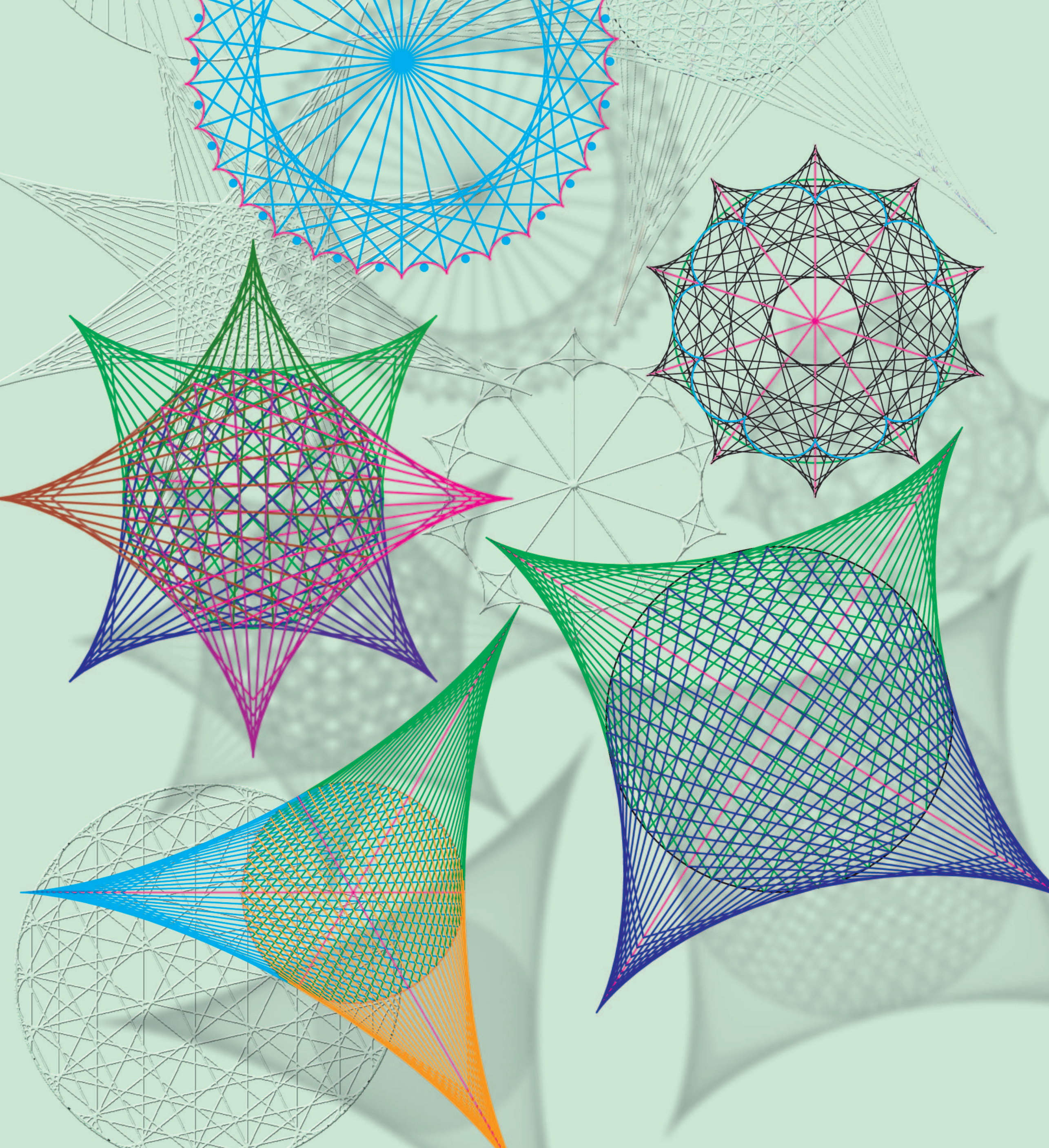
МАРТ
ISSN 0130-2221
2024 · № 3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СИММЕТРИКС из трапеции

Симметриксы – это головоломки, в которых из нескольких фигурок требуется сложить симметричную фигуру. Этот тип головоломок придумал японский изобретатель Тадао Китазава в 2003 году. Они часто появляются на ежегодных встречах в российском клубе ценителей головоломок «Диоген» и на аналогичных международных встречах любителей головоломок IPP (International Puzzle Party).

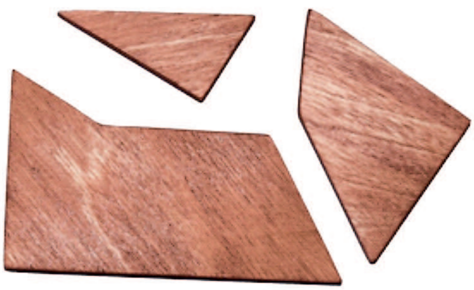
Существуют симметриксы с двумя, тремя и более элементами. В головоломках этого типа нужно из нескольких игровых элементов сложить симметричную фигуру, руководствуясь простыми правилами: прикладывая элементы друг к другу, их можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать один на другой.

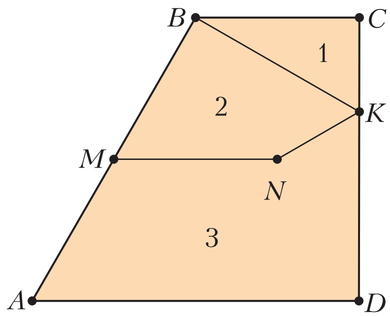
Предлагаем познакомиться с симметриксом, все три элемента которого можно получить, разрезав прямоугольную трапецию $ABCD$ с $AB = AD$ и углом A, равным 60°, так, как показано на рисунке. Здесь точка M – середина AB, точка K такая, что $KD = 2CK$, а точка N такая, что MN равно 2/3 средней линии трапеции. Отрезками BK, KN и MN трапеция разбивается на три части: прямоугольный треугольник BCK, четырехугольник $BKNM$ и пятиугольник $AMNKD$. Это и есть три игровых элемента симметрикса. Их легко можно сделать из бумаги, картона, пластика или из дерева (как на фото).

Сложите из этих трех частей трапеции симметричную фигуру.

Желаем успеха!

Н.Авилов





КВАНТ МАРТ 2024 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Юлий Борисович Харитон

(к 120-летию со дня рождения)

Л.БЕЛОПУХОВ

Жизнь и судьба

В решении Специального комитета Совета Министров СССР от 16 марта 1946 года были и такие строки:

«Реорганизовать сектор № 6 Лаборатории № 2 АН СССР в конструкторское бюро № 11 Лаборатории № 2 АН СССР по разработке, конструированию и изготовлению атомных бомб».

А 9 апреля 1946 года вышло Постановление Совета Министров СССР «Вопросы Лаборатории № 2 АН СССР», в котором повторен текст решения Спецкомитета с небольшим изменением – вместо слов *атомных бомб* значится *опытных образцов реактивных двигателей*. Согласно этому постановлению, несколько десятков первых моделей атомных и водородных бомб во всех документах зашифровывались как РДС-1, РДС-2, ..., что официально читалось как *реактивный двигатель специальный-модель 1* и т.д. Но уже после первого испытания появились фольклорные названия *реактивный двигатель Сталина* и *Россия делает сама.* Начиная с РДС-6, все имевшие дело с этими «изделиями» уже были уверены, что верна вторая расшифровка и что придумал ее сам Курчатов.

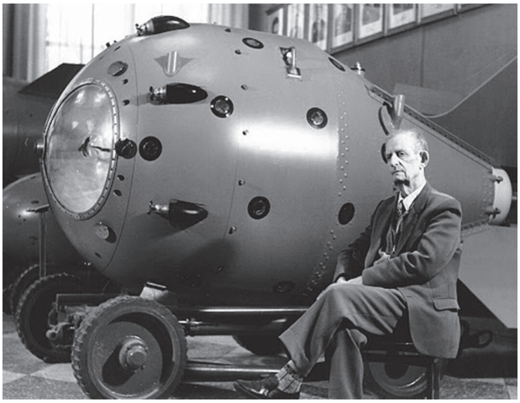
Вряд ли Юлий Борисович Харитон думал тогда, что этим Постановлением его жизнь и судьба определяются на предстоящие *пятьдесят лет.* А фактически он и предыдущие два года, будучи заведующим сектором Института химической физики, занимался подготовкой к новой работе.

Оценив масштаб предстоящей деятельности, Ю.Б. Харитон осознал, что это КБ на самом деле с самого начала должно стать крупным научным институтом, а не только инженерным учреждением, и что вместе с опытным заводом это будет многотысячный коллектив А это значит, что почти на голом месте должен возникнуть целый город со всеми городскими службами и учреждениями. Для создания этого города да и для оборудования и снабжения научных и инженерных лабораторий нужен особый орган, и главой этого органа должен быть не главный конструктор, а *начальник* конструкторского бюро, обладающий всеми необходимыми правами на государственном уровне. И в решении Спецкомитета появился пункт:

«Назначить Павла Михайловича Зернова, заместителя министра танковой промышленности, начальником КБ-11 с освобождением от всех других работ».

Вместе с начальником Первого главного управления Б.Л. Ванниковым Харитон и Зернов выбрали место для КБ-11, удовлетворяющее многим условиям. Оно должно находиться не очень далеко от Москвы, быть достаточно безлюдным, но в то же время иметь транспортную доступность и минимальную базу для быстрого начала работ. В большом лесном заповеднике на границе Мордовской АССР и Горьковской области, вблизи небольшого монастырского поселка Саров (монастырь в советское время был закрыт) в начале войны был построен завод боеприпасов (минометных мин для «Катюши») №550. Его производственные помещения располагались в переделанных бывших монастырских зданиях. Для КБ-11 их нетрудно было приспособить под лаборатории и мастерские. Минометный завод срочно перевели в другой регион.

Окончание. Начало — в предыдущем номере журнала.



Главный конструктор Юлий Борисович Харитон у макета своего первого «детища» в музее Сарова

Под «владения» КБ-11 было определено 100 км^2 заповедных земель и еще 10 км^2 территорий Горьковской области. Сегодня закрытая территория уже в два раза больше. От станции Шатки (в 33 км от Арзамаса) туда вела узкоколейная железная дорога протяженностью 95 км. Перед принятием правительственных решений Харитон и Зернов проделали этот путь на дрезине, которую они с трудом раздобыли в Шатках, поскольку завод уже практически не работал. Харитон потом вспоминал, как он «… едва не наступил на гнездо какой-то крупной птицы, когда, сойдя с дрезины, углубился в лес во время первой рекогносцировки на месте будущего города Арзамас-16». Среди засекреченных названий этого пункта, кроме КБ-11, были и «550», и «Арзамас-16», и «Приволжская контора Главпромстроя» и др. Название поселка Саров и его обозначение были специальным постановлением изъяты со всех карт и из всех официальных документов.

В плане работы КБ-11, представленному Харитоном и Зерновым в июле 1946 года, предусматривалось открытие 8 научных лабораторий, мастерских, полигонов и опытного производства, вскоре ставшего заводами № 1 и № 2. Осуществление этого плана началось еще в Москве, в помещениях Лаборатории № 2. А через год, в июле 1947 года в Саров прибыли первые 36 научных сотрудников и 35 инженерно-технических работников. Еще через год это число выросло почти в 3 раза и, кроме того, на опытных заводах стали работать около 2000 рабочих, инженеров и техников.

И теперь огромную роль сыграл тот факт, что по предложению и настоянию Харитона решением Спецкомитета была предусмотрена должность начальника КБ и что на эту должность был назначен П.М. Зернов. В годы войны Зернов проявил себя выдающимся руководителем производства танков и другого вооружения, стал генерал-майором танковой службы, заместителем наркома танковой промышленности. Надо отдать справедливость председателю Спецкомитета – лучшего организатора для КБ-11 трудно было найти. Зернов обладал огромной работоспособностью, организаторской «хваткой», технической грамотностью и смекалкой и, наконец, как и Харитон, отзывчивостью и человеколюбием.

Главной задачей Зернова было создание и организация нормальной работы научно-исследовательских и инженерных подразделений, а также техническое и кадровое обеспечение всех работ. Но немалую роль играла и организация жизни и быта людей. За пять лет его пребывания на посту начальника КБ-11 в Сарове было построено более 400 зданий и сооружений, в том числе жилые дома и общежития, ясли и детские сады, школы, больницы и аптеки, стадион и лыжная база, вплоть до театра. Большое внимание Зернов уделял обеспечению воскресного отдыха сотрудников, особенное внимание проявлял к молодежи и ее нуждам.

Благодарная память о его делах увековечена в Сарове в названии самой длинной и красивой улицы и парка культуры и отдыха. А основная его производственная деятельность была оценена двумя Звездами Героя Социалистического Труда и званиями Лауреата Ленинской и Государственных премий. После работы на «объекте» П.М. Зернов стал заместителем Министра среднего машиностроения (атомного министерства).

А главным делом Харитона стала организация работы во всех лабораториях и отделах и координация их деятельности. Он был в курсе всех основных исследовательских и конструкторских работ до мельчайших деталей, знал на память сотни листов чертежей – все сотрудники поражались этому знанию и умению находить оптимальные решения спорных вопросов.

КБ-11 стремительно развивалось. Одновременно шли работы по плутониевой бомбе (РДС-1) и по урановой бомбе (РДС-2). К лету 1949 года были не только разработаны их конструкции, но и испытаны модели этих «специальных реактивных двигателей». Испытания происходили в реальных условиях сброса макетов бомб с самолета с высоты 10 километров. Для этих испытаний был создан специальный аэродром (в Крыму, севернее Евпатории). Макет представлял собой точную конструкцию бомбы, но, конечно, без главной ядерной начинки, или, как писалось в документах, «без заправки топливом». Кстати, сами бомбы уже были готовы, а «топливо» запаздывало. Плутония нужно было 10 килограммов, а мощность первых заводов по его получению была всего лишь несколько граммов в сутки. Немногим больше была и производительность комбинатов по получению чистого изотопа урана-235.

Впоследствии было много спекулятивных публикаций на тему о самостоятельности советских разработок бомб. В 1984 году сам Харитон в первом же интервью после начала рассекречивания истории Атомного проекта сказал, что были некоторые материалы разведки и, главное, очень важные материалы, переданные СССР одним из создателей американской бомбы Клаусом Фуксом. Но Харитон тогда умолчал о той гигантской научно-исследовательской и инженерно-конструкторской работе, которая была необходимой для воплощения американской идеи в жизнь. А главное, РДС-2, урановая бомба, была полностью разработкой КБ-11. И все последующие конструкции бомб, включая и водородные бомбы, были полностью самостоятельными.

Думается, что Харитон специально умалял роль сверхсекретного тогда КБ-11 и свою собственную роль в создании атомного оружия. Через 10 лет, когда завеса секретности сильно уменьшилась, Харитон в письме американским физикам уже совсем по-другому оценивал значение некоторых американских данных. Важнее было знать не что-то по конструкции бомбы, а о тех усилиях и достижениях, которые были сделаны в США для получения изотопов урана и плутония. Именно знание этих вопросов помогло, по словам И.В. Курчатова, сэкономить не меньше года работы по созданию бомбы.

И.В.Курчатов и Ю.Б.Харитон отдыхают на Алтае после испытания «водородки» РДС-37 (1955 г.)

В 1948 году академику И.Е.Тамму было поручено начать теоретическую разработку идеи водородной бомбы. Он привлек к этой работе своего аспиранта А.Д.Сахарова, и после защиты им диссертации Тамм и Сахаров уже в КБ-11 возглавили отдел по разработке сверхбомбы. Ее первый вариант имел индекс РДС-6 и был испытан в 1953 году. А.Д.Сахаров вскоре стал главным теоретиком проблемы (наравне с Я.Б.Зельдовичем) и оставался им в течение 20 лет. Но Харитон, как главный конструктор и главный научный руководитель КБ-11, участвовал и в этой проблеме.

К.И.Щелкин, Ю.Б.Харитон и И.В.Курчатов на воскресной прогулке в Сарове (1954 г.)

Важнейшей частью работы Харитона стало курирование изготовления бомб на заводах № 1 и № 2, построенных на общей территории с КБ-11. Еще в 1947 году Харитон поставил вопрос о строительстве и сооружении специального полигона для полноценных испытаний изделий РДС, «заряженных топливом», т.е. настоящих атомных бомб. Он участвовал и в выборе места для этого полигона, и в руководстве созданием всей измерительной аппаратуры для определения параметров взрыва. И, конечно, в подготовке самих испытаний и их осуществлении. Он подписывал и протоколы подготовки, и решения о проведении испытаний, и отчеты о проведении и о результатах испытаний. Причем не только подписывал, а глубоко вникал и делал выводы для совершенствования конструкций. И хотя эти испытания проходили очень далеко от Сарова (на семипалатинском и новоземельском полигонах), именно в Сарове недавно открыли памятник-стелу «Испытателям ядерного оружия».

Но вскоре стало стремительно возрастать количество правительственных заданий на разработку разнообразных вариантов ядерного оружия. Возможностей КБ-11 уже не хватало. И было решено создать второй центр конструирования атомных и водородных бомб – КБ-1011. Харитон отпустил для руководства этим центром своего самого близкого помощника и первого заместителя Кирилла Ивановича Щелкина, ставшего главным конструктором и научным руководителем нового КБ, и одного из самых талантливых молодых сотрудников Евгения Ивановича Забабахина, который после ухода Щелкина заменил его на ответственном посту руководителя КБ-1011. Между двумя КБ не было вражды, их соперничество всегда оказывалось полезным для дела. А первая «настоящая» водородная бомба, РДС-37, с тротиловым эквивалентом 1,6 мегатонн была совместным «детищем» Сахарова и Забабахина, Харитона и Щелкина. Впоследствии КБ-11 специализировалось на бомбах для ракет, а КБ-1011 – на «изделиях» с другими способами «доставки».

Для дислокации КБ-1011 была выбрана глухая красивейшая местность в Челябинской области. Официальным названием этого КБ стало «Челябинск-70». Говорят, что однажды во время совещания начальник КБ, посмотрев в окно на зимний пейзаж, сказал: «Какая красота! Настоящий снежинск!». Сегодня – это закрытый наукоград Снежинск, в котором находится Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики.

Памятник испытателям ядерного оружия

Отличие от саровского центра только в одном слове – *технической*, а не *экспериментальной.* И еще одно отличие – снежинский институт носит имя академика Е.И.Забабахина, а саровскому институту до сих пор не присвоено имя Ю.Б. Харитона, несмотря на неоднократные обращения в правительство ученых и старожилов Сарова.

Регулярно, не реже двух раз в месяц Харитон принимал участие в заседаниях Научно-технического совета при Первом главном управлении Совета Министров СССР, который был штабом всего Атомного проекта. И это его участие было очень активным в обсуждении всех вопросов проекта, а не только касающихся «родного» КБ-11. А для этого нужно было заранее познакомиться с выносимыми на обсуждение вопросами. Где же взять на все это время? Повторим слова академика А.М. Шальникова: «Работает столько, сколько нормальные люди не могут работать». Каждый день с 8 утра до 10 вечера, иногда и по воскресеньям, а по субботам – всегда, временами и до полуночи. И обязательно – в дороге. Он считал дорожное время самым продуктивным для работы, поскольку средством передвижения был не самолет, а поезд (самолетом не разрешалось летать). Для него (как и для Курчатова) были оборудованы специальные вагоны (с организованным горячим питанием – ведь дорога занимала до 10 часов). Выделение специальных вагонов обосновывалось созданием условий для работы. Когда у Харитона был попутчик (например, И.В. Курчатов или еще кто-либо из руководства), он просил не мешать ему работать, а «для компании» с удовольствием полчасика отдыхал, затевая со спутником интересную беседу о книгах или об искусстве.

Одна из поездок стала очень печальной. Харитону нужно было обсудить с Курчатовым важный вопрос о создании и подготовке к испытаниям бомбы с тротиловым эквивалентом до ста миллионов тонн. Такое количество тротила заняло бы при перевозке общую длину железнодорожных составов, большую длины земного экватора. После

Предпоследняя встреча друзей в санатории Барвиха (1950 г.)

испытания (с тротиловым эквивалентом 58 мегатонн) появилось полуофициальное название этого «изделия» – *царь-бомба.* По мнению тогдашнего руководства страны, такой невероятной силы взрыв нужен был для устрашения «империализма». По своему характеру Харитон «по-солдатски» выполнял распоряжение руководства. Но в душе он был против создания такого страшного оружия, способного уничтожить целиком небольшую страну. И он знал, что Курчатов тоже был против. Харитона с Курчатовым связывали не только служебные отношения. Они стали большими друзьями еще в 30-е годы. Поэтому он еще раз хотел обсудить проблему с Курчатовым, прежде чем поставить свою подпись под решением научно-технического совета Министерства среднего машиностроения о создании этой бомбы. Но Курчатов был под Москвой в санатории после очередного сердечного приступа. И 7 февраля 1960 года Харитон приехал в этот санаторий. Погожим зимним днем на скамейке в санаторском саду они стали обсуждать сложившуюся ситуацию. Увлекшийся разговором Харитон не сразу обратил внимания на то, что Курчатов склонил голову ему на плечо. На самом деле это был конец – сердце Игоря Васильевича остановилось. И стоявшие неподалеку охранники, и санаторские врачи ничего не смогли сделать. А было воскресенье. И запоздало прибывшая бригада лучших врачей-кардиологов уже не смогла запустить сердце вновь. Харитон, будучи рядом, потерял своего лучшего друга. До этого момента у него не было горя сильнее.

Вы обратили внимание на слово «охранники»? Да, у нескольких руководителей Атомного проекта была установлена круглосуточная охрана. У Курчатова и Харитона вначале было по три человека, дежуривших посменно. Это были ответственные работники комитета государственной безопасности в немалом чине. Официально они назывались секретарями-помощниками. Они должны были быть рядом с охраняемым «объектом» на всех секретнейших заседаниях (в приемной) и следовать за ним даже на секретных объектах – в Сарове или на семипалатинском полигоне. В воспоминаниях о Харитоне его «секретари» написали: «…это было великое счастье для нас – работать с Юлием Борисовичем Харитоном», так внимательно и заботливо относился к ним Харитон, всегда находя для них лишнюю возможность увидеться с семьями, которые оставались в Москве. Эта охрана существовала больше 20 лет и отменена была только в 1968 году.

Любопытно, как группа молодых испытателей, среди которых был и автор этой статьи, на семипалатинском полигоне впервые увидела Харитона. С Курчатовым и Сахаровым мы уже научно общались, а с Харитоном еще нет. И однажды (летом 1955 года) во время перерыва в испытаниях воскресным утром на берегу Иртыша мы увидели на верхней тропинке пару: первый – тщедушный, небольшого роста, в неказистом плаще, а за ним – высокий представительный, важно шагающий. «Ребята, – сказал нам гулявший с нами хорошо нам знакомый по работе академик С.А. Христианович, – вы ведь еще не видели Харитона, вон он идет!». Мы конечно уставились на второго. «Да нет, – сказал Сергей Алексеевич, – это охранник, Харитон впереди». Помню, мы поразились его невзрачному, незаметному виду, мы еще не знали о его замечательных человеческих чертах, о его великой скромности.

Памятник царь-бомбе в Снежинске

Царь-бомба, разработанная и сконструированная конструкторскими бюро Сарова и Снежинска, была испытана 30 октября 1961 года. Это был апогей гонки ядерных вооружений. В музее ядерного оружия в Сарове есть модель царь-бомбы, в точности копирующая ее внешний вид. А в Снежинске есть оригинальный памятник – на постаменте находится двухметрового диаметра раскрашенный шар, изображающий земной глобус. Надписи нет, но многие знали, что главной частью царь-бомбы был двухметровый шар ее «горючего» – дейтерида лития. А глобусная раскраска означает опасность для всего земного шара.

Общественная деятельность и награды. Память

В течение почти 30 лет после завершения первого этапа создания ядерного оружия (водородная бомба РДС-37, 1955 г.) работа Харитона продолжалась, на первый взгляд, довольно однообразно. Главным стало уменьшение веса бомб, предназначенных для ракет. Некоторым разнообразием отличались конструкции бомб для мирного хозяйственного использования. В Советском Союзе было проведено 114 мирных подземных ядерных взрывов, и во всех этих взрывах Харитон принимал непосредственное участие.

Большим потрясением для Харитона было прекращение работы на объекте академика А.Д.Сахарова в связи с изменени-

Ю.Б.Харитон и И.В.Курчатов на съезде партии в Кремле (1956 г.)

ем его жизненной позиции по отношению к принципиальным политическим проблемам. Не касаясь в этой статье всей сложности этого вопроса, можно отметить только, что для Харитона на первом месте всегда стояли безопасность Родины и страсть к науке. Он никогда не участвовал в политических спорах, но и не препятствовал этим спорам. В 1956 году, в пятидесятидвухлетнем возрасте он вступил в партию.

Шесть раз подряд, начиная с 1950 года, Харитон избирался депутатом Верховного Совета СССР. Он очень серьезно относился к обязанностям депутата. Несколько созывов он был депутатом по Мичуринскому (в Тамбовской области) избирательному округу (подальше от иностранных корреспондентов). Он добился полной газификации города Мичуринска и всех деревень Мичуринского района. На сессиях Верховного Совета именно Харитон выдвинул и добился принятия закона о пенсионном обеспечении колхозников. Регулярно встречаясь со своими избирателями, он добивался решения многих конкретных вопросов, с которыми к нему обращались. При этом большой трудностью было неразглашение своего могущественного положения в государстве. Во время избирательных кампаний он считался научным сотрудником Института химической физики АН СССР. Харитон старался выполнять порученное ему государством дело так же внимательно и активно, как и все, что он делал. Несколько раз он поддерживал выступления ученых по поводу недостойной деятельности Т.Д.Лысенко и группы философов, считавших теорию относительности и квантовую механику неправильными («буржуазными») науками.

Ю.Б.Харитон (как и И.В.Курчатов) трижды получал высшую государственную премию первой степени. Официально такой премии не было. Но существовало совершенно секретное постановление правительства от 21 марта 1946 года, еще задолго до первого испытания атомной бомбы, устанавливающее подробные правила награждения по Атомному проекту. Премии были пяти степеней. Первая премия – звание Героя Социалистического Труда, лауреата Сталинской премии первой степени, награждение одним миллионом рублей, особняком или большой квартирой в городе жилплощадью 200 $м^2$ и дачей со всей обстановкой, автомашиной, освобождением от платы за обучение детей и бесплатным проездом всех членов семьи на всех видах транспорта. Вторая премия – такая же, как первая, но денежное вознаграждение меньше (700 тысяч рублей) и нет городской квартиры. Соответственно уменьшались денежное вознаграждение и достоинство званий для третьей, четвертой и пятой премии. Но оставались бесплатное обучение детей и бесплатный проезд. Все работники, участвующие в Атомном проекте, получали заработную плату в полтора-два раза больше, чем работники соответствующих должностей в других отраслях промышленности и науки. Все получаемые денежные вознаграждения Харитон перечислял медицинским учреждениям Горьковской области.

После первого испытания бомбы 29 августа 1949 года по указу Верховного Совета СССР с грифом «не подлежит опубликованию» 36 человек получили звание Героя Социалистического Труда, 260 человек были награждены орденом Ленина, 496 человек – орденом Трудового Красного Знамени, 52 человека – орденом Знак Почета и свыше 2000 человек – медалями. Большинство награжденных – это работники только что родившейся атомной промышленности, рабочие, техники и инженеры. Эти цифры свидетельствуют об огромном масштабе, который уже приняла атомная промышленность. И о том значении, которое придавало ей руководство страны.

