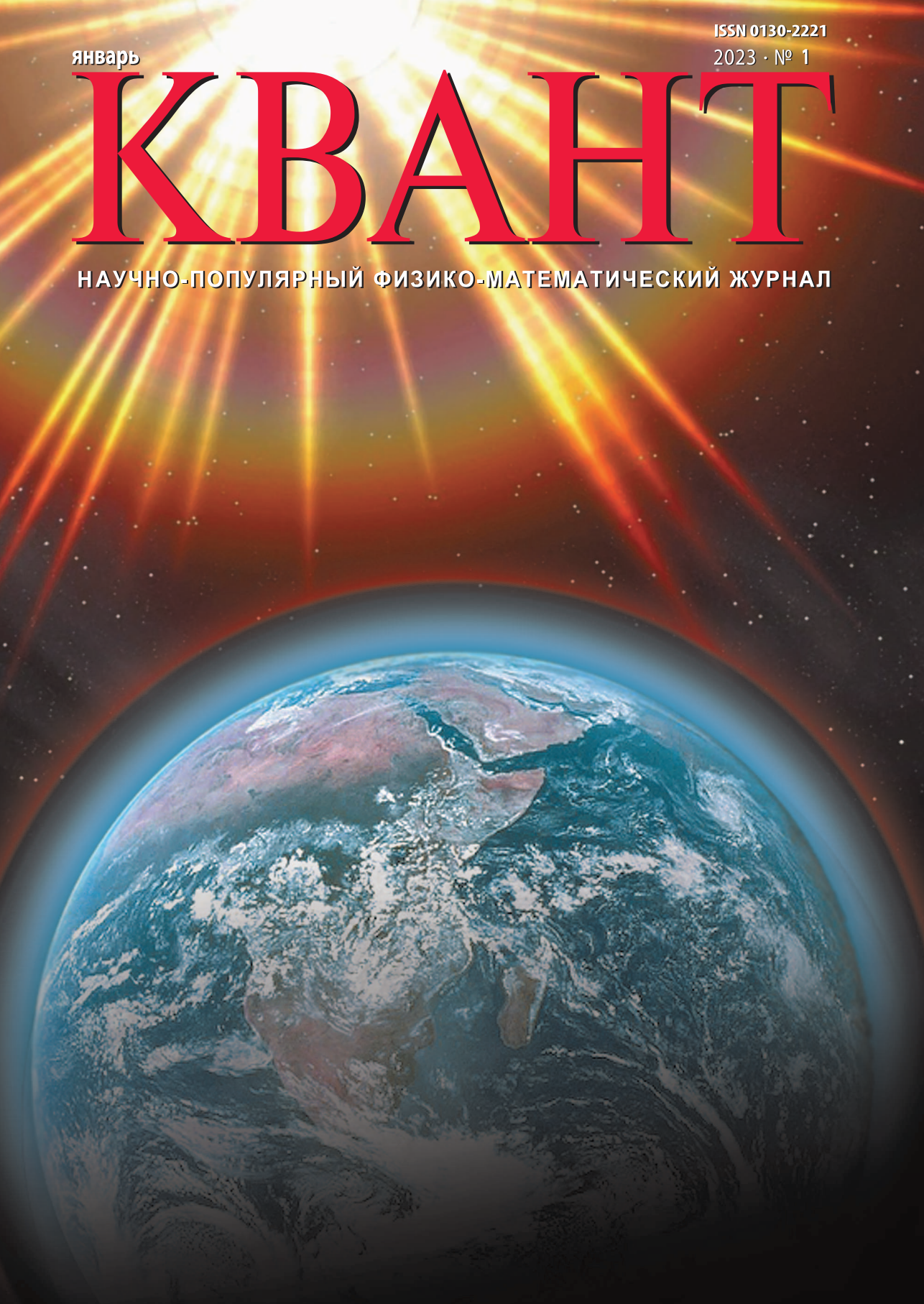
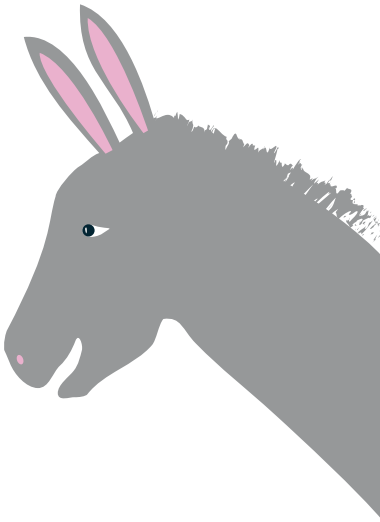
ISSN 0130-2221
январь
2023 · № 1

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





## Задача 1. ЗАШИФРОВАННАЯ ФРАЗА

Ниже зашифрована фраза на русском языке:

**Шыр-пир ю пяпюжгы зэлэмъгый гёсрыг, фёд гяг, фёд гяг, зэлэмъгый гёсрыг.**

З А Д А Н И Е. Расшифруйте эту фразу.

## Задача 2. СТАРИК И ОСЕЛ

Будем составлять предложения из слов:

**он, не, посадил, старика, на, осла.**

При этом каждое слово должно входить во всякое предложение ровно один раз;
каждое слово может употребляться только в той форме, в какой оно приведено в условии;
использовать другие слова или какие-либо знаки припинания запрещается.

З А Д А Н И Е. Определите, сколько предложений русского языка можно составить из приведенных слов при соблюдении указанных требований.

## Задача 3. НАДПИСЬ НА ДВЕРЯХ

В одной стран на дверях учреждения пишут иногда слово

**ŤАНАŤ**

Известно, что (1) это надпись является не названием учреждения, а как бы краткой инструкцией по эксплуатации двери, (2) если дверь прозрачная, то будучи прочтена с противоположной стороны, надпись инструктирует посетителя неправильно.

З А Д А Н И Е. Определите, что означает эта надпись и к какой группе языков относится данный язык.
П Р И М Е Ч А Н И Е. Надписи того же содержания встречаются иногда на дверях и в нашей стране.

# КВАНТ

ЯНВАРЬ 2022 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА


## В номере:


2 Сила математики. *Дж.Конвей*
10 Альбедо и парниковый эффект. *В.Сурдин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

17 Задачи М2730–М2733, Ф2737–Ф2740
18 Решения задач М2714–М2721, Ф2721–Ф2728
28 Левые и правые треугольники. *Л.Шатунов, Т.Казанцева*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

32 Задачи
33 Сто замков и сто ключей. *С.Дориченко*
36 Как облегчить сизифов труд. *С.Дворянинов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

39 Геометрия фейерверка. *А.Заславский, Ф.Нилов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

41 Задачи 17–20

ИНФОРМАЦИЯ

42 Заочная физико-техническая школа МФТИ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

43 Как частица к Солнцу стремилась. *А.Стасенко*

45 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (9)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье «Альбедо и парниковый эффект»*
II *Лингвистические задачи*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*



УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН

Московский физико-технический институт

Московский центр непрерывного математического образования

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов, М.Н.Бондаров, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.В.Устинов (заместитель главного редактора), А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник, А.А.Боровой, В.В.Козлов, С.П.Новиков, А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

# Сила математики

**ДЖ. КОНВЕЙ**

РЕЧЬ ПОЙДЕТ О СИЛЕ ПРОСТЫХ идей в математике. Вот что я люблю делать: взять то, что другие считают сложным и трудным для понимания, и найти простую идею, позволяющую любому – а тогда и вам – разобраться в этой сложности.

Эти простые идеи могут оказаться поразительно мощными, но их и поразительно трудно найти. Много раз на отыскание простой идеи уходило столетие или больше; на самом деле часто требовалось и два тысячелетия – эту идею могли бы найти древние греки, а не нашли.

Распространено заблуждение, что сделанное такими людьми, как Эйнштейн, было сложным. Нет, по-настоящему потрясают мир простые идеи. Но в этих идеях есть своего рода тонкость, которая мешает людям додуматься до них. В простой идее заключен вопрос, который никто не догадался задать.

Рассмотрим, например, вопрос о том, круглая Земля или плоская. Разве древние сидели и думали: «Теперь посмотрим – сфера это или плоскость»? Нет, я думаю, что на самом деле никто не мог вообразить, что Земля сферична, – пока кто-то не заметил, что звезды заходят на западе и через двенадцать часов восходят на востоке, и не предположил, что все может двигаться по кругу, – что трудно согласовать с принятым представлением о плоской Земле.

Другая странная идея связана с понятием «вверх». Абсолютное ли это понятие? Таким оно было в физике Аристотеля. Лишь в физике Ньютона было осознано, что понятие «вверх» относительно: то, что для одного направлено «вверх», для другого направлено «вниз» (например, если один находится в Кембридже, а другой в Австралии). Эйнштейн создал теорию относительности, когда осознал подобный факт о природе времени: то, что для одного разделено во времени, может быть для другого разделено лишь в пространстве.

Поговорим о более доступных вещах. Я хотел бы познакомить вас с некоторыми простыми идеями, относящимися к квадратам, треугольникам и узлам.

### Квадраты

Начнем с нового доказательства старой теоремы. Вопрос таков: «Соизмерима ли диагональ квадрата с его стороной?» Или в современной терминологии: «Является ли квадратный корень из двух отношением двух целых чисел?» Этот вопрос привел к великому открытию, которое приписывается пифагорейцам, – открытию иррациональных чисел.

Поставим вопрос иначе (рис. 1). Найдутся ли два квадрата, стороны которых равны целому числу $n$, а суммарная площадь равна площади квадрата со стороной, равной другому целому числу $m$?

Это почти осуществляется для квадратов 12 на 12: 12 умножить на 12 – это 144, а 144 плюс 144 равно 288, что не равно *в точности* 289, т.е. 17 на 17. Таким образом, $17/12 = 1{,}41666\ldots$ очень близко к $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ – отличие составляет лишь две тысячных.

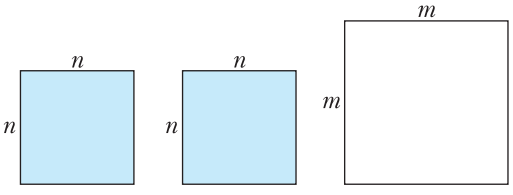



*Рис. 1. Если $m$ и $n$ – целые числа, то могут ли два голубых квадрата $n \times n$ иметь в сумме такую же площадь, как белый квадрат $m \times m$?*

Статья Джона Конвея «The power of mathematics». Перевод Б.Френкина.

Но мы не спрашиваем, можно ли найти целые $m$ и $n$, для которых *приблизительно* $m^2 = 2n^2$. Мы хотим установить, может ли это выполняться *точно*.

Предположим, что это возможно. Тогда должно найтись *наименьшее* целое число $m$, для которого это возможно. Сделаем чертеж для наименьшего возможного $m$. Разместим два маленьких голубых квадрата в правом верхнем и левом нижнем углу большого квадрата (рис. 2). Часть большого квадрата оказалась покрыта маленькими квадратами дважды, а часть – совсем не покрыта. Часть, покрытая дважды, на рисунке 2 показана темно-голубой, а непокрытая показана белой. Поскольку площадь исходного белого квадрата в точности равна сумме площадей светло-голубых квадратов, площадь дважды покрытой части должна в точности равняться площади непокрытой части (рис. 3).

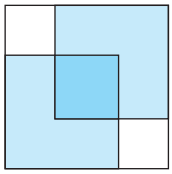


Рис. 2

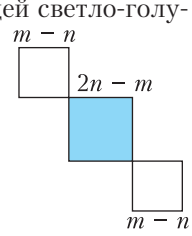



Рис. 3

Какова же площадь этих трех частей? Темно-голубая часть – это квадрат, сторона которого равна целому числу $2n - m$; а две белых части – тоже квадраты, со стороной $m - n$. Таким образом, начав с предполагаемого *наименьшего* целого $m$, квадрат которого равен удвоенному квадрату целого числа, мы нашли *еще меньшее* целое число $(2n - m)$ с таким свойством. *Значит, наименьшего решения не может быть.* Но если решения есть, то среди них должно быть наименьшее. Отсюда заключаем, что решений *не существует*.

Это очень неочевидный результат. Не все действительные числа являются отношениями целых чисел. Приведенное новое доказательство найдено моим другом по имени Стэнли Тенненбаум, который в дальнейшем отошел от математики.

## Треугольники

Возьмем треугольник, любой по вашему выбору, и произведем трисекцию каждого из его углов. Это значит, что мы разделим

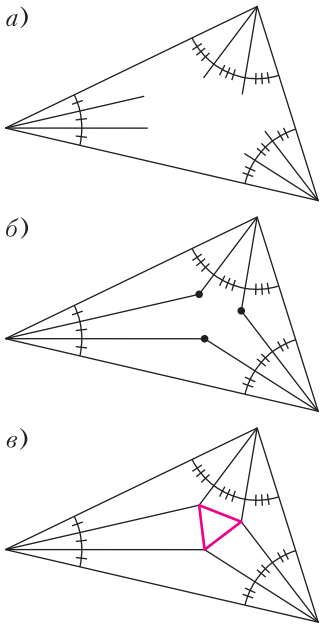



Рис. 4

каждый угол на три части одинакового размера (рис. 4,*а*). Продолжим проведенные лучи, пока они не пересекутся в трех точках (рис. 4,*б*). Тогда довольно впечатляющая теорема Фрэнка Морли утверждает, что треугольник, образованный этими точками, – *равносторонний* (рис. 4,*в*). И это верно для любого исходного треугольника.

Считается, что теорему Морли по-настоящему трудно доказать. Очень просто сформулировать, но очень трудно доказать. Морли сформулировал этот результат примерно в 1900 году, а первое доказательство было опубликовано примерно через 15 лет. Однако я нашел простое доказательство с помощью моего друга Питера Дойла.

Наше простое доказательство теоремы Морли состоит в следующем. Прежде всего сообщите углы $A$, $B$, $C$ вашего исходного треугольника. Не забудьте, что в сумме они должны составлять 180 градусов. Вот дальнейший план. Я собираюсь *начать* с равностороннего треугольника некоторого размера, построить вокруг него шесть других треугольников и склеить их так, чтобы получился треугольник с углами $A$, $B$, $C$, как у вас; так что при некотором выборе размера равностороннего треугольника моя

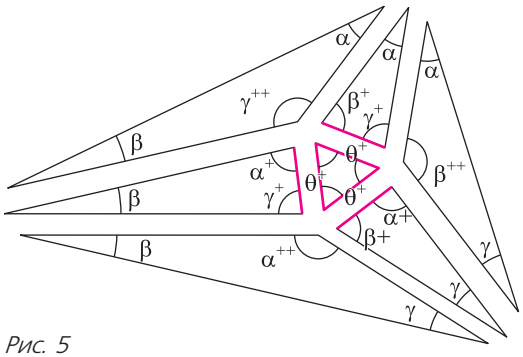



*Рис. 5*

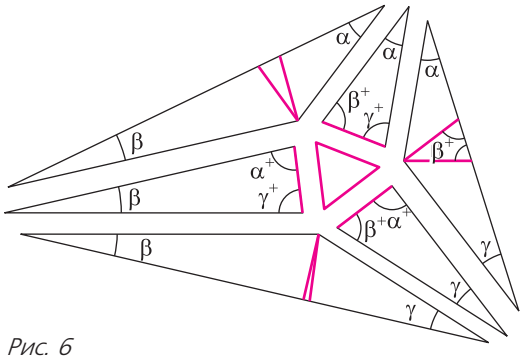



*Рис. 6*

конструкция точно воспроизведет ваш исходный треугольник. При этом моя конструкция докажет, что при трисекции углов вашего треугольника вы найдете в середине мой равносторонний треугольник. На рисунке 5 показаны шесть треугольников, которые мы построим вокруг равностороннего треугольника. Этот рисунок выглядит как обломки только что построенного треугольника – и действительно, склеив должным образом эти обломки, мы построим ваш треугольник. Однако нужно понимать, что шесть новых треугольников будут определяться, исходя из моего равностороннего треугольника, с помощью предложенных вами значений $A$, $B$, $C$. Рисунок 4,*в* – наша цель, а не отправная точка.

При построении шести новых треугольников сначала определим их форму, а затем размеры. Чтобы определить форму, зафиксируем углы. Положим $\alpha = \angle A/3$, $\beta = \angle B/3$ и $\gamma = \angle C/3$. Введем также следующие обозначения: если $\theta$ – произвольный угол, то $\theta^+$ обозначает $\theta + 60°$, а $\theta^{++}$ обозначает $\theta + 120°$. Так что, например, все три внутренних угла равностороннего треугольника (равные 60°) можно обозначить $0^+$.

Зафиксируем углы, как показано на рисунке 5. (Можете проверить, что сумма углов в каждом треугольнике равна 180°.) Чтобы теперь зафиксировать размер каждого треугольника, примыкающего к равностороннему, сделаем длину одной из сторон такой, как у равностороннего треугольника. Эти стороны показаны на рисунке красным цветом.

Далее, зафиксируем размеры трех тупоугольных треугольников; я покажу, как это сделать для самого правого из них, и вы сможете применить подобный метод к двум другим. Через вершину тупого угла проведем две прямые, пересекающие самую длинную сторону треугольника под углом $\beta^+$ (что близко к перпендикулярности), и зафиксируем размер треугольника так, чтобы отрезки от вершины до этой стороны имели такую же длину, как сторона равностороннего треугольника (рис. 6).