Ю.Б.Харитон был крайне скромным человеком. Свои три Звезды Героя он надевал только в самых официальных случаях Он иногда находил возможность общаться с интересными для него людьми в неофициальной обстановке, когда эти люди и не подозревали о его работе. Так, например, у него был хороший знакомый, который обладал способностью предугадывать погоду по народным приметам и собственным наблюдениям. Они много общались по поводу погодных прогнозов, и этот умелец был уверен, что его милейший знакомый Юлий Борисович работает в сельском хозяйстве, где важны прогнозы погоды, и только удивлялся, что всегда в их встречах участвует молчаливый «племянник», как его представлял Харитон, не имевший права на личные встречи с людьми, не относящимися к «проекту» (не считая, конечно, родных и близких). А интерес Харитона к прогнозам погоды объяснялся важностью прогнозов для назначения дат испытаний «изделий». Официальные прогнозы в те годы часто оказывались неверными. Кстати говоря, сам Харитон никогда не рассказывал об этом своем знакомом. О нем поведал в своих воспоминаниях один из его охранников

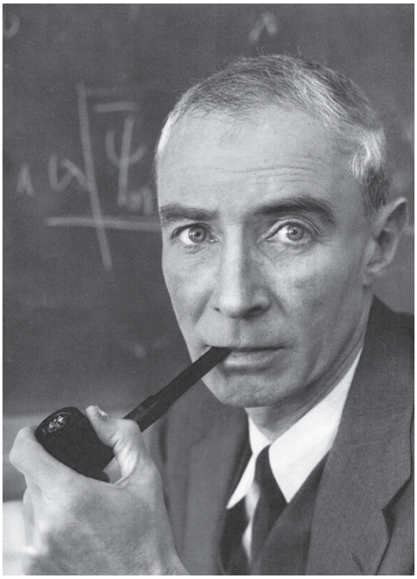
А вот еще один пример из этих воспоминаний. При заполнении какой-то анкеты (в связи с выборами в Верховный Совет) Харитону надо было ответить на вопрос о его воинском звании. Он знал, что какое-то звание ему присваивали, но не знал, какое именно. Примечательно, что он не поручил никому выяснить вопрос, а, считая это дело глубоко личным, сам решил в очередной приезд в Москву сходить в военкомат по месту жительства и узнать о своем звании. Конечно, ему пришлось идти с охранником, которому он не разрешал говорить о своем статусе. И охранник рассказывает в воспоминаниях, как Харитон сидел около какого-то кабинета и смиренно ждал, когда его изволит принять некий капитан. Наконец, этот капитан пошел в архивы узнать звание «какого-то Ю.Б.Харитона», а вернувшись, трясясь от страха, сказал: «Вы – генерал-полковник».

Людей, которые лично знали Харитона, сейчас остались считанные единицы, но есть много воспоминаний и свидетельств значения его личности в правительственных решениях и постановлениях Атомного проекта. Причем память о нем сохраняется в науке не только в области использования ядерной энергии. В последние двадцать лет его жизни бывшее атомное «конструкторское бюро» превратилось под его руководством в крупный научный центр современной физики мирового значения. В нем традиционно развиваются работы, основы которых были заложены Юлием Борисовичем Харитоном, – получение и применение сверхсильных магнитных полей и сверхмощных лазеров для термоядерного синтеза, устройство ядерных реакторов и ускорителей импульсного типа, изучение свойств веществ при огромных давлениях и многое другое, что было связано с теми давлениями и температурами, которые возникали при ядерных взрывах.

Две судьбы. Харитон и Оппенгеймер

В упомянутой в начале статьи (см. «Квант» №2) книге о Харитоне есть два очерка Давида Хэллоуэя, профессора политологии Стэнфордского университета США, историка науки. Он несколько лет жизни посвятил истории появления ядерного оружия и, в частности, в 1994 году издал книгу «Сталин и бомба». В одном из очерков («В поисках Харитона») Хэллоуэй рассказывает о своих встречах и беседах с А.Д.Сахаровым и Ю.Б.Харитоном. В 1987 году Сахаров сказал ему о Харитоне только то, что «Харитон – Оппенгеймер советского проекта».

Хэллоуэй три раза встречался с Харитоном. Последняя встреча в 1992 году состоялась, хотя это кажется и невероятным, в Сарове, еще недавно сверхзасекреченном городе. Но в новом государстве, в Российской Федерации, тогда еще не успела родиться новая система государственной



Джулиус Роберт Оппенгеймер

безопасности и была такая неразбериха, что Харитону даже не у кого было спросить разрешения на приглашение американского ученого. И он рискнул сделать это сам. Конечно, он не раскрывал секретов и показывал только те лаборатории, которые не были напрямую связаны с конструированием и изготовлением ядерного оружия. Он гордился теми «мирными достижениями», которые под его руководством были сделаны в Сарове для развития физики как науки.

В длительных беседах обсуждалась история американского атомного проекта. Выяснилось, что Харитон хорошо знал, кто такой Оппенгеймер. «Тогда у меня возникла идея сравнения этих людей», – пишет Хэллоуэй. Тем более, что через два с половиной года и сам Харитон начал с этого сравнения свое письмо Мемориальному комитету Джулиуса Роберта Оппенгеймера, который пригласил Харитона принять участие в мероприятиях, посвященных памяти Оппенгеймера (девяностолетию со дня рождения). Харитон сожалел, что не смог из-за болезненного состояния принять это приглашение, и послал письмо.

Для сборника, посвященного памяти Харитона, Хэллоуэй написал очерк «Оппенгеймер и Харитон: Параллели жизни». Главная параллель – в том, что они оба были первыми руководителями первых ядерных оружейных центров своих стран. Но есть и несколько совпадений, которые отметил сам Харитон и назвал их «забавными». Это совпадение возрастов – Оппенгеймер младше всего на 2 месяца и 11 дней; совпадение имен – Юлиус и Юлий; привитый в детстве в семье (от матерей) интерес к искусству и литературе; почти одновременная работа в Кавендишской лаборатории у Резерфорда в Кембридже. И совсем забавное совпадение – неподалеку от Сарова была деревенька Аламасово (жителей которой пришлось переселить в другое место). А ведь аналогом саровского КБ-11 была лаборатория в городке Лос-Аламос, что вполне созвучно названию деревни Аламасово. Можно добавить – оба почти в одно и то же время защитили диссертации, имеющие отношение скорее к химии, чем к физике. Оба одновременно (в 1939 году) всерьез заинтересовались ядерной физикой и взаимодействием урана с нейтронами и с разницей в два года стали фактическими создателями центров конструирования ядерного оружия в США и в СССР. Оба они присутствовали на первых опытных испытаниях своих «изделий».

16 июля 1945 года в пустынной местности штата Нью-Мексико, в нескольких десятков километров от города Аламагордо в 5 часов 10 минут утра Оппенгеймер включил аппарат проверки всех электрических систем испытательного полигона и автоматической подачи сигнала на бомбу. В 5.30 произошел взрыв. Сначала наступило почти полное молчание озаренных вспышкой света «ярче тысячи солнц» наблюдателей в 9 км от башни 30-метровой высоты, на которой был накануне установлено изделие лаборатории Оппенгеймера. Оно получило кодовое название *gadget,* что долго (в догаджетовую эпоху) переводилось на русский, как *штучка.* Тротиловый эквивалент этой плутониевой бомбы был определен в 21 килотонну. Сам Оппенгеймер описал свою реакцию как ошеломление. Ему в голову пришли строки из хорошо им знаемого древнеиндийского

религиозного эпоса «Бхагавадгиты»: «Я стал смертью, сокрушительницей миров». И у всех наблюдателей было чувство наступления для человечества новой эпохи – атомной эры.

29 августа 1949 года в пустынной местности в 170 км от Семипалатинска (ныне – казахстанский город Семей) в 6 часов 48 минут был включен аппарат управления подрывом и в 7.00 произошел взрыв «изделия РДС-1» на 37-метровой башне. Это была плутониевая ядерная бомба, ее тротиловый эквивалент – 22 килотонны. Включение автомата на подрыв, «нажатие кнопки», по указанию Харитона произвел конструктор этого управляющего автомата Сергей Львович Давыдов. Харитон никогда не говорил, что он почувствовал, когда произошел взрыв. Думается, что, как и у всех наблюдателей, прежде всего пришло глубокое чувство избавления от надвигающейся опасности уничтожения страны страшным американским ядерным оружием. И, конечно, чувство удовлетворения и гордости за выполнение невероятно трудной работы. Много лет спустя он говорил своему внуку, что на сто процентов был уверен в успехе. Что ж, может быть, это соответствовало всему стилю его работы, ответственности, тщательности и дотошности.

И еще. Все присутствовавшие знали, что, кроме испытанной бомбы РДС-1, в их родном КБ-11 уже существуют урановые бомбы РДС-2, более мощные и более легкие, чем американские аналоги. Поскольку РДС-1 сработала, РДС-2 тоже должна сработать, и это будет мощный ядерный щит от американской угрозы. Возможно, именно тогда и родилось замечательное по своей краткости и в то же время глубокой сущности крылатое выражение «перехаритонить Оппенгеймера».

В этом выражении, помимо сходства, заключается и глубокое различие в жизни и судьбе этих двух великих ученых минувшего столетия. Прежде всего, отмеренный срок жизни. Если говорить о сроке творческой жизни (начиная у обоих с 16 лет – возраста поступления в университет), то у Оппенгеймера это 47 лет, а у Харитона – 72.

Оппенгеймер был фактическим руководителем ядерного центра всего 4 года. А Харитон – почти 50 лет. Оппенгеймер не участвовал в превращении лосаламосского центра из конструкторского бюро в Национальную лабораторию США. А Харитон руководил постепенным превращением КБ-11 в Институт экспериментальной физики.

Уже почти сразу после античеловеческих сбросов ядерных бомб на Хиросиму и Нагасаки Оппенгеймер получил сначала всеамериканскую, а потом и всемирную известность как «отец атомной бомбы». Харитон был настолько засекречен, что долгие годы (до 1984 года) его имя вообще не упоминалось и еще 20 лет упоминалось очень редко. Слава (да и то, в научных кругах, а не всенародная) пришла к нему посмертно.

В этой статье нет возможности подробно рассказать о главном различии судеб Оппенгеймера и Харитона. Оппенгеймер не был патриотом своей страны. Нравственный вопрос об этичности создания атомных и водородных бомб для него решался только в общечеловеческом масштабе, в вопросе организации международного контроля за созданием ядерного оружия. Некоторое время он был под подозрением в несохранении секретности во время атомных работ. И действительно, ведь наиболее важные сведения об американской бомбе, которые ускорили создание советской бомбы, были получены от Клауса Фукса, одного из ближайших коллег Оппенгеймера. Были и другие подозрения, связанные с его довоенным политическим мировоззрением. В результате рассмотрения этих вопросов в комиссии ФБР Оппенгеймер в 1954 году был лишен допуска к секретным работам и мог заниматься только чистой физикой на посту директора Принстонского института перспективных исследований. Оппенгеймер был оправдан в 1963 году (в президентство Дж. Кеннеди). Тем не менее, все это наложило серьезную добавочную травму на его психическое состояние. Он не нуждался в любви коллег. «Физика мне нужнее друзей», – сказал он однажды своему брату. В его жизни было много драматических событий, которые целиком определялись необычностью его психики и черт характера. Недаром его биография легла в основу нескольких книг и телевизионных фильмов о нем. Самый последний фильм с простым названием «Оппенгеймер» только что вышел в российский прокат.

Последние годы Оппенгеймер провел в уединенной жизни на океанском берегу бухты маленького малообитаемого американского островка Карибского моря Сент-Джон. С ним была его жена и иногда приезжала взрослеющая дочь. Раз в год его навещали несколько кодлег-физиков. Правда, условия жизни вовсе не были похожи на робинзоновскую эпопею. В спроектированном им самим домике была одна огромная комната с тремя стенами (в дождливые и ветреные дни четвертую стену заменял кожаный занавес) и видом на океан. Был и собственный генератор, и вся кухонная техника, и автомобиль для поездок за продуктами, и по заказу самое лучшее шампанское. Был потрясающей красоты горный пейзаж, и вечно разный океан, и круглый год – лето без изнуряющей жары, и музыка. Рай, да и только. Но все равно не было душевного равновесия и, главное, здоровья. Оппенгеймер всю жизнь курил, и курил почти беспрерывно, результат – неоперабельный рак горла.

Оппенгеймер и Харитон очень различались как личности. Например, Харитон никогда не курил. Его семейная жизнь могла служить недостижимым эталоном для окружающих. Так называемой «личной» жизни, кроме семейной, у него никогда не было. В начале статьи цитировалось много восторженных слов, свидетельствующих не только об уважении, но и об искренней любви сотрудников к Харитону. Повторим еще раз парадоксальные слова академика А.М.Шальникова: «Его единственный недостаток – в том, что у него нет недостатков». И возможно, это и было главной причиной его сверхуспешного пятидесятилетнего руководства огромным научным коллективом.

На первый взгляд, жизнь Харитона была не только крайне секретной, но и крайне простой. Но это – только на первый взгляд.

Памятник Ю.Б.Харитону около коттеджа, в котором он прожил 50 лет

Он никогда не раскрывал свою душу ни перед коллегами, ни перед близкими и родными, он все главное хранил в себе. Последние пять лет его жизни совпали с драматическими событиями в нашей стране. Из-за болезней он уже не мог вплотную заниматься работой. И он не мог отстраниться от размышлений о том, что же произошло с его страной, служению которой он отдал всю свою жизнь и весь свой талант любви к науке и к людям. Процитируем его слова, написанные в 1995 году в письме к американским физикам-атомщикам:

«Сознавая свою причастность к замечательным научным и инженерным свершениям, приведшим к овладению человечеством практически неисчерпаемым источником энергии, сегодня, в более чем зрелом возрасте, я уже не уверен, что человечество дозрело до владения этой энергией.

Я осознаю нашу причастность к ужасной гибели людей, к чудовищным повреждениям, наносимым природе нашего дома – Земли. Слова покаяния ничего не изменят.

Дай Бог, чтобы те, кто идут после нас, нашли пути, нашли в себе твердость духа и решимость, стремясь к лучшему, не натворить худшего».

Это – завещание Юлия Борисовича Харитона людям науки.

Волшебная арифметика хорд

К.КОХАСЬ

Эпициклоиды и гипоциклоиды

Пусть на плоскости закреплена красная окружность, и по ней катится черная окружность, радиус которой в d раз меньше. В одну из точек черной окружности помещено перо, оставляющее на плоскости синий след. Построенная таким способом синяя кривая называется *эпициклоидой*. При $d = 1$ эта кривая имеет собственное наименование – *кардиоида* (рис. 1), при $d = 2$ кривую называют *нефроидой*.

Теперь рассмотрим аналогичную конструкцию: на плоскости закреплена красная окружность, и по ней изнутри катится черная окружность, радиус которой в d раз меньше. В одну из точек черной окружности помещено перо, оставляющее на плоскости синий след. Построенная таким способом синяя кривая называется *гипоциклоидой*. При $d = 3$ кривую называют *дельтоидой* (рис. 2), при $d = 4$ – *астроидой*.

Упоминая эти кривые, мы будем в качестве приставки указывать параметр d. Как нетрудно видеть, d-эпициклоида и d-гипоциклоида при целых d имеют d заострений. Но d можно брать и нецелым. При рациональных $d = \frac{m}{n}$ (несократимая дробь) черная окружность должна будет n раз прокатиться по красной, прежде чем перо

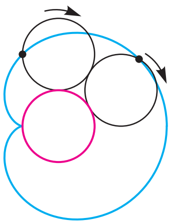


Рис. 1

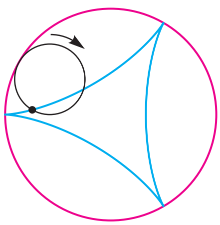


Рис. 2

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240301

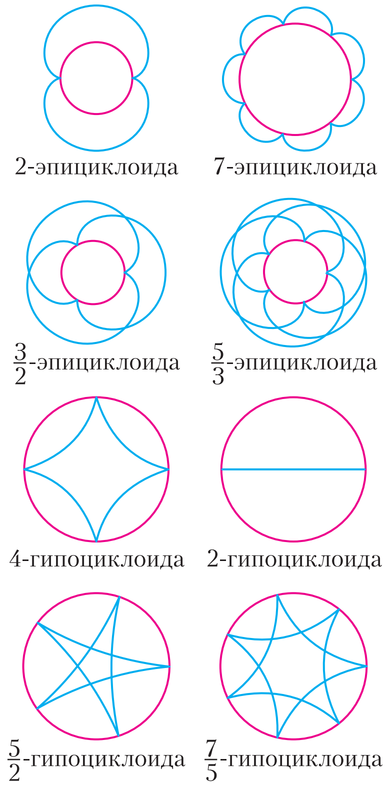


Рис. 3

вернется на исходное место. В результате получающиеся кривые имеют m заострений и делают n оборотов вокруг красной окружности (рис. 3). При иррациональных d кривая не зацикливается и бесконечно много раз оборачивается вокруг красной окружности.

Первый эксперимент

Пусть дан правильный n-угольник $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$. На картинках мы будем рисовать описанную окружность n-угольника зеленым цветом, а вершины никак специально выделять не будем (кроме самой первой картинки). При этом мы считаем, что вершина A_0 – это всегда самая правая точка рассматриваемого круга. (Винни Пух назвал бы ее восточным полюсом.)

Итак, эксперимент. Ну да, чего уж скрывать, компьютерный. Для каждого i от 1 до $n-1$ проведем в нашем n-угольнике диагональ A_iA_{2i}, где номер второй вершины вычисляется по модулю n (рис. 4; здесь $n = 120$). Кажется, эту кривую мы где-то уже видели.

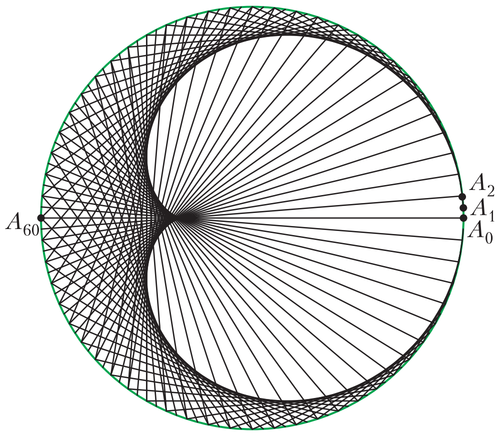


Рис. 4

Теорема. *Фигура, которую мы видим на рисунке 4, – кардиоида.*

Доказательство. Рассмотрим кардиоиду, у которой радиусы красной и черной окружностей (см. рис. 1) в 3 раза меньше радиуса описанной окружности n-угольника, и зафиксируем положение движущейся окружности, когда от точки касания с красной окружностью до острия кардиоиды остается дуга величины α (рис. 5).

Последовательно отметим на этой картинке углы α, потом $\alpha/2$, наконец, $\pi-\alpha$. Угол BOC тоже равен $\pi-\alpha$. Таким образом, хорда BC большой окружности соединяет точку B с угловой координатой $\pi-\alpha$ и точку C с угловой координатой $2(\pi-\alpha)$. Именно такие хорды мы проводили в экспериментальном многоугольнике.

Проверим, что прямая BC – касательная к кардиоиде. Для этого воспользуемся «механическими» соображениями: направление касательной к кривой совпадает с направлением вектора скорости точки, вычерчивающей эту кривую. Пусть черная

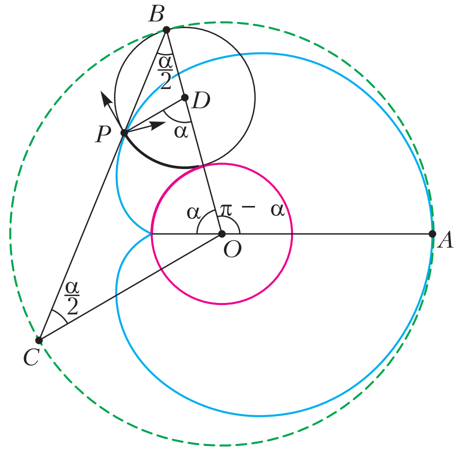


Рис. 5

окружность катится вправо. Движение пера P складывается из двух: движение центра черной окружности D и вращение черной окружности вокруг центра D. Оба движения совершаются с одинаковой скоростью. Нетрудно видеть, что векторы скорости этих движений составляют угол $\pm\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ с вектором $\overrightarrow{PB}$. Следовательно, вектор скорости направлен по прямой BC и прямая BC – касательная.

Таким образом, если для каждого угла φ провести прямую через точки окружности с угловыми координатами φ и 2φ, то кардиоида лежит в одной полуплоскости по отношению к каждой такой прямой, а область, ограниченная кардиоидой, – это пересечение этих полуплоскостей (рис. 6). Строго говоря, в последней фразе стоит рассматривать лишь «половину» проведенных линий и «половину» кардиоиды.

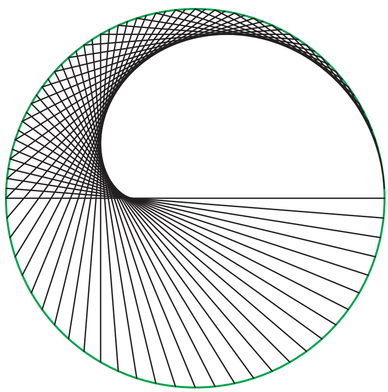


Рис. 6

Теорема доказана.

Отметим на всякий случай, что на самом деле на рисунке 4 сама кардиоида не нарисована, а проведено лишь семейство отрезков, для которых кардиоида является огибающей. Мы не будем здесь комментировать термин «огибающая» – название удачно говорит само за себя, а за деталями читатель может обратиться к книгам [4, 5]. Поскольку отрезков много, глаз сглаживает ломаную, составленную из их фрагментов, и нам кажется, что мы видим гладкую кривую.

Если мы будем проводить диагонали A_iA_{di}, для $i = 3, 4, \ldots$, будут аналогично получаться $(d-1)$-эпициклоиды (рис. 7; для $d = 3$, 4, 10 и $n = 120$). Также нетрудно сообразить, что при попытке экспериментировать с линейными выражениями A_iA_{di+l} будут получаться всего лишь повернутые эпициклоиды. Например, $A_iA_{i+5} = A_{(i+5)-5}A_{2(i+5)-5}$, т.е. при сдвиге нумерации вершин на 5 мы получаем исходное правило удвоения.

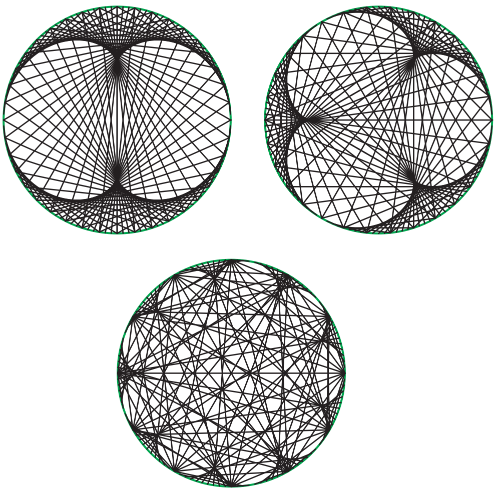


Рис. 7

Второй эксперимент

Воодушевившись первым экспериментом, попробуем проводить в n-угольнике диагонали вида A_iA_{-2i}, где индекс $-2i$ опять вычисляется по модулю n. Вот пример получающихся картинок при $n = 120$ (рис. 8) и $n = 119$ (рис. 9).

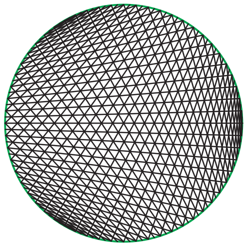


Рис. 8.

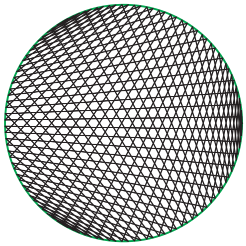


Рис. 9.

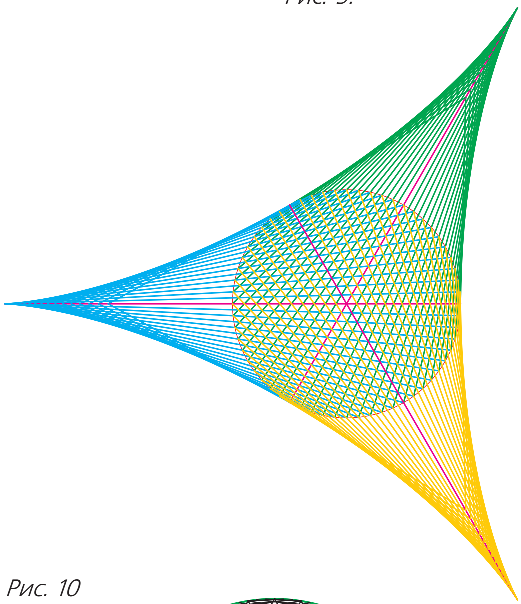


Рис. 10

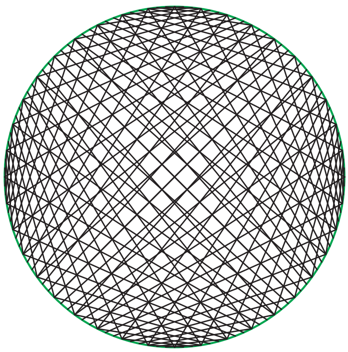


Рис. 11

Как видим, хорды достаточно регулярно заполняют круг и не группируются вокруг огибающих. Хотя... это они внутри окружности не группируются. Продолжим их подходящим образом (рис. 10; для $n = 120$). Мы увидим симпатичный «криволинейный» треугольник – *дельтоиду*.

Аналогичная картина получится, если провести диагонали вида A_iA_{-3i} (рис. 11).

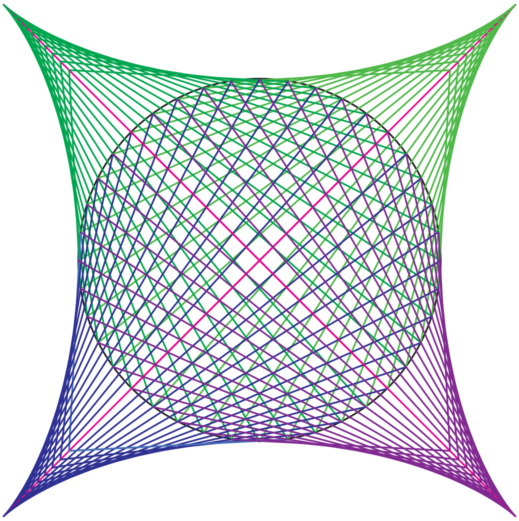


Рис. 12

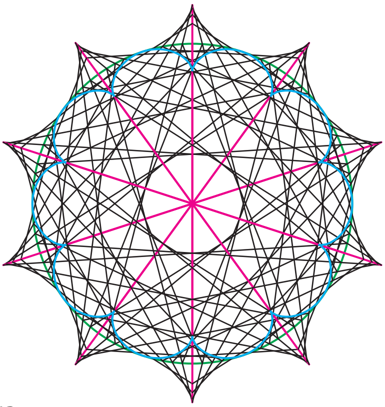


Рис. 13

Продолжив их подходящим образом наружу (рис. 12; для $n = 120$), получим *астроиду*.

В этот раз мы «наткнулись» на гипоциклоиды. Кривая на рисунке 10, огибающая семейства наших хорд A_iA_{-2i}, – это дельтоида, а кривая на рисунке 12 – астроида. Увеличивая k, мы получаем на картинке с диагоналями A_iA_{-ki} гипоциклоиды со все большим количеством зубчиков (рис. 13).

Интересно, что на рисунке 13 при $n = 100$, $k = -9$ видны как 10-гипоциклоиды, так и 10-эпициклоиды. Это вызвано тем, что выполняется соотношение $(-9)\cdot 11 \equiv 1 (\bmod 100)$, т.е. по модулю 100 операции умножения на -9 и на 11 взаимно

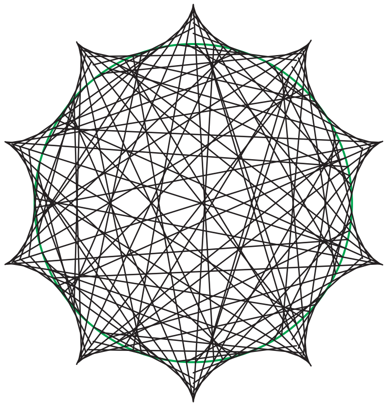


Рис. 14

обратны и множество пар вида $(i, -9i)$ совпадает с множеством пар $(11j, j)$. На рисунке 14 представлена аналогичная картина для $n = 109$, $k = -9$, поскольку $(-9)\cdot 12 \equiv 1 (\bmod 109)$, но эпициклоиды и гипоциклоиды «не синхронизированы».

Ясно, что для фиксированного n мы не можем сделать число зубчиков уж слишком большим. На рисунке 15 изображен экстремальный в этом смысле пример: 30-гипоциклоида при $n = 120$, $k = -29$. Кажется, что здесь меньше отрезков, чем на соседних картинках. Это из-за того, что при i кратных 4 выполнено сравнение $-29 \cdot i \equiv i (\bmod 120)$, и поэтому каждая четвертая хорда здесь вырожденная, на рисунке эти хорды изображены синими точками. При $i \equiv 2 (\bmod 4)$ хорды совпадают с диаметрами (это означает совпадение хорд,

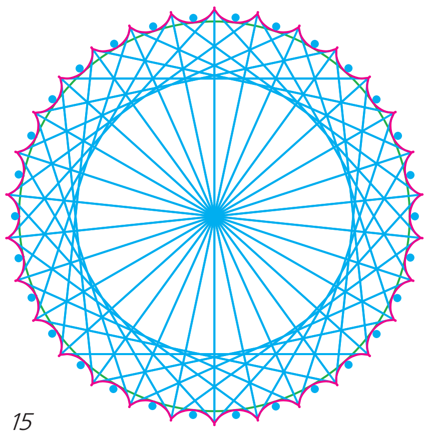


Рис. 15

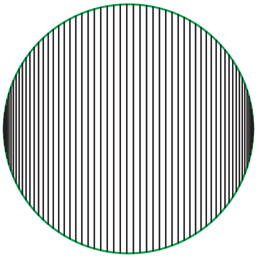


Рис. 16

выходящих из диаметрально противоположных точек) и эти диаметры служат границами секторов, в которые вписаны зубчики гипоциклоиды.