Определив таким образом размеры всех треугольников, я теперь утверждаю, что два закрашенных треугольника (рис. 7) равны – один является зеркальным отражением другого. Как можно видеть, это действительно так, поскольку у них два равных угла ($\alpha$ и $\beta^+$) и равная сторона (на рисунке красная, равная стороне правильного треугольника). Поэтому смежные стороны этих двух треугольников равны по длине. Применив такое рассуждение шесть раз, мы получим, что все смежные стороны на рисунке равны друг другу, и тем самым установим, что шесть треугольников точно прилегают к моему равностороннему треугольнику, если только сумма углов при каждой внутренней вершине равна 360 гра-

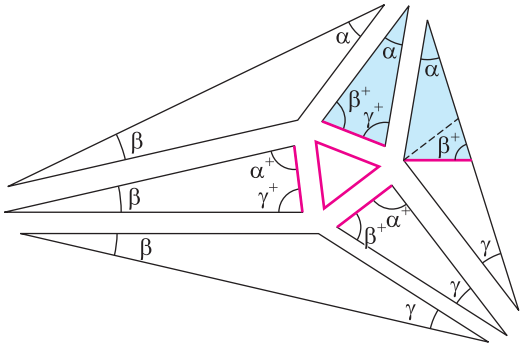



*Рис. 7*

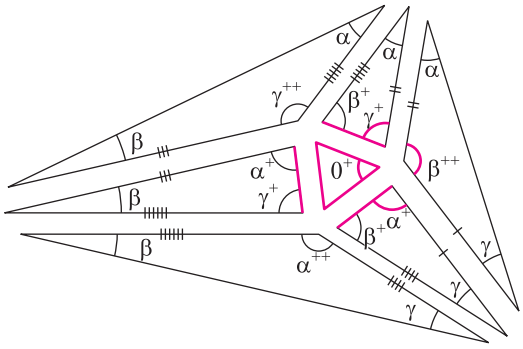



*Рис. 8*

дусам. Сумма углов при любой внутренней вершине равна $\alpha^+ + \beta^{++} + \gamma^+ + 0^+$; это пять плюсов, в сумме составляющих 300 градусов, и $\alpha + \beta + \gamma$, что в результате и дает 360 градусов (рис. 8).

В итоге, склеив вместе семь частей, я получил треугольник с вашими углами, для которого теорема Морли верна. Следовательно, теорема Морли верна для вашего треугольника – и для любого треугольника, который вы бы выбрали.

### Узлы

Теперь я хотел бы немного рассказать вам о теории узлов и о простой идее, которая появилась у меня много лет назад, когда я был школьником-старшеклассником в Ливерпуле.

Прежде всего что такого интересного в узлах? Узлы не кажутся особенно математическим объектом. Под узлом мы будем понимать замкнутый кусок веревки. Первый вопрос, который тут неочевиден, – а существуют ли узлы, отличные от тривиальных узлов, т.е. веревки в виде окружности? Быть может, даже очень хитросплетенный узел можно развязать, т.е. получить тривиальный узел?

Можно ли, например, развязать *трилистник* (рис. 9)? Тот факт, что никто его не развязал, не обязательно означает, что этого нельзя сделать. Это может просто означать, что люди сглупили. Вспомним, что некоторых простых идей не было ни у кого в течение двух тысяч дет, а потом пришел Эйнштейн, у которого они были!

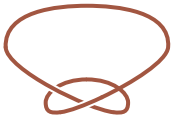


*Рис. 9*

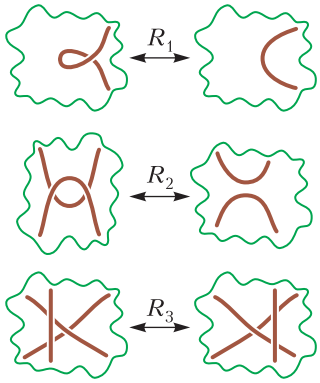



*Рис. 10*

Пока мы возимся с куском веревки, меняя одну конфигурацию на другую, могут произойти три основных события. Они называются движениями Райдемайстера в честь немецкого профессора геометрии Курта Райдемайстера. Будем обозначать эти движения $R_1$, $R_2$ и $R_3$ (рис. 10).

$R_1$ состоит в закручивании или раскручивании одной петли и не изменяет все остальное.

$R_2$ засовывает петлю под соседний участок веревки.

$R_3$ – скользящее движение, которое проводит один участок веревки через место, где пересекаются два других участка.

Все преобразования узлов можно свести к последовательности этих трех движений.

А есть ли набор этих движений, который позволяет начать с левого узла на рисунке 11 и закончить тривиальным узлом («неузлом») справа? Может быть, вам удастся придумать последовательность движений, которая приведет к запутанной картине, вроде изображенной на рисунке 12 справа – но, возможно, с миллионом

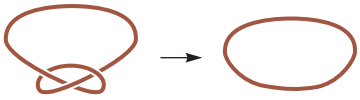


*Рис. 11*

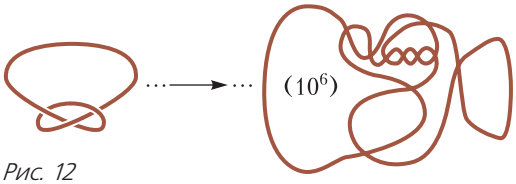



*Рис. 12*

Рис. 13

перекрестков. А затем еще через многомного движений приведет в итоге к неузлу (рис. 13).

Можно ли быть уверенным, что такая последовательность не существует?

Заранее не известно. Не сомневаюсь, что никто даже не пытался охватить все умопомрачительное множество конфигураций с миллионом перекрестков и выяснить, что происходит в каждом случае. И трудность задачи в том, что если мы хотим доказать, что *какой-нибудь* нетривиальный узел существует, то нужно показать, что *никакая* последовательность движений его не развязывает.

Теперь я собираюсь ввести то, что я называю *кнумерацией* (knumbering) узлов. Чтобы создать кнумерацию, надо сопоставить маленькое число каждому видимому участку нити; а там, где одна нить скрывается под другой, два числа при участках *нижней* нити должны быть связаны способом, зависящим от числа на участке *верхней* нити. А именно (рис. 14), если число на верхней нити равно $b$, а числа на нижней нити по обеим сторонам от верхней равны $a$ и $c$, то «$a$, $b$, $c$» должны составлять *арифметическую прогрессию*. Это означает, что прирост при переходе от $a$ к $b$ такой же, как при переходе от $b$ к $c$. Например, если $a = 13$ и $b = 16$, то $c = 19$ (рис. 15).

Для чего же нужны эти числа? Вначале посмотрим, можно ли кнумерацию осуществить. Возьмем нашего старого друга, узел «трилистник», и пройдем вокруг него, приписывая числа его различным участкам и проверяя, можно ли выполнить условие арифметической прогрессии на каждом перекрестке. С чего мы начнем?

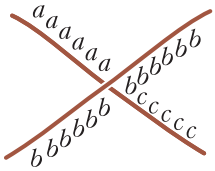


Рис. 14

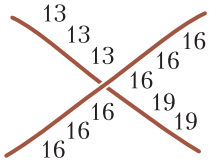
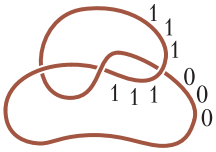


Рис. 15



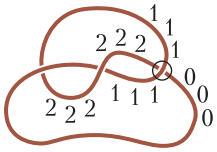
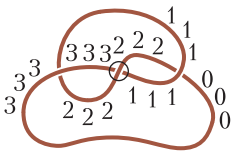


Рис. 16

Нелишне заметить, что условие арифметической прогрессии *инвариантно*: можно сдвинуть все числа $a$, $b$, $c$ вверх или вниз на любую величину, и они по-прежнему будут составлять арифметическую прогрессию. Так что можно вначале присвоить метки 0 и 1 какому-нибудь участку на рисунке 16, а на остальной части узла расставить то, что из этого выбора следует. Будем помечать каждый перекресток, применяя это правило.

Сначала все идет хорошо. Но вскоре возникает проблема на верхнем участке (рис. 17): 4 не равно 1, а они должны быть



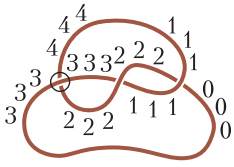


Рис. 17

равны, поскольку и 4 и 1 стоят на одном участке веревки. Однако великая сила математических методов проявляется и в том, что я могу определять понятия, как хочу; так что я намерен определить 4 как число, *равное единице*. (Математики называют такое равенство «сравнимостью по модулю 3».) Ура! С этим справились.

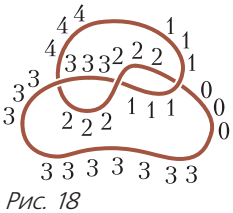


Рис. 18

Подобное противоречие есть и на нижнем участке (рис. 18): он имеет две метки 3 и 0. Но если 4 равно 1, то 3 равно 0. Так что все в порядке.

Мы получили кнумерацию.

В чем же смысл таких кнумераций? Он весьма замечателен. Посмотрите, что происходит, когда мы берем узел с кнумерацией и применяем к нему три движения Райдемайстера. Можно ли из кнумерации на рисунках 19,*а*–*в* слева получить кнумерацию справа?

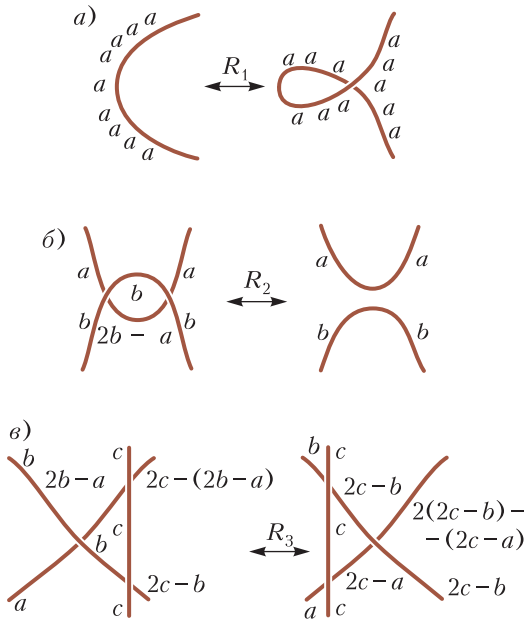



*Рис. 19*

Ответ утвердительный: любую правильную кнумерацию левой фигуры можно превратить в правильную кнумерацию правой фигуры, и обратно. Это совсем легко проверить для первых двух движений. Для третьего движения нужно убедиться, что $2(2c-b)-(2c-a)=4c-2b-(2c-a)=2c-(2b-a)$.

Мы видим, что можно выполнить любое из трех движений, не искажая остальную часть кнумерации.

Поскольку любая правильная кнумерация остается правильной при выполнении движения в любую сторону, *количество возможных кнумераций* в левой части рисунка равно *количеству кнумераций* в правой.

Вернемся к вопросу о том, можно ли трилистник преобразовать в неузел. Для неузла существуют ровно три кнумерации (рис. 20). Между тем у трилистника не меньше четырех кнумераций: всюду 0, всюду 1, всюду 2 и кнумерация, показанная на рисунке 21.

*Рис. 20*

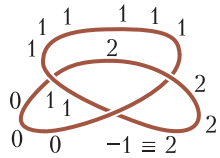



*Рис. 21*

И теперь мы можем доказать, что *трилистник нельзя развязать*: у него другое количество кнумераций, чем у неузла. Если бы трилистник и неузел были связаны последовательностью движений Райдемайстера, у них было бы равное количество кнумераций.

Это доказывает, что узлы *существуют*.

## Танглы

Я часто показываю маленький фокус, который состоит в завязывании узлов. Танглы (плетения) – это маленькие заузления с четырьмя свободными концами, и они имеют неожиданную связь с арифметикой.

Танглы лучше всего изображаются четырьмя танцорами. Два танцора держат концы одной веревки, а еще два – концы другой. Можно манипулировать танглом, выполняя два движения: *перекручивание* (twist'em up) и *поворот* (turn'em roun').

При перекручивании (рис. 22) два танцора на правой стороне меняются местами,

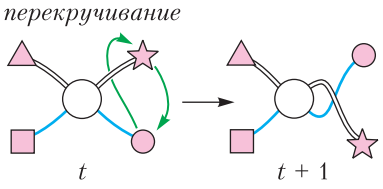



*Рис. 22*

причем нижний танцор проходит *под* веревкой верхнего. Далее, мы будем приписывать каждому танглу некоторое числовое значение, и перекручивание будет менять это значение с $t$ на $t+1$. (Эти значения не связаны с кнумерациями; теперь можно о кнумерациях забыть.)

При повороте (рис. 23) все четыре танцора сдвигаются на одну позицию по часовой стрелке. Значение тангла при этом меняется с $t$ на $-1/t$.

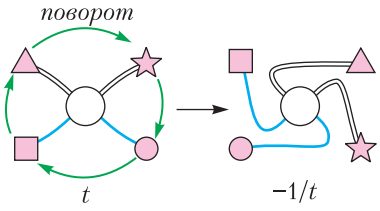



*Рис. 23*

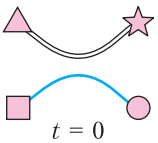


Рис. 24

Начнем с того, что придадим танглу на рисунке 24 значение $t = 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность движений (рис. 25). Ваша задача, дорогой читатель, вернуть танцоров к нулю. Но вам позволено делать лишь два движения, о которых я говорил. Вы хотите закручиваться или поворачиваться?

Вы обнаружите, что если благодаря своему знанию арифметики вы вернете значение к нулю, то *тангл действительно развяжется*. Волшебство! В Кембридже слушатели выбрали такую последовательность:

$$13/10 \xrightarrow{r} -10/13 \xrightarrow{u} 3/13 \xrightarrow{r} -13/3 \xrightarrow{u} -10/3 \xrightarrow{u}$$
$$\xrightarrow{u} -7/3 \xrightarrow{u} -4/3 \xrightarrow{u} -1/3 \xrightarrow{r} 3 \xrightarrow{u} 4 \xrightarrow{r}$$

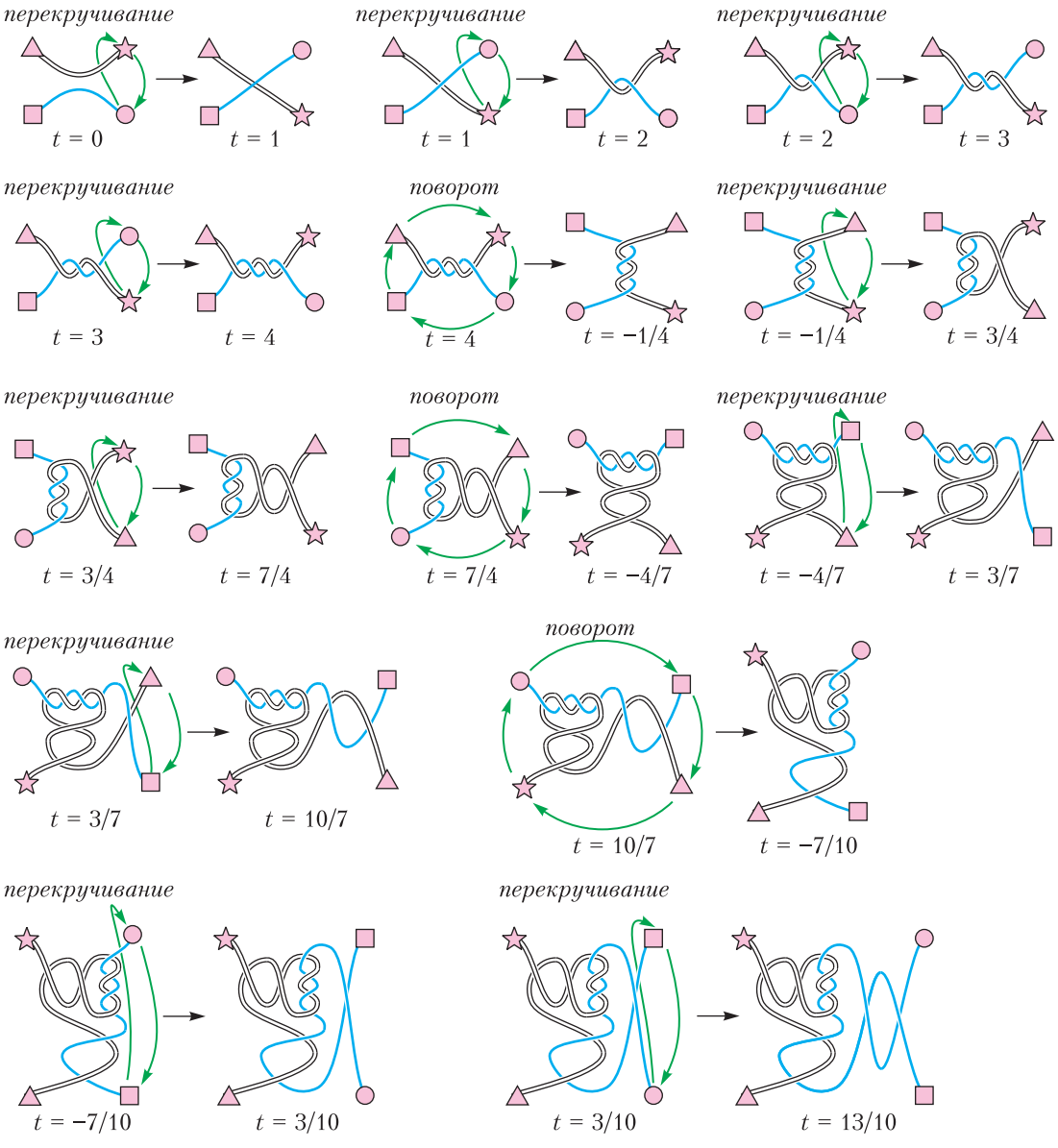


Рис. 25

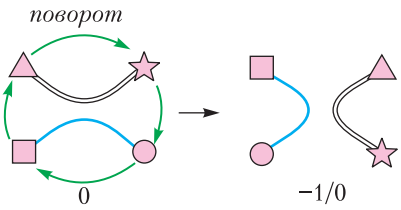


Рис. 26

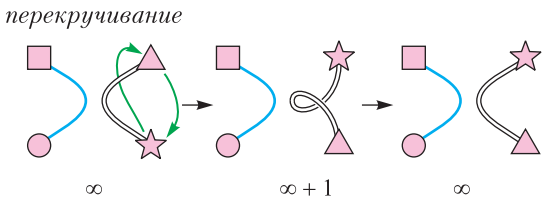


Рис. 27

$$\xrightarrow{r} -1/4 \xrightarrow{u} 3/4 \xrightarrow{r} -4/3 \xrightarrow{u} -1/3 \xrightarrow{u} 2/3 \xrightarrow{r}$$

$$\xrightarrow{r} -3/2 \xrightarrow{u} -1/2 \xrightarrow{r} -2 \xrightarrow{u} -1 \xrightarrow{u} t = 0;$$

перекручивание и поворот обозначены здесь $\xrightarrow{u}$ и $\xrightarrow{r}$ соответственно.

Это пример очень простой идеи. Мы уже знали кое-что из арифметики – но лишь в связи с числами; и мы не осознавали, что это можно применить и к узлам. Так что на самом деле этот кусочек теории узлов – чистая арифметика.

Найдя эту неожиданную связь, давайте закончим кое-чем забавным. Начнем с $t = 0$ и сделаем поворот (рис. 26). Что мы получим? Гм! Мы получили $-1/0$, это ведь какая-то бесконечность или минус бесконечность? Посмотрим, что получится, если прибавить к бесконечности единицу. Меняется ли что-то? Сделаем перегибание (рис. 27)! Здóрово? Прибавляем к бесконечности единицу и снова получаем бесконечность.

Здесь заключена мощная идея, которую используем мы, математики: вы берете то, что узнали в одном месте, и применяете к чему-то еще, где не заметно никакой математики. А она там есть!

## Фатбол

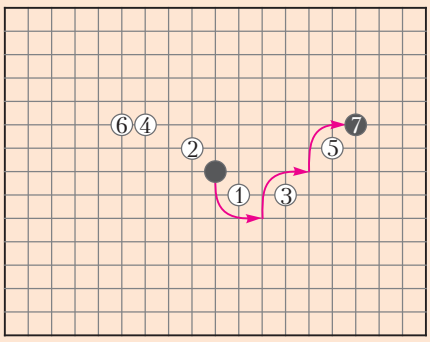
Джон Конвей изобрел много интересных настольных игр. Приведем правила одной из них.

Игра называется «Фатбол» (от англ. Phutball, Philosopher's Football, т.е. «философский футбол»). В философский футбол играют вдвоем на доске, разлинованной 19-ю вертикальными и 15-ю горизонтальными линиями. Вам понадобятся один черный камень, который символизирует мяч, и достаточно большой запас белых камней, которые символизируют футболистов.

Вот правила:

1. В начале игры черный камень кладется на пересечение в центре доски. Игроки сидят на противоположных концах доски, края которой образуют линии ворот. Цель состоит в том, чтобы переместить мяч на линию ворот на стороне соперника или за нее.

2. Каждый игрок в свой ход может либо поместить белый камень на любое пустое пересечение; либо переместить мяч, перепрыгивая через одного или несколько белых камней. Белые камни, через которые перепрыгнули, сразу удаляются из игры.




3. Совершить прыжок разрешается в любом горизонтальном, вертикальном или диагональном направлении. Прыжок может быть любой длины, при условии, что каждое пересечение, через которое мяч перепрыгнул, занято белым камнем и что мяч остановится на первой незанятой точке на линии его движения. Если мяч приземляется на пересечение, с которого он может совершить еще один прыжок в том же или в новом направлении, он может сделать это сразу в рамках одного хода. Эти дополнительные прыжки необязательны. Поскольку перепрыгнутые камни удаляются немедленно, каждый из них не может быть перепрыгнут более одного раза за ход. Мяч может оказываться на линии ворот игрока, который делает ход, но он должен покинуть ее до конца хода, иначе игрок считается проигравшим. Игрок может выиграть, перепрыгнув камень на линии ворот соперника, несмотря на то, что за ней нет пересечения, на которое он мог бы приземлиться.

На рисунке приведен пример возможного начала игры. Числа на камнях обозначают номер хода.

Попробуйте сыграть!

# Альбедо и парниковый эффект

**В.СУРДИН**

КРАСИВОЕ СЛОВО «АЛЬБЕДО» в переводе с латинского означает «белизна», а в точном физическом смысле – это доля отраженного какой-либо поверхностью света. Если мы не художники и не друзья герцога Альбы, то какое отношение это слово имеет к нашей жизни? Не удивляйтесь – самое непосредственное!

## На дне воздушного океана

Мы живем на поверхности планеты под слоем атмосферы, защищающей нас от космической радиации, но пропускающей к поверхности планеты солнечный свет, необходимый для роста растений, а также для работы астрономов, изучающих Солнце и прочие объекты Вселенной. Но это еще не все требования, которые мы предъявляем к планете, пригодной для жизни (а также, пригодной для работы астрономов!). Кроме твердой поверхности, отсутствия радиации и наличия солнечного света, нам также нужна комфортная температура, хотя бы для того, чтобы вода на поверхности планеты была жидкой, а не твердой или газообразной. И все эти качества планеты так или иначе связаны с ее альбедо.

Большинство планет Солнечной системы нашим требованиям вообще не отвечают. Например, четыре гигантские планеты – Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун – покрыты настолько толстой атмосферой, что свет к их поверхности, если она там вообще есть, не добирается. С другой стороны, у Меркурия, у планет-карликов (Плутон и ему подобные), а также у астероидов и комет заметной атмосферы вообще нет. Остаются Земля, Венера и Марс. Но и с ними не все так просто.

По сравнению с гигантами планеты земного типа привлекательны тем, что имеют твердую поверхность, на которую могут осуществлять посадку космические аппараты и на которой, в принципе, можно жить. К тому же, их расстояния от Солнца различаются не слишком сильно, так что можно было бы ожидать у них схожего климата. Этого и ожидали астрономы еще не так давно, основываясь только на значениях бондовского альбедо планет.

**Для справки**

*Альбедо* – величина, характеризующая рассеивающую или отражательную способность поверхности тела. Выражается как доля падающего потока излучения или частиц, отраженная поверхностью тела. Различают несколько видов альбедо.

*Иллюстрация к повести Владимира Владко «Аргонавты Вселенной»*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230101

*Истинное альбедо, или ламбертово альбедо,* совпадающее с коэффициентом диффузного отражения, – это отношение потока, рассеянного плоским элементом поверхности во всех направлениях, к падающему на него потоку. Если поверхность освещается и наблюдается вертикально, то такое истинное альбедо называют нормальным. Нормальное альбедо чистого снега составляет около 1,0, а древесного угля – около 0,04.

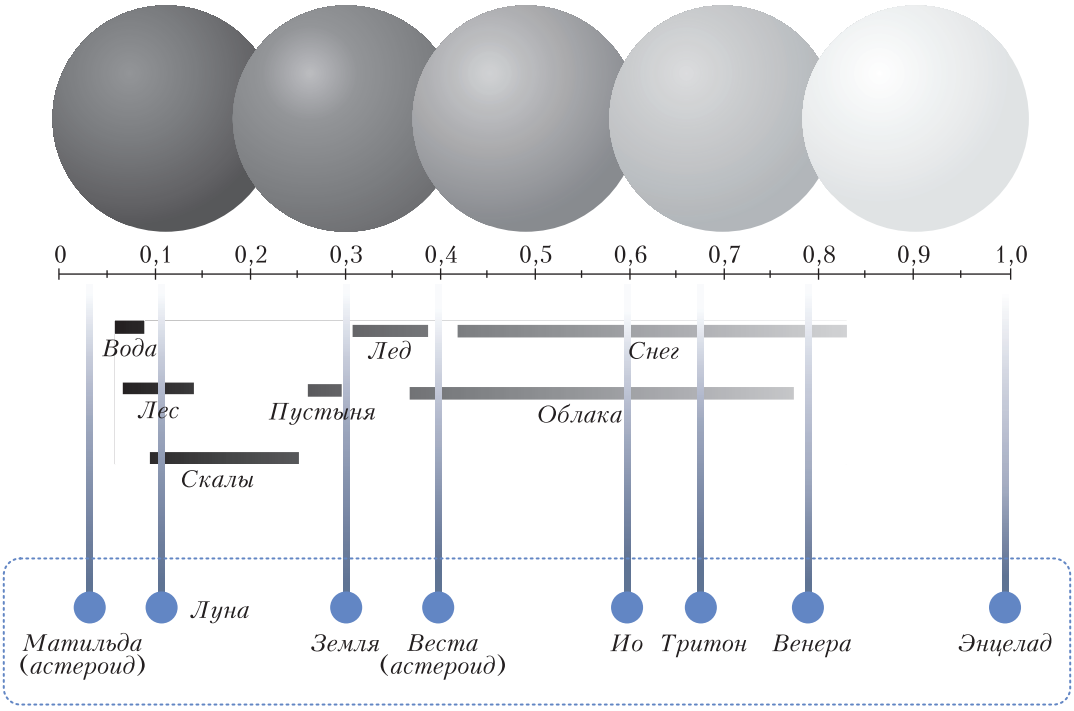
Значение альбедо зависит от спектра падающего излучения и от свойств поверхности. Поэтому отдельно измеряют альбедо для разных спектральных диапазонов (оптическое, ультрафиолетовое, инфракрасное), поддиапазонов (визуальное, фотографическое) и даже для отдельных длин волн (монохроматическое альбедо).

В астрономии часто используют *геометрическое, или плоское, альбедо* – отношение освещенности у Земли, создаваемой планетой в полной фазе, к освещенности, которую создал бы плоский абсолютно белый экран того же размера, что и планета, отнесенный на ее место и расположенный перпендикулярно лучу зрения и солнечным лучам.

Визуальное геометрическое альбедо Луны 0,12, Земли 0,367. В принципе, геометрическое альбедо может быть больше единицы (частично зеркальное отражение). Например, геометрическое альбедо Энцелада (спутник Сатурна) составляет 1,38.

Для расчета энергетического баланса планет используется *сферическое альбедо, или альбедо Бонда*, введенное в 1861 году американским астрономом Дж. Бондом (1825–1865). Это отношение отраженного всей планетой потока излучения к падающему на нее потоку. Бондовское альбедо Земли 0,306, у лишенной атмосферы Луны оно 0,067, у Марса 0,25, у покрытой облаками Венеры 0,77, а у покрытого снегом Энцелада 0,99.

В самом деле, Венера ближе всех к Солнцу, но и альбедо по Бонду у нее самое большое (77%), поэтому она поглощает сравнительно мало тепла. Земля находит-




*Альбедо – доля солнечного света, отраженная поверхностью. Показан диапазон значений альбедо типичных поверхностей на Земле, а также альбедо Бонда некоторых космических тел*

ся подальше от Солнца, но и альбедо у нее меньше (31%), а Марс дальше всех землеподобных планет, но зато лучше всех поглощает солнечное тепло: его альбедо 25%. Это удивительное свойство трех планет, похожих на Землю, привело ученых середины XX века к убеждению, что на Венере, Земле и Марсе почти одинаковый климат. Возникла наука Астроботаника, писатели создали научно-фантастические романы о жизни на Марсе и Венере, а режиссеры сняли об этом хорошее кино (посмотрите, например, фильм «Планета бурь»). И их можно понять: в быту мы привыкли регулировать тепловой режим именно с помощью альбедо. В летний солнцепек предпочитаем светлую одежду, а бак с водой над душевой кабиной на даче окрашиваем черной краской, чтобы солнечные лучи быстрее нагревали в нем воду. Но в некоторых случаях эффект альбедо становится критически важным. Например – в стратосфере или в безвоздушном пространстве.

### Тепловой баланс

Температура любого тела определяется балансом между притоком к нему тепла и его потерями. Известны три механизма обмена теплом: излучение, теплопроводность и конвекция. Два последних процесса требуют прямого контакта с окружающей средой, поэтому в космическом вакууме важнейшим и по сути единственным становится первый механизм – излучение. Для конструкторов космической техники это создает немалые проблемы. Им приходится учитывать несколько источников тепла: Солнце, планету (особенно на низких орбитах) и внутренние агрегаты самого космического аппарата. А для сброса тепла есть лишь один способ – излучение с поверхности аппарата. Для поддержания баланса тепловых потоков конструкторы космической техники регулируют эффективное альбедо аппарата с помощью экранно-вакуумной изоляции и радиаторов. Когда такая система дает сбой, условия в космическом корабле могут стать весьма некомфортными, о чем напоминает нам история экспедиции «Аполлон-13» к Луне.

Но впервые с этой проблемой столкнулись в первой трети XX века создатели высотных аэростатов – так называемых стратостатов. В те годы еще не умели создавать сложные системы терморегулирования герметичной гондолы, поэтому ограничивались простым подбором альбедо ее внешней поверхности. Насколько чувствительна температура тела к его альбедо, говорит история первых полетов в стратосферу. Швейцарец Огюст Пикар покрасил гондолу своего стратостата FNRS-1 с одной стороны в белый, а с другой – в черный цвет. Предполагалось регулировать температуру в гондоле, поворачивая сферу той или иной стороной к Солнцу: для этой цели снаружи установили пропеллер. Но устройство не заработало, солнечный свет шел с «черной» стороны, и внутренняя температура в первом полете поднялась до +38 °C. В следующем полете всю капсулу просто покрыли серебряной краской для отражения солнечных лучей. Внутри стало минус 16 °C. Вот он – эффект альбедо!

Американские конструкторы стратостата «Explorer» учли опыт Пикара и приняли компромиссный вариант: покрасили верхнюю часть капсулы в белый, а нижнюю – в черный цвет. Идея состояла в том, что верхняя половина сферы будет отражать солнечное излучение, а нижняя – поглощать тепло от Земли. Этот вариант оказался неплохим, но тоже не идеальным; во время полетов в капсуле было +5 °C.

*Огюст Пикар готовится к полету на стратостате FNRS-1 (1931 г.)*

*Экипаж стратостата «Explorer II» перед полетом (1935 г.)*

А советские стратонавты просто теплоизолировали алюминиевые капсулы слоем войлока. Как показала практика, такое решение было самым удачным. Внутреннего тепла, в основном выделяемого экипажем, оказалось достаточно для поддержания стабильной температуры.

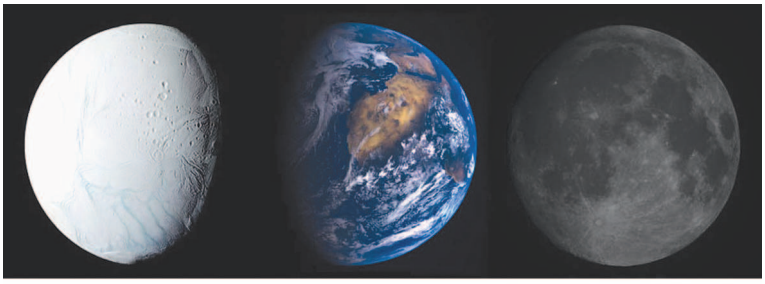
Но если планета не имеет собственных мощных источников тепла, то значение альбедо очень важно для ее климата. Например, наша планета поглощает около 70% падающего на нее солнечного света, перерабатывая его в собственное инфракрасное излучение, поддерживая за счет него круговорот воды в природе, запасая его в результате фотосинтеза в биомассе, нефти, угле, газе. Луна поглощает почти весь солнечный свет, «бездарно» превращая его в инфракрасное излучение и за счет этого поддерживая свою относительно невысокую температуру: средняя температура на лунном экваторе минус 25 °С, а в полярных областях минус 120 °С.

Зато спутник Сатурна Энцелад своей идеально белой поверхностью гордо отталкивает от себя почти весь солнечный свет, за что и расплачивается чудовищно низкой температурой поверхности: в среднем около минус 200 °С, а местами до минус 240 °С. Впрочем, этот спутник («весь в белом») не сильно страдает от наружного холода, поскольку у него есть альтернативный источник энергии – приливное гравитационное влияние гигантского соседа Сатурна, поддерживающее подледный океан Энцелада в жидком состоянии.

Но у планет земной группы внутренние источники тепла очень слабы, поэтому температура их твердой поверхности в значительной степени зависит от свойств атмосферы – от ее способности, с одной стороны, отражать часть солнечных лучей обратно в космос, а с другой – удерживать энергию излучения, прошедшего сквозь атмосферу к поверхности планеты.