Заметим еще, что 2-гипоциклоида – это вырожденная кривая, представляющая собой отрезок (см. рис. 3). Следуя найденной нами закономерности – *картинка с хордами вида* A_iA_{-ki} *порождает* $(k+1)$*-гипоциклоиду*, мы можем считать, что параллельные хорды на вырожденной картинке при $n = 120$, $k = -1$ (рис. 16) пытаются по мере своих скромных сил изобразить этот самый отрезок. Получается не очень, поскольку провести касательную к отрезку, не находясь с ним на одной прямой, – дело безнадежное.

Теорема. *Фигура, которую мы видим на рисунке 12, – астроида.*

Доказательство. Воспользуемся следующим характеристическим свойством астроиды (см. [4, 5]). Рассмотрим всевозможные отрезки длины l, вершины которых находятся на сторонах прямого угла. Оказывается, астроида является огибающей этого семейства отрезков (рис. 17).

Пусть R – радиус описанной окружности n-угольника. Проверим для правой четвертинки фигуры на рисунке 12, что отрезки прямых, содержащих наши хорды, высеченные красным прямым углом, име-

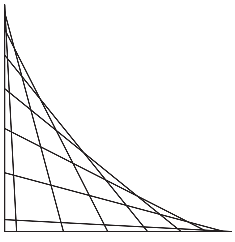


Рис. 17

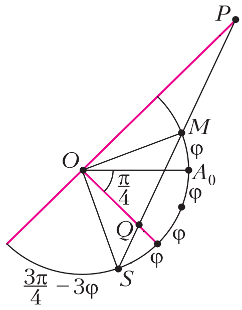


Рис. 18

ют постоянную длину $2R$. Это и значит, что огибающая наших хорд – астроида. Пусть точка M – это одна из вершин A_i, соответствующая центральному углу $\angle A_0OM = \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, а точка S – это вершина A_{-3i} (рис. 18). Проведем из начала координат красные лучи, наклоненные под углом $\pm\frac{\pi}{4}$ к горизонтальной оси, и отметим точки пересечения P и Q прямой MS с этими лучами. На получившейся картинке мы с легкостью найдем, что треугольник OMP равнобедренный с острыми углами $\frac{\pi}{4} - \varphi$. Отсюда сразу следует, что M – середина гипотенузы прямоугольного треугольника OPQ. И тогда $PQ = 2OM = 2R$.

Теорема доказана.

Оставим читателю возможность найти доказательство того, что на рисунке 10 изображена дельтоида, аналогичное доказательству из первого эксперимента.

Третий эксперимент

В первом и втором экспериментах мы проводили в n-угольнике диагонали A_iA_{ki} и обнаружили два разных эффекта – при небольших положительных k (т.е. близких к 0) огибающей этого семейства диагоналей является эпициклоида, а при небольших отрицательных (т.е. близких к n, так как наши вычисления по модулю n) значениях k огибающая – гипоциклоида. Где-то посередине должен происходить «фазовый переход» от одной картинки к другой. Попробуем отыскать это место.

Возьмем $n = 120$ и посмотрим, что происходит при $k = 61$, 60 и 59 (рис. 19, 20 и 21).

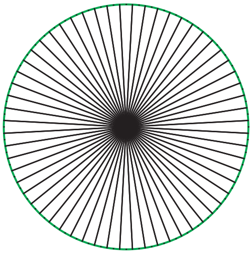


Рис. 19

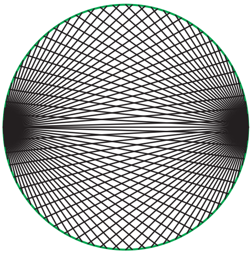


Рис. 20

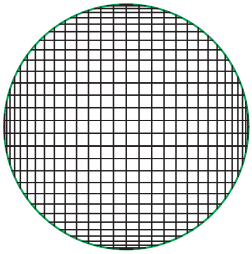


Рис. 21

Прямо скажем, эти картинки существенно беднее. Присмотревшись, можно придумать сюжеты, которые они нам показывают. Первая картинка (см. рис. 19) изображает тот факт, что $61^2 \equiv 1 \pmod{120}$, а вторая (см. рис. 20) – что множество значений отображения $m \mapsto 60m \bmod 120$ состоит из двух точек – 0 и 60. После таких комментариев третья картинка для $k = 59$ (см. рис. 21) при всей своей незатейливости выглядит довольно загадочно. Отметим еще, что в первом эксперименте мы не рисовали картинок для $k = 0$ и $k = 1$ – они тоже «не слишком зрелищные».

С другой стороны, рисунок 19 является развитием идеи, заложенной в рисунке 15. По-прежнему $n = 120$, сравните эту картинку со своими представлениями о том, как выглядит циферблат обычных часов со стрелками. Замечаете? Здесь всего 60 радиусов, как на минутном циферблате (только со смещением на полминуты), а остальные 60 точек дают нам 60 вырожденных одноточечных хорд $A_{2i}A_{2i}$, потому что

$$61 \cdot 2i \equiv 2i \pmod{120}.$$

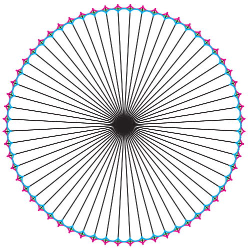


Рис. 22

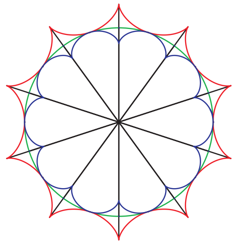


Рис. 23

Таким образом, диагонали 120-угольника, проведенные на этой картинке, пытаются прорисовать нам 60-гипоциклоиду. На один завиток гипоциклоиды приходится в среднем лишь 2 вершины (одна полноценная и две «половинки»): каждый радиус описывает границу сектора, куда вписан лепесток, – это касательная в точке заострения, а вырожденная хорда между двумя радиусами пытается изобразить касательную к гипоциклоиде «в обычной точке». В той же мере и примерно таким же способом этот рисунок изображает и 60-эпициклоиду для $k = 61$, $n = 120$ (рис. 22). Для наглядности мы приводим аналогичную «более крупную» картинку для $k = 11$, $n = 20$ (рис. 23).

Четвертый эксперимент

Итак, точки «фазового перехода» мы нашли. Увы, визуально они оказались не очень интересны. Посмотрим еще на случаи $k = 62$ и $k = 58$ при $n = 120$ (рис. 24).

На левой картинке видны две кардиоиды. Правая картинка – вообще другая, но по стилю вполне соответствует картинкам из второго эксперимента (см. рис. 8 и 11). И действительно, продолжая подходящим образом хорды A_iA_{58i} при четных и нечетных i, получаем знакомые образы

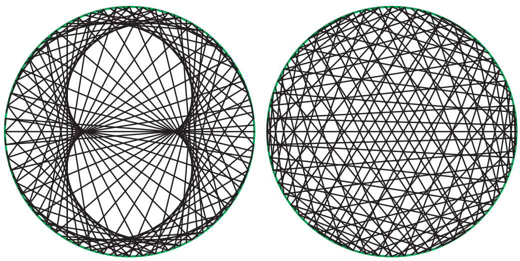


Рис. 24

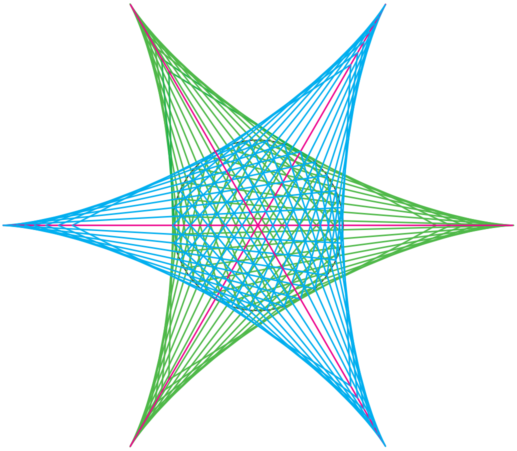


Рис. 25

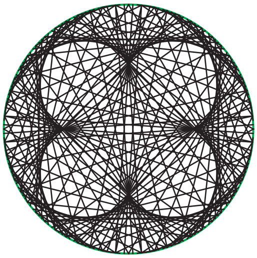


Рис. 26

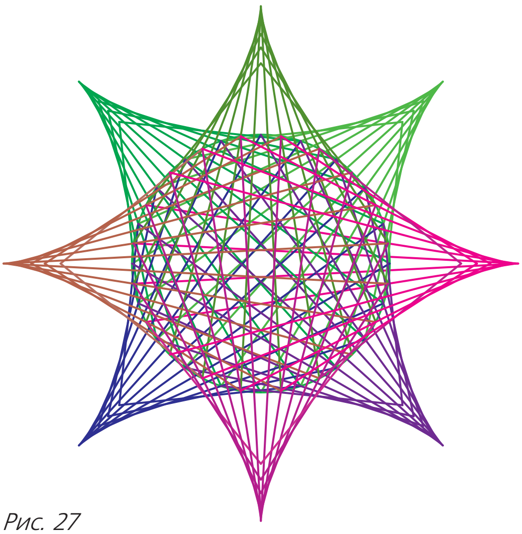


Рис. 27

(рис. 25) – дельтоиды. Тоже почему-то две штуки. Аналогично, при $k = \frac{n}{2} + 3$ получаются две нефроиды (рис. 26, мы взяли $n = 180$), а при $n = 120$, $k = \frac{n}{2} - 3 = 57$ – две астроиды (рис. 27). Кстати, тем же спосо-

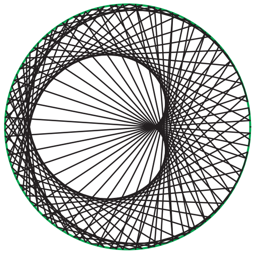


Рис. 28

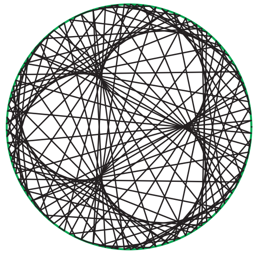


Рис. 29

бом можно объяснить и вырожденную картинку на рисунке 21: если верить, что рисунок 16 изображает нам 2-гипоциклоиду, то тогда рисунок 21 при $n = 120$, $n = \frac{k}{2} - 1 = 59$ пытается показать нам две 2-гипоциклоиды!

Посмотрим еще «на всякий случай», что получается при нечетных n. Например, для $n = 121$ при $k = 62$ и 63 (рис. 28, 29). Мы видим здесь $\frac{1}{2}$- и $\frac{3}{2}$-эпициклоиды – черная окружность из начала нашей статьи должна сделать два оборота, катясь по красной, прежде чем линия замкнется. Это тоже своего рода удвоение, только вместо того, чтобы за один оборот получить две фигуры, мы получаем здесь одну фигуру, но за два оборота.

Ну что ж, мы наткнулись на новое явление, давайте его истолкуем. Пусть n четное, $k = \frac{n}{2} + 2$, и допустим, что мы провели хорду A_iA_j, где $j \equiv \left(\frac{n}{2} + 2\right)i \pmod{n}$. Посмотрим, куда ведет хорда из точки A_{i+2}:

$$\left(\frac{n}{2} + 2\right)(i + 2) = \left(\frac{n}{2} + 2\right)i + 4 \equiv j + 4 \pmod{n}. \quad (*)$$

Итак, хорда из точки A_{i+2} ведет в точку A_{j+4}. Иными словами, начало хорды поворачивается на некоторый угол, а конец – на вдвое больший угол. Это значит, что проводимые линии подчиняются закономерности из первого эксперимента и должны прорисовать нам кардиоиду. Поскольку n четное, мы, двигаясь по вершинам с шагом 2, получаем два семейства хорд A_iA_{ki} – для четных и для нечетных i. Этим семействам соответствуют кардиоиды, отличающиеся сдвигом на пол-оборота: у одной кардиоиды начальная точка соответствует вырожденной хорде A_0A_0, в то время как соседняя хорда $A_1A_{\frac{n}{2}+2}$ из второго семейства почти совпадает с диаметром окружности, т.е. прорисовывает острие второй кардиоиды.

Для $k = \frac{n}{2} - 2$ аналогично получаем гипоциклоиды.

Теперь пусть n нечетное, $n = 2m + 1$, а число k чуть больше $\frac{n}{2}$ (как на рис. 28): $k = m + 2 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$. Здесь аналогично наблюдению (*) увеличение индекса i на 2 ведет к увеличению индекса j на 3. Но в силу нечетности n хорды теперь не разбиваются на два семейства.

Более того, рассмотрим хорду A_iA_j, где $j = ki = \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)i$. Заметим, что для нечетного модуля n корректно определена операция деления на 2 и что

$$2j = 2\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)i \equiv 3i \pmod n.$$

Иными словами, $j \equiv \frac{3}{2} i \pmod n$. Получается, что закономерность, которую мы обнаружили в первом эксперименте, работает и для дробных эпициклоид!

Скажем точнее: в первом эксперименте мы обнаружили, что если взять натуральное число d и провести хорды A_iA_{ki}, где $k = d + 1$, то на картинке видна d-эпициклоида. Пусть теперь d – рациональное: $d = \frac{p}{q}$. Если числа q и n взаимно просты, то по модулю n однозначно определен остаток q^{-1}, «обратный к q», т.е. такой, что $q \cdot q^{-1} \equiv 1 \pmod n$. В этом случае для получения d-эпициклоиды следует проводить хорды A_iA_{ki}, где $k = pq^{-1} + 1 \pmod n$. Так, для рисунка 29 имеем $p = 3$, $q = 2$, $q^{-1} = 2^{-1} = 61 \pmod{121}$ и, значит, для рисования $\frac{3}{2}$-эпициклоиды нужно взять $k = 3 \cdot 61 + 1 \equiv 63 \pmod{121}$.

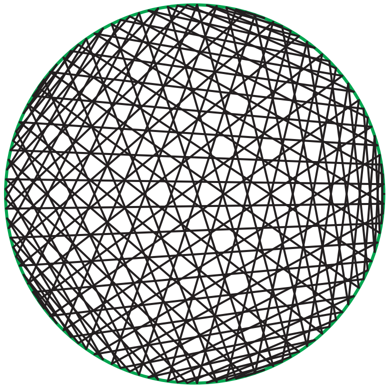


Рис. 30

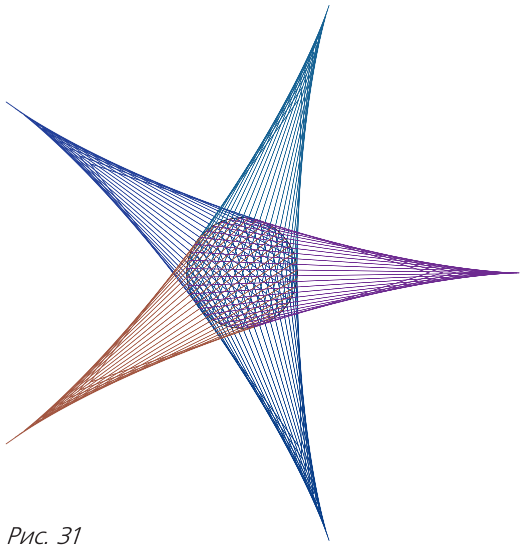


Рис. 31

А что будет при $k = \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$? Оказывается, получится $\frac{5}{2}$-гипоциклоида (рис. 30, 31; для $k = 59$, $n = 121$).

Пятый эксперимент

Картинки, получающиеся для разных пар n и k, завораживают. В этом эксперименте мы ничего не будем комментировать. Добро пожаловать в нашу галерею. Просто смотрите.

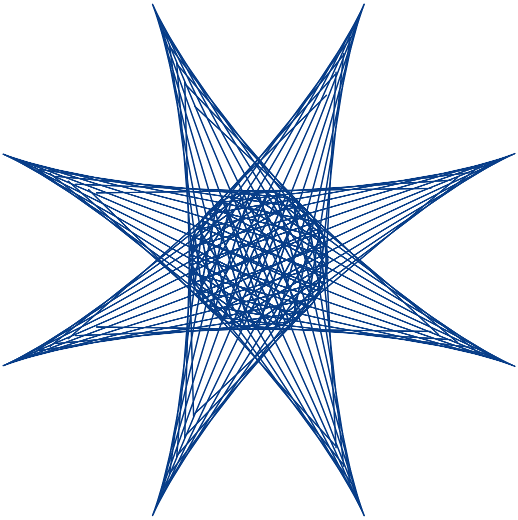


Рис. 32. Одна $\frac{8}{3}$*-гипоциклоида,* $k = 38$, $n = 119$

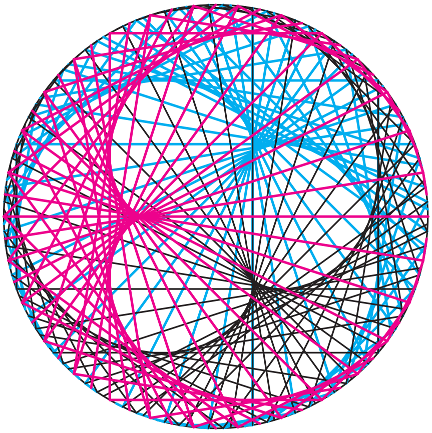


Рис. 35. Три кардиоиды, $k = 62$, $n = 180$

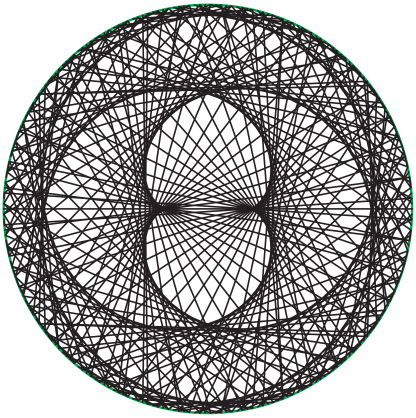


Рис. 33. Две $\frac{1}{2}$*-эпициклоиды,* $k = 62$, $n = 242$

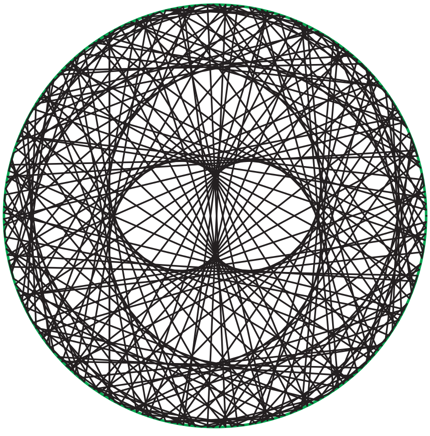


Рис. 34. Одна $\frac{2}{5}$*-эпициклоида,* $k = 89$, $n = 219$

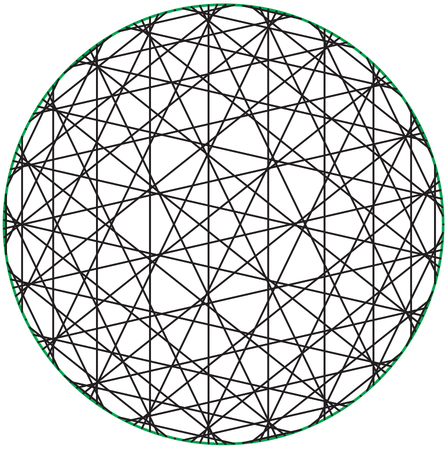


Рис. 36. Семь 2-гипоциклоид, $k = 22$, $n = 161 = 7 \cdot 23$. *Здесь мало хорд, поскольку* $22^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 161)$. *Как нетрудно видеть, при сдвиге одного конца хорды на* $+7$, *другой конец сдвигается на* -7. *Поэтому хорды разбиваются на 7 семейств параллельных линий*

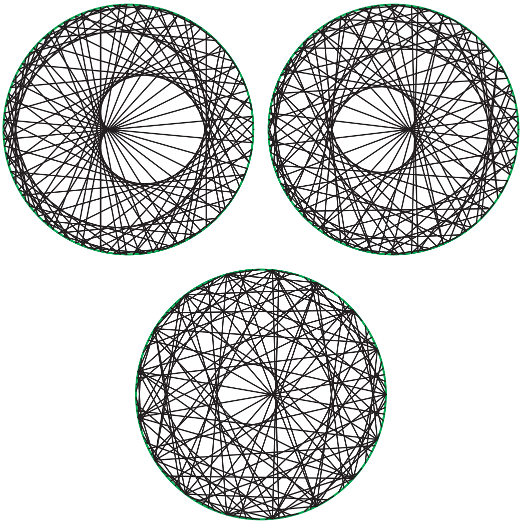


Рис. 37. Одна $\frac{1}{3}$-эпициклоида, $k = 41$, $n = 119$; $\frac{1}{4}$-эпициклоида, $k = 3$, $n = 119$; $\frac{1}{6}$-эпициклоида, $k = 21$, $n = 119$

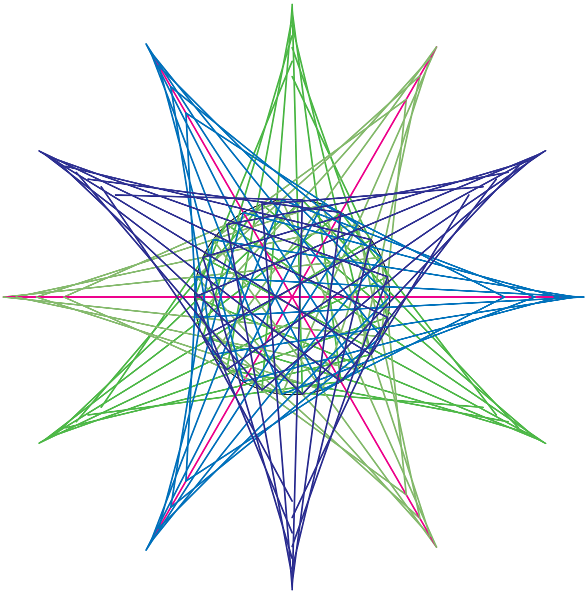


Рис. 39. Четыре дельтоиды при $k = 28$, $n = 120$

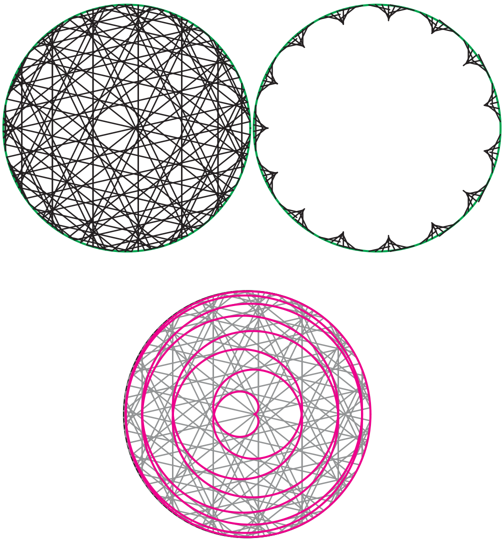


Рис. 38. Случай $k = 16$, $n = 119$. Здесь еще можно разглядеть и фантомную $\frac{1}{8}$-эпициклоиду и 15-эпициклоиду. А шесть семейств параллельных линий намекают на коллекцию 2-гипоциклоид

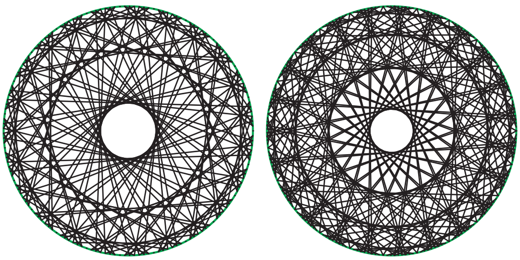


Рис. 40. Здесь $k = 24$, $n = 161 = 23 \cdot 7$ (слева) и $n = 207 = 23 \cdot 9$ (справа). При делении n на $k - 1$ получается небольшое число (7 или 9). Угловая величина i-й хорды $A_i A_{ki}$ составляет $\frac{i}{7}$ или $\frac{i}{9}$ от полного оборота и картинка сохраняется при повороте на $\frac{2\pi}{23}$. Поэтому мы видим окружности

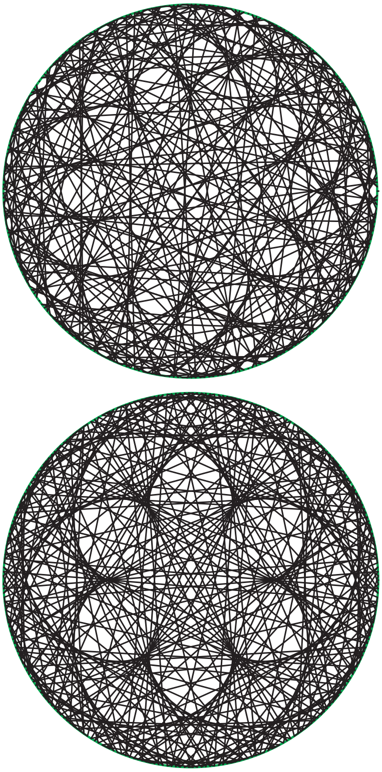


Рис. 41. Случаи $k = 71$, $n = 265$ и $k = 71$, $n = 274$. На эти картинки можно смотреть бесконечно

Автор случайно узнал о красивых картинках из первого эксперимента (см. рис. 4, 7) и получил их обоснование, подглядывая в книгу [3]. Как оказалось, «Квант» уже писал об этих картинках на заре своего существования [2] и в более позднее время [1]. Обстоятельная подборка задач и результатов об эпи- и гипоциклоидах содержится в [5]. Прекрасную визуализацию первого эксперимента можно посмотреть на сайте «Математические этюды» [6]. Заинтересовавшись, автор стал экспериментировать дальше, а потом решил поделиться результатами. Читатель и сам может заняться экспериментами, в этом может помочь программа «Математический конструктор» [7].

Список литературы

1. *А. Акопян.* Геометрия кардиоиды. – «Квант», 2012, № 3.

2. *В. Березин.* Кардиоида. – «Квант», 1977, № 12.

3. *Г.Н. Берман.* Циклоида. – М.: Наука, 1980.

4. *В.Г. Болтянский.* Огибающая. – М.: Физматгиз, 1961.

5. *Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер.* Прямые и кривые. – М.: МЦНМО, 2006.

6. Математические этюды. https://etudes.ru/models/cardioid-nephroid/

7. Математический конструктор. https://obr.1c.ru/mathkit/

Винтовые линии, спирали и физические методы

В.ПТУШЕНКО

Стремительное развитие физики в XX веке дало ей возможность внести свой вклад и в развитие других наук, прежде всего за счет появления многих новых методов исследования. Одним из них стал метод рентгеноструктурного анализа, основанный на дифракции рентгеновского излучения на атомах кристаллической решетки.

Напомним, что дифракция волны на периодическом препятствии приводит к различиям интенсивности волны, рассеянной в разных направлениях. Один из наглядных примеров – дифракция света на поверхности DVD диска, который в отраженном свете переливается всеми цветами радуги.

Любой кристалл также является периодической структурой и, следовательно, может служить дифракционной решеткой. Однако расстояние между «штрихами» этой решетки слишком маленькое, чтобы при отражении от такой периодической структуры видимого света могла возникнуть различимая дифракционная картина. А вот рентгеновское излучение, длина волны которого близка к межатомным расстояниям, дает отличную дифракционную картину. Это явление еще в 1912 году обнаружили Макс Лауэ и отец и сын Уильям и Лоренс Брэгги, за что были удостоены Нобелевских премий (1914 и 1915 г.). Относительно скоро рентгеноструктурный анализ стал (и остается до сих пор) одним из основных методов исследования структуры молекул, в том числе и биологически важных макромолекул. Позже в число основных методов определения структуры молекул вошел метод ядерного магнитного резонанса, а относительно недавно к ним присоединился и метод криоэлектронной микроскопии.

С использованием метода рентгеноструктурного анализа связано и одно из наибо-

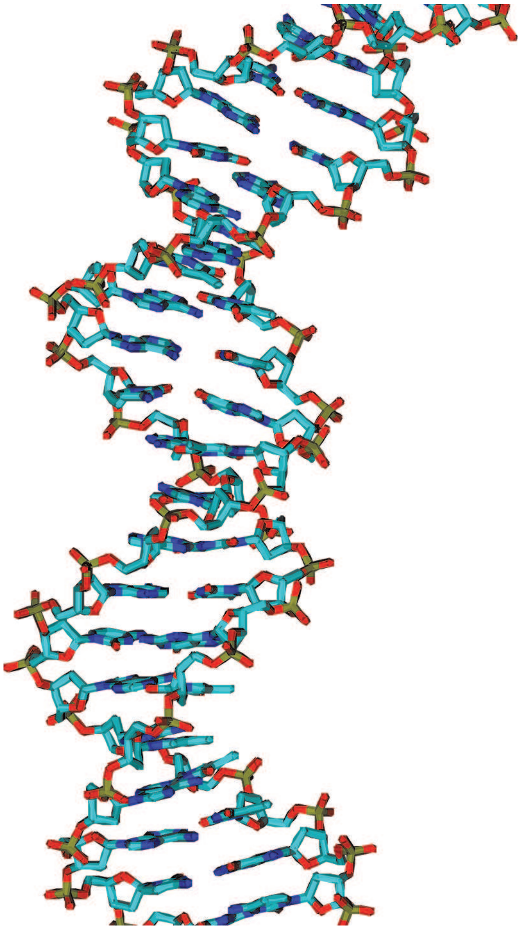


Рис. 1. Пространственная структура двухцепочечной молекулы ДНК. Изображение построено с помощью визуализатора структур VMD

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240302

лее «резонансных» открытий в биологии XX века – открытие, поистине взорвавшее научный мир и оказавшее, пожалуй, наибольшее влияние на развитие биологии во второй половине XX века. Речь идет об открытии пространственной структуры молекулы ДНК (рис. 1), сделанном Фрэнсисом Криком и Джеймсом Уотсоном чуть больше 70 лет назад (1953 г.). Наверное, практически всем известно словосочетание «двойная спираль» – благодаря книге Уотсона с таким названием. Однако отнюдь не это – обнаружение «спиральной» структуры ДНК – было основным в открытии Крика и Уотсона. Ключевым здесь было предположение о том, что азотистые основания – «кирпичики», из которых сложена молекула ДНК, – в одной цепи комплементарны, т.е. дополнительны, лежащим напротив них основаниям в другой цепи. Такая комплементарность, по сути – строгое соответствие, означала, что одна нить этой «двойной спирали» содержит в себе уже всю необходимую информацию о ее структуре. Вторая же нить может быть достроена по первой так же, как «достраивается» чугунная отливка в отливочной форме.

Идеи о подобном механизме копирования наследственной информации (воссоздания новой полимерной молекулы на основе уже существующей) впервые были высказаны задолго до Уотсона и Крика (русским биологом Н.К.Кольцовым, австрийским биологом Х.Пржибрамом, немецким химиком Г.Штаудингером и английским биохимиком и математиком Д.Ринч еще в двадцатых – начале тридцатых годов XX века). Однако свое зримое воплощение они обрели и перестали быть лишь умозрительной гипотезой только в результате открытия структуры ДНК.

Рис. 2. Разрез раковины головоногого моллюска наутилуса, очертания которого напоминают логарифмическую спираль

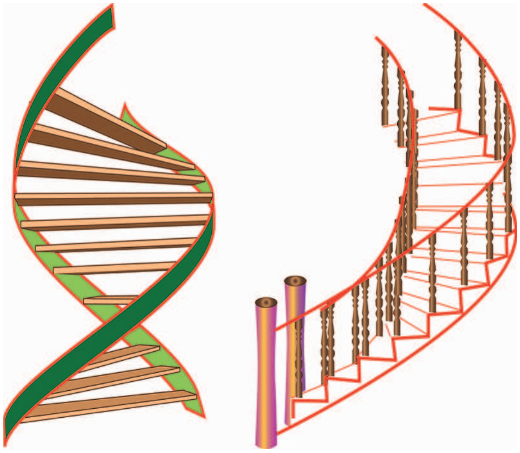


Рис. 3. Винтовая лестница, контуры которой (перила и края ступенек) образуют винтовые линии

Эта структура в русском языке получила весьма неудачное, хотя и броское название, – «двойная спираль». Конечно же, нити ДНК сворачиваются отнюдь не в плоскую кривую – спираль, а в винтовую линию (рис. 2 и 3). Этот неудачный перевод английского слова helix, которое иногда может означать и спираль, к сожалению, закрепился в русском языке. Любопытно, что в одной из своих первых статей Френсис Крик прямо сказал о том, какую кривую нужно понимать под этим термином: «Винтовую линию (helix) часто вольно называют спиралью (spiral); различие заключается в том, что винтовая линия обвивается не вокруг конуса, а вокруг цилиндра, как обычно это делает винтовая лестница» (1954 г.). Разумеется, автор здесь допустил некоторую вольность, спираль – это не сама кривая, намотанная на конус, а ее проекция на плоскость, перпендикулярную к его оси. Но статья была опубликована в научно-популярном журнале Scientific American, и такая вольность была допустима. Русский же перевод этой статьи, который стал первым переводом сообщения о структуре ДНК на

Рис. 4. Памятник лабораторной мыши в Академгородке города Новосибирска

русский язык, совершенно упустил это предостережение Крика, представив его довольно странным образом: «имеется в виду спираль, навитая не вокруг конуса, а вокруг цилиндра, подобная винтовой лестнице» (1956 г.). Статья была опубликована в солидном советском журнале, который позже получил название «Журнал Всесоюзного химического общества имени Д.И.Менделеева». Журнал основал выдающийся химик И.Л.Кнунянц, и именно его мужеству и проницательности мы обязаны тем, что эта статья вообще была опубликована в то время, когда упоминать о ДНК, как о материальном носителе наследственности, в нашей стране было не принято. Однако вместе с этой новостью о важнейшем научном открытии, увы, вкралась и эта курьезная ошибка. В последующих переизданиях этой статьи Крика на русском языке даже эти уточнения о форме ДНК полностью исчезли.

Однако математические курьезы со структурой ДНК на этом не закончились. Как известно, резьба винта (а ведь это – тоже винтовая линия) может быть левой или правой, хотя в быту мы гораздо чаще сталкиваемся с правыми винтами в силу устоявшихся стандартов (левые винты обычно используются для каких-либо специальных задач). Напомним, что правым винтом считается та винтовая линия, которая при движении вперед вдоль ее оси закручивается по часовой стрелке. Наиболее стабильная и распространенная форма ДНК (В-форма), с которой работали первые ее исследователи, является правой винтовой линией. Именно так она изображена в статье Уотсона и Крика, вышедшей в апреле 1953 года. Именно эта форма и

Рис. 5. Символический памятник мира и добра

стала символом ДНК, который мы сейчас можем встретить при любых упоминаниях о ней. Однако в одной из следующих публикаций, вышедшей чуть позже, осенью 1953 года, коллега и конкурент Уотсона и Крика Морис Уилкинс с соавторами почему-то изобразили левую спираль – хотя в тексте и утверждали, что лишь скорректировали модель Уотсона и Крика. Эта же неточность повторилась в будущем и в художественных изображениях ДНК. Так, десять лет назад в честь 60-летнего юбилея открытия «двойной спирали» в Академгородке города Новосибирска был установлен символический памятник лабораторной мыши (рис. 4). Мышь вяжет на спицах молекулу ДНК, которая сворачивается в левую винтовую линию. Впрочем, может быть, имелась в виду нестабильная левозакрученная Z-форма ДНК. Хотя слишком ровные ее очертания, далекие от сколь-либо зигзагообразных (отсюда и название – Z-форма), заставляют думать, что все же художника вдохновлял образ «обычной» B-формы.

Однако, как уже было сказано, открытие структуры ДНК было одним из наиболее «резонансных» открытий XX века, а сама эта структура стала символом, вышедшим далеко за пределы биологии. Этот образ часто появляется просто как символ жизни. Символический памятник мира и добра (рис. 5) установлен в одном из городских парков России. Заметим, что винтовые линии здесь закручены в правом направлении.

Автор благодарен Н.Н.Хромову-Борисову, сообщившему об ошибке Уилкинса, и М.Усейновой, обратившей внимание автора на приведенный здесь памятник мира и добра.

Рисунки и фотографии О. и В.Птушенко.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором учитесь.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

25. Имеется N одинаковых плиток, каждая в форме равностороннего треугольника. Можно ли из всех этих плиток сложить (без дырок и наложений) какую-нибудь трапецию? Дайте ответ для а) $N = 99$; б) $N = 100$; в) для всех N.

П.Кожевников

26. В клетки таблицы 10×10 вписали числа так, что в каждой строке все 10 чисел разные. Разрешается в каждой строке переставить числа как угодно. Всегда ли удастся сделать это так, что никакие два одинаковых числа не окажутся в разных столбцах?

П.Кожевников

27. В одной постоянной компании друзей два года подряд дни рождения наиболее часто приходились на вторник. На какой день недели наиболее часто они могли прийтись в следующем году?

С.Токарев

28. На плоскости введены декартовы координаты. Пусть ABC – треугольник с вершинами в целых точках, равнобедренный и имеющий площадь 1/2. Докажите, что он прямоугольный.

Е.Бакаев

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2786–М2788а, М2789 предлагались на региональном этапе L Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Автор задач Ф2793–Ф2796 – С.Варламов.

Задачи М2786–М2789, Ф2793–Ф2796

М2786. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

П.Кожевников

М2787. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке (рис. 1). Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$ соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

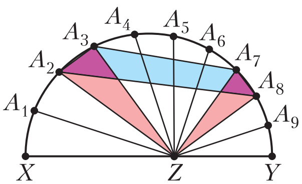


Рис. 1

М.Евдокимов

М2788. а) Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовем множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств?

б) Тот же вопрос, если дополнительно требуется, чтобы каждое линейное множество представляло из себя *отрезок* отмеченных точек (т.е. если две различные отмеченные точки входят в одно линейное множество, то и все отмеченные точки на отрезке между ними – тоже).

И.Богданов

М2789*. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.

М.Дидин

Ф2793. В игрушечном луке (рис. 2) энергия накапливается не в изогнутых плечах лука, а в растягивающейся тетиве. Расстояние между концами легкой тетивы, закрепленными на луке, равно L. Жесткость тетивы k. Юный Робин Гуд при стрельбе так натягивает тетиву, что сила натяжения тетивы увеличивается в два раза, а ее концы и место посередине тетивы, которого касается конец стрелы с оперением, находятся в углах равностороннего треугольника со сторонами L. При запуске стрелы вертикально вверх она взлетает на высоту $h = 20L$. Какова масса стрелы m? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Рис. 2

Ф2794. Тонкостенная труба заполнена однородной невязкой и несжимаемой жидкостью, которая в прямом участке трубы далеко от изогнутого участка течет с одинаковой в любом месте поперечного сечения трубы скоростью v. Поперечное сечение трубы в любом месте представляет собой прямоугольник со сторонами A и a, причем $A \gg a$. Прямой участок трубы переходит в изогнутый участок, и на нем труба имеет вид спирали с шагом a. Внутренний радиус спиральной трубы равен A, а ее внешний радиус равен $2A$. Все стенки трубы, имеющие размер a, вертикальны, а на прямом участке трубы широкие стенки трубы горизонтальны. На спиральном участке трубы широкие стенки трубы составляют с горизонтом малый угол φ величиной порядка $a/(2\pi A) \ll 1$. Течение жидкости установившееся во времени и ламинарное. На рисунке 3 показано, как выглядят сечение трубы, прямой и спиральный участки трубы сбоку, а также вид снизу. Как зависит скорость течения жидкости в изогнутом участке трубы (вдали от прямого участка) от расстояния x между точкой, в которой измеряется скорость, и осью спирали? Силой тяжести можно пренебречь.

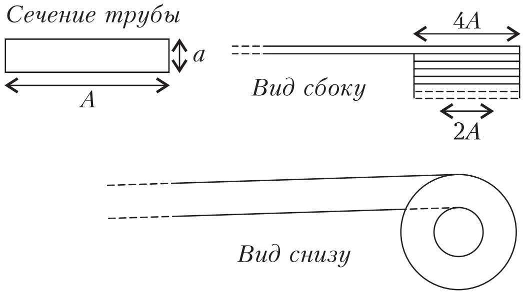


Рис. 3

Ф2795. Кольцо имеет радиус R, толщина кольца мала в сравнении с его радиусом, масса кольца m равномерно распределена по его периметру. Кольцо раскрутили вокруг его оси симметрии, положили на шероховатую, коэффициент трения равен μ, наклонную поверхность с углом наклона α к горизонту и толкнули его вверх. Ось симметрии кольца перпендикулярна наклонной поверхности. Кольцо всеми точками его периметра прижимается к поверхности. В какой-то момент центр кольца имел нулевую (по отношению к поверхности) скорость и кольцо вращалось с угловой скоростью ω. С каким ускорением движется центр кольца в указанный момент времени? С какой скоростью в этот момент уменьшается угловая скорость вращения кольца?

Ф2796. Очень длинный тонкостенный закрепленный короб сделан из непроводящего ток материала. Поперечное сечение короба – это квадрат со стороной a. На оси симметрии короба находится очень длинный тонкий стержень с равномерно распределенным по его длине электрическим зарядом. Линейная плотность заряда $+\sigma$. К ребру короба прикреплен один конец тонкой непроводящей невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на короб, образуя N одинаковых витков. Плоскости витков перпендикулярны оси симметрии короба. На другом конце нити прикреплен точечный предмет (шарик) с массой m и электрическим зарядом $+q$. В начальный момент этот предмет находится рядом с местом закрепления конца нити на коробе и его скорость в этот момент равна нулю. Эта конструкция находится в вакууме и гравитацией можно пренебречь. В процессе движения предмета он в какой-то момент приобретает максимальную скорость. Какова величина этой скорости и какова в этот момент сила натяжения нити?

Решения задач М2774–М2777, Ф2781–Ф2784

М2774. *В клетчатом квадрате* 50×50 *каждая клетка покрашена в один из* 100 *данных цветов так, что все цвета присутствуют и из квадрата нельзя вырезать одноцветную доминошку (т.е. прямоугольник* 1×2*). Галия хочет перекрасить все клетки одного из цветов в другой цвет (из данных* 100 *цветов) так, чтобы по-прежнему нельзя было вырезать одноцветную доминошку. Верно ли, что Галия наверняка сможет это сделать?*

Ответ: верно.

Давайте заметим, что есть всего $50\cdot49$ возможных вариантов вертикальной доминошки и столько же вариантов горизонтальной, итого всего 4900 доминошек. При этом пар цветов всего $100\cdot99/2 = 4950 > 4900$. Значит, найдется пара цветов таких, что на доске нет доминошки с такими цветами; именно эти цвета и можно «объединить», т.е. перекрасить один цвет в другой. Этим завершается решение.

Другое решение можно получить, рассмотрев самый редкий цвет. Пусть это цвет A. Если клеток цвета A не больше 24, то у них всего не более $4\cdot24=96$ соседних клеток. Значит, среди этих соседних клеток не присутствует хотя бы один из других 99 цветов, скажем цвет B. Тогда клетки цвета A можно перекрасить в цвет B с сохранением условия. Если же клеток цвета A не меньше 25, то и клеток любого цвета не меньше 25. Но так как всего клеток $2500 = 25\cdot100$, это возможно, только если количество клеток каждого из 100 цветов равно 25. Теперь рассмотрим цвет C, в который окрашена хотя бы одна угловая клетка. Тогда у клеток цвета C будет не более $4\cdot24+2=98$ соседних клеток (в этой оценке учтено, что у угловой клетки есть только две соседние клетки, а у остальных 24 клеток цвета C – не более четырех соседних клеток). Далее завершаем аналогично первому случаю: в клетках, соседних с цветом C, не присутствует хотя бы один из других 99 цветов, скажем цвет D. Тогда клетки цвета C можно перекрасить в цвет D с сохранением условия.

Г.Шарафетдинова

М2775. *Существует ли бесконечная периодическая последовательность цифр, для которой выполнено условие: для любого натурального* n *из этой последовательности цифр можно вырезать (как подслово) натуральное число, делящееся на* 2^n*?*

Ответ: не существует.

Пусть дана периодическая последовательность цифр, в которой есть ненулевые цифры, и пусть T – длина ее периода.

Выберем такое N, что $2^N>10^T$, тогда никакое натуральное число, в котором не более T цифр, не делится на 2^N.

Далее возьмем натуральное k такое, что $kT>N$, и рассмотрим в нашей последовательности цифр любое подслово длины больше kT. Такое подслово имеет вид $U\underbrace{WWW\ldots W}_{k}$, где W – слово длины T (W – циклический сдвиг периода последовательности). Имеем $U\underbrace{WWW\ldots W}_{k} = U\cdot10^{kT}+Wm$, где $m=10^{(k-1)T}+10^{(k-2)T}+\ldots$ $\ldots+10^T+1$ – нечетное число. Видим, что 10^{kT} делится на 2^{kT}, которое в свою очередь делится на 2^N, а W не делится на 2^N (согласно выбору N), тогда $U\cdot10^{kT}+Wm$ не делится на 2^N. Таким образом, любое подслово длины больше kT не делится на 2^N.

Теперь выберем такое M, что $2^M>10^{kT}$, тогда никакое натуральное число, в котором не более kT цифр, не будет делиться на 2^M, в частности, никакое ненулевое подслово нашей последовательности, длина которого не более kT, не делится на 2^M.

Наконец, положив $K = \max\{M, N\}$, получаем, что никакое ненулевое подслово нашей последовательности не делится на 2^K.

П.Кожевников

M2776*. *В стране ходят n валют, пронумерованных от 1 до n; в каждой валюте возможны лишь целые неотрицательные суммы денег. У человека в любой момент может быть лишь одна валюта. В обменнике человек может обменять все имеющиеся у него деньги из валюты i на валюту j по курсу α_{ij}: если у него было d единиц валюты i, он взамен получает $\alpha_{ij}d$ единиц валюты j, при этом это число округляется до ближайшего целого (число вида $t - 1/2$ округляется до t при целом t). При этом $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ii} = 1$ (числа α_{ij} – положительные вещественные). Может ли в такой стране (хотя бы при каком-то n) найтись человек, могущий разбогатеть неограниченно (т.е. чтобы для любого числа D человек мог через несколько обменов получить больше чем D единиц некоторой валюты)?*

В каждый момент будем считать количество наших денег S в пересчете на первую валюту (без округления). Положим $\beta_i = \alpha_{1i}$; если сейчас у нас есть i-я валюта, то ее у нас $S\beta_i$ единиц.

Лемма. Пусть S – некоторое число. Тогда существует такое (не обязательно целое) число $T > S$, что все числа вида $\{T\beta_i\}$ меньше $1/2$.

Считая лемму доказанной, по исходной сумме S выберем число T из леммы. Покажем, что количество денег не может превзойти T. Действительно, если в какой-то момент наше количество денег равно $S \le T$ и мы меняем на i-ю валюту, то ее мы получим в количестве, равном ближайшему целому числу к $S\beta_j$; поскольку $S\beta_j \le T\beta_j < \left[T\beta_j\right] + \frac{1}{2}$, это количество не превзойдет $\left[T\beta_j\right]$. Тогда и наше количество денег (в пересчете на первую валюту) не превзойдет T.

Осталось доказать лемму. Существует очень малое положительное t, для которого все числа вида $\{t\beta_j\}$ положительны и меньше $1/2$. Пусть все они лежат в интервале $(\varepsilon; 1/2 - \varepsilon)$ (для некоторого положительного ε). Согласно известной теореме Кронекера, для набора чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$ найдется сколь угодно большое M такое, что все числа вида $M\beta_j$ отстоят от целых чисел не далее чем на ε. Тогда число $T = M + t$ – искомое.

И.Богданов

M2777*. *На плоскости нарисован выпуклый многоугольник P, обладающий центром симметрии O. Докажите, что в P можно поместить ромб так, чтобы его образ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 2 содержал P.*

Проведем через O две перпендикулярные прямые и будем их вращать, оставляя перпендикулярными. Из соображений непрерывности, в некоторый момент они разобьют P на четыре части равной площади. Пусть в этот момент они пересекают границу P в вершинах некоторого ромба $ABCD$. Докажем, что он нам подходит. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. $S_P \le 2S_{ABCD}$.

Сначала завершим решение, потом докажем лемму. Пусть гомотетичный образ $A'B'C'D'$ ромба $ABCD$ (при гомотетии с центром O и коэффициентом 2) не покрывает P; например, в угле AOB есть точка X многоугольника P вне треугольника $A'OB'$ (рис. 1). Это означает, что расстояние от X

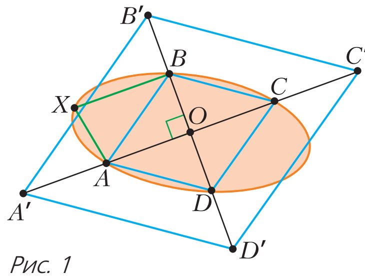


Рис. 1

до AB больше, чем от O до AB, поэтому $S_{XAB} > S_{OAB}$ и, как следствие, $S_{OAXB} > 2S_{OAB} = S_{ABCD}/2 \ge S_P/4$. Это невозможно, ибо (по нашему выбору пары перпендикулярных прямых) площадь пересечения P с углом AOB равна $S_P/4$, а четырехугольник $OAXB$ лежит в этом пересечении.

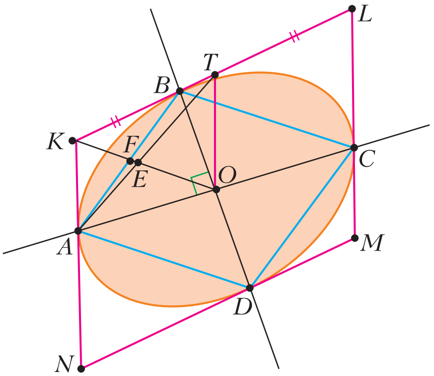


Рис. 2

Доказательство леммы. Проведем через A и C параллельные опорные прямые к P, и через B и D – тоже (рис. 2). Эти четыре прямые образуют параллелограмм $KLMN$ (полагаем, что точки K и L лежат в углах AOB и BOC соответственно).

Пусть T – середина KL, так что OT – средняя линия трапеции (или параллелограмма) $AKLC$. Без ограничения общности, пусть основание AK не больше основания CL, т.е. $AK \le OT \le CL$.

Если B лежит на отрезке TL, то $S_{ABCD}/2 = S_{ABC} \ge S_{ATC} = S_{AKLC}/2 = S_{KLMN}/4 \ge S_P/4$, откуда следует требуемое.

Пусть теперь B лежит на отрезке KT. Тогда в трапеции $AKTO$ рассмотрим точку E пересечения диагоналей и точку $F = AB \cap KO$. Поскольку $AK \le OT$ и $KE/EO = AK/OT$, имеем $KF \le FO$, значит, $S_{AKB} \le S_{AOB}$, откуда $S_{AOBK} \le 2S_{AOB} = S_{ABCD}/2$. Но по нашему выбору прямых четырехугольник $AOBK$ покрывает четверть площади P. Отсюда $S_P/4 \le S_{AOBK} \le S_{ABCD}/2$. Лемма доказана.

И.Богданов

Ф2781.[1] *Сфера радиусом $R = 8$ см однородно заряжена по поверхности. Мысленно рассечем заряженную сферу на две части плоскостью, проходящей на расстоянии $d = 2$ см от центра сферы. На каком расстоянии r от центра сферы за ее пределами лежит точка, в которой обе части однородно заряженной сферы создают одинаковые векторы напряженности электрического поля?*

[1]Автор решений задач Ф2781–Ф2784 – В.Плис.

Напряженность поля, создаваемого зарядами $\sigma\Delta S$ произвольной элементарной площадки в любой точке A (рис. 1), равна

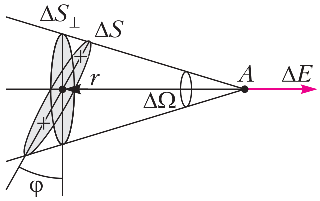


Рис. 1

$\Delta E = k\dfrac{\sigma\Delta S}{r^2}$. С учетом равенства $\Delta S_{\perp} = \Delta S\cos\varphi$ этот результат можно представить в виде

$$\Delta E = k\frac{\sigma}{\cos\varphi}\frac{\Delta S}{r^2} = k\frac{\sigma}{\cos\varphi}\Delta\Omega,$$

где σ – поверхностная плотность заряда, $\Delta\Omega$ – элементарный телесный угол, в котором из точки A видна элементарная площадка ΔS.

Если сферу вписать в конус (рис. 2), то из вершины конуса элементарные площадки на ближней и дальней частях сферы видны под одинаковыми телесными углами. Прямая, проходящая через точку A и эти площадки, образует одинаковые углы с площадками. Тогда эти площадки, заряженные с одинаковой поверхностной плотностью, вносят одинаковые вклады в напряженность электрического поля в точке A.

Итак, плоскость BCD, в которой лежат точки касания сферы и конуса, делит

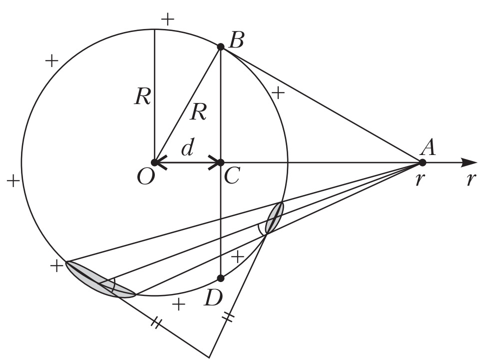


Рис. 2

сферу на два сферических сегмента, создающих одинаковые векторы напряженности электрического поля в точке A. Из подобия треугольников AOB и OBC следует $\frac{R}{r}=\frac{d}{R}$, откуда приходим к ответу на вопрос задачи:

$$r=\frac{R^2}{d}=32\text{ см}.$$

Ф2782. *В электрической цепи (рис. 1) все элементы идеальные. Известны емкость конденсатора $C=80$ мкФ, ЭДС батареи $\mathcal{E}=150$ В, отношение сопротивлений $\frac{r}{R}=0{,}25$. До замыкания ключа конденсатор не был заряжен. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после замыкания ключа к моменту, когда ток, текущий на конденсатор, станет нулевым?*

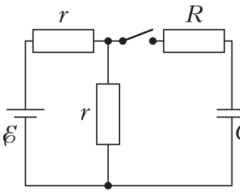


Рис. 1

Параметры эквивалентной батареи: $\mathcal{E}_{\text{экв}}=\mathcal{E}/2$, $r_{\text{экв}}=r/2$. Тогда схему можно представить в виде, изображенном на рисунке 2. В стационарном состоянии заряд конденсатора $q=\frac{C\mathcal{E}}{2}$, энергия электрического поля в конденсаторе $W=\frac{C\mathcal{E}^2}{8}$. В процессе зарядки конденсатора работа электрических сил в батарее

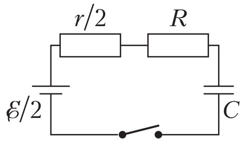


Рис. 2

$$A=q\frac{\mathcal{E}}{2}=\frac{C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Суммарно на двух резисторах выделится количество теплоты

$$Q=A-W=\frac{1}{8}C\mathcal{E}^2.$$

В процессе зарядки в любой момент времени отношение мощностей тепловыделения в резисторах равно отношению их сопротивлений. Тогда в резисторе сопротивлением R выделится количество теплоты

$$Q_R=\frac{R}{\frac{r}{2}+R}\frac{C\mathcal{E}^2}{8}=\frac{1}{\frac{r}{R}+2}\cdot\frac{1}{4}C\mathcal{E}^2=0{,}2\text{ Дж}.$$

Ф2783. *Планета «Фантазия» – однородный шар. У этой планеты есть магнитное поле, сходное с земным. Вблизи магнитных полюсов планеты линии индукции магнитного поля направлены по вертикали, поле однородное. Для определения величины индукции B в этой области ученик бросает заряженный шарик со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Через некоторое время шарик возвращается в точку старта. За время полета проекция шарика на горизонтальную плоскость совершила $n=2$ оборота. Найдите величину B индукции магнитного поля. Отношение заряда шарика к его массе $\frac{q}{m}=2\cdot10^6$ Кл/кг. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g=8$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.*

На шарик действуют вертикальная сила тяжести $m\vec{g}$ и горизонтальная магнитная сила $q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$. Тогда в уравнении движения

$$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\vec{g}+q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$$

можно разделить переменные:

$$m\frac{\Delta\vec{v}_{\text{верт}}}{\Delta t}=m\vec{g},\quad m\frac{\Delta\vec{v}_{\text{гор}}}{\Delta t}=q\left[\vec{v}_{\text{гор}}\times\vec{B}\right].$$

Продолжительность полета

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g},$$

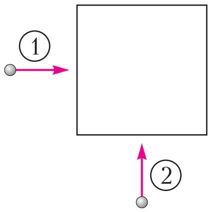
горизонтальная проекция шарика равномерно движется по окружности с периодом

$$\tau=\frac{2\pi}{\frac{q}{m}B}.$$

По условию, $T=n\tau$, откуда

$$B=n\pi\frac{g}{\frac{q}{m}v_0\sin\alpha}\approx5\cdot10^{-6}\text{ Тл}.$$

Ф2784. *Заряженная частица влетает в область пространства, где созданы однородные электрическое и магнитное поля.*



Если частица влетает в эту область со скоростью v в направлении, показанном стрелкой 1 на рисунке, она движется в этой области равномерно и прямолинейно. Если же частица влетает в область электрического и магнитного полей с той же по модулю скоростью в направлении, показанном стрелкой 2, то частица тоже движется в этой области равномерно и прямолинейно. Модуль напряженности электрического поля E. Найдите магнитную индукцию B. Направления, задаваемые стрелками 1 и 2, взаимно перпендикулярны.