### Парниковый эффект и климат планеты

В зависимости от того, как далеко от Солнца находится планета и какую долю солнечного света она поглощает, формируются температурные условия на поверхности планеты, ее климат. Как выглядит спектр любого самосветящегося тела, например звезды? В большинстве случаев спектр звезды – это «одногорбая», почти планковская кривая, у которой положение максимума зависит от температуры поверхности звезды. В отличие от звезды, у

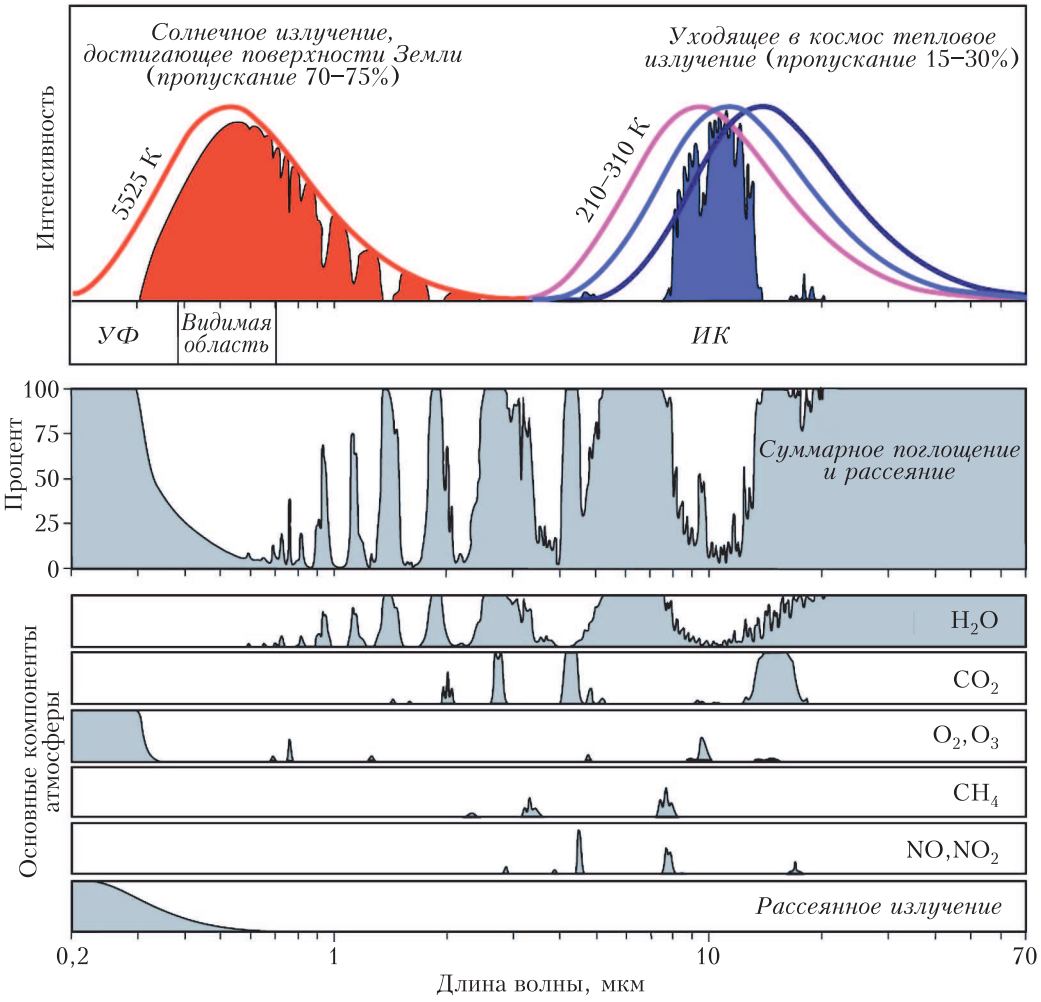


$A = 0{,}99$ $A = 0{,}31$ $A = 0{,}11$

*Энцелад, Земля, Луна (не в масштабе) и их альбедо (A)*

спектра планеты два «горба»: часть звездного света она отражает в оптическом диапазоне, а другую часть поглощает и переизлучает в инфракрасном диапазоне. Относительная площадь под этими двумя горбами как раз и определяется степенью отражения света, т.е. альбедо.

Посмотрим на две ближайшие к нам планеты – Меркурий и Венеру. На первый взгляд, ситуация парадоксальная. Венера отражает почти 80% солнечного света и лишь около 20% поглощает, а Меркурий почти ничего не отражает, а все поглощает. К тому же Венера дальше от Солнца, чем Меркурий; на единицу ее облачной поверхности падает в 3,4 раза меньше солнечного света. С учетом разницы в альбедо каждый квадратный метр твердой поверхности Меркурия получает почти в 16 раз больше солнечного тепла, чем такой же участок на Венере. И тем не менее, на всей твердой поверхности Венеры адские условия – огромная температура (олово и свинец плавятся!), а Меркурий прохладнее. На полюсах там антарктический холод, а на экваторе средняя температура +67 °C. Конечно, днем поверхность Меркурия нагревается до 430 °C, а ночью остывает до

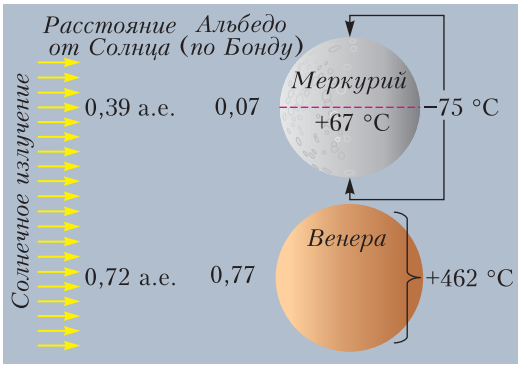



*Спектры отраженного атмосферой и поглощенного земной поверхностью солнечного излучения и вклад отдельных компонентов атмосферы в поглощение*

–170 °С. Но уже на глубине 1,5–2 метров суточные колебания сглаживаются, и мы можем говорить о средней температуре поверхности +67 °С . Жарковато, конечно, но жить можно. А в средних широтах Меркурия вообще комнатная температура.

В чем же дело? Почему близкий к Солнцу и охотно поглощающий его лучи Меркурий нагрет до комнатной температуры, а Венера, более далекая от Солнца и активно отражающая его лучи, раскалена как печь? Как объяснит это физика? Оказывается, все дело в парниковом эффекте. Рассмотрим его на примере Земли.

Атмосфера Земли почти прозрачна: она пропускает 80% приходящего солнечного света. «Убежать» в космос в результате конвекции воздух не может – планета не отпускает его. Значит, охлаждаться она может только в виде инфракрасного излучения. А если ИК-излучение остается запертым, то оно нагревает те слои атмосферы, которые его не выпускают. Эти слои сами становятся источником тепла и частично направляют его обратно к поверхности. Некоторая часть излучения уходит в космос, но основная его доля возвращается к поверхности Земли и греет ее до тех пор, пока не установится термодинамическое равновесие. А как оно устанавливается?



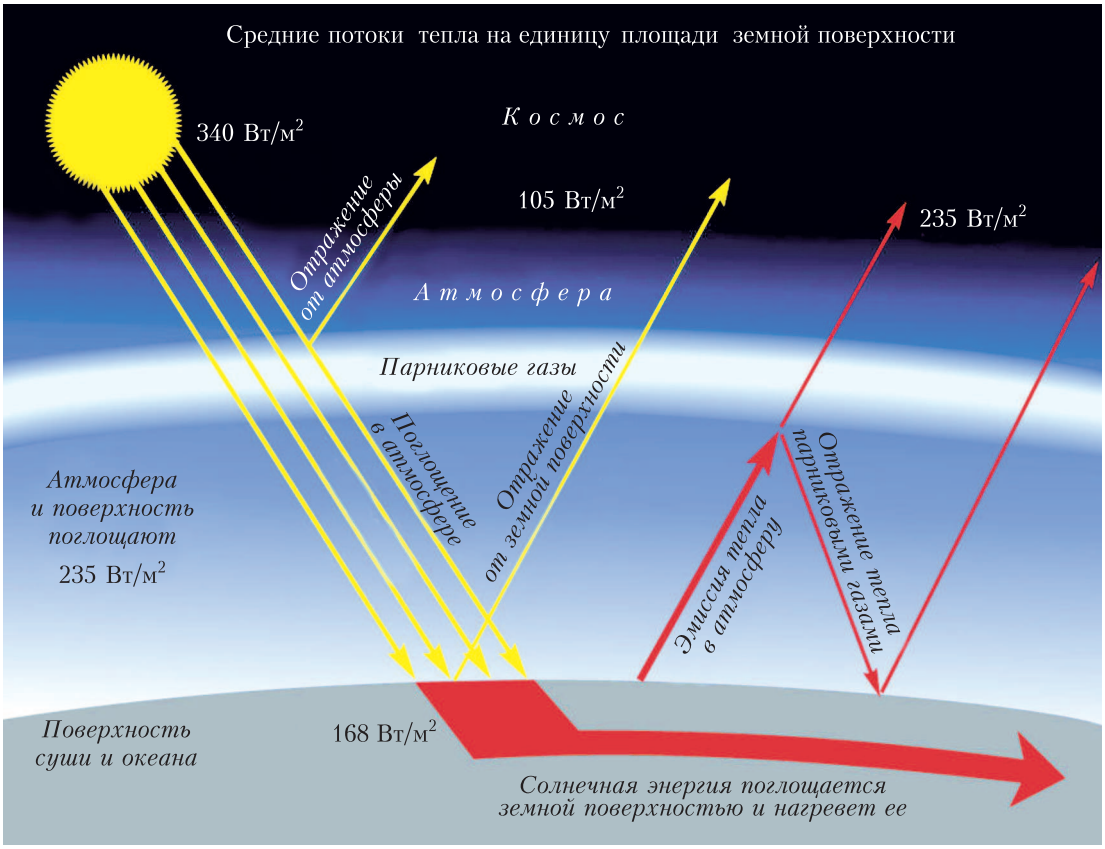

*Несмотря на относительную удаленность от Солнца (указана в астрономических единицах) и высокое альбедо, температура поверхности Венеры в результате парникового эффекта значительно выше средней температуры поверхности Меркурия*

*Садовый парник прозрачен для солнечного света, но с трудом выпускает инфракрасное излучение*

Температура растет, и максимум в спектре смещается (закон Вина) до тех пор, пока не найдет в атмосфере «окно прозрачности», сквозь которое ИК-лучи уйдут в космос. Баланс тепловых потоков устанавливается, но при более высокой температуре, чем могло бы быть при отсутствии атмосферы. Это и есть парниковый эффект.

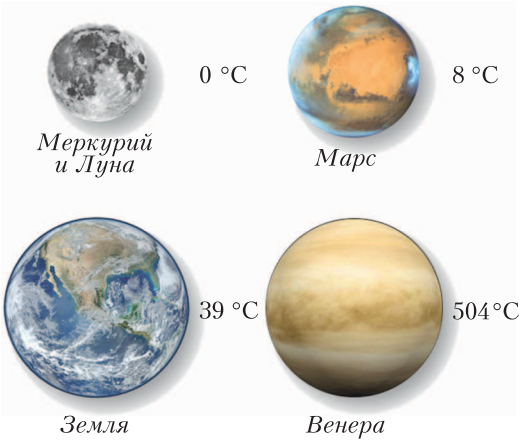
В своей жизни мы довольно часто сталкиваемся с парниковым эффектом. И не только в виде садового парника или толстой шубы, которую надевают в морозный день, чтобы согреться (хотя сама шуба не выделяет, а лишь удерживает тепло). Как раз эти примеры не демонстрируют чистый парниковый эффект, поскольку в них уменьшается как лучистый, так и конвективный отвод тепла. Гораздо ближе к описанному эффекту пример ясной морозной ночи. При сухом воздухе и безоблачном небе (например, в пустыне) после захода солнца земля быстро остывает, а влажный воздух и облака сглаживают суточные колебания температуры. К сожалению, этот эффект хорошо знаком астрономам: ясные звездные ночи бывают особенно холодными, что делает работу у телескопа весьма некомфортной. Именно пары воды в атмосфере служат главным препятствием для уносящего тепло ИК-излучения.

У Луны нет атмосферы, а значит, нет и парникового эффекта. На ее поверхности




*Потоки тепла у Земли. Указаны средние потоки лучистого тепла на единицу поверхности*

термодинамическое равновесие устанавливается в явном виде, никакого обмена излучением между атмосферой и твердой поверхностью нет. То же и у Меркурия. У Марса атмосфера разреженная, но все-таки ее парниковый эффект добавляет свои 8 °C. А Земле он добавляет почти 40 °C. Если бы у нашей планеты не было такой плотной атмосферы, температура Земли была бы на 40 °C ниже. Сегодня она составляет по всему земному шару в среднем +15 °C, а было бы –25 °C. Все океаны замерзли бы, поверхность Земли от снега стала бы белой, альбедо повысилось бы, и температура упала бы еще ниже. В общем – страшное дело! Хорошо, что парниковый эффект в нашей атмосфере работает и греет нас. Но гораздо сильнее он работает на Венере – более чем на 500 °C




*Влияние парникового эффекта на среднюю температуру планеты*

поднимает среднюю венерианскую температуру. Жарковато. Но надо бы проверить, есть ли там жизнь. А вдруг?!

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.***

## Задачи М2730–М2733, Ф2737–Ф2740

**М2730.** На каждой клетке доски $3\times6$ лежит по одной монетке. Известно, что какие-то две монетки, лежащие на соседних по стороне клетках, фальшивые, т.е. весят поровну, но легче настоящих, а остальные – настоящие. Как найти обе фальшивые монеты за три взвешивания на двухчашечных рычажных весах без гирь?

*К.Кноп*

**М2731.** В ряд написаны 2023 натуральных числа. Первое число равно 12, а каждое число, начиная с третьего, либо равно произведению двух предыдущих чисел, либо равно предыдущему числу, увеличенному на 4. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди данных 2023 чисел?

*По мотивам Британской математической олимпиады*

**М2732.** Пусть $O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$. Отложим на лучах $AC$ и $BC$, соответственно, отрезки $AC_a$ и $BC_b$, равные по длине $AB$ (рис. 1). Пусть $O_c$ – центр окружности $(CC_aC_b)$. Аналогично определим точки $O_a$ и $O_b$. Докажите, что точка $O$ является ортоцентром треугольника $O_aO_bO_c$.

*А.Заславский*

**М2733.** Дан выпуклый 51-угольник. Для каждой его вершины и каждой диагонали, не содержащей эту вершину, отметим красным точку, симметричную вершине относительно середины диагонали. Докажите, что строго внутри многоугольника лежит не более 20400 красных точек.

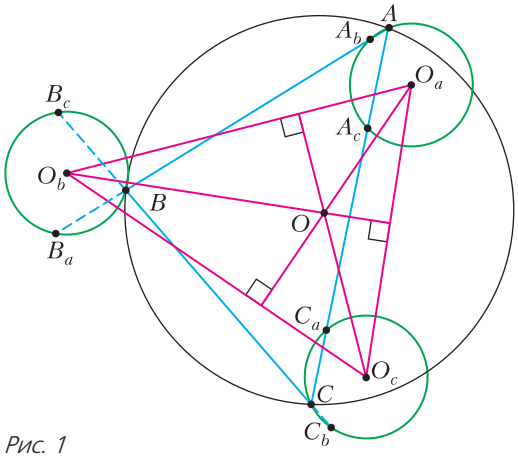



*Рис. 1*

*П.Кожевников*

**Ф2737.** Имеется поджатая пружина – такая пружина начинает изменять свою длину только при некотором пороговом значении растягивающей силы. Пружину подвешивают вертикально. Ее длина при двух различных массах подвешиваемых грузов $M_1$ и $M_2$ равна $L_1$ и $L_2$ соответственно. При этом все витки пружины уже разжаты. Длина ненагруженной пружины $L_0$ меньше $L_1$ и $L_2$, масса пружины равна $m$. Определите коэффициент упругости пружины, величину силы поджатия и зависимость длины пружины от величины растя-

гивающей силы при горизонтальном расположении пружины.

*А.Власов*

**Ф2738.** В вакууме при отсутствии внешних полей две маленькие частицы с равными массами $m$ и зарядами $q$ и $-q$ движутся по окружности радиусом $R$ с такими скоростями $v$, что $v/R = \omega_0$. В пространстве очень медленно создается однородное электрическое поле. Вектор напряженности поля $\vec{E}$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой располагалась траектория частиц до появления поля. При какой максимальной величине напряженности электрического поля система еще сохраняет устойчивость? Определите в момент, предшествующий распаду системы, кинематические параметры системы: расстояние между частицами и угловую скорость вращения, а также угол поворота отрезка, соединяющего эти частицы, по отношению к плоскости, в которой располагались траектории частиц до появления поля.

*А.Власов*

**Ф2739.** Звуковой локатор сделал запись сигнала от низко летящего реактивного снаряда (крылатой ракеты). Временной график сигнала представлен на рисунке 2.

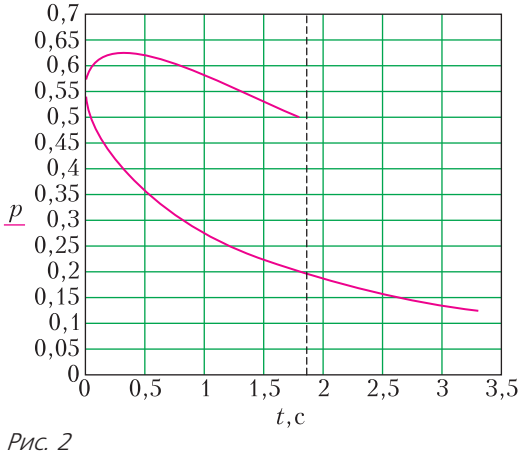



*Рис. 2*

График состоит из двух ветвей. Сигнал раздваивается. Локатор имеет возможность фиксировать интенсивность и угловые координаты нескольких сигналов. В конечных точках графиков имеются сильные всплески интенсивности сигнала (от выстрела и взрыва снаряда), которые на графиках не показаны. Угловое расстояние между конечными сигналами оказалось равным $\pi/2$. По данным графика определите координаты установки, осуществившей выстрел, и координаты падения снаряда. Для упрощения расчетов считайте скорость снаряда постоянной и равной $3v$, где $v = 340$ м/с – скорость звука. Затуханием (рассеянием) звукового сигнала следует пренебречь.

*А.Власов*

**Ф2740.** Грузики массами $m_1$ и $m_2$ двух математических маятников имеют малые размеры в сравнении с длинами $L_1$ и $L_2$ нитей, на которых они подвешены. В положениях равновесия эти грузики находятся на одном горизонтальном уровне, при этом расстояние между ними равно $L_0$ (рис. 3). Эти грузики соединили жестким невесомым стержнем длиной $L_0$. Из положения равновесия грузикам придали небольшую по величине скорость, направленную вдоль соединяющего грузики стержня. Какова частота колебаний (малых) этой механической системы?