Вектор напряженности электрического поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка («на нас» либо «от нас»). Вектор магнитной индукции направлен в плоскости рисунка под углом 45° к скорости первого электрона и 135° к скорости второго электрона (либо наоборот). Отношение модулей напряженности электрического поля и магнитной индукции

$$\frac{E}{B} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } B = \sqrt{2}\,\frac{E}{v}.$$

Симметрикс из трапеции

(см. 2-ю с. обложки)

Чтобы найти решение головоломки, можно проанализировать геометрическую структуру ее игровых элементов (рис. 1). Заметим, что они содержат в себе три равных прямоугольных треугольника (оранжевых) и четыре равных равносторонних треугольника (желтых).

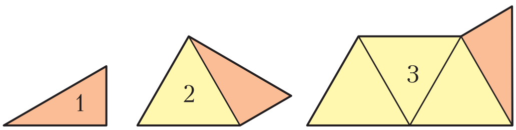


Рис. 1

Поскольку прямоугольные треугольники несимметричны и их нечетное количество, а именно 3, это наводит на мысль, что искомая фигура обладает поворотной симметрией 3-го порядка, при которой эти треугольники переходят друг в друга. При этом равносторонние треугольники должны быть собраны вместе, образуя равносторонний треугольник со стороной в 2 раза больше, чем сторона желтых равносторонних треугольников.

Это можно реализовать: симметрикс и расположение его игровых элементов 1, 2 и 3 приведены на рисунке 2.

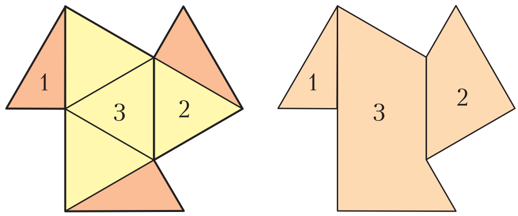
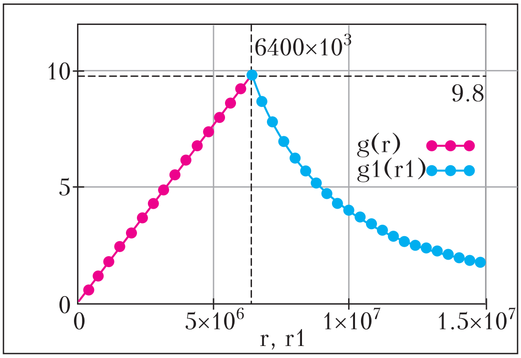


Рис. 2

Головоломка имеет единственное решение.

Вниманию наших читателей

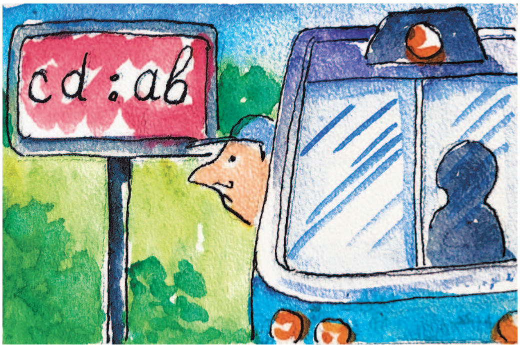
В журнале «Квант» №1 за 2024 год в статье Б.Мукушева «Гравитация внутри Земли и ее физические характеристики» была допущена ошибка. На странице 39 рисунок 6 должен быть таким →



Приносим свои извинения автору статьи и читателям нашего журнала.

Задачи

1. Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59. Поезд отправился утром, когда часы показывали время $\overline{ab}:\overline{cd}$, а прибыл тогда, когда часы



показывали время $\overline{cd}:\overline{ab}$. Сколько времени поезд находился в пути, если известно, что он ехал больше 6, но меньше 7 часов?

Н.Агаханов

2. Клетчатый квадрат 27 см × 27 см (длина стороны клетки 1 см) разрезали на 5 клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Могло ли

оказаться, что суммарная длина разрезов внутри квадрата равна 82 см?

Фольклор

Эти задачи предлагались на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области.

3. В каждой клетке таблицы 3 × 3 стоит по одному натуральному числу, причем все девять чисел различны. Известно, что можно вычеркнуть по одному

такому числу в каждой строчке, что в каждой строчке суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу x. Также можно вычеркнуть по одному такому числу в каждом столбце, что в каждом столбце суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу y. Может ли оказаться, что $x = y$?

А.Терёшин

4. На столе лежат 90 карточек с числами от 1 до 90. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую

карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

О.Подлипский

Иллюстрации Д.Гришуковой

«На круги свои...»

А.БЕЛОВ, М.САПИР

Периодичность и информатика

Как известно, поведение живых существ изучает биология, а поведение автоматических устройств (автоматов) – информатика. Следующая задача находится на стыке этих наук. (Любители межпредметных связей могут найти в ней и связи с историей, поскольку в этой задаче фигурирует мифическое быкоподобное чудовище – Минотавр. Он, как известно, охранял Лабиринт.)

Задача 11. *Лабиринт, в котором живет и работает Минотавр, представляет собой несколько комнат, соединенных коридорами. Из каждой комнаты выходит три коридора (рис.* 1*). Войдя в комнату, Минотавр идет затем по правому или по левому коридору, причем если в предыдущей комнате Минотавр поворачивал налево, то в этой комнате он повернет направо, и наоборот. Вначале Минотавр находился в Главной Комнате. Докажите, что он рано или поздно снова окажется в Главной Комнате.*

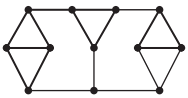


Рис. 1

Решение. Надо воспользоваться периодичностью. Задачи, с которыми мы встретились, показывают, что главное – правильно выбрать, что считать «состоянием». Допустим, что нам в лабиринте встретился Минотавр. Что нужно знать, чтобы определить его дальнейшее движение? Во-первых, комнату, где мы с ним находимся, во-вторых – коридор, по которому он только что пришел в эту комнату, в-третьих (очень важно!) – «мысль» Минотавра, т.е. куда он намерен повернуть: направо или налево. Итак, будем считать состоянием Минотавра тройку – комната, коридор, «мысль». Осталось только применить идею обратного хода и оформить доказательство. Проделайте это сами. Определите функцию времени на множестве состояний.

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

А теперь посмотрим на Минотавра как на автоматическое устройство. Из условия задачи видно, что он может выполнять лишь два действия – «НАЛЕВО» или «НАПРАВО». Программу, по которой работает Минотавр, можно записать, например, так:

1 НАЛЕВО
2 НАПРАВО
3 ПЕРЕЙТИ К 1

Давайте усложним программу Минотавра.

Упражнение 9. а) Допустим, что Минотавр выполняет программу:

1 НАЛЕВО
2 НАЛЕВО
3 НАПРАВО
4 НАПРАВО
5 ПЕРЕЙТИ К 1

Докажите, что и в этом случае (как, впрочем, и когда он работает по произвольной программе, первые K команд которой – налево или направо, а $(K+1)$-я – перейти к п. 1.) Минотавр вернется в Главную Комнату.

Указание. «Мысль» Минотавра – это номер выполняемой команды.

б) Для усиления охраны лабиринта боги вывели целое стадо минотавров, снабдив каждого своей программой. Перед началом дежурства всех минотавров собрали в Главной Комнате, где перед ними с напутственным словом выступил сам Зевс. Докажите, что когда-нибудь все стадо минотавров снова соберется в Главной Комнате. Как оценить время ожидания этого момента? Что можно назвать «состоянием» стада минотавров?

Подумаешь, Минотавр! – заявляет программист Петя. – Он слишком глуп, вот и движется по кругу. То ли дело компьютер: с помощью компьютера можно сделать все, что угодно. К примеру, я запросто напишу программу, которая напечатает одну за другой все цифры десятичного разложения корня из двух!

Задача 12. *Докажите, что Петина затея невыполнима.*

Решение. У любого компьютера конечное число ячеек памяти и каждая ячейка может находится только в конечном числе состояний, так что число состояний компьютера конечно. Каждое состояние компьютера определяет, что с ним произойдет после выполнения очередной команды, – ведь компьютер работает по программе, которая также находится в его памяти.

Вспомним идею периодичности. Теперь ясно, что состояния компьютера периодически повторяются, и какую бы программу ни написал Петя, цифры, которые будет печатать компьютер по его программе, также начнут периодически повторяться. Итак, компьютер может печатать десятичные разложения только рациональных чисел.

Как видите, Петино намерение неосуществимо из-за ограниченности размеров реального компьютера. Если бы число ячеек памяти компьютера было не ограничено, то составить программу для вычисления корня из двух было бы несложно.

Упражнение 10. Для какой последовательности цифр можно сконструировать автомат, имеющий не более 100 состояний, который может ее напечатать?

Однако бывают такие задачи, с которыми не справится и компьютер бесконечных размеров. Такие задачи называют *алгоритмически неразрешимыми*. Возможно, вы уже имели дело с уравнениями в целых числах и знаете, как трудно бывает найти решение. Это не случайно – как показывает замечательная теорема Матиясевича (см. «Квант» №5 за 1975 г.), задача решения таких уравнений алгоритмически неразрешима. Впрочем, и не прибегая к услугам компьютера, можно продемонстрировать, что даже автоматическое устройство, умеющее выполнять программы любой сложности и длины, все равно не способно решить многие очень просто формулируемые задачи. В этом нам снова поможет идея периодичности.

Рассмотрим совсем простой с виду автомат – Чертежник. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Будем изображать направление движения Чертежника стрелкой. Для Чертежника допустимы всего три действия:

1. «ЗАКРАСИТЬ» – закрасить клетку.
2. «НАЛЕВО» – повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки.
3. «ПРЫГНУТЬ» – перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

Кроме того, Чертежник умеет проверять условие «ВПЕРЕДИ КРАЙ».

На первый взгляд кажется, что Чертежник еще примитивнее, чем Минотавр: он даже не понимает команду «НАПРАВО». Но простота обманчива. Чтобы привыкнуть к Чертежнику и убедиться в его нетривиальности, попробуйте справиться с упражнениями 10–11.

Программы для Чертежника можно записывать в любом удобном для вас виде, используя любые способы записи ветвлений, циклов и подпрограмм. Нельзя только заставлять Чертежника выполнять невыполнимые для него команды (например, «НАПРАВО») и проверять непонятные ему условия (например, условие «СЛЕВА КРАЙ»). И что еще очень важно – Чертежник не умеет считать. Он не способен выполнять циклы с параметрами и работать с числовыми (а также с любыми другими) переменными.

Если читателю неуютно работать с программой на «произвольном» языке, то будем пользоваться ЧЕР-БЕЙСИКОМ: в каждой строке стоит номер команды и команда только вида GOTO N (перейти к команде номер N), «ЗАКРАСИТЬ», «НАЛЕВО», «ПРЫГНУТЬ» или условный переход ЕСЛИ КРАЙ, ТО GOTO N. И если нет перехода, то следующей будет выполняться команда, имеющая следующий номер.

Упражнения

11. Напишите программу для Чертежника, по которой он на любом листе бумаги:

а) дойдет до угла листа, куда бы мы его не поместили;

б) закрасит все клетки листа;

в) отойдет от края листа, если его поместить у края;

г) определит, в углу он находится или нет, закрасит угловую клетку, если он в углу, и останется в исходном положении, если нет.

12. Напишите программу для Чертежника, по которой он на любом квадратном листе бумаги:

а) начав из положения на рисунке 2, нарисует полосу из $k/2$ клеток, если k четно, и вернется в исходное положение, ничего не закрасив, если k нечетно;

б*) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от четности длины стороны листа центр – это одна клетка или четыре клетки).

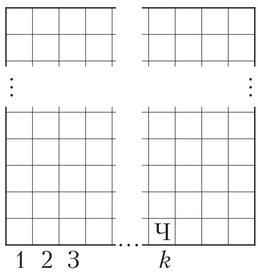


Рис. 2

Чтобы окончательно убедить вас в нетривиальности Чертежника, приведем без доказательства утверждение, показывающее, что Чертежник ничуть не проще компьютера с бесконечной памятью.

Удивительный факт. *Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – последовательность натуральных чисел, и существует программа, по которой компьютер (с бесконечной памятью) для каждого n вычисляет a_n. Тогда существует программа для Чертежника, по которой он для любого n, начав из положения 2^n на рисунке 3, закрасит полосу из 2^{a_n} клеток, если лист бумаги – четверть плоскости.*

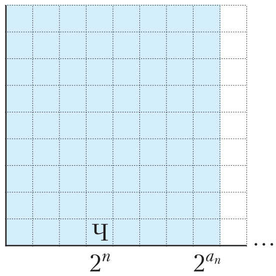


Рис. 3

Для умеющих возводить в степень и логарифмировать Чертежник может заменить компьютер. (Это значит, говоря на строгом языке логиков, что с его помощью можно вычислять любую *вычислимую функцию* $a(n)$.)

Таким образом, Чертежника, который совсем не знаком с числами, можно научить вычислять все, что может вычислить компьютер с бесконечной памятью, например, цифры в десятичном разложении корня из двух (подробнее об алгоритмах см. книгу В.А.Успенского «Машина Поста»).

Тем не менее существуют очень простые задания по раскраске листа – основной деятельности Чертежника, выполнять которые он не сможет научиться при всем нашем и его желании. Вот пример такого задания.

Задача 13. *Докажите, что не существует программы, по которой Чертежник на любом квадратном листе бумаги закрасит только клетки, содержащие центр листа, независимо от исходного положения. (Удивительно, что закрасить все клетки, кроме центральных, Чертежник может.)*

Решение. Ясно, что для листа заданных размеров требуемую программу записать несложно. Значит, все дело в том, что надо составить программу, пригодную для любого сколь угодно большого листа бумаги.

Представим себе короткую программу, для определенности строк в 1000, и очень большой лист бумаги, скажем, в несколько сотен тысяч клеток. И вот Чертежник стал в угол листа и отправился в путь, руководствуясь нашей программой. Много времени утечет, прежде чем он дойдет до центра и закрасит там клетку. Перед этим ему придется долго идти вдали от краев листа. А как ведет себя Чертежник вдали от края? Чтобы понять это, допустим, что краев у листа вообще нет – лист бесконечен.

Может быть, тогда Чертежник движется периодически? Наш опыт говорит, что в качестве состояния Чертежника надо взять место выполняемой в данный момент строки программы и ориентацию Чертежника на плоскости (одну из четырех: вверх, вниз, вправо, влево). Если число строк в программе n, то возможных состояний $4n$. Время мы будем измерять в тактах работы программы. Можно, конечно, воспользоваться теоремой о периодичности, но мы еще поизучаем Чертежника.

Пусть теперь в моменты времени T, $T + \Delta T$ состояния повторятся. (Можно считать, что $\Delta T < 4n$. Почему?) За это время Чертежник сдвинулся на вектор $\vec{a}$, и в дальнейшем за каждый промежуток времени ΔT он будет сдвигаться на этот вектор. Движение Чертежника, если смотреть «с высоты птичьего полета», подобно телу, на которое не действуют внешние силы, – «прямолинейно и равномерно», т.е. он движется вдоль прямой, отклоняясь от нее на ограниченное расстояние и рисуя при этом периодически повторяющийся узор.

Упражнение 13. а) Покажите, что вдоль прямой с рациональным углом наклона возможно любое периодическое движение.

б) Каким может быть размер квадрата, который можно нарисовать с помощью программы, состоящей из n операторов? *Указание.* Пусть внутреннее состояние Чертежника – это только место в программе.

в) Покажите, что если Чертежник уходит «на бесконечность», то и его внутреннее состояние, и ориентация повторяются с периодом $\Delta T < n$.

Движение Чертежника напоминает поведение элементарной частицы. Если посмотреть на лист бумаги «с высоты птичьего полета», то мы увидим, что вдали от края листа (или вдоль края) он может двигаться конечным числом способов. При «соударении» со стенкой или углом происходит «рассеивание», и от одного способа движения, по некоторому закону, Чертежник переходит к другому способу движения (в зависимости от того, с чем столкнется – со стенкой или углом, от ориентации, а также от «фазы» – в каком внутреннем состоянии столкнется). Удивительный факт говорит нам о неограниченной трудности задач многократного рассеяния.

Упражнение 14 (другое доказательство периодичности движения Чертежника). Докажите, что программу для Чертежника, работающего на неограниченном листе бумаги, можно переписать так, что поведение Чертежника не изменится, а команда перехода к другой строке будет только одна (в конце программы).

Указание. Замените все условные переходы на безусловные (почему это можно сделать?), затем обозначьте строки программы, содержащие команды «НАЛЕВО», «ПРЫГНУТЬ», «ЗАКРАСИТЬ», точками, а стрелками – какая следующая команда выполняется. Каков путь по стрелкам?

Как видите, вдали от краев листа Чертежник ничуть не умнее Минотавра, лишь наличие краев делает его сравнимым с компьютером. Не всегда свобода – во благо!

Вернемся к решению задачи 13. Можно сделать вывод: вдали от краев листа Чертежник движется периодически с периодом и предпериодом, не превышающими длины программы. Поэтому предпериод кончится задолго до того, как Чертежник дойдет до центра. Дойдя до центра, он должен выполнить команду «ЗАКРАСИТЬ». Значит, эта команда входит в период, и Чертежник должен был выполнить ее много раз на пути к центру листа.

Упражнение 15. Приведенное решение задачи 13 не совсем строгое, «пригладьте» его. А именно: пусть программа для Чертежника содержит n строк. Оцените величину листа бумаги, который нужно взять, чтобы Чертежник не смог закрасить только центральные клетки.

Возможно, здесь у вас (как поначалу и у меня) возникло сомнение в Удивительном факте. Ведь если число n очень большое, то, например, в процессе перехода от 2^n к 2^{n^2} Чертежнику придется очень много раз удариться о край, и тогда у него обязательно повторятся два состояния, начнется период, и Чертежник не сможет остановиться. Уточним эти соображения. Под переходом от числа k к числу l мы будем понимать переход от положения на краю на расстоянии k от вершины угла к положению на краю на расстоянии l от вершины. «Состояние на краю» определим так: во-первых, учтем номер исполняемой команды в программе и ориентацию на плоскости. Конечно, этого недостаточно: после отражения Чертежник может прийти к другой стенке в различной «фазе», т.е. в произвольном месте периода «внутренних состояний». Поэтому в понятие состояния включим еще и остаток от деления расстояния до вершины угла на общее кратное всех возможных периодов последовательностей внутренних состояний при движении Чертежника по неограниченной плоскости (например, на $k!$, где k – число команд в программе).

Теперь повторение двух состояний влечет за собой не только одинаковый «отход» от стенки, но и одинаковый «приход» к другой стенке (почему?).

Если вы сами найдете ошибку в предыдущих рассуждениях, Удивительный факт станет вам более понятным.

Постараемся его объяснить в общих чертах.

Прежде всего, с помощью движения вдоль прямой с рациональным углом наклона (см. упражнение 12,а) можно от числа $2x$ переходить к числу $3x$, $5x$ и т.д. (покажите, как). Кроме того, можно имитировать проверку расстояния до вершины на четность (см. упражнение 10,а), а также делимость на 3, 5, 7 и т.д.

На рисунке 4 приведены блок-схемы алгоритмов перехода от 2^n соответственно к 3^n и 2^{2^n}. Разумеется, чтобы их понял Чертежник, эти блок-схемы еще нужно подробно расписать.

Задача 14*. *а) Проделайте это. б) Нарисуйте аналогичную блок-схему для перехода от числа 2^n к n-й цифре после запятой десятичного разложения корня из двух. (Если для некоторой процедуры уже нарисована блок-схема, то ее в дальнейшем можно обозначать одним действием.)*

Удивительный факт объясняется тем, что индексы, используемые компьютером, мож-

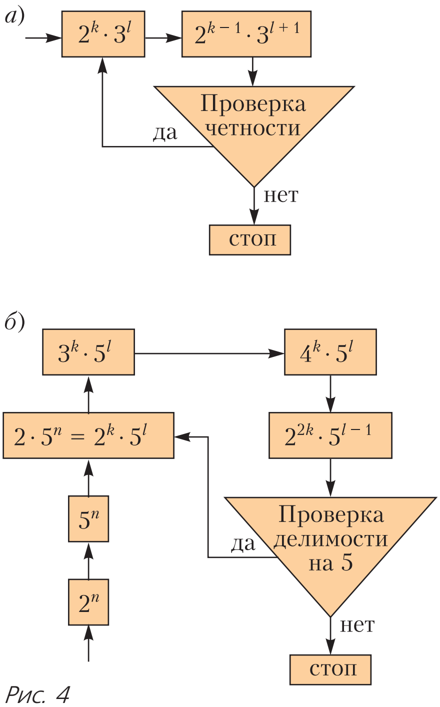


Рис. 4

но моделировать с помощью показателей степеней при простых числах – где есть один индекс, там есть и много. Из этого факта можно извлечь алгоритмическую неразрешимость ряда утверждений – например, уже упомянутую теорему Матиясевича.

Вы видели, как работает идея цикличности. Хотя она и выглядит довольно просто, задачи, в которых эта идея является основной, не всегда легкие. В чем же здесь дело? Оказывается, что даже очень простые ключевые идеи хорошо знать заранее, иначе их трудно обнаружить среди других идей и технических сложностей.

Если ключевая идея неизвестна, а технические сложности присутствуют, то идею надо «добыть», но не прямо, а с помощью других задач. Ведь задача существует не сама по себе, а в окружении ей родственных (даже для решения «одноклеточной» задачи 1 понадобилось рассмотреть последние цифры всех степеней двойки). Поэтому изучают задачи, идейно связанные с данной (так было придумано решение задачи 13 про центр квадрата). Часто для этой цели рассматривают важнейшие частные случаи или другие модельные задачи, в которых трудности присутствуют в «ослабленном виде» и меньше технических сложностей.

Прилагательное «модельные» не случайно – это очень похоже на то, что делают естествоиспытатели, отбрасывая часть свойств явления природы, чтобы сделать его обозримым.

На часто встречающиеся идеи, «стандартные рассуждения» (например, принцип Дирихле, цикличность) можно смотреть и как на модели ситуаций. Эти модели столь схематичны, что выглядят тривиальными, однако знание таких «тривиальностей» сильно облегчает жизнь.

Упражнения

16. Допустим, что Чертежник умеет не только закрашивать, но и стирать краску с закрашенной клетки (скажем, по команде «СТЕРЕТЬ»).

а) Напишите программу для Чертежника, по которой он закрасит центральные клетки и только их.

б) Докажите, что нельзя составить программу для «стирающего» Чертежника, по которой он на любом квадратном листе бумаги нарисует систему вложенных квадратов (рис. 5).

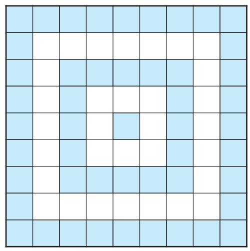


Рис. 5

17. Напишите интерпретаторы языков Минотавра и Чертежника.

Обобщение идеи цикличности

Часто встречаются обобщения идеи цикличности.

Мы видели, как работает эта идея в «дискретном» случае, когда познакомились только с некоторыми приложениями идеи цикличности, причем с «дискретным» случаем, когда число состояний конечно. Но и в «непрерывном» случае, при бесконечном числе состояний, часто возникает периодичность или, вернее, «почти периодичность», когда состояния повторяются не абсолютно точно, а лишь приближенно. Так, каждое лето и похоже, и не похоже на предыдущее. Об этом задумывались древние, а мы расскажем в другой раз. Разберем типичный пример.

Задача 15. *По круглому стадиону (длина кольца 1 стадий) прыгает Кентавр. Ширина его прыжка, т.е. дуги, на которую он все время сдвигается, постоянна и равна a. Докажите, что Кентавр будет сколь угодно близко подходить к своему начальному положению.*

Решение. Состояние Кентавра – это, конечно, место его стояния, т.е. точка на окружности. Число состояний бесконечно, и точное повторение состояний не обязательно. (Повторения не будет, например, если a иррационально.)

Что в этом случае дает принцип Дирихле? Повторения состояний с любой наперед заданной точностью назовем «почти повторениями».

Разберемся в этом подробнее. Пусть Кентавр сделал n прыжков. Отметим каждое положение Кентавра точкой, эти $n+1$ точек разбивают окружность на n отрезков, какой-то имеет длину не больше $1/n$. Состояния «почти повторились».

Каждое состояние определяет как последующее, так и предыдущее; хочется применить идею «обратного хода», однако...

Неприятный пример. *Блоха прыгает по отрезку $[0;1]$. Если сейчас она находится в точке X, то следующим прыжком она оказывается в точке X^2. «Почти повторение» есть, возвращения нет.*

Причина состоит в том, что хотя при каких-то n и i-е, и $(n+i)$-е состояния близки, но степень близости зависит от n и i. Если к ним n раз применить обратный ход, то они могут разойтись.

В задаче про Кентавра, однако, этого не происходит, поскольку расстояние между двумя состояниями такое же, как между следующими и между предыдущими.

Упражнение 18. Завершите доказательство. Докажите также, что не позже чем за n прыжков Кентавр вернется на расстояние не больше $1/n$ от начальной точки.

Задача 16. *Если a иррационально, то Кентавр рано или поздно попадет на любую дугу окружности. Докажите это.*

Указание. Если за n прыжков Кентавр сдвинется на малую дугу ε, то за $k \cdot n$ прыжков он сдвинется на $k \cdot \varepsilon$, а так как a иррационально, то ε может быть малым, отличным от 0.

А если прыгают два кентавра (у каждого своя длина прыжка)? Когда оба будут находиться на расстоянии менее $1/n$ от начального положения? Этого ждать не дольше, чем n^2 секунд (прыжок делается за 1 секунду). Здесь состояние – это пара точек на окружности. Покажем, что среди n^2+1 состояний найдутся два близких, т.е. положения соответствующих кентавров отличаются не более чем на $1/n$.

Изобразим состояние пары кентавров точкой единичного квадрата. Координата x означает положение первого, координата y – второго. Точки квадрата, чьи координаты отличаются на целое число, изображают одно и то же состояние. (Что это за точки?)

Разобьем квадрат на n^2 квадратиков со стороной $1/n$ каждый. Тогда какие-нибудь 2 точки из n^2+1 отмеченных попадут в один квадрат. Они будут изображать близкие состояния, для которых положение соответствующих кентавров отличается не более чем на $1/n$.

Упражнение 19. Завершите доказательство.

Задача 17. *Рассмотрите случай стада из k кентавров. Докажите, что не позднее, чем через n^k секунд все кентавры будут находиться на расстоянии не более $1/n$ от начального положения одновременно. (Вначале все кентавры находятся в одном месте.)*

Интересно, что (фактически дискретный) случай рационального прыжка для одного кентавра равносилен утверждению о том, что арифметическая прогрессия с рациональным шагом, проходящая через 0, содержит бесконечно много целых чисел. Естественно ожидать, что произвольная арифметическая прогрессия, проходящая через 0, подходит сколь угодно близко к целым числам.

Задачи

18. *а) Докажите, что для любого действительного числа a найдутся целые p и q такие, что $|p \cdot a - q| < 1/q$ (или, что то же самое, $|a - p/q| < 1/q^2$), так что дробь p/q «хорошо приближает» a.*

б) Покажите, что для любых чисел $a(i)$, $i = 1, \ldots, n$, найдутся такие p и q, что $|p \cdot a(i) - q| < (1/q)^{1/n}$ при всех $i = 1, \ldots, n$.*

Указание. Состояние числа $a \cdot q$ – это его дробная часть.

19.** *Пусть a – иррациональное число, а b – произвольное число из интервала $(0;1)$, $q(m)$ есть минимум дробной части $n \cdot a$, где $n < m$ целое. Аналогично, $r(m)$ есть минимум дробной части $b - n \cdot a$. Докажите, что $q(m) > r(m)$ при бесконечно многих m.*

20. *а) Докажите, что числа, кратные $\sqrt{2}$, сколь угодно близко подходят к числам вида $n + 1/2$, где n – натуральное.*

б) Докажите, что степень двойки может начинаться с любого числа девяток.*

Указание. Прологарифмируйте по основанию 10 неравенство $0,9\ldots9 \cdot 10^k < 2^l < 10^k$. Воспользуйтесь иррациональностью $\log 2$.

в) С какой вероятностью наугад взятая степень двойки начинается с единицы?*

г) Докажите, что найдется такое n, что числа 2^n и 3^n одновременно начинаются с цифр 1000…*

21*. *Пусть отображение F переводит единичный квадрат K в себя и сохраняет площадь каждого его подмножества. Докажите, что для любого подмножества квадрата U, площадь которого больше нуля, найдется точка x из U такая, что при некотором $n > 0$ точка $F(\ldots(x)\ldots)$ (n раз) тоже принадлежит U.*

Несколько более общее утверждение называется теоремой Пуанкаре о возвращении. Эта теорема приводит к несколько неожиданному выводу: если в герметичной комнате открыть флакон с духами, то почти наверняка через некоторое время все молекулы пахучего вещества снова соберутся во флаконе (правда, «некоторое» время намного превышает время жизни Вселенной). Доказательство этого факта напоминает рассуждения в задачах про стадо минотавров или кентавров: положение всех молекул примерно так же описывается точкой пространства состояний (фазового пространства), возвращение устанавливается с помощью теоремы Пуанкаре.

Часто причина периодичности в природе состоит в том, что если множество состояний ограничено, то два состояния «почти повторятся» и будут еще близки некоторое время. Об этом задумывались еще древние.

Статью о возвращении мы закончим возвращением к Екклесиасту: «Восходит солнце, и заходит солнце, и спешит к месту своему, где оно восходит. Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем и возвращается ветер на круги свои. Все реки текут в море, но море не переполняется; к тому месту, откуда реки текут они возвращаются, чтобы опять течь… Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем».

* * *

Приведем еще несколько задач на рассмотренные темы.

1*. Периодична ли функция

$$y = \cos x + \cos \sqrt[5]{2}x - \cos \sqrt[5]{4}x + \cos \sqrt[5]{8}x?$$

2. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией?

3.** Общее утверждение: пусть $a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа такие, что никакие из них не выражаются через другие с помощью линейной комбинации с рациональными коэффициентами. Тогда для любого набора $0 < b_i < 1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое L, что при всех i верно неравенство $|L \cdot a_i - b_i| < \varepsilon$ (для наугад выбранного L это выполнено с вероятностью ε^n).

4. Дана бумага в клетку. Через два узла проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

5. а) Докажите, что если радиус окружности стремится к бесконечности, то расстояние от нее до ближайшей целой точки стремится к нулю.

б) К нулю стремится также отношение числа целых точек, попавших на окружность, к ее радиусу.

6. Вдоль коридора института МИМИНО гуляют пять ученых, дойдя до конца коридора, каждый поворачивает назад. Пока Главный проходит коридор один раз, Ведущий проходит два раза, Старший – три, Средний – пять, Младший – семь раз. Докажите, что найдется момент, когда все они движутся к одному концу.

7. Укажите явно такую степень пятерки, что в ее десятичной записи встретится подряд более 1000 нулей. А такую, чтобы встретилась комбинация ровно из 1000 нулей, идущих подряд?

8. Докажите, что найдется степень тройки, которая начинается теми же 1000 цифрами, что и кончается.

9. Даны две прямые, образующие угол φ. На одной взята точка M и в этой точке сидит блоха, которая прыгает с одной прямой на другую ровно на 1 см, причем всегда в точку, отличную от предыдущей. Докажите, что если блоха снова оказалась в исходной точке, то число φ/π рационально.

10. Если косинус угла равен 1/3, то его градусная мера иррациональна. Докажите это. Обобщите задачу.

11. Найдите все значения A, для каждого из которых последовательность

$$\cos A,\ \cos 2A,\ \cos 4A,\ \cos 8A,\ \ldots$$

состоит только из отрицательных чисел.

12*. Найдите такое n, что в десятичной записи числа 5^n содержится по крайней мере 1989 нулей или единиц.

13. а) По плоскости катают правильный додекаэдр. Докажите, что можно добиться того, чтобы его вершина подошла сколь угодно близко к началу координат.

б) Дан правильный тетраэдр. Разрешается его симметрично отражать относительно любой его грани. Можно ли добиться того, чтобы одна из его вершин подошла сколь угодно близко к началу координат?

14. а) Докажите, что $\sin n^2$ не стремится к 0 при $n \to \infty$.

б) Докажите, что число 2^{n^2} может начинаться с любой комбинации цифр.

15. Расположите на прямой систему отрезков единичной длины, не имеющих общих точек (в том числе и общих концов), так, чтобы любая бесконечная арифметическая прогрессия имела общую точку с некоторым отрезком системы.

16. а) Окружность радиуса 1 катится по окружности радиуса $\sqrt{2}$. В начальный момент времени в точке касания нанесли липкую красную краску. В процессе качения краска переходит от одной окружности к другой и обратно. Сколько точек окажутся окрашенными после того, как маленькая окружность сделает 1000 оборотов?

б) Три колеса радиусов 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ касаются в одной точке и вращаются без проскальзывания. В начальный момент времени в эту точку поместили липкую красную краску, которая в процессе вращения переходит с колеса на колесо. Сколько точек окажутся окрашенными после того, как самое маленькое колесо сделает 1000 оборотов?

17. а) Докажите, что, выписав первые цифры миллиарда последовательных степеней двойки, мы встретим такой участок: 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1.

б) Докажите, что эта последовательность непериодична.

в) Последовательность называется равномерно рекуррентной, если она почти периодична: для любого k можно найти $n(k)$ такое, что любой ее участок длины k можно найти в любом ее участке длины $n(k)$. Докажите, что последовательность первых цифр дробных частей чисел αn такова.

г) Если последовательность W букв не периодична и равномерно рекуррентна, U и V – ее разные подслова, то найдутся S и T, такие, что SUT – подслово, а SVT – не подслово W.

Часть примеров этой статьи взята из материалов А.Я.Белова и И.С.Рубанова, подготовленных к Кировской летней математической школе, часть материалов использовалась также в Школе юного математика при Свердловском пединституте.

Авторы выражают признательность А.К.Ковальджи за полезное обсуждение и ценные замечания, а также Д.Аблову, А.И.Артемьеву, А.Г.Гейну, Г.В.Кондакову, И.С.Рубанову, А.А.Шапиро, Б.Р.Френкину.

Литература

1. *В.А.Уфнаровский*. Математический аквариум. – Кишинев, Штиица, 1987.

2. *В.И.Варшавский, Д.А.Поспелов*. Оркестр играет без дирижера. – М.: Наука, 1984.

3. *А.Орлов*. Принцип Дирихле. – «Квант», 1971, №7.

4. *А.Гейн, А.Ковальджи, М.Сапир*. Задачи, модели и ЭВМ. – «Квант», 1989, №3.

5. *А.Белов, М.Сапир*. И возвращается ветер... – «Квант», 1990, №4.

Один из авторов этой статьи Марк Валентинович Сапир (12.02.1957 – 08.10.2022) был замечательным математиком. Он закончил Свердловский (ныне Уральский) университет в 1978 году, защитил кандидатскую диссертацию под руководством Л.Н.Шеврина. Работал в Уральском университете, в университете Небраски в Линкольне, с 1997 года до конца жизни работал в университете Вандербилта, был главным редактором International Journal of Algebra and Computation. Если бы он оставался редактором дольше, несомненно, этот журнал был бы поднят на новый уровень. В 2006 году Марк Валентинович был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе в Мадриде.

Я многим обязан общению с Марком. Благодаря ему я многим заинтересовался, многое узнал и понял. Например, он заинтересовал меня сюжетом «Роботы в лабиринтах», помог мне понять классическое доказательство теоремы Ван дер Вардена, работу машины Минского; от него я многое узнал о комбинаторике слов и о проблемах бернсайдовского типа. Я благодарен ему и за множество воодушевляющих разговоров, относящихся к дискретной математике.

А.Белов

Ньютон, модели Вселенной и постоянная Хаббла

А.КУЛАКОВ

Моей учительнице физики, Валерии Александровне Тихомировой, посвящается

Предисловие

После ньютоновских «Начал» и прямого вывода эллиптичности планетарных орбит из законов Ньютона и закона всемирного тяготения одним из представителей династии Бернулли физики начали рассматривать модели Вселенной «в целом».

Во времена Ньютона и до двадцатого века Вселенная представлялась однородной, изотропной и стационарной. Однородность означает, что во всех точках Вселенной действуют одинаковые законы и что нет выделенной точки во Вселенной, которую можно объявить началом координат, – все точки равноправны. Изотропность означает, что все направления равноправны – нет выделенного направления. Стационарность понималась как неизменность Вселенной в целом, а из этого следовало, что каждая точка в среднем должна оставаться на своем месте или, что то же самое, расстояния между всеми объектами во Вселенной должны оставаться неизменными. Сразу обнаружилось, что такими свойствами может обладать только пустая Вселенная, т.е. Вселенная, в которой отсутствует вещество, или, что то же самое, в которой плотность вещества равна нулю.

Действительно, предположим, что плотность вещества во Вселенной $\rho > 0$. Тогда из однородности следует, что вещество во Вселенной распределено равномерно с этой плотностью. Рассмотрим теперь какую-нибудь точку A. Предположим, что это точка Вселенной, в которой мы живем, планета Земля или Солнечная система, и попытаемся определить, с какой силой действует на материальную точку A массой m остальное вещество Вселенной. Нам понадобятся два факта, которые были известны еще Ньютону.

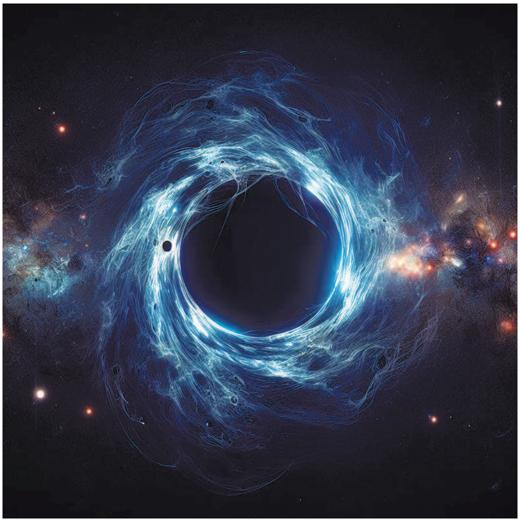
1. На тело, находящееся внутри сферы, по поверхности которой вещество распределено равномерно, не действует никакая гравитационная сила (все силы уравновешены, скомпенсированы).

2. Сфера, вещество которой распределено равномерно по поверхности, действует на тело массой m вне сферы так, как если бы вся масса была сосредоточена в центре сферы. Как следствие, то же самое верно для шара, плотность вещества которого зависит только от радиуса (сферически симметричное распределение).

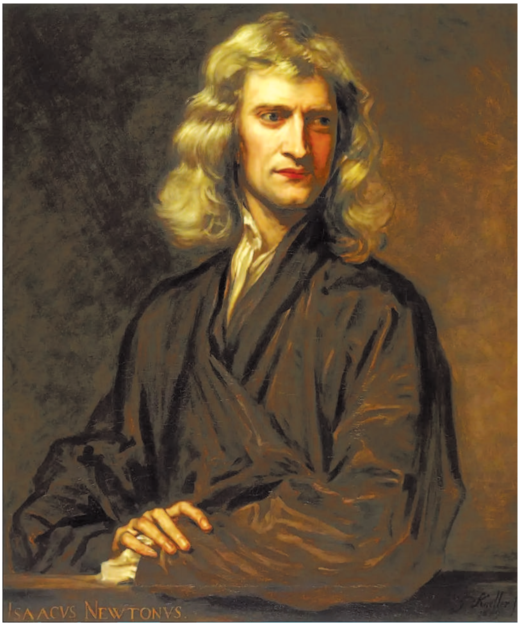
Задача 1. Докажите эти факты.

Выберем теперь точку B, находящуюся на расстоянии R от точки A. Из однородности следуем, что мы можем выбрать любую точку. Разобьем Вселенную на сферы с центром в точке A. По первому факту сила, с которой действует материя вне сферы радиусом R, равна нулю, а вещество, сосредоточенное в шаре радиусом R с центром в A, будет действовать на B силой

$$F = -G\frac{mM_{AB}}{R^2}.$$



DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240303



Исаак Ньютон

А это означает, что точка B по отношению к точке A должна испытывать ускорение, т.е. двигаться, что противоречит стационарности и, как казалось до двадцатого века, однородности Вселенной.

Двадцатый век внес свои коррективы в это противоречие: Эйнштейн и Пуанкаре построили общую теорию относительности (ОТО), а Александр Фридман вывел из ОТО то, что сейчас называется «Стандартной моделью современной космологии», – модель Вселенной в целом.[1] Оказалось, что эта модель содержит три принципиально различные модели и выяснение того, в каком из миров мы живем, возлагается на плечи наблюдателя. При этом все три модели являются нестационарными при плотности вещества во Вселенной $\rho > 0$.

А как же однородность? Во всех трех моделях скорости разбегания галактик, видимые из точки наблюдателя A, оказались пропорциональны расстояниям до A. Противоречит ли это однородности?

Задача 2. Космонавт приземлился на планете A в звездном скоплении и обнаружил, что все остальные звезды удаляются от A со скоростями, пропорциональными их расстояниям. Какую картину он будет наблюдать, если перелетит на планету другой звезды B этого скопления?

Ответ: абсолютно такую же!

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу, прежде, чем читать дальше. Мы же приведем решение этой задачи здесь, потому что нам понадобится этот факт. Главное, помнить, что расстояние (перемещение) так же, как и скорость, это вектор.

Выберем пробную звезду C. Пусть $\vec{v}_{AB}$ и $\vec{v}_{AC}$ – скорости звезд B и C соответственно, $\vec{v}_{AB} = H \cdot \overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_{AC} = H \cdot \overrightarrow{AC}$, где H – коэффициент пропорциональности, постоянная Хаббла, традиционно обозначаемый этой буквой в честь замечательного американского астронома Эдвина Хаббла.[2] Тогда

$$\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{AC} - \vec{v}_{AB} = H\cdot\overrightarrow{AC} - H\cdot\overrightarrow{AB} =$$

$$= H \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = H \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Следовательно, приземлившись на планету звезды B, космонавт увидит, что все звезды удаляются от звезды B со скоростями, пропорциональными их расстояниям. И коэффициент пропорциональности тот же самый – H.

А что если и в ньютоновской модели отказаться от стационарности и считать, что в каждый момент времени галактики удаляются друг от друга со скоростями, пропорциональными расстоянию между ними? Это эквивалентно тому, что *относительные* расстояния остаются теми же.

Итак, первое уравнение, которому должны удовлетворять объекты нашей вселенной, это

$$R' = H \cdot R,$$

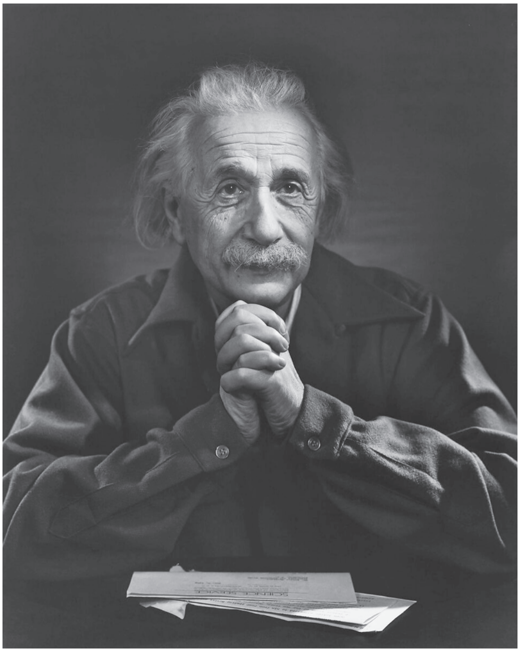
где штрих обозначает производную по времени.

Часть 1

Рассмотрим ньютоновскую Вселенную – время t отделено от пространства и абсолютно (его можно рассматривать как некий внешний параметр). Производную по времени от переменной x будем обозначать x' – это

[1] О стандартной модели современной космологии см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Вселенная_Фридмана

[2] Постоянная Хаббла, вообще говоря, не является постоянной, а изменяется со временем. Об Эдвине Хаббле и его постоянной см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Хаббл_Эдвин



Альберт Эйнштейн

скорость изменения x, а x'', т.е. вторая производная, – это ускорение переменной x.

Пусть наблюдатель находится в точке A и рассматривает движение точки B массой m_B, находящейся на расстоянии $R = R(t)$ от него. Обозначим через M_0 массу шара с центром в точке A и радиусом R. То, что нужно рассматривать именно такой шар, следует из фактов 1 и 2, известных еще Ньютону. Радиус $R = R(t)$ изменяется, но мы считаем, что масса M_0 вещества внутри этого шара не изменяется, т.е. что вещество не возникает и не исчезает. Сила, действующая на B со стороны шара радиусом R с центром в точке A, равна

$$F = -G\frac{m_B M_0}{R^2},\quad F = m_B R''.$$

Таким образом, нам нужно решить дифференциальное уравнение

$$R'' = -\frac{GM_0}{R^2}.$$

Как бы это уравнение решал Ньютон? Первым делом он переписал бы его в дифференциалах:

$$\frac{dR'}{dt} = -\frac{GM_0}{R^2},\text{ или } dR' = -\frac{GM_0 dt}{R^2}.$$

Затем умножил бы обе части на R':

$$R'dR' = -GM_0\frac{R'dt}{R^2},$$

загнал R' под дифференциал справа и слева:

$$d\frac{(R')^2}{2} = -GM_0\frac{dR}{R^2},$$

получил уравнение, которое можно проинтегрировать, и проинтегрировал его:

$$(R')^2 = 2GM_0\frac{1}{R} + c.$$

Следовательно,

$$R' = \pm\sqrt{\frac{2GM_0}{R} + c}.$$

Это уравнение представляет собой закон сохранения энергии, деленный на m_B. Заметим, что c – это квадрат скорости на бесконечности, т.е. в тот момент, когда $R = \infty$, и что эта константа интегрирования, вообще говоря, может быть своя для каждого объекта B. Кроме того, c может быть и отрицательной. Физически это означает, что объект B не может достигнуть бесконечности и на конечном расстоянии $R_к$, определяемом равенством $0 = \frac{2GM_0}{R_к} + c$, где $c < 0$, повернет обратно и начнет приближаться. И хотя $R_к$ может различаться для разных объектов, момент времени, в который это произойдет, для всех будет одним и тем же – это момент обращения H в ноль.

В последнем уравнении выбор знака корня связан с выбором знака параметра t времени, поэтому будем рассматривать только знак плюс и введем константу $c_1 = 2GM_0$. Теперь разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2GM_0}{R} + c},$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{c_1}{R} + c}}dR,$$

$$t + t_0 = \int\sqrt{\frac{R}{cR + c_1}}dR.$$

Константа t_0 связана с выбором отсчета времени и можно считать ее равной нулю.

Анри Пуанкаре

Интеграл в правой части берется заменой $u^2 = \dfrac{R}{cR + c_1}$. Выразим старую переменную R через новую u:

$$R = \frac{c_1 u^2}{1 - cu^2},$$

найдем dR:

$$dR = \frac{c_1}{c} d \frac{1}{1 - cu^2}$$

и из уравнения, связывающего dt с dR, получим

$$t = \frac{c_1}{c} \int u d\left(\frac{1}{1 - cu^2}\right),$$

или, проинтегрировав по частям,

$$t = \frac{c_1}{c}\left(\frac{u}{1 - cu^2} - \int \frac{du}{1 - cu^2}\right).$$

Последний интеграл табличный и зависит от знака c:

$$t = \begin{cases} \dfrac{c_1}{c}\left(\dfrac{u}{1 - cu^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{c}u}{1-\sqrt{c}u}\right|\right), \text{ если } c > 0, \\ \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{c_1}}\left(R^{3/2}\right), \text{ если } c = 0, \\ \dfrac{c_1}{c}\left(\dfrac{u}{1 - cu^2} - \dfrac{1}{\sqrt{|c|}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|c|}u\right)\right), \text{ если } c < 0. \end{cases}$$

Вспоминая замену $u = \sqrt{\dfrac{R}{cR + c_1}}$, получаем

$$t = \begin{cases} \dfrac{c_1}{c}\left(\dfrac{\sqrt{R(cR+c_1)}}{c_1} - \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{cR+c_1}+\sqrt{cR}}{\sqrt{cR+c_1}-\sqrt{cR}}\right|\right), \\ \qquad\qquad \text{если } c > 0, \\ \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{c_1}}\left(R^{3/2}\right), \text{ если } c = 0, \\ \dfrac{c_1}{c}\left(\dfrac{\sqrt{R(cR+c_1)}}{c_1} - \dfrac{1}{\sqrt{|c|}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{|c|R}{cR+c_1}}\right), \\ \qquad\qquad \text{если } c < 0. \end{cases}$$

Конечно, Ньютон легко справился бы со всеми вычислениями.

Теперь у нас две задачи:

1) показать, что мы получили в точности решения Фридмана;

2) показать, что наши решения согласованы.

Часть 2

• Самый простой случай – это когда $c = 0$. Получаем

$$t = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(R^{3/2}\right),$$

$$R = \left(\frac{3}{2}\sqrt{c_1}\right)^{2/3} t^{2/3},$$

$$R' = \left(\frac{3}{2}\sqrt{c_1}\right)^{2/3} \cdot \frac{2}{3} t^{-1/3},$$

$$H = \frac{2}{3} t^{-1}.$$

Как видно из последнего равенства, H не зависит ни от каких констант, а зависит только от времени. Это означает, что оно одно и то же для всех точек пространства. В этом случае легко вычисляется зависимость средней плотности от времени:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} t^{-2}.$$

Задача 3. Выведите эту зависимость.

Эта модель называется *плоской моделью*.

• Случай $c > 0$. Получаем

$$t = \frac{c_1}{c}\left(\frac{\sqrt{R(cR+c_1)}}{c_1} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \ln\left|\frac{\sqrt{cR+c_1}+\sqrt{cR}}{\sqrt{cR+c_1}-\sqrt{cR}}\right|\right).$$

Александр Фридман

Обозначим

$$\eta = \ln\left|\frac{\sqrt{cR + c_1} + \sqrt{cR}}{\sqrt{cR + c_1} - \sqrt{cR}}\right|.$$

Тогда

$$\exp\eta = \frac{\sqrt{\dfrac{cR + c_1}{cR}} + 1}{\sqrt{\dfrac{cR + c_1}{cR}} - 1},$$

$$\text{или}\ \sqrt{\frac{cR + c_1}{cR}} = \operatorname{cth}\frac{\eta}{2},$$

следовательно,

$$R = \frac{c_1}{c}\frac{1}{\operatorname{cth}^2\dfrac{\eta}{2} - 1} = \frac{c_1}{2c}(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

$$t = \frac{\sqrt{R(cR + c_1)}}{c} - \frac{c_1}{2c\sqrt{c}}\eta =$$

$$= \frac{c_1}{2c\sqrt{c}}\left(\sqrt{(\operatorname{ch}\eta - 1)(\operatorname{ch}\eta + 1)} - \eta\right) =$$

$$= \frac{c_1}{2c\sqrt{c}}(\operatorname{sh}\eta - \eta),$$

где $\operatorname{cth}x$ – гиперболический котангенс x, $\operatorname{ch}x$ – гиперболический косинус x и $\operatorname{sh}x$ – гиперболический синус x.

Вспомним, что константа c_1 равна $2GM_0$, где M_0 – полная масса вещества в шаре радиусом R_0, а константа c определяется из соотношения $(R')^2 = \frac{c_1}{R} + c$. Константа $\frac{c_1}{2c}$ имеет размерность длины, обозначим ее $R_* = \frac{c_1}{2c}$. Константа $c = v_\infty^2$ имеет смысл квадрата скорости на бесконечности. Тогда можно записать

$$R = R_*(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

$$t = \frac{R_*}{v_\infty}(\operatorname{sh}\eta - \eta).$$

Эта модель называется *открытой моделью.*

• Случай $c < 0$. Получаем

$$t = \frac{c_1}{c}\left(\frac{\sqrt{R(cR + c_1)}}{c_1} - \frac{1}{\sqrt{|c|}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{|c|R}{cR + c_1}}\right).$$

Обозначим

$$\eta = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{|c|R}{cR + c_1}},\ \text{или}\ \sqrt{\frac{|c|R}{cR + c_1}} = \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}.$$

Тогда

$$R = \frac{c_1}{|c|}\sin^2\frac{\eta}{2} = \frac{c_1}{2|c|}(1 - \cos\eta),$$

$$t = \frac{\sqrt{R(cR + c_1)}}{c} - \frac{c_1}{2c\sqrt{c_2}}\eta =$$

$$= \frac{c_1}{2c\sqrt{|c|}}\left(\sqrt{(1 - \cos\eta)(1 + \cos\eta)} - \eta\right) =$$

$$= \frac{c_1}{2|c|\sqrt{|c|}}(\eta - \sin\eta).$$

В этом случае, как и в предыдущем, пусть $R_* = \frac{c_1}{2|c|}$. Мы можем также обозначить $c = -v_\infty^2$. Тогда

$$R = R_*(1 - \cos\eta),$$

$$t = \frac{R_*}{v_\infty}(\eta - \sin\eta).$$

Эта модель называется *замкнутой моделью*.

Итак, в случае открытой или замкнутой модели мы получили, что для наблюдателя A наблюдаемый объект B будет вести себя в соответствии с одной из моделей Фридмана в ОТО. Таким образом, с первой задачей мы справились. А как быть со второй?

Часть 3

Заметим, что мы нигде не использовали никакую связь между разными точками нашей вселенной. Вся неопределенность заключается в том, что мы не можем определить связь между константами c для различных начальных точек. И даже если мы рассмотрим точку A в разные моменты времени, то не можем сказать, одна и та же для нее будет константа c или нет. Но у нас есть еще одно предположение о нашей вселенной, которое можно в этом случае назвать предположением о состоянии вселенной. Это предположение о том, что плотность вселенной всюду одинакова в первоначальный момент времени.

Задача 4. Докажите, что изменение плотности задается уравнением

$$\rho' = -3\rho\frac{R'}{R} = -3\rho H.$$

Из задачи 4 следует, что если в какой-то момент времени плотность ρ и константа H одинаковы во всех точках, то и в следующий момент плотность будет везде одна и та же.

Вернемся теперь к полученным раньше уравнениям $R' = HR$, $R'' = -\frac{GM_0}{R^2}$. Дифференцируя первое уравнение по времени, находим

$$R' = HR,$$

$$R'' = H'R + HR',$$

$$R'' = H'R + H^2R.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение $R'' = -\frac{GM_0}{R^2}$, получим

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho R = H'R + H^2R,$$

$$\text{или } H' + H^2 + \frac{4}{3}\pi G\rho = 0,$$

откуда

$$\rho = \frac{H' + H^2}{-\frac{4}{3}\pi G}.$$

Из последнего выражения следует, что если в какой-то момент времени плотность ρ и константа H одинаковы во всех точках, то и в следующий момент константа H будет везде одна и та же.

Наконец, еще раз продифференцируем уравнение $H' + H^2 + \frac{4}{3}\pi G\rho = 0$:

$$H'' + 2HH' + \frac{4}{3}\pi G\rho' = 0.$$

Подставляя сюда $\rho' = -3\rho H$ и $\rho = \frac{H' + H^2}{-\frac{4}{3}\pi G}$, получим дифференциальное уравнение (не линейное) с постоянными коэффициентами, которому удовлетворяет H:

$$H'' + 5HH' + 3H^3 = 0.$$

Этому же дифференциальному уравнению удовлетворяет константа Хаббла в моделях Фридмана (решения те же!).

Заключение

В завершение статьи хочется сделать следующие замечания.

- Как видно из всего предыдущего, не было никаких сложностей, чтобы проделать все приведенные вычисления – их уже мог проделать Ньютон. Но этого не произошло, потому что психологически физики до двадцатого века не могли себе представить, что мир может быть однородным, изотропным и нестационарным.
- То, что в модели мира Ньютона существуют те же самые модели Вселенной в целом, означает, что закон тяготения Ньютона является пределом ОТО.
- Модели Фридмана и открытия Хаббла сломали психологический барьер. Стало понятно, что такое нестационарная Вселенная.

Эрвин Хаббл

• Во всех моделях Фридмана $R(t)$ – это радиус кривизны трехмерного однородного многообразия. Замкнутая модель – это трехмерная сфера. Вместо нее можно представить себе двухмерную сферу, или воздушный шарик, который раздувается или сдувается. В этом случае наблюдатель, живущий в этом пространстве, будет видеть, что скорости удаления объектов пропорциональны расстояниям. Остается только добавить, что человеку всегда хочется представлять любое многообразие вложенным в Евклидово пространство. А многообразия могут существовать и без какого-либо вложения. Свыкнуться с этим трудно, но можно.