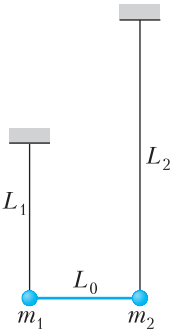



*Рис. 3*

*А.Буров*

## Решения задач М2714–М2721, Ф2721–Ф2728

**М2714.** *Даны многочлены $f$ и $g$ с целыми коэффициентами, причем у многочлена $g$ старший коэффициент равен 1. Известно, что для бесконечно многих натуральных $n$ число $f(n)$ делится на $g(n)$. Докажите, что $f(n)$ делится на $g(n)$ для всех натуральных $n$, при которых $g(n) \neq 0$.*

Разделим $f$ на $g$ с остатком, получим $f = qg + r$, где $q$ – неполное частное, а $r$ – остаток, так что степень многочлена $r$ меньше степени $g$. Так как старший коэффициент у многочлена $g$ равен 1, в процессе деления столбиком все коэффициенты у многочлена $q$ будут получаться целые, поэтому $q$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Тогда $r = f - qg$ тоже многочлен с целыми коэффициентами.

Видим, что если для некоторого целого $n$ число $f(n) = q(n)g(n) + r(n)$ делится на $g(n)$, то $r(n)$ тоже делится на $g(n)$. Так как степень $r$ меньше степени $g$, найдется $N$ такое, что для всех $n > N$ выполнено $|r(n)| < |g(n)|$, и если $n > N$ таково, что $f(n) \vdots g(n)$, то возможно лишь $r(n) = 0$. Получаем, что $r(n) = 0$ для бесконечно многих значений $n$, поэтому $r$ – нулевой многочлен. Таким образом, для любого целого $n$ выполнено $f(n) = q(n)g(n)$. Поскольку $q(n)$ – целое число, отсюда следует утверждение задачи.

Простые примеры (например, $f(x) = x(x-1)$, $g(x) = 2x$) показывают, что утверждение задачи станет неверным, если отказаться от условия равенства 1 старшего коэффициента $g$. Однако можно доказать такое утверждение для произвольных многочленов $f$ и $g$ с целыми коэффициентами: если для бесконечно многих натуральных $n$ число $f(n)$ делится на $g(n)$, то найдется бесконечная арифметическая прогрессия $A$ натуральных чисел такая, что $f(n) \vdots g(n)$ для любого $n \in A$.

Здесь работает та же идея – деление с остатком, но неполное частное и остаток будут являться, вообще говоря, многочленами с рациональными коэффициентами. Домножением на НОК знаменателей коэффициентов многочленов можно получить равенство вида $mf = qg + r$, где $m$ – целое число, а $q$ и $r$ – многочлены с целыми коэффициентами, причем степень $r$ меньше степени $q$. Так же, как и в решении исходной задачи, доказывается, что $r$ – нулевой многочлен, значит, $mf(n) = q(n)g(n)$ выполнено для всех натуральных $n$. Далее, пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \vdots g(n)$, тогда $q(n) \vdots m$. Следовательно, $q(n + mt) \vdots m$ для любого целого $t$, а значит, $f(n + mt) \vdots g(n + mt)$ для всех $t$, кроме, возможно, конечного числа значений $t$, для которых $g(n + mt) = 0$. Искомую прогрессию $A$ можно выбрать из чисел вида $n + mt$.

*П.Кожевников*

**M2715.** *На шахматной доске хромая ладья за ход может переходить в клетку, соседствующую по стороне с клеткой, в которой ладья находится. На доске* $9 \times 9$ *хромая ладья, начав с какой-то клетки, сделала* $n$ *ходов, при этом она ни одну клетку не посетила дважды и не сделала два хода подряд в одном направлении. Каково наибольшее возможное значение* $n$*?*

**Ответ:** 66 ходов.

*Оценка*. Предположим, что ходов было больше 66, тогда посещенных клеток было не менее 68. Раскрасим клетки в 4 цвета, как показано на рисунке 1. Заметим, что так как хромая ладья не делала два подряд

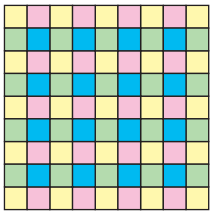


*Рис. 1*

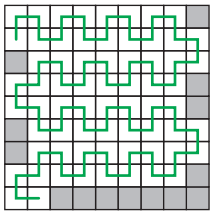


*Рис. 2*

хода в одном направлении, то четыре посещенные подряд клетки – разного цвета. Поэтому синих клеток, которые посетила хромая ладья, должно быть не менее $68/4 = 17$. Однако на доске всего 16 синих клеток – противоречие.

*Пример* маршрута хромой ладьи из 66 ходов показан на рисунке 2.

*П.Кожевников*

**M2716.** *Найдите все пары натуральных чисел* $k$, $m$ *такие, что для любого натурального* $n$ *произведение* $(n+m)(n+2m)\ldots(n+km)$ *делится на* $k!$.

**Ответ:** $k$, $m$ такие, что $\text{НОД}(k!, m) = 1$.

Иначе говоря, утверждается, что для данного $k$ подходят все $m$, которые не делятся ни на одно простое число, не превосходящее $k$.

1) Вначале предположим, что $m$ делится на некоторое простое $p \le k$. Тогда для $n = p + 1$ ни один сомножитель в произведении $(n+m)(n+2m)\ldots(n+km)$ не делится на $p$, значит, и произведение не делится на $p$, в то время как $k!$ делится на $p$.

2) Пусть теперь $m$ не делится ни на одно простое число $p \le k$. Тогда в арифметической прогрессии $n + m$, $n + 2m$, $n + 3m$, …

любые $p$ последовательных чисел дают различные остатки при делении на $p$ (иначе для каких-то $i<j$, $j-i<p$ выполнялось бы $(n+jm)-(n+im)=m(j-i)\vdots p$, откуда $(j-i)\vdots p$, что невозможно). В частности, среди любых $p$ последовательных чисел в этой прогрессии найдется число, делящееся на $p$. Значит, среди $k$ чисел $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, …, $n+km$ есть хотя бы $a_1=\left[\frac{k}{p}\right]$ чисел, делящихся на $p$. Аналогично показываем (используя, что $m$ взаимно просто с $p^2$), что среди этих $k$ чисел не менее $a_2=\left[\frac{k}{p^2}\right]$ чисел, делящихся на $p^2$, не менее $a_3=\left[\frac{k}{p^3}\right]$ чисел, делящихся на $p^3$, и т.д. (очевидно, начиная с некоторого номера $N$ имеем $a_N=a_{N+1}=a_{N+2}=\ldots=0$). Отсюда следует, что произведение $(n+m)(n+2m)\ldots(n+km)$ делится на $p^{a_1+a_2+a_3+\ldots}$ (поскольку $a_1$ чисел дают вклад 1 в показатель, из них $a_2$ чисел дают вклад 2, т.е. еще одну 1, из них $a_3$ – еще одну 1 и т.д.). С другой стороны, по известной формуле Лежандра (которая может быть доказана аналогично рассуждениям выше) кратность вхождения простого числа $p$ в разложение числа $k!$ равна в точности $p^{a_1+a_2+a_3+\ldots}$, т.е. не больше чем кратность вхождения $p$ в разложение числа $(n+m)(n+2m)\ldots(n+km)$. Повторяя сказанное выше для каждого $p\le k$, делаем вывод, что $(n+m)(n+2m)\ldots(n+km)\vdots k!$.

*П.Кожевников*

**M2717*.** *В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD$, $BE$, $CF$, пересекающиеся в точке $H$; $O$ – центр описанной окружности; касательные к окружности $(ABC)$, проведенные в точках $B$ и $C$, пересекаются в точке $T$ (рис. 1). Пусть $K$ и $L$ симметричны точке $O$ относительно $AB$ и $AC$ соответственно. Окружности $(DFK)$ и $(DEL)$ пересекаются в точке $P$, отличной от $D$. Докажите, что $P$, $D$, $T$ лежат на одной прямой.*

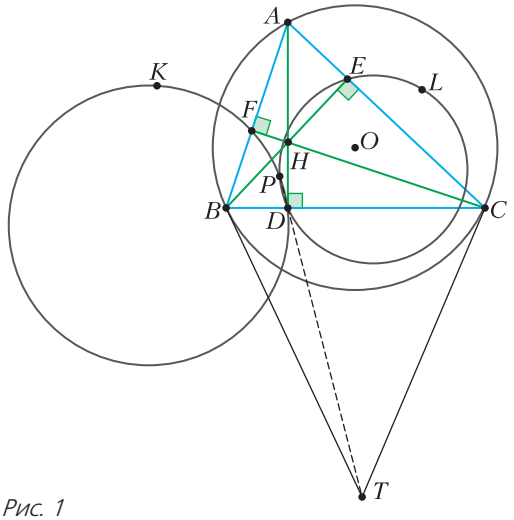



*Рис. 1*

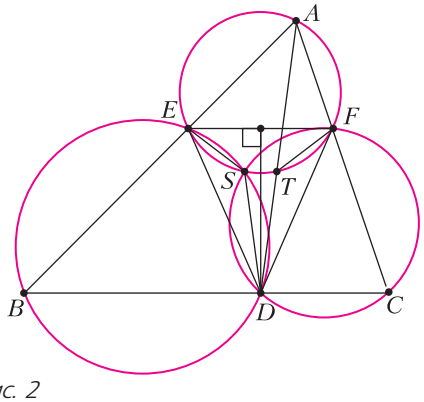



*Рис. 2*

Для решения нам потребуется следующая лемма.

**Лемма.** На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты точки $E$ и $F$ так, что $EF\parallel BC$ (рис. 2). Пусть серединный перпендикуляр к $EF$ пересекает $BC$ в точке $D$. Пусть $S$ – вторая точка пересечения окружностей $(DBE)$ и $(DCF)$. Тогда прямые $DS$ и $DA$ симметричны относительно серединного перпендикуляра к $EF$.

**Доказательство.** Ясно, что окружность $(AEF)$ также проходит через $S$. Пусть точка $T$ симметрична точке $S$ относительно серединного перпендикуляра к $EF$. Достаточно понять, что $A$, $T$ и $D$ лежат на одной прямой. Имеем: $\angle(DT,TF)=\angle(ES,SD)=$ $=\angle(EB,BD)=\angle(AE,EF)=\angle(AT,TF)$. Полученное равенство $\angle(DT,TF)=$ $=\angle(AT,TF)$ означает, что прямые $DT$ и $AT$ совпадают. Лемма доказана.

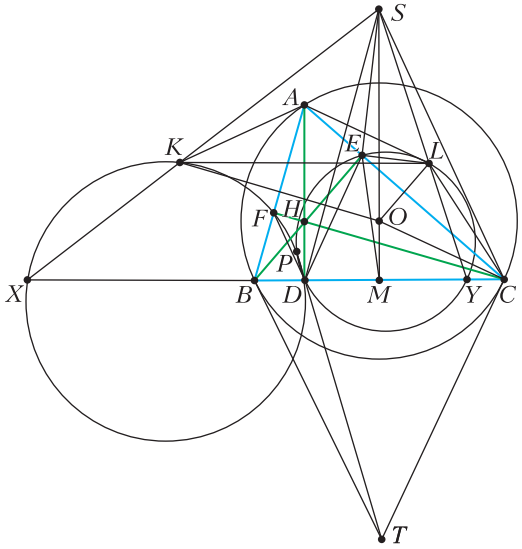



*Рис. 3*

Перейдем к решению задачи.

Пусть $S$ – точка, симметричная $T$ относительно $BC$ (рис. 3). Пусть $X$, $Y$ – точки пересечения $SK$, $SL$ с прямой $BC$ соответственно, а $M$ – середина $BC$. Имеем: $\frac{ME}{CL}=\frac{CM}{CO}=\frac{TM}{TC}=\frac{MS}{CS}$. Отсюда $\frac{ME}{MS}=\frac{CL}{CS}$. Заметим также, что $\angle(SC,CL)=$ $=\angle(SM,ME)$. Действительно,

$$\angle(SC,CL)=$$
$$=\angle(SC,CB)+\angle(CB,CA)+\angle(CA,CL)=$$
$$=\angle(CB,CT)+\angle(CB,CA)+\angle(CO,CA)=$$
$$=\angle(BA,CA)+\angle(CB,CA)+\angle(CB,BA)+$$
$$+90^\circ=2\angle(CB,CA)+90^\circ;$$

$$\angle(SM,ME)=\angle(SM,MC)+\angle(MC,ME)=$$
$$=2\angle(MC,CE)+90^\circ.$$

Следовательно, треугольники $SCL$ и $SME$ подобны. Отсюда (из равенства отношений сторон $\frac{ES}{MS}=\frac{LS}{CS}$ и углов между ними) следует подобие треугольников $SEL$ и $SMC$. Имеем:

$$\angle(LE,LY)=\angle(LE,LS)=\angle(CM,CS)=$$
$$=\angle(CT,CM)=\angle(AC,AB)=\angle(DE,DY).$$

Отсюда получаем, что точки $D$, $E$, $L$ и $Y$ лежат на одной окружности. Аналогично, $D$, $F$, $K$ и $X$ лежат на одной окружности. Треугольники $ABC$ и $OKL$ имеют общую среднюю линию, поэтому $KL \parallel XY$. Также из симметрии $AO=AK=AL$. Так как $KL \perp AD$, то $AD$ – серединный перпендикуляр к отрезку $KL$. Как известно, $DE$ и $DF$ симметричны относительно $DA$. Теперь, применяя лемму к треугольнику $SXY$, мы получаем, что прямые $DP$ и $DS$ симметричны относительно $AD$ (или относительно $BC$). Но так как прямые $SD$ и $TD$ симметричны относительно $BC$, то прямые $TD$ и $PD$ совпадают, откуда и следует утверждение задачи.

Задачу можно решить и другими способами, например применив счет в комплексных числах.

*Луу Донг*

**M2718.** *Клетчатый прямоугольник $m\times n$ разбит на клетчатые квадратики $2\times 2$ и прямоугольники $1\times 3$. Докажите, что количество способов положить доминошку $1\times 2$ так, чтобы одна ее клетка накрыла клетку квадрата $2\times 2$, а вторая – клетку прямоугольника $1\times 3$, четно.*

Для каждого квадрата размера $2\times 2$ из нашего разбиения рассмотрим доминошку, которая содержит ровно одну из его клеток. Таких доминошек 8 штук (здесь мы учитываем и доминошки, выходящие за пределы прямоугольника $m\times n$). Суммируя количества вариантов, получаем $8t$, где $t$ – количество квадратов $2\times 2$ в разбиении. В этом подсчете нужные нам способы, а также способы, в которых одна клетка доминошки выходит за пределы прямоугольника $m\times n$, посчитаны 1 раз; а способы, в которых одна клетка доминошки принадлежит одному квадрату $2\times 2$, а другая – другому квадрату $2\times 2$, посчитаны дважды. Тогда для доказательства четности нужных нам способов достаточно доказать четность числа способов, в которых доминошка выходит за пределы прямоугольника $m\times n$. Но количество таких способов четно для каждого квадрата $2\times 2$: оно равно удвоенному количеству сторон квадрата $2\times 2$, примыкающих к границе.

*Е.Бакаев*

**М2719.** *Верно ли, что по множеству остатков, которые могут давать степени двойки при делении на нечетное натуральное число $n>1$, можно однозначно восстановить само число $n$?*

**Ответ:** верно.

Обозначим множество остатков степеней двоек при делении на нечетное $n=2m-1$ через $A$ и покажем, как, зная $A$, узнать $n$. Ясно, что множество $A$ конечно (в него могут входить только числа, меньшие $n$). В множестве $A$ выделим подмножество $B$ чисел $t$, для которых $2t$ не принадлежит $A$. Пусть $C$ – множество чисел вида $2t$ для $t\in B$.

Если $t\in B$, то какая-то степень двойки $2^k$ дает остаток $t$ при делении на $n$, поэтому $2^{k+1}\equiv 2t\pmod n$, но раз $t\in B$, в множестве $A$ нет остатка $2t$. Это возможно только в случае $2t>n$. Значит, в множестве $C$ все числа больше $n$.

С другой стороны, покажем, что $n+1\in C$. Действительно, для некоторых различных натуральных $k<l$ остатки $2^k$ и $2^l$ при делении на $n$ совпадают. Тогда $2^l-2^k=2^k\left(2^{l-k}-1\right)$ делится на $n$, следовательно, $2^{l-k}-1$ делится на $n$. Отсюда $2^{l-k}-1-n=2^{l-k}-2m=2\left(2^{l-k-1}-m\right)$ делится на $n$, значит, $2^{l-k-1}\equiv m\pmod n$, тем самым, $m\in A$. С другой стороны, $2m=n+1>n$, поэтому $m\in B$ и $2m\in C$.

Таким образом, $n$ – число, на 1 меньшее наименьшего числа множества $C$. Это решает нашу задачу, поскольку множества $B$ и $C$ определяются по множеству $A$ однозначно.

*Д.Кузнецов*

**М2720.** Решение этой задачи приведено в статье «Левые и правые треугольники».

**М2721.** *Пусть $n$ – натуральное число, а $f$ – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для любого целого $m$ найдется целое $k$ такое, что $f(k)-m$ делится на $n$. Докажите, что существует такой многочлен $g$ с целыми коэффициентами, что $f(g(m))-m$ делится на $n$ при любом целом $m$.*

Как хорошо известно, для любых целых $k\neq l$ разность $f(k)-f(l)$ делится на $k-l$. В частности, положив $k-l=n$, мы видим, что остаток $f(k)$ при делении на $n$ зависит только от остатка $k$ при делении на $n$. Тем самым, многочлен $f$ определяет отображение $\overline{f}:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ – множество всех остатков при делении на $n$. Отметим, что соответствие $f\to\overline{f}$ согласуется с операцией композиции: для многочленов $f$ и $g$ с целыми коэффициентами выполнено $\overline{f(g)}=\overline{f}(\overline{g})$.