• Очень часто решение какой-либо задачи приводит к результату, который перед исследованием и нельзя было предположить. Вот и в этом случае, если бы нам предложили найти решения уравнения для константы Хаббла, то было бы непонятно даже, с чего начать, потому что общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не существует. А теперь мы можем предъявить эти решения:

$$H = \frac{2}{3}t^{-1},$$

или

$$H = a\frac{\operatorname{sh}\eta}{(\operatorname{ch}\eta - 1)^2},\ t + t_0 = \frac{1}{a}(\operatorname{sh}\eta - \eta),$$

или

$$H = a\frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2},\ t + t_0 = \frac{1}{a}(\eta - \sin\eta).$$

• Коэффициенты дифференциального уравнения для константы Хаббла связаны с размерностью нашего пространства.

Задача 5. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет H в случае n-мерного пространства?

• До сих пор то, что мы вычисляли, было в основном математикой. Теперь нужно оценить наши модели – сравнить предсказания моделей с экспериментальными данными. Здесь наблюдаются большие расхождения. Например, в ньютоновской плоской модели возраст Вселеной равен

$$T = \frac{2}{3}\frac{1}{H_{\text{современное}}}.$$

Поэтому астрофизики обычно осторожно говорят, что возраст Вселенной *порядка* $\frac{1}{H}$. Наконец, во всех моделях постоянная Хаббла убывает со временем. А из современных наблюдений, похоже, следует, что она возрастает.

• Во всех моделях в начальный момент времени скорость R' и константа Хаббла H равны бесконечности. Это означает, что в начальный момент времени произошел взрыв. А поскольку этот взрыв имеет отношение ко всей нашей вселенной, эти модели называются «моделями Большого взрыва».

• Книгу Ньютона «Математические начала натуральной философии» можно найти на сайте http://techlibrary.ru/bookpage.htm.

Региональный этап L Всероссийской олимпиады школьников по математике

Задачи олимпиады

9 класс

1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из прямоугольников, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

О.Подлипский

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y=x^2$. Для данного числа $k>0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (т.е. все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

Н.Агаханов

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причем в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры и его заменял другой (еще не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B?

М.Дидин

4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

С.Берлов

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC=DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

А.Кузнецов

6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.

И.Богданов

7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из нее в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?

И.Богданов

8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP=PQ=QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX\perp AC$ и $QY\perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP.

А.Матвеев

9. См. задачу М2788 «Задачника «Кванта».

10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

А.Чиронов

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (т.е. все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

Н.Агаханов

3. См. задачу М2786 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами выпуклого четырехугольника, периметр которого равен P. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA не превосходит $\frac{P}{2}$.

С.Берлов

6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} = 4.$$

Могут ли слова Сергея быть правдой?

П.Кожевников
(по мотивам фольклора)

7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?

П.Кожевников

8. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90°$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.

А.Кузнецов

9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a+bc$, $b+ca$, $c+ab$ является простым делителем числа

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

А.Чиронов, И.Богданов

10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причем дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?

Я.Шубин, Г.Шубин

11 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \ldots, 2024$ обозначим

$$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$?

Н.Агаханов

3. См. задачу М2786 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М2787 «Задачника «Кванта».

5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

М.Антипов

6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, … …, 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать?

О.Подлипский

7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

А.Терёшин

8. В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$.

А.Кузнецов

9. См. задачу М2788 «Задачника «Кванта».

10. См. задачу М2789 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, А.Кузнецов, О.Подлипский, К.Сухов

Диэлектрический гистерезис

Ниже приводятся условие и решение задачи 5 для 11 класса (тур I) 84-й Московской олимпиады школьников по физике (см. «Квант» №5 за 2023 г.).

Условие

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

а. Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображенную на рисунке 1. Емкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \dfrac{100S\varepsilon_0}{d}$, где d и S – расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство $\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{S\varepsilon_0}{dC_0}$. На вход цепи подается гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D, изображенная на рисунке 2. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи. Определите абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_п|$ на одной из сторон диэлектрической пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в

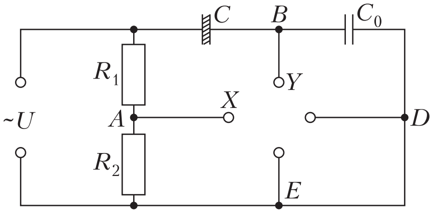


Рис. 1

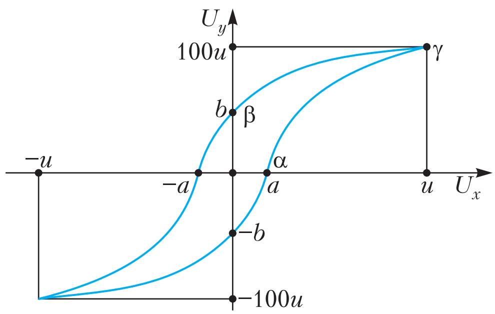


Рис. 2

состояниях, соответствующих точкам α, β, γ на графике. Найдите напряженность поля в диэлектрике в состояниях α и γ. Параметры нелинейного конденсатора S и d, емкость C_0 эталонного конденсатора, а также обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ε_0.

b. Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n, напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0, а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике на рисунке 3. Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0{,}1U_0$, $U_2 = 0{,}25U_0, q_1 = 2CU_1, q_2 = q_1 + 0{,}1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора, и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C, U_0, n.

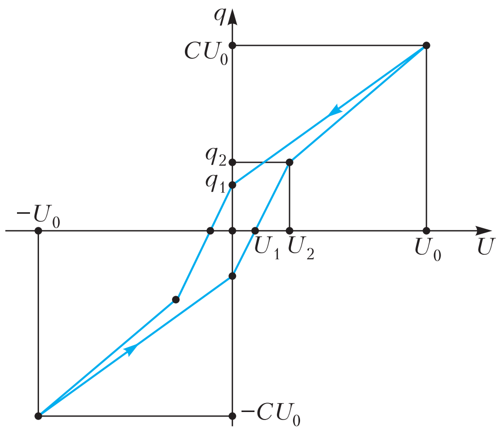


Рис. 3

Решение

a. Сначала рассмотрим точку γ графика зависимости $U_y(U_x)$. Справедливы такие соотношения:

$$100u = \frac{q^{(\gamma)}}{C_0},\ u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(E^{(\gamma)}d + 100u\right),$$

где $q^{(\gamma)}$ – заряд эталонного конденсатора, $E^{(\gamma)}$ – напряженность поля в диэлектрической пластине в данный момент. Из условия следует сильное неравенство

$$\frac{100R_2}{R_1 + R_2} \ll 1,$$

поэтому соотношение для u можно переписать так:

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E^{(\gamma)}d.$$

Таким образом, напряжение $U_x = 100u$ в точке γ пропорционально заряду $q^{(\gamma)}$ эталонного конденсатора, а следовательно (поскольку заряды конденсаторов равны), и заряду нелинейного конденсатора. Напряжение $U_y = u$ в точке γ пропорционально напряжению на нелинейном конденсаторе. Отсюда получаем искомую напряженность:

$$E^{(\gamma)} = \frac{C_0u}{S\varepsilon_0}.$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов найдется из соотношения

$$\frac{q^{(\gamma)}}{S\varepsilon_0} - \frac{\left|\sigma_{\text{п}}^{(\gamma)}\right|}{\varepsilon_0} = E^{(\gamma)}.$$

Подставим в это соотношение выражения для заряда и напряженности поля, после несложных преобразований получим искомую поверхностную плотность:

$$\left|\sigma_{\text{п}}^{(\gamma)}\right| = \frac{100C_0u}{S} - \frac{C_0u}{S} = \frac{99C_0u}{S}.$$

Теперь рассмотрим точку β. Легко видеть, что сумма напряжений на нелинейном и обычном конденсаторах в состоянии, соответствующем этой точке на графике, равна нулю. Этот факт отражает уравнение

$$\left(\frac{C_0b}{S\varepsilon_0} - \frac{\left|\sigma_{\text{п}}^{(\beta)}\right|}{\varepsilon_0}\right)d - b = 0,$$

поскольку заряд нелинейного конденсатора в этом случае равен C_0b (с точностью до знака). Из условия следует сильное неравенство

$$\frac{C_0d}{S\varepsilon_0} \gg 1,$$

поэтому, пренебрегая последним слагаемым в уравнении, получаем искомую поверхностную плотность:

$$\left|\sigma_{\text{п}}^{(\beta)}\right| = \frac{C_0 b}{S}.$$

Наконец, рассмотрим состояние диэлектрика, соответствующее точке α. Заряды конденсаторов в этом состоянии, очевидно, равны нулю, поэтому напряженность поля в диэлектрике создается только поляризационными зарядами, следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\left|\sigma_{\text{п}}^{(\alpha)}\right|}{\varepsilon_0} d \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a.$$

Используя соотношение для сопротивлений, данное в условии, получаем ответы:

$$\left|\sigma_{\text{п}}^{(\alpha)}\right| = \frac{C_0 a}{S}, \quad E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S\varepsilon_0}.$$

b. Сильное неравенство $nRC \ll 1$, приведенное в условии, означает, что время, за которое заряды на обкладках конденсатора устанавливаются, значительно меньше периода колебаний напряжения.

Пусть в некоторый момент времени напряжение на выводах генератора и на конденсаторе равно $-U_0$. При изменении полярности напряжения на выводах генератора последний перемещает заряд $Q = 2CU_0$, совершая работу $A^{(1/2)} = 2CU_0^2$. При обратном изменении полярности на выводах генератора он совершает такую же работу по перемещению заряда. Таким образом, за период генератор совершает работу

$$A = 2A^{(1/2)} = 4CU_0^2,$$

следовательно, средняя мощность, потребляемая цепью от генератора, равна

$$P = 4CU_0^2 n.$$

Заметим, что если бы зависимость заряда конденсатора от напряжения на нем была линейной ($q = CU$), то вся мощность, потребляемая цепью от генератора, выделялась бы в виде тепла на резисторе. В случае нелинейного конденсатора часть работы, совершаемой генератором, тратится на «переполяризацию диэлектрика». При увеличении заряда нелинейного конденсатора от значения $-CU_0$ до значения CU_0 электрические силы совершают работу

$$A_{\text{эл}}^{(1/2)} = \int U dq.$$

Численно эта работа равна площади половины петли гистерезиса, располагающейся справа от оси ординат. Очевидно, что работа электрических сил по перезарядке конденсатора за период равна площади всей петли:

$$A_{\text{эл}} = 2A_{\text{эл}}^{(1/2)}$$

– это и есть потери энергии на переполяризацию диэлектрика. Из закона сохранения энергии следует, что на резисторе за период выделяется количество теплоты

$$Q = A - A_{\text{эл}}.$$

Определение $A_{\text{эл}}$, как уже было сказано, сводится к расчету площади петли гистерезиса, которая может быть найдена разными способами. Приведем здесь конечный ответ:

$$A_{\text{эл}} = 0{,}2CU_0^2.$$

Следовательно, выделяющаяся на резисторе мощность равна

$$P_R = 3{,}8CU_0^2 n.$$

П.Крюков

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Олимпиада «Ломоносов»

Физика

В 2023/24 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания отборочного этапа составлялись раздельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте https://olymp.msu.ru.

Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые здесь значения даны в общем виде.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

7–9 классы

1. Дед Мороз пришел к школьникам на праздник и попросил их измерить плотность новогоднего подарка, покрытого тонкой подарочной упаковкой, которая после измерений оказалась равной $\rho\left(\text{кг}/\text{м}^3\right)$. Дед Мороз подсказал школьникам, что подарок состоит из трех частей равной массы, плотности которых относятся как 1:2:3. Найдите плотность наименьшей по объему части новогоднего подарка. Считайте, что пустот в новогоднем подарке нет, а объем и массу подарочной упаковки полагайте пренебрежимо малыми. Ответ дайте в кг/м^3 и округлите до целых.

2. Букашка девять минут ползет вдоль прямой. Скорость букашки за первые три минуты движения составила $v_1 = 2$ см/с, за первые шесть минут средняя скорость движения равна $v_2 = 5$ см/с, а за девять минут средняя скорость составила $v_3 = 8$ см/с. Найдите среднюю скорость букашки за последние s сантиметров пути. Ответ дайте в см/с и округлите до сотых.

3. Турист решил проверить, насколько эффективно происходит нагрев воды в двух его котелках. Первый из котелков не имеет донного теплообменника, а второй имеет. В оба котелка турист залил по m_1 (г) воды и закрыл крышками, чтобы уменьшить затраты энергии на испарение. Для нагрева обоих котелков турист использовал одну и ту же горелку и баллон с горючим газом первоначальной массой m_2. С помощью этой системы турист довел до кипения воду в первом котелке, а затем во втором. После завершения нагрева первого котелка масса баллона с газом стала m_3, а после нагрева второго m_4. Найдите, на сколько процентов КПД описанной системы нагревания с применением второго котелка больше, чем при использовании первого, если удельная теплота сгорания газа, находящегося в баллоне, q, удельная теплоемкость воды c, начальная температура воды t_1, температура кипения t_2, теплоемкостью металла котелков и крышек можно пренебречь. Ответ приведите с точностью до целого числа процентов.

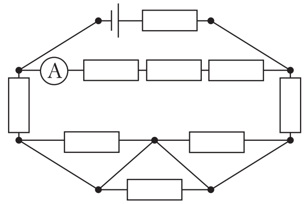


Рис. 1

4. В схеме, представленной на рисунке 1, напряжение на полюсах источника U_0 (В). Найдите силу тока, протекающего через идеальный амперметр, если сопротивления всех резисторов одинаковы и равны R (Ом). Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

5. Нагревательный элемент изготовлен из проволоки с температурным коэффициентом сопротивления $\alpha\left({}^\circ\text{C}^{-1}\right)$. После подключения нагревательного элемента к источнику постоянного напряжения было замечено, что время нагрева воды в калориметре от температуры T до температуры $T + \Delta T$ отличается от времени нагрева от температуры $T + \Delta T$ до температуры $T + 2\Delta T$ на $p(\%)$. Определите температурный интервал ΔT (округлив с точностью до десятых), если известно, что $T = 0$ °С. Считайте, что в диапазоне температур от 0 °С до 100 °С удельное сопротивление проволоки нагревательного элемента линейно зависит от температуры. Потерями тепла и теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

10 класс

1. Мальчик на санках массой m съезжает с горки с углом наклона α к горизонту. Поверхность горки плавно переходит на горизонтальный участок, по которому санки скользят еще s метров до остановки. После этого санки с мальчиком втаскивают обратно в горку за веревочку. Какую при этом надо совершить минимальную работу $A_{\min}$, если коэффициент трения санок о снег как на наклонном, так и на горизонтальном участках равен μ ? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в джоулях, округлив до целых.

2. Металлический желоб длиной l и массой M подвешен с помощью двух нерастяжимых нитей под малым углом α рад к горизонту, как показано на рисунке 2. В середину желоба помещают маленький шарик массой m и отпускают. Через какое время τ после начала движения шарика одна из нитей разорвется? Известно, что каждая нить по отдельности может выдержать груз массой не более $0{,}6M$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Считайте, что для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, а $\cos\alpha \approx 1$. Ответ представьте в секундах, округлив до десятых.

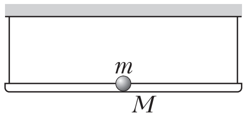


Рис. 2

3. Невесомая мягкая оболочка аэростата может растягиваться до максимального объема V. На поверхности Земли оболочку аэростата заполнили водородом при давлении p_1 и температуре t_1, при этом ее объем составил $n = 8/9$ части от максимального значения. Аэростат поднялся на некоторую высоту h, где давление равно p_2, потеряв при этом массу газа Δm. На какую высоту поднялся аэростат, если градиент уменьшения температуры воздуха составляет τ (град/км)? Универсальная газовая постоянная R, а молярная масса водорода M. Ответ приведите в километрах и округлите до десятых.

4. Заряженная бусинка массой m висит на легкой нерастяжимой диэлектрической нити длиной l, прикрепленной к горизонтальной оси. Какую минимальную скорость v_0 надо сообщить бусинке в горизонтальном направлении, чтобы она, двигаясь по окружности, совершила полный оборот вокруг этой оси? Бусинка имеет пренебрежимо малые размеры и несет заряд q. Считайте, что вся система находится в однородном электрическом поле Земли с напряженностью E, направленной вертикально вниз. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в см/с, округлив до десятых.

5. На одну из граней стеклянной призмы падает луч света под углом α к ее поверхности (рис. 3). Показатель преломления материала призмы n, а угол при ее вершине φ. Определите, при каком минимальном значении угла α прохождение света через призму насквозь становится невозможным. Ответ выразите в градусах, округлив до десятых долей.

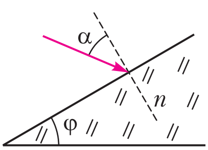


Рис. 3

11 класс

1. Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности под углом α к горизонту со скоростью v_0, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости, по абсолютной величине на 30% меньшую, чем при бросании. В процессе движения на мяч действовала сила сопротивления, пропорциональная его скорости. Найдите время полета мяча. Ответ выразите в секундах, округлив до тысячных. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

2. Три груза массами m_1, m_2 и m_3, связанные невесомыми и нерастяжимыми нитями, переброшенными через невесомые блоки так, как показано на рисунке 4, удерживают в неподвижном состоянии. Затем грузы отпускают, и система тел приходит в движение. Через некоторое время груз, движущийся по горизонтальной плоскости, попадает на шероховатую поверхность и начинает двигаться равномерно. Найдите коэффициент трения μ между этим грузом и горизонтальной плоскостью. Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны, отрезок нити, соединяющий груз на горизонтальной плоскости с блоком, горизонтален. Трения в осях блоков нет. Ответ округлите до сотых.

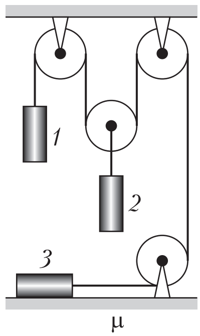


Рис. 4

3. Цикл тепловой машины, использующей ν молей идеального одноатомного газа в качестве рабочего вещества, показан на рисунке 5. КПД цикла η. Температура газа в состоянии *1* равна T_1, объем V_1. Участок цикла *2–3* – изотерма. Работа газа, совершенная на этом участке, равна A_{23}. Найдите максимальный объем газа в цикле. Ответ приведите в см^3 и округлите до целых.

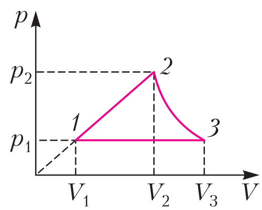


Рис. 5

4. В вершинах квадрата со стороной a закреплены небольшие одинаковые заряженные шарики, заряды которых q, а массы m. В центре квадрата удерживают еще один шарик такой же массы, как и остальные, но имеющий заряд q_1. В некоторый момент шарик с зарядом q_1 отпускают, сообщив ему скорость, направленную параллельно одной из сторон квадрата. Какую скорость v сообщили шарику, если он остановился точно в середине одной из сторон квадрата? Ответ выразите в м/с, округлив до десятых.

5. Экран, собирающая линза и стеклянный конус расположены так, как показано на рисунке 6. Линза находится на расстоянии от экрана, равном фокусному расстоянию F. Главная оптическая ось линзы ориентирована перпендикулярно экрану и совпадает с осью конуса. Показатель преломления стекла равен n. Угол при основании конуса мал и равен α. На конус вдоль оптической оси падает узкий параллельный пучок света. Считайте, что для малых углов α справедливо приближенное равенство $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Определите диаметр светлого кольца на экране. Ответ выразите в см, округлив до десятых.

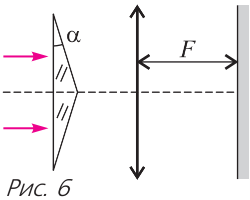


Рис. 6

Заключительный этап

Для учащихся всех классов заключительный этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ.

Задание для учащихся 7–9 классов состояло из пяти задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10 и 11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2024 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора. Типовое задание включало пять задач из пяти различных разделов.

7–9 классы

1. Камень бросают вертикально вверх с поверхности земли. Некоторый начальный участок пути, начинающийся на поверхности земли, он пролетел за время $t_1 = 1$ с, а следующий такой же по величине участок пути он пролетает за время $t_2 = 3$ с. Найдите полное время полета камня до соударения с землей. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Считайте, что в указанные интервалы времени камень все еще двигался вверх.

2. Металлическая однородная прямая призма массой $m = 1$ кг имеет в основании правильный шестиугольник (рис. 7). Если положить призму на горизонтальную поверхность основанием, то она будет оказывать давление $p_1 = 6\sqrt{3}$ кПа, а если боковой гранью, то давление будет равно $p_2 = 4080$ Па. Определите плотность материала призмы. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

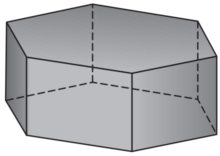


Рис. 7

3. Пригласив внуков на чаепитие на своем приусадебном участке, бабушка налила кипяток массой $m_в = 250$ г при температуре $t_в = 100$ °C в свою любимую фарфоровую чашку в горошек с начальной температурой $t_ф = 35$ °C. Сразу же после этого она опустила в чашку с кипятком серебряную ложку массой $m_с = 80$ г, а затем долила $m_з = 50$ г заварки чая, имеющей температуру $t_1 = 20$ °C. В результате этого в чашке установилась конечная температура $t_к = 80$ °C. Считайте, что серебряная ложка полностью погрузилась в кипяток. Удельная теплоемкость заварки чая равна удельной теплоемкости воды. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельные теплоемкости воды, фарфора и серебра $c_в = 4200$ Дж/(кг · °C), $c_ф = 800$ Дж/(кг · °C) и $c_с = 250$ Дж/(кг · °C) соответственно. Найдите массу $m_ф$ любимой чашки бабушки.

4. В схеме, представленной на рисунке 8, к клеммам A и B подключен идеальный источник напряжения $U_0 = 6$ В. Найдите силу тока, протекающего через идеальный амперметр, если сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 125$ Ом. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

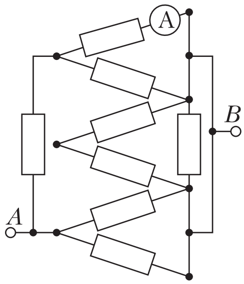


Рис. 8

5. На рисунке 9 представлена схема электрической цепи, состоящей из пяти одинаковых резисторов с сопротивлениями $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R = 12$ Ом и двух плавких предохранителей $П_1$ и $П_2$. На клеммы A и B подано напряжение, возрастающее от времени по закону $U(t) = at$, где $a = 1$ В/мин. Предохранители рассчитаны на номинальный ток $I_П = 1$ А (при токе, меньшем $I_П$, сопротивление предохранителя пренебрежимо мало, а при большем или равном $I_П$ становится бесконечно большим). Определите, через какое время перегорят предохранители в этой цепи.

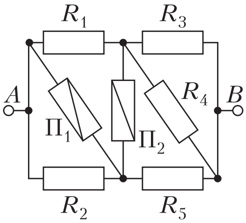


Рис. 9

10 класс

1. Через легкий блок, прикрепленный к вертикальной стене, переброшена невесомая нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к доске массой M, лежащей на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$, другой конец нити прикреплен к бруску массой $m = M/9$, который расположен на доске (рис. 10). Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}5$, а между доской и опорой $\mu_2 = 0{,}3$. Участки нити между телами и блоком расположены в одной вертикальной плоскости параллельно наклонной плоскости. Трение в блоке отсутствует. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Определите модуль ускорения a, с которым будет двигаться доска.

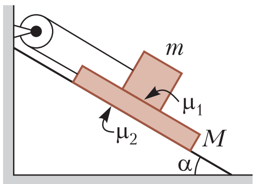


Рис. 10

2. Однородный твердый стержень AB массой m может свободно вращаться вокруг закрепленной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 11). Точка O делит стержень в отношении 1:3, считая от левого края. Вертикальная нить, прикрепленная к левому краю A стержня и неподвижной опоре, удерживает стержень в горизонтальном положении. Шарик массой $M = 6m$ подвешен на двух нитях, прикрепленных к оси вращения O и правому краю B стержня так, что центр шарика и точки крепления нитей образуют правильный треугольник. Система находится в равновесии. Нить, соединяющую шарик и ось вращения, пережигают, шарик начинает совершать колебания в той же вертикальной плоскости, в которой он находился в состоянии равновесия. Найдите отношение максимальной силы натяжения вертикальной нити $T_{A\,\max}$ в процессе колебаний к силе натяжения T_A этой нити в состоянии равновесия (до пережигания). Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми, размером шарика и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Числовой ответ округлите до десятых.

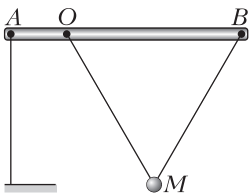


Рис. 11

3. Моль идеального одноатомного газа переводят из некоторого начального состояния в некоторое конечное состояние сначала изобарно, затем изохорно. При этом к газу необходимо подвести некоторое количество теплоты Q. Минимальная температура газа при проведении этих двух процессов равна $T_{\min} = 200$ К. Если же перевести газ из того же начального в то же конечное состояние, сжав его адиабатически и уменьшив при этом его объем в 10 раз, то внешним силам придется совершить работу, равную по модулю $A = 40$ кДж. Найдите количество теплоты Q.

4. В схеме, представленной на рисунке 12, идеальный источник имеет напряжение $U_0 = 5$ В. Сопротивления всех резисторов одинаковы, сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь. Емкости конденсаторов $C_1 = 4$ нФ и $C_2 = 6$ нФ. Найдите энергию электрического поля в конденсаторе C_1 через длительное время после замыкания ключа K. До замыкания ключа конденсаторы C_1 и C_2 были не заряжены.

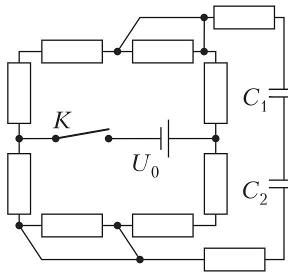


Рис. 12

5. Однородная алюминиевая деталь имеет форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами, относящимися как $1 : 1 : \sqrt{15}$. Одно из ее меньших ребер шарнирно прикреплено к плоскому дну достаточно большой кюветы (рис. 13). С помощью вертикальной нити, прикрепленной к другому ребру, деталь удерживается в равновесии так, что диагональное сечение детали остается

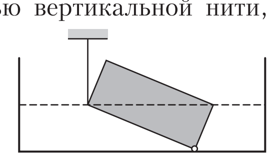


Рис. 13

горизонтальным (пунктирная прямая на рисунке). В кювету начинают медленно наливать масло. Считайте плотность масла в три раза меньшей плотности алюминия, нить – невесомой и нерастяжимой. Можно пренебречь объемом шарнира и трением в нем. Определите отношение силы натяжения нити в момент, когда свободная поверхность масла достигла указанного пунктиром на рисунке уровня горизонтального сечения, и силы натяжения нити в сухой кювете.

11 класс

1. Два искусственных спутника движутся в одну сторону вокруг некоторой планеты по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости. Космонавты, находящиеся на спутниках, поддерживают связь с помощью лазерного луча, направленного от одного спутника к другому. Периодически спутники на некоторое время оказываются в «слепых» зонах, когда лазерный луч перекрывается планетой, и связь между спутниками прерывается. Найдите длительность τ пребывания спутников в одной из таких зон, если радиусы орбит спутников $R_1 = 6{,}4 \cdot 10^4$ км и $R_2 = 10^5$ км, радиус планеты r составляет несколько тысяч километров, а ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 9$ м/с^2. Преломлением луча в атмосфере планеты и влиянием других небесных тел на движение спутников можно пренебречь.

Указание. Для упрощения расчетов воспользуйтесь приближенной формулой $\arcsin x \approx x$, справедливой при малых значениях аргумента x, выраженного в радианах.

2. Стеклянная трубка длиной $l = 1$ м, герметично закрытая с одного конца, расположена вертикально открытым концом вниз и заполнена смесью воздуха и насыщенного водяного пара. Трубку медленно погружают в воду на половину ее длины, при этом поверхность воды в трубке оказывается на глубине $h = 0{,}45$ м (рис. 14). Считая температуру газовой смеси в трубке постоянной, найдите давление $p_{нас}$ насыщенных паров воды при этой температуре. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3. Поверхностное натяжение воды можно не учитывать. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

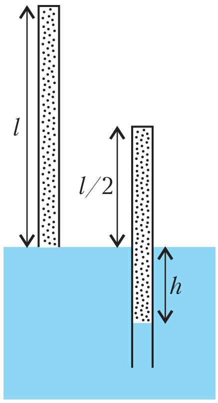


Рис. 14

3. Два одинаковых металлических заряженных шара радиусом $r = 2$ см находятся на большом расстоянии друг от друга. Один из шаров расположен при этом внутри сферической проводящей заземленной оболочки радиусом R так, что их центры совпадают. Через небольшое изолированное отверстие в этой оболочке шары соединяют тонкой длинной проволокой. В результате на шарах устанавливаются заряды $q_1 = 6 \cdot 10^{-10}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл. Чему равен радиус оболочки R?