Из условия задачи следует, что каждый остаток $m$ является значением $\overline{f}(k)$ для какого-то остатка $k$. Значит, $\overline{f}$ является взаимно однозначным соответствием из множества $\mathbb{Z}_n$ в себя, или, иначе говоря, определяет перестановку на множестве $\mathbb{Z}_n$. Ниже покажем, что для перестановки $\overline{f}$ найдется натуральное $N$ такое, что $\overline{f}^N(k)=k$ для любого остатка $k$ (где $\overline{f}^t$ означает $t$-кратное применение $\overline{f}$), т.е. $\overline{f}^N$ является тождественной перестановкой. Отсюда последует решение задачи, поскольку в качестве искомого многочлена $g$ можно взять $f^{N-1}=f\left(f\left(f\left(\ldots\right)\right)\right)$ $(N-1$ раз$)$.

Для каждого остатка $k$ рассмотрим «орбиту» $\left\{k,\overline{f}(k),\overline{f}^2(k),\overline{f}^3(k),\ldots\right\}$. В этой последовательности есть совпадения: $\overline{f}^t(k)=\overline{f}^s(k)$ для некоторых $t<s$. Но так как $\overline{f}$ – перестановка, из $\overline{f}(x)=\overline{f}(y)$ следует $x=y$, отсюда получаем $\overline{f}^{s-t}(k)=k$, и «орбита» представляет собой цикл некоторой длины. Теперь достаточно взять $N$ делящимся на все длины циклов-орбит для всех остатков $k\in\mathbb{Z}_n$. Подойдет, например, $N=n!$.

*П.Кожевников*

**Ф2721.** *Экспериментатор Анатолий полетел с экспедицией на новую планету, пригодную для жизни. Из-за бессонницы Анатолий решил исследовать ускорение свободного падения на поверхности этой планеты и назвал эту величину «ж». Для изучения он взял три резинки с разными значениями коэффициента упругости, но*

*Таблица 1*

| № | $\Delta x$, см | $h$, м | № | $\Delta x$, см | $h$, м | № | $\Delta x$, см | $h$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,8 | 2,34 | 8 | 5,1 | 1,91 | 15 | 3,7 | 3,97 |
| 2 | 1,7 | 0,85 | 9 | 0,7 | 0,04 | 16 | 1,9 | 0,69 |
| 3 | 3,2 | 1,89 | 10 | 1,1 | 0,38 | 17 | 1,6 | 0,46 |
| 4 | 4,0 | 2,99 | 11 | 2,2 | 1,49 | 18 | 2,4 | 1,05 |
| 5 | 4,5 | 1,55 | 12 | 3,6 | 2,42 | 19 | 3,3 | 0,75 |
| 6 | 1,8 | 0,24 | 13 | 1,2 | 0,08 | 20 | 0,5 | 0,07 |
| 7 | 2,7 | 1,33 | 14 | 3,4 | 3,43 | 21 | 2,4 | 0,45 |

*одинаковой массы, равной $m = 20$ г. Он начал измерять зависимость высоты полета резинок от величины их растяжения, но по своей неопытности написал все значения в одну таблицу* 1. *Помогите Анатолию найти ускорение свободного падения ж на этой планете и коэффициенты упругости каждой резинки, если известно, что наименьший из них равен $k = 1$ Н/см, а также узнать, как высоко могла взлететь каждая резинка при растяжении на длину, равную $\Delta x = 7$ см. Все резинки подчиняются закону Гука.*

Из закона Гука следует, что $F = k\Delta x$, т.е. сила $F$ прямо пропорциональна величине растяжения $\Delta x$. Тогда работа этой силы равна

$$A = \frac{F\Delta x}{2} = k\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Рассмотрим резинку как замкнутую систему. В этом случае работа внешних сил идет на изменение потенциальной энергии системы:

$$A = E_{\text{п}}, \text{ или } k\frac{\Delta x^2}{2} = mhж.$$

Отсюда находим зависимость высоты $h$ полета резинки массой $m$ от величины растяжения:

$$h = k\frac{\Delta x^2}{2mж}.$$

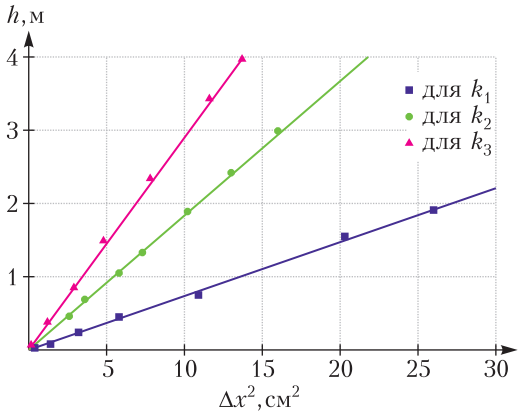
Поскольку зависимость $h\left(\Delta x^2\right)$ имеет вид прямой $y = cx + b$, где $y = h$, а $x = \Delta x^2$, то $\Delta x$ из таблицы 1 надо пересчитать в $\Delta x^2$. Получаем таблицу 2 и с ее помощью строим графики зависимости $h\left(\Delta x^2\right)$ для каждой резинки (см. рисунок).

На графике есть три прямые, каждой из них соответствует свой угловой коэффициент

$$c_i = \frac{k_i}{2mж}.$$

Мы знаем, что минимальный коэффициент упругости пружины равен $k = 1$ Н/см. Назовем эту пружину первой, тогда

$$k_1 = k = 1 \text{ Н/см}.$$




Возьмем на соответствующем графике точку с ее координатами $\Delta x^2 = 25$ см$^2$, $h = 1{,}84$ м. Подставим все известные величины в уравнение зависимости $h\left(\Delta x^2\right)$ и найдем

$$ж = \frac{k_1\Delta x^2}{2mh} = \frac{100 \text{ Н/м} \cdot 0{,}0025 \text{ м}^2}{2 \cdot 0{,}02 \text{ кг} \cdot 1{,}84 \text{ м}} \approx$$

$$\approx 3{,}4 \text{ Н/кг}.$$

Аналогично определим угловые коэффициенты для остальных прямых и с их помощью найдем коэффициенты упругости резинок:

$$k_2 = \frac{2mhж}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 3{,}67 \cdot 3{,}4}{0{,}002} \text{ Н/м} \approx$$

$$\approx 250 \text{ Н/м},$$

*Таблица 2*

| № | $\Delta x^2$, см$^2$ | $h$, м | № | $\Delta x^2$, см$^2$ | $h$, м | № | $\Delta x^2$, см$^2$ | $h$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,8 | 2,34 | 8 | 26,0 | 1,91 | 15 | 13,7 | 3,97 |
| 2 | 2,9 | 0,85 | 9 | 0,5 | 0,04 | 16 | 3,6 | 0,69 |
| 3 | 10,2 | 1,89 | 10 | 1,2 | 0,38 | 17 | 2,6 | 0,46 |
| 4 | 16,0 | 2,99 | 11 | 4,8 | 1,49 | 18 | 5,8 | 1,05 |
| 5 | 20,3 | 1,55 | 12 | 13,0 | 2,42 | 19 | 10,9 | 0,75 |
| 6 | 3,2 | 0,24 | 13 | 1,4 | 0,08 | 20 | 0,3 | 0,07 |
| 7 | 7,3 | 1,33 | 14 | 11,6 | 3,43 | 21 | 5,8 | 0,45 |

$$k_3 = \frac{2mhж}{\Delta x^2} = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 4 \cdot 3{,}4}{0{,}00138}\ \text{Н/м} \approx$$

$$\approx 400\ \text{Н/м}.$$

Теперь для каждой резинки рассчитаем, на какую высоту она взлетит, если ее растянуть на $\Delta x = 7$ см:

$$h_1 = \frac{k_1 \Delta x^2}{2mж} = \frac{100 \cdot 0{,}07^2}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 3{,}4}\ \text{м} \approx 3{,}6\ \text{м},$$

$$h_2 = \frac{k_2 \Delta x^2}{2mж} = \frac{250 \cdot 0{,}07^2}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 3{,}4}\ \text{м} \approx 9\ \text{м},$$

$$h_3 = \frac{k_3 \Delta x^2}{2mж} = \frac{400 \cdot 0{,}07^2}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 3{,}4}\ \text{м} \approx 14{,}4\ \text{м}.$$

*А. Иванов*

**Ф2722.** *В сосуде при температуре* 0 °C *находятся жидкая вода и ее пар. Оцените количество ударов, которые за одну секунду испытывает одна молекула, находящаяся на поверхности воды, со стороны молекул, входящих в состав пара. Давление насыщенного пара при этой температуре равно* 611 *Па.*

Зная объем, занимаемый одним молем воды: $V = 18 \cdot 10^{-6}$ м$^3$, и количество молекул в одном моле вещества: $N = N_A = 6 \cdot 10^{23}$, можно найти характерный объем молекулы воды: $D^3 = V/N$ и ее размер: $D \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м. Площадь на поверхности воды, которая приходится на одну молекулу, равна примерно $10^{-19}$ м$^2$. Среднюю скорость поступательного движения молекул воды $v$ в состоянии пара найдем из соотношения $Mv^2/2 = 3RT/2$. Отсюда $v = 615$ м/с. Ударившись о поверхность воды, молекула пара в большинстве случаев отскакивает от этой поверхности примерно с такой же скоростью. Следовательно, удар молекул одного моля воды о поверхность приводит к передаче этой поверхности максимального по величине импульса $2Mv \approx 22$ Н · с/моль. Поскольку давление насыщенного пара равно 611 Па, то это означает, что на площадь в 1 м$^2$ в 1 секунду приходится удар $611/22 \approx 27{,}6$ молей молекул. Умножив эту величину на число Авогадро и на площадь, занимаемую одной молекулой на поверхности жидкой воды, получим, что за одну секунду эта молекула испытывает 1,65 млн ударов. Это значение получено в предположении, что каждый удар при величине скорости молекулы 615 м/с сопровождается передачей поверхности максимального импульса. Если учесть, что угол, который составляет скорость падающей молекулы с поверхностью, может принимать значения от 0 до 90 градусов, то количество ударов должно быть больше. Значит, в качестве оценки можно выбрать примерно вдвое большую величину. Это означает, что число ударов об одну молекулу, находящуюся на поверхности раздела «конденсированное вещество – пар», составляет величину порядка $3 \cdot 10^6$ в секунду.

*С. Ударов*

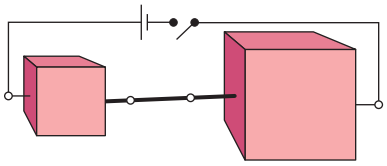
**Ф2723.** *С одним килограммом воды* ($H_2O$) *провели процесс, который состоит из двух участков. На первом участке при постоянном давлении* $p = 10^5$ *Па температура поднялась от* 0 °C *до* 200 °C. *На втором участке при постоянной температуре давление уменьшилось до* $10^3$ *Па. Каково изменение внутренней энергии воды в этом процессе? Какую работу совершила вода, действуя на внешние тела на каждом из этих участков?*

Если считать, что теплоемкость воды в жидком состоянии примерно постоянна и равна 4200 Дж/(кг · К), то для нагрева воды от 0 °C до 100 °C потребовалось 0,42 МДж энергии. Поскольку изменение объема воды составило всего 4%, так как плотность воды при 100 °C равна 960 кг/м$^3$, то на этом участке была совершена работа $10^5 \cdot 0{,}04 \cdot 10^{-3}$ Дж $\approx 4$ Дж. А вся остальная энергия пошла на изменение внутренней энергии воды, что составило $\approx 0{,}42$ МДж. Затем произошло испарение воды, для чего потребовались еще 2,3 МДж энергии. При этом была совершена работа против сил внешнего давления, равная $(1000/18)RT$ Дж $= 0{,}172$ МДж, а на изменение внутренней энергии пошло $(2{,}3 - 0{,}172)$ МДж $= 2{,}128$ МДж. Потом вода

(уже в виде пара) была нагрета еще на 100 градусов в процессе с постоянным давлением. На этом участке потребовалось $4R(1000/18)\cdot 100$ Дж = 0,1847 МДж энергии. Из них на совершение работы пошла одна четвертая часть, т.е. 0,046 МДж, а 3/4 пошло на изменение внутренней энергии воды, что составило 0,138 МДж. На последнем участке при постоянной температуре 473 К изменение внутренней энергии настолько мало, что им можно пренебречь, а работа, совершенная на этом участке, равна $(1000/18)\cdot 8{,}31\cdot 473\cdot \mathrm{Ln}100$ Дж $\approx$ $\approx$ 1 МДж. В итоге внутренняя энергия воды увеличилась на 2,686 МДж и была совершена работа 1,22 МДж.

*Д.Водный*

**Ф2724.**[1] *Два сосуда кубической формы с размерами ребер $a = 1$ м и $2a$ заполнены доверху (каждый) чистой дистиллированной водой. В каждый из сосудов всыпали по 1 кг поваренной соли (NaCl) и хорошо перемешали. Две противоположные вертикальные стенки в каждом из сосудов металлические, а остальные стенки и оба дна сделаны из полиэтилена (изолятора). Собрали электрическую цепь (см. рисунок), в которой эти сосуды соединены последовательно, и на короткое время (т.е. за это время можно не учитывать теплообмен с окружением), замкнув ключ, подключили к источнику тока. В момент отключения от источника тока температура воды (соленой) в кубе меньшего размера оказалась на 1 градус выше температуры, которая была в момент подключения источника. Какой была температура в другом сосуде в момент размыкания ключа? Теплоемкостью стенок сосудов в сравнении с теплоемкостью воды можно пренебречь.*



В течение короткого промежутка времени через эти «водяные кубы» тек одинаковый ток, а электрические сопротивления «кубов» отличаются. Учитывая, что основными носителями зарядов, обеспечивающих протекание тока, являются ионы, на которые распалась соль NaCl при растворении в воде, электрические сопротивления между стенками «кубов» с соленой водой равны $R_1 = \lambda\cdot\left(a/a^2\right)/\left(N/a^3\right) = \lambda a^2/N$ и $R_2 = \lambda\cdot(2a)^2/N$. Здесь $\lambda$ – одинаковый для водных растворов коэффициент, а $N$ – одинаковое количество носителей зарядов (ионы $Na^+$ и $Cl^-$). Таким образом, сопротивление большого куба в 4 раза больше сопротивления малого куба. Следовательно, количества теплоты, полученные водяными кубами, отличаются тоже в 4 раза. А вот теплоемкости кубов отличаются в $2^3 = 8$ раз. Поэтому, хотя большой куб и получил вчетверо большее количество теплоты, нагрелся он всего на 0,5 градуса.

*С.Варламов*

**Ф2725.** *Свежеуложенный асфальт совсем не смачивается водой. Прошел и прекратился осенний дождь с крупными каплями. При ударе о поверхность такие капли разбиваются на мелкие капельки, которые катятся по поверхности во все стороны и, сталкиваясь друг с другом, сливаются в более крупные капли – вплоть до образования лужиц (см. рисунок). Оказа-*

[1] Автор решений задач Ф2724–Ф2728 – С.Варламов.

*лось, что горизонтальная поверхность только что заасфальтированной площадки покрыта лужами на* 20%. *Сколько миллиметров осадков выпало за время этого дождя? Коэффициент поверхностного натяжения воды* $\sigma = 0{,}07$ *Дж/м*$^2$.

Глубина луж определяется коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$, плотностью жидкости $\rho$ и величиной ускорения свободного падения $g$. Если мысленно большую лужу разрезать вертикальной плоскостью, то условие равновесия частей лужи по разные стороны от поверхности разреза с длиной $L$ будет таким:

$$2L\sigma = LH\frac{\rho g H}{2}.$$

Отсюда находим глубину лужи $H$:

$$H = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 5{,}3 \text{ мм}.$$

А поскольку доля поверхности, покрытой лужами, составила 20%, то за время дождя выпало $5{,}3$ мм$/5 = 1{,}06$ мм осадков.

**Ф2726.** *Оцените среднюю скорость ветров в атмосфере Земли, если средняя температура поверхности земли/воды вблизи экватора* +27 °C. *Считайте, что «цикл» работы атмосферы длится* 1 *сутки. Альбедо Земли* 35%, *солнечная постоянная* $E = 1{,}37$ *кВт/м*$^2$.

Атмосферу Земли можно уподобить рабочему телу теплового двигателя, в котором источником энергии служит Солнце, а приемником тепловой энергии является Космос. Тепловая энергия от нагретых земли и воды передается воздуху и частично превращается в кинетическую энергию атмосферы (ветры), а затем полностью (так как ветры за счет трения затухают) передается в Космос посредством излучения при так называемой радиационной температуре.