4. На верхней горизонтальной поверхности слоя жидкости расположен непрозрачный экран с маленьким круглым отверстием. На нижней границе слоя помещено плоское зеркало. Каков будет радиус освещенной области на нижней стороне экрана, если сверху отверстие осветить рассеянным светом? Толщина слоя $h = 5$ см, показатель преломления жидкости $n = 1{,}5$.

5. Колебательный контур состоит из последовательно соединенных катушки индуктивностью $L = 0{,}3$ Гн, резистора сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора электроемкостью $C = 30$ мкФ. В контуре происходят слабо затухающие колебания – потери энергии за каждый последующий период колебаний много меньше энергии, запасенной в контуре в любой момент времени. В некоторый момент времени, когда сила тока в контуре достигает локального максимального значения, напряжение на конденсаторе равно $U = 2$ В. Какое количество теплоты Q выделится в контуре за последующий период колебаний? Число π примите равным 3,14. Результат выразите в миллиджоулях, округлив до целых.

Публикацию подготовил С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №2)

1. Можно.

Первые 4 вопроса зададим про 4 пары разных цилиндров. Если нам ответили «да» на один из вопросов, то это означает, что мы нашли два цилиндра, один из которых пустой, а в другом сидит кролик. Если же нам 4 раза ответили «нет», то оставшиеся два цилиндра таковы, что один из них пустой, а в другом сидит кролик. В любом случае для таких двух цилиндров мы зададим вопрос про один из них. Если нам ответят «да», то кролик в указанном цилиндре, если «нет», то в оставшемся.

2. Не могло.

Можно считать, что если человек забрал монету достоинством 1 рубль, то он положил 2 рубля, а забрал 3. А если он положил монету достоинством 5 рублей, то он положил 2 рубля, а потом положил еще 3. Тогда можно считать, что каждый клал в кошелек по 2 рубля, а потом, возможно, клал или забирал 3 рубля. Тогда 50 человек положат в кошелек 100 рублей (в кошельке станет 200 рублей), а потом возьмут или заберут несколько раз по 3 рубля. Но тогда к 200 рублям добавится (вычтется) сумма, кратная 3. Но $201 - 200 = 1$. Поэтому в кошельке не может оказаться 201 рубль.

3. Так как AI – биссектриса, то углы BAN и CAN равны (рис. 1). В силу параллельности прямых CN и AB равны углы BAN и ANC. Значит, треугольник ACN равнобедренный, и в нем $AC = CN$, откуда $BM = AC$. Аналогично, $BL = AC$. Следовательно, $BM = BL$. Но углы LBM и ABC вертикальные. Поэтому прямая BI будет также биссектрисой в равнобедренном треугольнике LBM, а значит, его высотой.

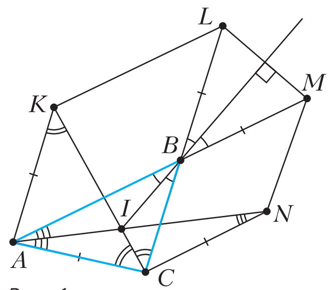


Рис. 1

4. 2.

Так как среднее арифметическое написанных чисел

$$\frac{1+2+\ldots+100+102}{101} = 50 + \frac{102}{101} = 51 + \frac{1}{101}$$

– нецелое число, то за одну операцию сделать требуемое не удастся.

Покажем, как оставить на доске одно целое число за две операции. Возьмем сначала числа от 1 до 99. Стерев эти числа, запишем их среднее арифметическое, равное 50. Теперь на доске остались три числа: 50, 100 и 102. Их среднее арифметическое равно 84.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №1)

17. Да, пример приведен на рисунке 2.

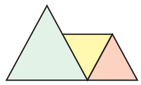


Рис. 2

18. 9876543121 и 1213121312.

Будем искать наибольшее число, начинающееся с 9. Между первой и любой другой цифрой десятизначного числа помещается не больше восьми цифр, поэтому второй девятки в таком числе нет. Пусть следующая цифра – это 8. Опять же, второй восьмерки в этом числе нет: между ней и первой восьмеркой помещается не более 7 цифр. Продолжая так рассуждать, дойдем до числа 9876543***, в котором после тройки могут идти только цифры 2 или 1. В последних двух разрядах числа 98765432** могут стоять уже только единицы, но поставить две единицы рядом нельзя. Если же искомое число начинается на 98765431, то после единицы может идти только 2, а последней цифрой может быть только 1. Значит, наибольшее подходящее число – это 9876543121.

Найдем наименьшее подходящее число. Если оно начинается с 1, то следующая цифра не меньше 2. После 2 снова может идти 1, но после 121 уже не может идти ни 1, ни 2, т.е. следующая цифра не меньше 3. После 3 может идти 1, после нее – не меньше чем 2 и затем 1, т.е. число начинается на 1213121. Продолжить можем не меньше чем тройкой, после которой снова идут минимум 1 и 2. Значит, наименьшее подходящее число – это 1213121312.

19. $6\left(C_{3n}^{n} - C_{2n}^{n}\right)$.

Муравей делает шаги трех направлений, в каждом направлении по n шагов, проходя тем самым один из кратчайших путей из вершину A в вершину B. Так как это кратчайший путь, то муравей посетил только две грани. Эти две грани можно выбрать 6 способами. Развернем пару соседних граней и получим прямоугольник $2n \times n$. Чтобы пройти от одного его угла до другого, нужно сместиться в одном направлении $2n$ раз и в другом направлении n раз. Иными словами, надо выбрать, какие n из $3n$ шагов сделать в выбранном направлении, поэтому есть C_{3n}^{n} способов это сделать. Получаем $6C_{3n}^{n}$ способов.

Поймем, какие маршруты были посчитаны несколько раз, и вычтем их из общей суммы. Дважды были посчитаны те маршруты, которые лежат одновременно в двух парах граней: в них муравей прошел целиком одно из ребер куба и как-то прошел по перпендикулярной этому ребру грани. Таких способов $6C_{2n}^n$ – это количество способов выбрать эту грань, умноженное на количество способов пройти по ней. Вычтем эти способы из всех способов, получим $6\left(C_{3n}^n - C_{2n}^n\right)$. Способы, где муравей идет по трем ребрам куба, были сначала подсчитаны трижды, в выражении $6C_{2n}^n$ они учтены дважды. Таким образом, разность $6\left(C_{3n}^n - C_{2n}^n\right)$ – это интересующее нас количество способов.

20. При $n \le 4$.

Покажем, что при $n \le 4$ всегда можно ввести координаты требуемым образом. Пусть на прямой расположены четыре точки A, B, C, D в этом порядке (если их меньше, то дополним их количество до четырех, добавив произвольные точки). Покажем, что можно ввести координаты так, что ординаты точек A и B равны 0 и 1 соответственно, а абсциссы точек C и D равны 1 и 0 соответственно (рис. 3). Проведем через A и D перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O, так, что $\angle DAO = \alpha$. Прямые OA и OD будут осями координат. Мы покажем, как выбрать угол α.

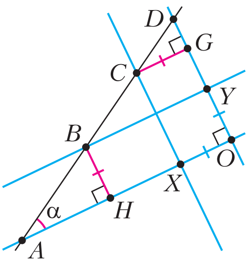


Рис. 3

Пусть X – проекция C на OA, Y – проекция B на OD. Нам нужно, чтобы отрезки OX и OY были равны, тогда мы сможем выбрать $OX = OY$ как единичный отрезок на осях. Пусть G – проекция C на OD, H – проекция B на OA. Тогда требуется, чтобы выполнялось равенство $BH = CG$. Рассмотрим треугольники ABH и CDG. Они подобны. Их коэффициент подобия равен, с одной стороны, отношению гипотенуз CD/AB, с другой стороны, отношению катетов $CG/AH = BH/AH = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, угол α таков, что $\operatorname{tg}\alpha = CD/AB$.

Теперь покажем, что при $n \ge 5$ не всегда можно ввести координаты требуемым образом. Пусть на прямой расположены пять точек и удалось ввести координаты нужным образом. Если у каждой из них одна из координат целая, то хотя бы у трех целая абсцисса или хотя бы у трех целая ордината. Пусть, не умаляя общности, у точек A, B, C целые абсциссы a, b, c соответственно. Тогда $AB/BC = |b-a|/|c-b|$, поэтому отношение AB/BC рационально. Мы покажем, что пять точек можно расположить на прямой так, что для любых трех точек A, B, C отношение AB/BC иррационально, поэтому в этом случае невозможно ввести координаты нужным образом.

Можно рассмотреть конкретное расположение точек, например, пусть на прямой расположены пять точек A, B, C, D, E в этом порядке, $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CD = \sqrt{5}$, $DE = \sqrt{7}$, и непосредственно доказать, что для него выполняется это условие. Так, покажем, что AC/CD иррационально. Пусть оно рационально: $AC/CD = p/q$, где p и q натуральные. Тогда $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)q = \sqrt{5}p$. Возведем в квадрат: $\left(2+3+2\sqrt{6}\right)q^2 = 5p^2$, тогда число $2\sqrt{6}q^2$ целое, а значит, число $\sqrt{6}$ рациональное. Получаем противоречие. В том же духе проверяется, что и остальные отношения иррациональны.

Вместо этого мы приведем другое рассуждение, доказав следующую лемму.

Лемма. Для любого натурального n на прямой можно отметить n точек так, чтобы для любых трех отмеченных точек A, B, C отношение AB/BC было иррациональным.

Доказательство леммы. Будем доказывать по индукции. База для $n = 1$, $n = 2$ очевидна. Пусть отмечено k точек так, что условие выполняется. Покажем, что можно отметить еще одну точку X, чтобы условие продолжало выполняться. Зафиксируем пару точек A, B из ранее отмеченных. Рассмотрим множество точек X таких, что AX/AB рационально. (Рациональность отношения AX/AB равносильна рациональности отношений других отрезков с концами в A, B, X.) Это те точки, среди которых *нельзя* выбирать новую точку множества. Это будут все точки с рациональными координатами, если ввести координаты так, что $A(0)$ и $B(1)$. Как известно, такое множество счетно. Таким образом, если всеми возможными способами выбирать A и B среди отмеченных точек, каждый раз будем получать счетное множество точек, среди которых нельзя выбирать новую точку множества. Объединение конечного количества счетных множеств счетно. Мощность множества всех точек прямой – континуум, поэтому найдется неотмеченная точка, которую можно отметить с соблюдением условия. Таким образом осуществлен шаг индукции.

Рекомендуем книгу, в которой можно познакомиться с упомянутыми фактами теории множеств: Н.Я.Виленкин, «Рассказы о множествах».

Ньютон, модели Вселенной и постоянная Хаббла

1. 1) Здесь хочется привести решение самого Ньютона (из основной работы Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии», переведенной академиком А.Н.Крыловым). И тут можно ничего не комментировать.

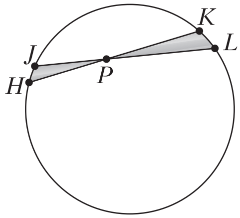


Рис. 4

«Если к отдельным точкам сферической поверхности направлены равные центростремительные силы, убывающие в отношении квадратов расстояний до этих точек, то частица, помещенная внутри этой поверхности, от таких сил ни в какую сторону притяжения не испытывает.

Пусть $HJKL$ (рис. 4) – сказанная сферическая поверхность, P – частица, внутри ее находящаяся; проведем через P две прямые HK и JL, заключающие весьма малые дуги HJ, KL; так как треугольники HPJ и LPK подобны, то эти весьма малые дуги будут пропорциональны расстояниям HP и PL, и весьма малые части сферической поверхности, прилегающие к HJ и KL и ограниченные прямыми, проведенными через точку P, будут находиться в отношении квадратов длин PH и PK, следовательно, силы притяжения этих малых частей поверхности на точку P между собою равны, ибо эти силы прямо пропорциональны этим частям поверхности и обратно пропорциональны квадратам расстояний. Эти же два отношения по перемножению дают 1, следовательно, эти притяжения, направленные в противоположные стороны, взаимно уничтожаются. Из этого рассуждения следует, что притяжение всей сферической поверхности, как состоящее из противоположных элементов, уничтожается, следовательно, частица P ни в какую сторону этим притяжением к движению не побуждается».

2) Доказательству этого факта у Ньютона посвящен следующий десяток страниц. Мы же приведем здесь более короткое доказательство.

Рассмотрим сферу S радиусом r с центром в точке O, по которой равномерно распределена масса M, и точку B с массой m на расстоянии R от точки O. Проведем сферу S_1 радиусом R с центром в O через точку B (рис. 5). Из сферической симметрии следует, что сила F, действующая на B со стороны S, перпендикулярна S_1 и по величине одна и та же во всех точках S_1. Разобьем сферу S на маленькие площадки массой δm, которые

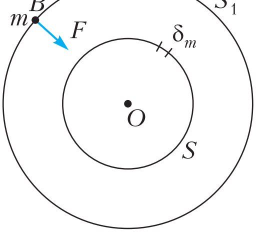


Рис. 5

можно считать материальными точками. Основная идея – считать не одну силу F, а «суммарную» силу, действующую на сферу S_1. Для этого введем понятие векторного поля и потока векторного поля через поверхность.

Векторное поле – это очень просто. Если в каждой точке пространства приложена сила, то такой объект и называется «векторным полем». Почему поле – тоже понятно. Очень похоже на траву, растущую на поле, – в каждой точке своя травинка. Также ясно, что любое тело массой M создает векторное поле. Возьмем пробную массу m и поместим ее в точку пространства. На пробное тело в каждой точке действует своя сила – это и есть векторное поле, создаваемое телом массой M. Это поле и называется гравитационным полем. Мы, конечно, будем рассматривать поля, меняющиеся непрерывно. Ясно, что гравитационное поле непрерывно.

Поток векторного поля через поверхность – тоже очень понятно. Это – сколько векторов протекает сквозь поверхность. Почему «протекает»? Потому, что векторное поле можно представлять как поле скоростей частичек, движущихся в пространстве, например – скоростей потока воды. Выделим маленькую площадку нашей поверхности площадью δm с центром в точке x. Можно считать, что у всех частиц, протекающих через эту площадку, скорость одна и та же – $\vec{v}$. Ясно, что за время t через площадку протечет объем жидкости $\delta S \cdot v \cdot \cos\alpha \cdot t$, где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ (нормалью к поверхности). Понятно, почему нужно рассматривать только нормальную составляющую скорости – вектор скорости в любой точке поверхности можно разложить на нормальную составляющую и касательную к поверхности составляющую. Ясно, что сквозь поверхность течет только нормальная составляющая. Время мы не будем учитывать, поскольку у нас стационарная задача (или можно считать, что мы берем единичное время). Осталось только договориться, какую рассматривать нормаль. Если поверхность замкнута, то принято рассматривать внешнюю нормаль. После этого все числа, полученные для всех маленьких кусочков поверхности, нужно сложить. Эта сумма и называется потоком векторного поля. Не будем говорить, что нужно перейти к пределу. В физике все величины вычисляются с некоторой точностью. И понятие предела как раз и родилось из понимания того, что мы можем вычислять физическую величину со все большей точностью.

Итак, рассмотрим гравитационное векторное поле материальной точки A с массой M внутри поверхности S (рис. 6). Разобьем все пространство на

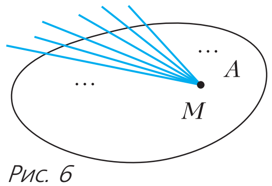


Рис. 6

множество маленьких конусов (не обязательно круговых) так, чтобы маленький кусочек поверхности ΔS_i в каждом конусе можно было считать плоским. Тогда на каждом ΔS_i поток с точностью до знака равен $\delta\Phi_i = F\Delta S_i \cos\alpha$, где $\Delta S_i \cos\alpha$ – площадь поверхности, перпендикулярной к $\vec{F}$ (рис. 7). Для гравитационного поля верно, что при растяжении с коэффициентом λ

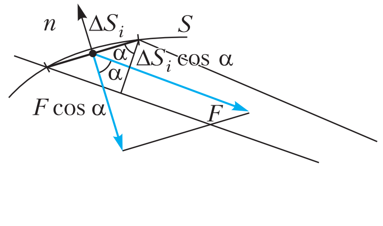


Рис. 7

поток не меняется. Действительно, при растяжении с коэффициентом λ площадь поверхности увеличивается в λ^2 раз, а сила уменьшается в λ^2 раз – ведь в знаменателе закона всемирного тяготения стоит r^2. Растянем теперь в каждом конусе площадку $\Delta S_i \cos\alpha$ так, чтобы она оказалась на расстоянии R. Тогда все получившиеся площадки будут приближать сферу радиусом R, а поток будет равен потоку гравитационного поля массой M через сферу радиусом R ($M = \delta m$, если мы рассматриваем маленький кусок первоначальной сферы радиусом r). Заметим, что новый поток через сферу радиусом R сферически симметричен. Следовательно, нашу массу можно перенести в ее центр. А значит, и всю массу сферы можно перенести в центр. Таким образом, поток гравитационного поля сферически симметричной сферы (шара) массой M равен потоку материальной точки массой M, сосредоточенной в центре. Но поток равен произведению величины силы на площадь, так как в обоих случаях силы перпендикулярны поверхности сферы. Следовательно, и силы равны.

3. Решение этой задачи можно получить из решения задачи 4.

4. За время δt радиус шара меняется от R до $R + \delta t R'$, а масса вещества не меняется. Тогда

$$\rho(t+\delta t) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\frac{4}{3}\pi (R+\delta t R')^3} = \frac{R^3}{(R+\delta t R')^3}\rho,$$

или

$$\rho' = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\rho(t+\delta t)-\rho(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{R^3}{(R+\delta t R')^3}-1\right)\frac{\rho}{\delta t} =$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{-3R^2\delta t R' + \ldots}{(R+\delta t R')^3}\right)\frac{\rho}{\delta t} = -3\frac{R'}{R}\rho = -3H\rho.$$

5. В случае n-мерного пространства ньютоновский закон всемирного тяготения выглядит так:

$$R'' = -\frac{GM_0}{R^{n-1}}.$$

Оба факта (задача 1) тоже выполняются, и их доказательства те же самые. Уравнение для ρ' (задача 4) будет иметь вид

$$\rho' = -nH\rho.$$

А дифференциальное уравнение для постоянной Хаббла преобразуется к виду

$$H'' + (2+n)HH' + nH^3 = 0.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8

Тел.: (831) 218-40-40

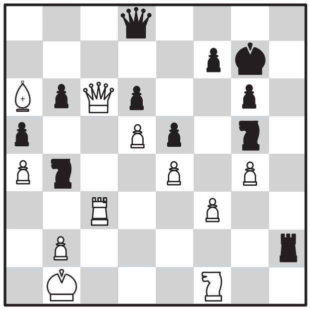
ПрорыВ В ДЕСЯТКУ

Узбекский шахматист Нодирбек Абдусатторов стал победителем престижного турнира по классическим шахматам, проходившего в Праге, и ворвался в десятку текущего рейтинга ФИДЕ сразу на четвертую строчку. Солидное достижение для 19-летнего шахматиста, который уже обладает титулами чемпиона мира по рапиду и победителя олимпиады в составе сборной своей страны.

Н.Абдусатторов – П.Магсудлу
Прага, 2024

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 a6 6. h3 e5 7. ♘b3 ♝e7 8. ♗e3 ♝e6 9. ♕f3! Современный план – белые готовят длинную рокировку и атаку на королевском фланге. **9...♞bd7 10. g4 h6 11. 0-0-0 ♜c8 12. ♘d5 ♞f8!** (компьютерный ход, затрудняющий белым исполнение плана) **13. ♗d3 ♞g6 14. ♖he1 ♞d7 15. ♔b1 ♝g5! 16. c4 0-0 17. ♗f1 ♞h4 18. ♗g5 hg 19. ♕d3 ♞g6 20. ♘e3 ♜c6 21. ♕d2 b6 22. ♘d5** (точнее 22. ♘f5! с выигрышем пешки на d6) **a5 23. a4 ♞f4 24. ♖e3 g6 25. ♘c3 ♞f6 26. f3 ♚h7 27. ♘d5 ♚g7 28. h4 ♝d5 29. cd ♜c8 30. hg ♞h7?** Сильнее 30...♞d7! для борьбы за вертикаль с. **31. ♗a6! ♜c7 32. ♖c1 ♜c1+ 33. ♕c1 ♞g5 34. ♕c6?!** Этот ход белых напрашивался, но точнее 34. ♖c3!, захватывая вертикаль ладьей. **34...♞g2 35. ♖c3 ♞e1! 36. ♘d2 ♜h8 37. ♖e3 ♜h2 38. ♘f1 ♞c2 39. ♖c3 ♞b4.**

40. ♘h2! Красивая и вынужденная жертва, так как после 40. ♕c4 ♜f2 белые теряют материал. **40...♞c6 41. dc ♞e6.** Позиция равна: за ферзя Абдусатторов получил проходную и игру по белым полям, и если белый конь доберется до b5, то позиция будет выиграна. Черные обязаны мешать этому активной игрой.

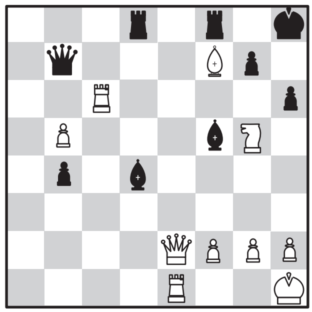


42. ♗c4 ♞c7 43. ♘f1 ♛e8 44. ♗d5 b5 45. ♘e3?! Безопаснее 45. ab ♞b5 46. ♖b3 ♞d4 47. ♖c3 ♞b5 с вероятной ничьей. **45... ba! 46. ♖c2 ♛b8?!** Точнее компьютерная рекомендация 46...♛h8 47. ♔a2 и лишь потом ♛b8, чтобы в некоторых вариантах угрожать шахом с b3. **47. ♗c4 a3 48. ♘d5 ♞e6 49. b3?! ♞d4?! 50. c7 ♛h8 51. ♖d2 ♛h1+ 52. ♔a2 ♛c1 53. ♖h2 a4!?** Для ничьей достаточно 53...♛g1 54. ♖d2 ♛c1, но черные ввиду турнирного положения играли на победу. **54. g5 ♞f3 55. ♖f2 ab+ 56. ♗b3 ♞d2 57. ♖d2 ♛d2+ 58. ♔a3 ♛a5+ 59. ♗a4 ♛a6 60. ♔b4 ♛b7+ 61. ♗b5?! ♚h7?** К ничьей вело 61...♚f8! с вечным шахом через 10 ходов, но человеку разобраться в цейтноте в таких тонкостях практически нереально. **62. ♔c4 ♚g7 63. ♗d7 ♛a6+ 64. ♔b3 ♛b7+ 65. ♔c2 ♛a6 66. c8 ♛e2+ 67. ♔b3 ♛e4 68. ♕g8+, черные сдались.**

Партия 3 тура турнира Нодирбек Абдусатторов против Рихарда Раппорта изобиловала неточностями, но может быть интересна любителям итальянской партии.

Н. Абдусатторов – Р. Раппорт
Прага, 2024

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗c4 ♝c5 4. c3 ♞f6 5. d3 d6 6. b4 ♝b6 7. a4 a5 8. b5 ♞e7 9. ♘bd2 0-0 10. 0-0 ♞g6 11. d4 ed?! В этой позиции верный план связан с развитием слона: 11...♝g4! 12. ♕c2 ♛d7 с равной игрой. **12. cd d5 13. ed ♞d5 14. ♕b3 c6 15. ♖e1 ♞b4 16. ♘e4 cb?** Вскрытие линии выгодно белым, так как они получают дополнительный ресурс ♗a3-b4. **17. ab ♝f5 18. ♘fg5 ♛d7 19. ♗a3?!** Практически выигрывала типичная жертва: 19. ♘f7! ♜f7 20. ♘g5 ♜f8 21. ♘f7 ♜f7 22. ♗a3, и черные парализованы. **19...♜ad8 20. ♗b4 ab 21. ♘c5 ♛c7 22. ♖ac1 ♞f4 23. ♗f7+?** (поздно, так как черные не обязаны принимать жертву) **♚h8! 24. ♕f3 h6 25. ♘b7 ♞e2+! 26. ♕e2 ♛b7 27. ♖c6?** Необходимо 27. ♕h5! ♝d4 28. ♔h1 ♝f6 29. ♘e6 ♝e6 с обоюдными шансами. **27...♝d4! 28. ♔h1.**



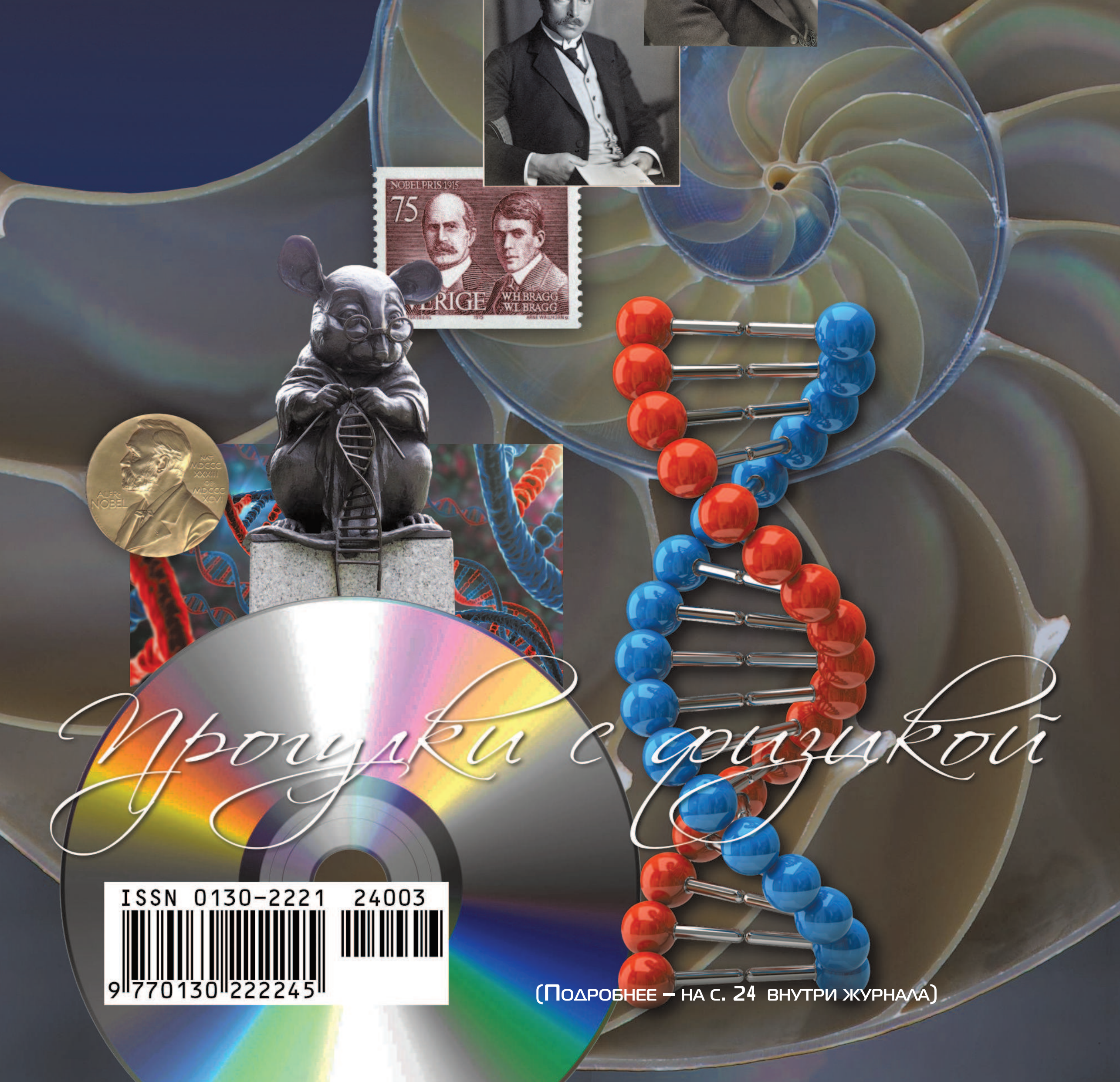
28...♜f7? После точного 28...♝h7! 29. ♘e6 ♛f7 30. ♘d8 ♜d8 выигрывают уже черные за счет двух слонов, в партии же они просмотрели ошеломляющий ответ белых. **29. ♖d6!!** Брать ладью нельзя из-за мата, и белые остаются с лишним качеством. **29...♜c8 30. ♘f7+ ♛f7 31. ♖d4 b3 32. b6 ♜c2 33. ♕f3 b2 34. b7 ♛f8 35. ♖dd1 ♜c5 36. ♕b3, черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Структура ДНК и … математические курьезы

Одно из важнейших открытий в биологии 20 века – открытие пространственной структуры молекулы ДНК. Но что-то в этой структуре не так…



Прогулки с физикой

ISSN 0130-2221 24003
9 770130 222245

(Подробнее – на с. 24 внутри журнала)