Массу всей атмосферы Земли можно оценить так:

$$M = \frac{4\pi R_З^2 p_{атм}}{g}.$$

Радиационная температура рассчитывается из условия равновесия, при котором за большой промежуток времени (годы и столетия) вся энергия солнечных лучей, поглощенная Землей, переизлучается в Космос. Площадь поверхности, которая поглощает солнечную энергию (поперечное к солнечным лучам сечение Земли) равна $\pi R_З^2$. Тепловая мощность солнечных лучей, поглощаемых Землей, равна

$$W_1 = \pi R_З^2 \frac{E(100\% - 35\%)}{100\%}.$$

Эта же мощность излучается Землей в Космос:

$$W_2 = 4\pi R_З^2 \sigma T^4.$$

Отсюда следует оценка для радиационной температуры Земли:

$$T = 250 \text{ К} = -23 \text{ °C}.$$

Самый эффективный тепловой двигатель работает по циклу Карно. Поэтому верхняя оценка для доли полученной тепловой энергии, превратившейся в энергию ветров, определяется величиной КПД такого теплового двигателя, который равен

$$\eta = \frac{T_н - T_х}{T_н} = \frac{300 - 250}{300} = \frac{1}{6}.$$

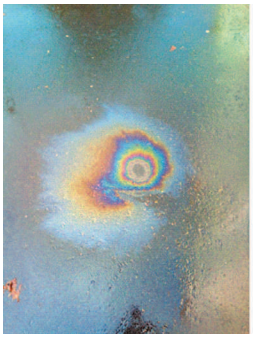
Для оценки будем считать, что цикличность с периодом в одни сутки ($t$) означает, что за сутки средняя кинетическая энергия ветров в атмосфере увеличивается от нуля на какую-то величину и на такую же величину к концу суток уменьшается. Иными словами, за ночное время к восходу Солнца ветры стихают до нуля. Это упрощенное представление позволяет оценить максимальную и среднюю по времени скорость движения воздуха, т.е. скорость ветров:

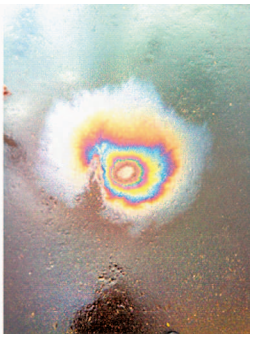
$$\frac{M v_{max}^2}{2} = t \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi R_З^2 \frac{E(100\% - 35\%)}{100\%} = \frac{v_{max}^2}{2} \cdot \frac{4\pi R_З^2 p_{атм}}{g}.$$

Отсюда следует

$$v_{max} \approx 25 \text{ м/с}, \; v_{средн} = \frac{v_{max}}{2} \approx 12{,}5 \text{ м/с}.$$

**Ф2727.** *Одно и то же масляное пятно на мокром асфальте было сфотографировано смартфоном дважды с разницей во времени приблизительно* 16 *секунд. Смар-*





*тфон по отношению к стоящему на асфальте фотографу занимал одинаковое положение. Эта ли разница во времени или что-то другое послужило причиной столь разительного отличия изображений (см. рисунок)?*

В данном случае наблюдается явление интерференции света на тонкой пленке масла на поверхности воды. Понятно, что за указанный в условии небольшой промежуток времени (16 с) толщина масляной пленки в одном и том же месте не может значительно измениться. В центре изображения, расположенного слева, пятно темное, а в центре изображения справа пятно светлое. Поскольку положения лужи на изображениях развернуты примерно на 90°, то это означает, что лужа фотографировалась с двух разных направлений. А освещалась лужа рассеянным светом неба. Кроме того, заметно, что отражение руки фотографа с телефоном находится на разных расстояниях от центра пятна (в самом низу фотографий и очень нечеткое). Это дает основание сделать вывод, что углы между направлением от объектива на центр пятна и перпендикуляром к асфальту для полученных фотографий разные. А, как известно, разница длин «хода лучей», которая определяет эффект интерференции, зависит от угла наблюдения. Вот поэтому одному из направлений соответствует максимум, а другому – минимум яркости в центрах пятен.

**Ф2728.** *Оцените высоту дерева, сквозь листву которого пробиваются лучи света Солнца. Пятна света образовались на асфальте (см. рисунок). Ширина (отмечена голубой стрелкой) ботинка, который частично виден на фотографии, равна 12,5 см (измерена независимо линейкой).*

Заметно, что пятна вытянуты примерно вдоль направления слева – направо. Это означает, что лучи света падали на поверхность под некоторым углом. Поскольку размеры отличаются примерно в 1,5 раза, угол $\alpha$ между направлением лучей и горизонтом составлял приблизительно

$$\alpha = \arcsin\frac{2}{3} = 42°.$$

В направлении, поперечном направлению вытянутости, размеры пятен минимальные. Этот минимальный размер пятен примерно в 1,5 раза больше ширины ботинка, т.е. составляет около 19 см. Предположим, что размер «отверстия» (промежутка, не закрытого листьями, через который проходит свет) составляет примерно 1 см. Тогда произведение расстояния от «отверстия» до места падения света на поверхность $\frac{h}{\sin\alpha}$ на угловой размер Солнца приблизительно равно 18 см. Если принять угловой размер Солнца равным примерно 0,5° или $\frac{\pi}{360}$ рад, то высота дерева оценивается величиной приблизительно 14 м. Это высота четырехэтажного дома.

# Левые и правые треугольники

*Л.ШАТУНОВ, Т.КАЗАНЦЕВА*

В этой статье мы приведем решение задачи М2720, а также сформулируем и докажем усиление утверждения этой задачи. Напомним условие задачи.

**Задача.** *Пусть $\Omega$ – описанная окружность треугольника $ABC$; точки $M_a$, $M_b$, $M_c$ – середины сторон $BC$, $CA$, $AB$ соответственно; $A_l$, $B_l$, $C_l$ – точки пересечения $\Omega$ с лучами $M_cM_b$, $M_aM_c$, $M_bM_a$ соответственно; $A_r$, $B_r$, $C_r$ – точки пересечения $\Omega$ с лучами $M_bM_c$, $M_cM_a$, $M_aM_b$*

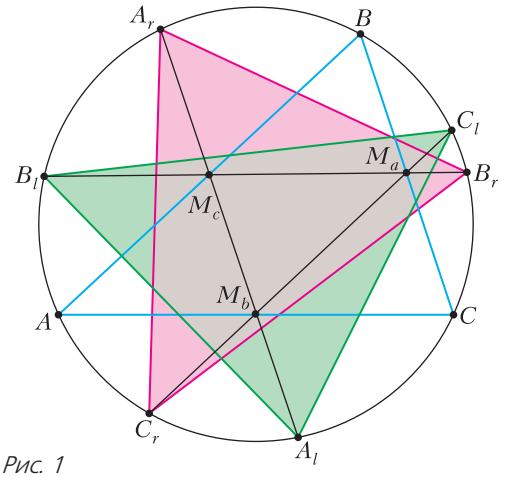



Рис. 1

*соответственно (рис. 1). Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_lB_lC_l$ и $A_rB_rC_r$ не меньше площади треугольника $ABC$.*

Считаем, что точки $A$, $B$, $C$ расположены по часовой стрелке. Треугольник $A_lB_lC_l$ назовем *левым*, а треугольник $A_rB_rC_r$ – *правым* треугольником для треугольника $ABC$.

**Решение.** Пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BM_a = M_aC = a$; $CM_b = M_bA = b$; $AM_c = M_cB = c$. Тогда в треугольнике $M_aM_bM_c$ $\angle M_a = \alpha$; $\angle M_b = \beta$; $\angle M_c = \gamma$.

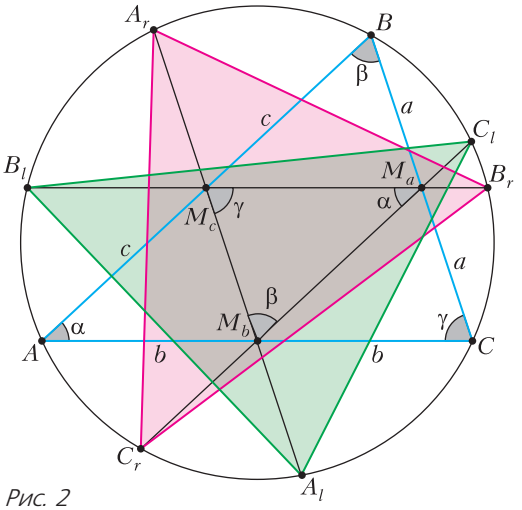



Рис. 2

Значит,

$$S(B_lM_aC_l) = \frac{1}{2} B_lM_a \cdot M_aC_l \cdot \sin\alpha,$$

$$S(B_rM_aC_r) = \frac{1}{2} B_rM_a \cdot M_aC_r \cdot \sin\alpha.$$

По теореме о пересечении хорд

$$B_lM_a \cdot M_aB_r = a^2 \Rightarrow B_lM_a = a^2 : M_aB_r,$$

$$C_lM_a \cdot M_aC_r = a^2 \Rightarrow C_rM_a = a^2 : M_aC_l.$$

Отсюда

$$S(B_lM_aC_l) + S(B_rM_aC_r) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot a^2 \left( \frac{M_aC_l}{M_aB_r} + \frac{M_aB_r}{M_aC_l} \right) \geq \sin\alpha \cdot a^2.$$

Аналогично можно получить неравенства

$$S(A_lM_bC_l) + S(A_rM_bC_r) \geq \sin\beta \cdot b^2,$$

$$S(A_lM_cB_l) + S(A_rM_cB_r) \geq \sin\gamma \cdot c^2.$$

Тогда

$$S(A_lB_lC_l) + S(A_rB_rC_r) - 2S(M_aM_bM_c) =$$

$$= S(B_lM_aC_l) + S(B_rM_aC_r) + S(A_lM_bC_l) +$$

$$+ S(A_rM_bC_r) + S(A_lM_cB_l) + S(A_rM_cB_r) \geq$$

$$\geq \left(a^2 \sin\alpha + b^2 \sin\beta + c^2 \sin\gamma\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq \frac{1}{R} \cdot 3abc. \quad (1)$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230102

Отсюда

$$S(A_lB_lC_l)+S(A_rB_rC_r)\ge\frac{3abc}{R}+2\frac{abc}{4\frac{R}{2}}=$$

$$=4\frac{abc}{R}.$$

Поскольку

$$S(ABC)=\frac{8abc}{4R},$$

то $S(A_lB_lC_l)+S(A_rB_rC_r)\ge 2S(ABC)$.

Из (1) следует, что равенство может быть лишь при $a=b=c$. А для равностороннего треугольника утверждение очевидно из симметрии. Таким образом, задача решена.

Оказывается, справедлива следующая теорема, обобщающая утверждение задачи М2720.

**Теорема** (Л. Шатунов). *Площадь левого треугольника не меньше площади $\Delta ABC$ и площадь правого треугольника не меньше площади $\Delta ABC$, а равенство достигается только тогда, когда треугольник $ABC$ равносторонний.*

В доказательстве мы будем многократно использовать следующее утверждение о расположении точек:

*Точки на окружности $\Omega$ расположены против часовой стрелки в таком порядке: $A$, $C_r$, $A_l$, $C$, $B_r$, $C_l$, $B$, $A_r$, $B_l$ (рис. 3).*

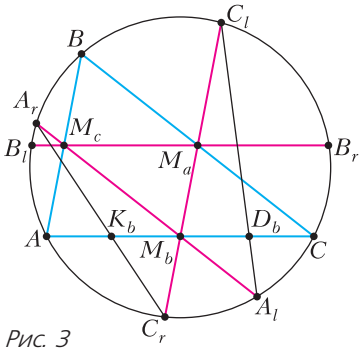



Рис. 3

**Доказательство теоремы.** Если треугольник $ABC$ равносторонний, то равенство площадей очевидно из симметрии.

Если треугольник $ABC$ равнобедренный, причем $AB=BC$, то левый и правый треугольники в нем равны, поскольку они симметричны относительно серединного перпендикуляра к основанию $AC$. Тогда из задачи М2720 получаем, что сумма их площадей больше $2S(ABC)$. Значит, площадь каждого больше $S(ABC)$.

Пусть теперь треугольник $ABC$ произвольный. Пусть $D_b$ – точка пересечения $AC$ с $A_lC_l$, а $K_b$ – точка пересечения $AC$ с $A_rC_r$. Применим теорему о бабочке для хорды $AC$, четырехугольника $A_lC_lA_rC_r$ и точки пересечения его диагоналей $M_b\in AC$. Так как $M_bA=M_bC$, то $M_bD_b=M_bK_b$. Значит, $K_b$ и $D_b$ симметричны относительно $M_b$.

Пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 4) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Не умаляя общности будем считать, что $\alpha>\beta>\gamma$. Отразим точки $B$, $M_a$, $M_c$, $A_r$, $C_r$, $B_l$ относительно серединного перпендикуляра $l$ к стороне $AC$ и получим точки $B'$, $M'_a$, $M'_c$, $A'_r$, $C'_r$, $B_r$ соответственно. Треугольник $A_rB_rC_r$ симметричен треугольнику $A'_rB_lC'_r$ относительно $l$, следовательно, $S(A_rB_rC_r)=S(A'_rB_lC'_r)$. Также можно понять, что $K_b$ перейдет в $D_b$ из-за их симметрии относительно $M_b$. Значит, $AC$, $A_lC_l$, $A'_rC'_r$ пересекаются в одной точке $D_b$.

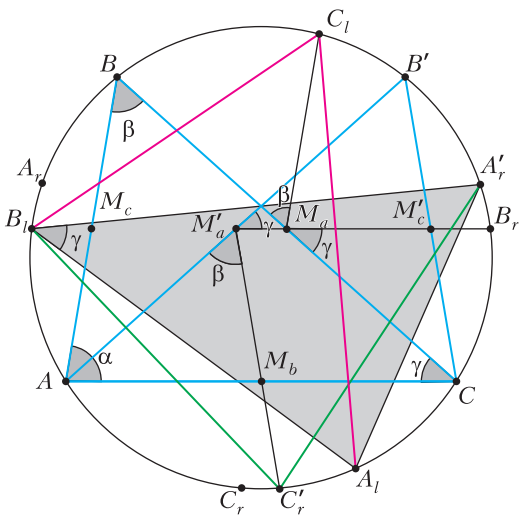



Рис. 4

Из утверждения о расположении точек, примененного к треугольнику $AB'C$, можно понять, что $C'_r\in\cup(A,C)$, $A'_r\in\cup(B_r,B')$ (здесь и далее $\cup(X,Y)$ означает дугу $XY$ окружности $\Omega$, которая идет от $X$ к $Y$

против часовой стрелки). В силу симметрии относительно $l$ имеем равенство

$$\cup(A_r, A) = \cup(C, A_r'),$$

следовательно,

$$\cup(A_l, A_r') = \cup(A_r, A) + \cup(A_l, C) = 2\angle AM_bM_c = 2\gamma.$$

Значит,

$$\angle A_lB_lA_r' = \gamma. \quad (2)$$

Доказательство теоремы получим из доказательства трех неравенств:

$$S(ABC) < S(B_lA_lA_r'), \quad (3)$$

$$S(B_lA_lA_r') < S(B_lA_r'C_r') = S(A_rB_rC_r), \quad (4)$$

$$S(B_lA_lA_r') < S(A_lB_lC_l). \quad (5)$$

Нам понадобятся две леммы.

**Лемма 1.** *Пусть в треугольнике $XYZ$ угол $YZX$ больше угла $YXZ$, $W$ – точка на описанной окружности этого треугольника такая, что и $W$, и $Y$ находятся в одной полуплоскости относительно прямой $XZ$. Пусть, кроме того, $\angle YZX > \angle WXZ > \angle YXZ$ или $\angle YZX > \angle WZX > \angle YXZ$. Тогда $S(XWZ) > S(XYZ)$*

**Доказательство.** Отразим (рис. 5) точку $Y$ в точку $Y_1$ относительно серединного перпендикуляра к $XZ$. Тогда $W \in \cup(Y, Y_1)$,

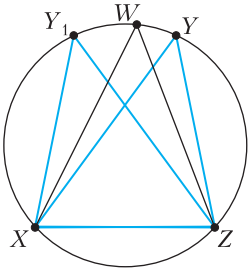


Рис. 5

так как она не может лежать на $\cup(Y_1, X)$ и $\cup(Z, Y)$ из-за неравенств на углы, а на $\cup(X, Z)$ она не может лежать по условию. А значит, высота из $W$ на $XZ$ больше высоты из $Y$ на $XZ$ и, следовательно, $S(XWZ) > S(XYZ)$.

**Лемма 2.** *Пусть $M$ – середина хорды $XY$ окружности $\omega$. Точки $Z$ и $T$ лежат на окружности $\omega$ и находятся в одной полуплоскости относительно прямой $XY$ (при этом точки $X$, $T$, $Y$ расположены по часовой стрелке именно в таком порядке). Пусть $\angle XMT < \angle YMZ$. Тогда $\cup(T, X) < \cup(Y, Z)$.*

**Доказательство.** Отразим точку $Z$ относительно серединного перпендикуляра к $XY$ (рис. 6) и получим точку $Z' \in \omega$. Тогда

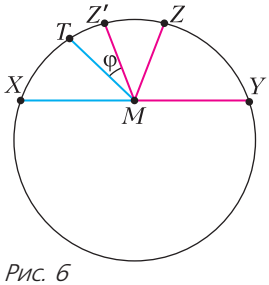


Рис. 6

$\angle XMZ' = \angle YMZ > \angle XMT$, это означает, что $T$ лежит внутри $\angle XMZ'$. Значит, точка $T \in \cup(Z', X)$, следовательно,

$$\cup(Y, Z) = \cup(Z', X) > \cup(T, X),$$

и лемма доказана.

Теперь докажем, что

$$\beta < \angle B_lA_r'A_l < \alpha. \quad (6)$$

Из равенств

$$\angle B_lA_r'A_l = \frac{1}{2}\left(\cup(B_l, A) + \cup(A, A_l)\right),$$

$$\beta = \angle AM_cM_b = \frac{1}{2}\left(\cup(B, A_r) + \cup(A, A_l)\right),$$

$$\alpha = \angle AM_cB_l = \frac{1}{2}\left(\cup(B_l, A)\right) + \cup(B_r, B)$$

следует, что (6) эквивалентно системе неравенств (рис.7)

$$\begin{cases} \cup(B, A_r) < \cup(B_l, A), \\ \cup(A, A_l) < \cup(B_r, B). \end{cases}$$

По лемме 2 из

$$\angle B_lM_cA = \alpha > \beta = \angle A_rM_cB$$

получаем первое неравенство системы, и снова по лемме 2 из

$$\angle A_lM_cA = \beta < \alpha = \angle B_rM_cB$$

получаем второе неравенство системы. Таким образом, (6) верно.

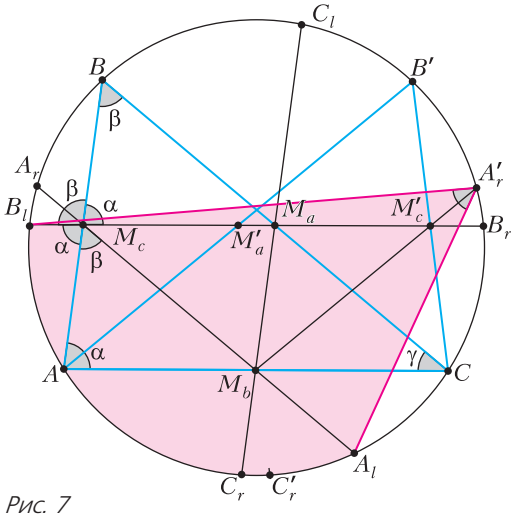



*Рис. 7*

Теперь перейдем непосредственно к доказательству неравенств (3)–(5).

Из (2) получаем, что $\cup(B,A)=\cup(A_l,A'_r)$, а значит, $AB=A_lA'_r$. Тогда повернем треугольник $A_lB_lA'_r$ (рис.8) вокруг центра окружности до совмещения $AB$ с $A_lA'_r$. Используя (6) и применяя лемму 1, получим $S(ABC)<S(B_lA_lA'_r)$, таким образом, (3) доказано.

По лемме 2 из

$$\angle A_lM_bC=\gamma<\alpha=\angle C_rM_bA$$

получим, что $\cup(A_l,C)<\cup(A,C_r)$. Значит, $A_l\in\cup(C'_r,C)$, следовательно,

$$\angle A'_rB_lA_l<\angle A'_rB_lC'_r. \qquad (9)$$

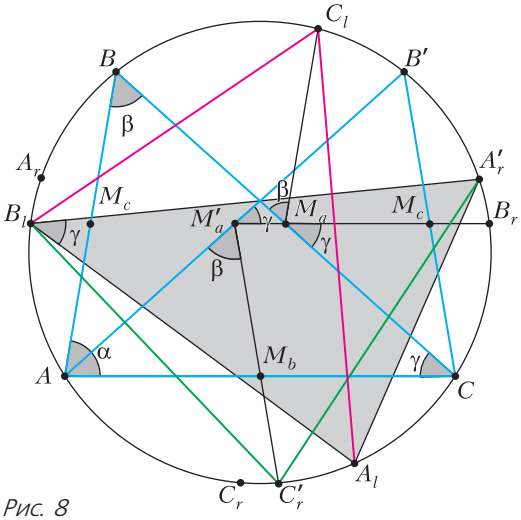



*Рис. 8*

Снова по лемме 2 из

$$\angle A_rM_bA=\gamma<\alpha=\angle C_lM_bC$$

получим, что $\cup(A_r,A)<\cup(C,C_l)$. Значит, $A'_r\in\cup(C,C_l)$, и

$$\angle A_lB_lA'_r<\angle A_lB_lC_l. \qquad (10)$$

Далее,

$$\angle A'_rB_lA_l=\gamma=\angle ACB=\frac{1}{2}\cup(B,A)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\cup(B,B_l)+\cup(B_l,A)\big),$$
$$\angle B_lA'_rC'_r=\frac{1}{2}\cup(B_l,C'_r)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\cup(A,C'_r)+\cup(B_l,A)\big),$$
$$\angle B_lA_lC_l=\frac{1}{2}\cup(C_l,B_l)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(\cup(C_l,B)+\cup(B,B_l)\big).$$

Тогда по лемме 2 из

$$\angle AM'_aC'_r=\beta>\gamma=\angle B'M'_aB_r$$

и $\cup(B,B_l)=\cup(B_r,B')$ получим $\angle A'_rB_lA_l<$ $<B_lA'_rC'_r$, что равносильно неравенству

$$\cup(B,B_l)<\cup(A,C'_r)$$

и вместе с (9) по лемме 1 даст неравенство (4).

Еще раз применяем лемму 2. Из

$$\angle BM_aC_l=\beta>\gamma=\angle CM_aB_r$$

и $\cup(B_l,A)=(C,B_r)$ получим $\angle A'_rB_lA_l<$ $<\angle B_lA_lC_l$, что равносильно неравенству

$$\cup(B_l,A)<\cup(C_l,B)$$

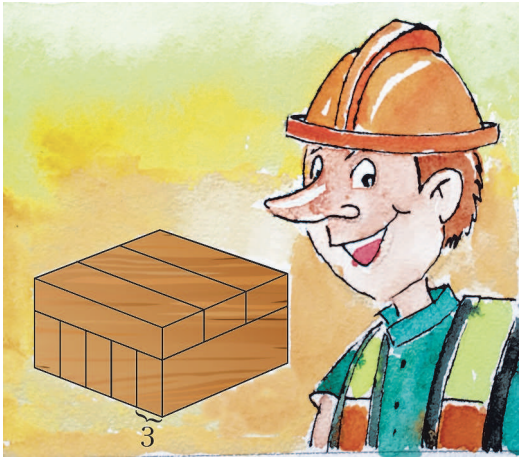
и вместе с (10) по лемме 1 даст неравенство (5).

Таким образом, доказаны неравенства (3), (4) и (5), а с ними и теорема.

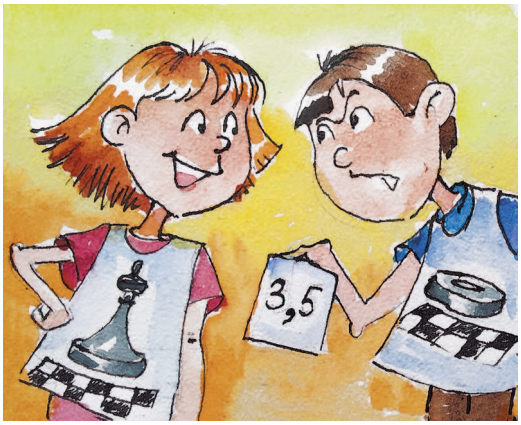
# Задачи

**1.** На рисунке изображены три одинаковых квадрата. Чему равен отмеченный угол?

**2.** Из восьми одинаковых брусков сложили параллелепипед. Один из размеров бруска равен 3. Чему равен объем одного бруска?

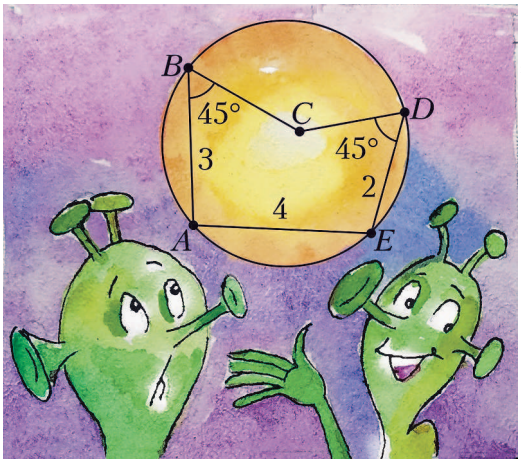



**3.** В классе 15 человек, каждый из них увлекается шашками или шахматами (некоторые и тем, и другим).




Всего шашками увлекаются 10 человек, шахматами — тоже 10 человек. В классе прошла контрольная работа по математике, которую оценивали по пятибалльной системе. Оказалось, что средний балл любителей шахмат — 3,7, а любителей шашек — 3,5. Какое наибольшее значение может принимать средний балл во всем классе?

**4.** Окружность на рисунке имеет радиус $2\sqrt{2}$. Чему равно отношение $BC:CD$?




Иллюстрации Д. Гришуковой

Эти задачи предлагались на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ» в 2022 году.

# Сто замков и сто ключей

**С.ДОРИЧЕНКО**

*Сэру Майкрофту Холмсу*
*Прошу прощения за это тревожное письмо, но Шерлок Холмс сейчас в ужасном состоянии. Отсутствие дел, способных занять его ум, крайне пагубно сказалось на его здоровье. Моему другу совершенно необходима сложная задача. Если преступный мир уже не способен отвечать на такие вызовы, то, быть может, спасительной станет какая-то логическая загадка, достойная этого великого ума?*
*С надеждой,*
*Доктор Ватсон*

*Доктору Джону Ватсону*
*Я бесконечно благодарен Вам за заботу о моем брате. Сейчас я как раз занят одной математической задачей и пока не смог ее решить. Она не вполне криминалистическая, но вызов тут бросает сам Мориарти. Быть может, это заинтересует Шерлока? Условие прилагаю.*
*Искренне Ваш,*
*Майкрофт Холмс*

***

– Итак, Ватсон, имеются 100 одинаковых с виду замков и 100 ключей от них, сваленные в кучу?

– Да, причем к каждому замку подходит ровно один ключ. И требуется выяснить, какой замок каким ключом открывается.

– Что ж, занятие малоприятное, но, имея запас времени и некоторое терпение, сделать это нетрудно. Выложим замки в ряд и начнем проверять ключи…

– Но в худшем случае это 10000 проверок! Даже если тратить на одну проверку секунды четыре, это 40 тысяч секунд – больше 11 часов!

– Сразу видно, мой друг, что вас неважно учили математике. Вы что же, собираетесь вставлять каждый ключ в каждый замок?

– Разумеется, ведь может все время не везти.

– Но первый ключ достаточно вставить 99 раз: если он так и не подошел, то он от последнего замка.

– Пожалуй. Значит, всего 9900 проверок?

– Снова мимо. Мы отбросим найденную пару «ключ-замок», и для второго ключа хватит 98 проверок.

– И правда. А третий ключ придется проверять не больше 97 раз и так далее. Получается жуткая сумма: $99 + 98 + \ldots + 2 + 1 + 0$. Странно, сотый ключ у меня требует 0 проверок?

– Конечно, его замок определится автоматически.

– А чему же равна эта сумма?

– По легенде, маленький Гаусс вычислил ее почти мгновенно с помощью небольшой хитрости. Он взял две такие суммы и разбил слагаемые на 100 пар $99 + 0$, $98 + 1$, $97 + 2$, …, $0 + 99$, каждая пара дает 99. Значит, исходная сумма равна $50 \cdot 99$, это 4950 проверок. По четыре секунды на проверку – ровно пять с половиной часов. А теперь оставьте меня – право, эти пустяки лишь ухудшают мое состояние.

– Но Холмс, в своем дневнике Мориарти утверждает, будто нашел способ распределить ключи быстрее, чем за 4950 проверок, причем с гарантией! Правда, излагать он его не стал – мол, способ столь сложен, что в дневнике просто не хватит места…

– Ох уж эта его страсть к дешевым эффектам. Быстрее, чем за 4950 проверок?

Холмс погрузился в долгое молчание. Невероятно, но спустя какое-то время лицо его начало оживать, а в глазах появился знакомый блеск.

– Очень занятно, Ватсон. Мориарти был профессором математики, но, похоже, тут он ошибся. И я это докажу!

– Докажете? Как же это можно доказать? Вдруг у него был хитроумный, никому не известный способ…

– Ватсон, а вы хорошо знакомы с математическими доказательствами? Дайте-ка я вас проверю. Согласны ли вы с тем, что сначала надо найти хоть одну подходящую пару «замок-ключ»?

– Эээ… пожалуй, да, так как совершенно не видно, как тут еще можно действо-

вать. Постойте… Но тогда все ясно! Первую пару при полном невезении не найти быстрее, чем за 99 проверок, вторую – за 98, … И вот она, наша сумма, это минимум!

– Сразу попались. Почему нельзя вставлять разные ключи в разные замки, сделать много таких проверок, а потом вдруг понять сразу про несколько ключей и замков, что к чему подходит?

– Это кажется неправдоподобным…

– Гарантируете, что точно не выйдет?

– Право, не знаю.

– Тогда у вас еще нет доказательства.

– Как же быть?

– Попробуем рассуждать по порядку. Интуиция подсказывает мне, что алгоритма, гарантирующего успех быстрее, чем за 4950 попыток, не существует. А этот дьявол Мориарти утверждает, что алгоритм есть. Что ж, допустим, профессор прав. И загоним его в ловушку – мысленно, разумеется.

– Но ведь для этого надо предложить ему, пусть даже мысленно, набор ключей и замков, да так, чтобы он не справился?

– Именно этим мы и займемся. Представьте, мы выдали ему замки и ключи. Профессор берет какой-то ключ и вставляет в какой-то замок… Если он угадал, мы тут же меняем внутренность этого замка с каким-то другим так, чтобы ключ не подошел.

– Мы джентльмены, а не шулеры, и не станем…

– Ватсон, мы лишь проверяем, что алгоритм работает во всех случаях. Поэтому такая подмена вполне законна – замки ведь неразличимы, и профессору мог попасться замок с другой внутренностью.

– А дальше?

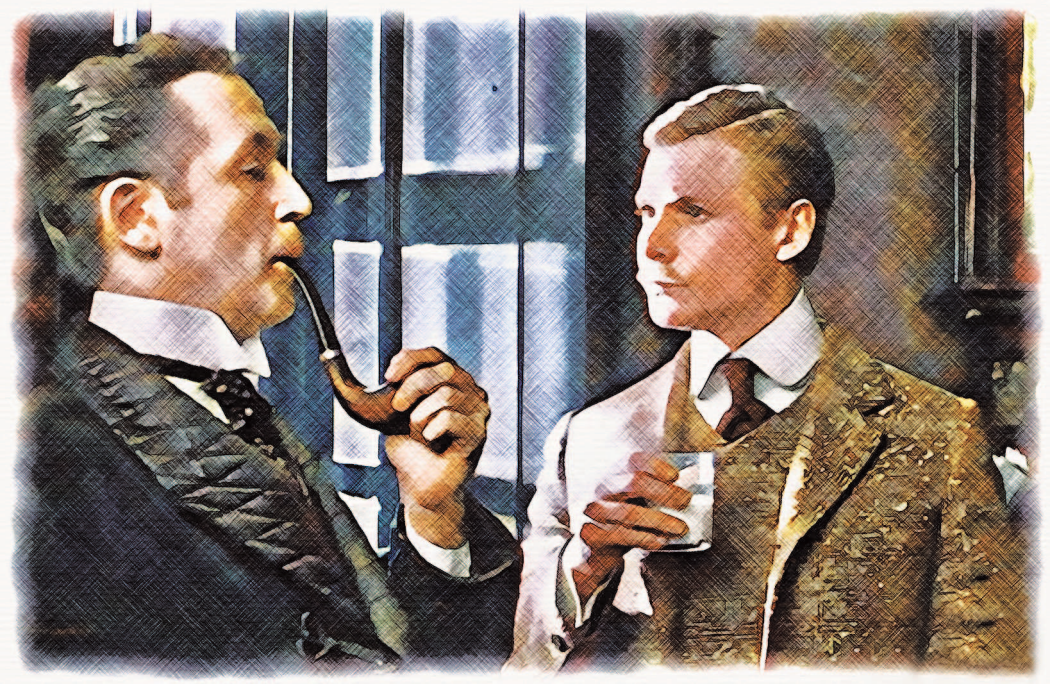
– Он проверяет какую-то следующую пару «ключ-замок». А мы снова, если нужно, меняем внутренности замков между собой так, чтобы и этот ключ не подошел – лишь бы все предыдущие проверки не изменили результата…

– Но ведь так нельзя делать до бесконечности, в какой-то момент очередной ключ уже точно подойдет.

– Вы правы. Но постойте! А зачем тогда этот ключ проверять?

– Простите, Холмс, я не понял.

– Мориарти же не дурак. У него есть записи всех совершенных им проверок. Пока ни один ключ ни разу не подошел. И вот он вставляет ключ $X$ в замок $Y$, и – о ужас – мы не можем ничего поменять



местами, не испортив предыдущих результатов, чтобы ключ не подошел. Но тогда это поймет и сам Мориарти!

– Но как, Холмс?

– Он может мысленно перебрать все возможные соответствия замков и ключей. И раз нет соответствия, сохраняющего результаты предыдущих проверок, при котором ключ $X$ и замок $Y$ не подходят друг к другу, он это обнаружит.

– А почему такого соответствия нет?

– Иначе мы бы его нашли и сделали бы результат очередной проверки отрицательным.

– Немного мудрено…

– Зря сомневаетесь, Ватсон. Но если хотите – мы тогда просто подскажем профессору по-джентльменски, что он угадал и эту проверку может не делать.

– Но зачем, Холмс?

– Я чувствую, что это важно для доказательства! Ведь теперь мы вправе считать, что алгоритм профессора таков: он делает много проверок, результаты всегда отрицательны, и в какой-то момент вдруг понимает про все ключи, какой от какого замка!

– Про все ключи?

– Ну да. Может, сначала про какой-то один ключ или несколько сразу. Когда про какие-то ключи ему становится все ясно, он их не проверяет, а действует далее по своему алгоритму, делая лишь те проверки, которые могут дать отрицательный результат. А мы будем этот отрицательный результат обеспечивать. Пока он не поймет все про все ключи.

– А потом?

– Ваши предложения, мой друг?

– Ни малейших идей.

– Похоже, мы движемся с вами в одном направлении… Тогда у меня просьба – разработайте пока для профессора удобный и компактный способ записи результатов его проверок, а я еще немного подумаю.

Холмс откинулся на спинку кресла и затянулся трубкой. Прошло около получаса, как вдруг…

– Эврика! Ватсон, мне все ясно. А как дела у вас?

– Как врач, регулярно делающий записи о состоянии своих больных, я подумал было, что можно заносить подряд все проверки в книгу. Но если экономить место, лучше, пожалуй, занумеровать ключи и замки и нарисовать большую таблицу, $100\times100$ клеток. А при проверке, скажем, пары «6-й ключ, 75-й замок», ставить в 6-й строке на 75-м месте плюс, если ключ подошел, и минус – если не подошел.

– Браво, Ватсон. Этот способ крайне удобен. Только напомню, что Мориарти все время ставит минусы. Он поставит их меньше, чем 4950 штук, и внезапно все поймет, верно?

– Да, по окончании работы алгоритма он просто расставит все плюсы.

Шерлок Холмс поморщился.

– Эти плюсы, они же могут образовать довольно хаотическую картину… Ничего, мы ее сейчас упорядочим. Ведь эти 100 плюсов расположены по одному в каждом столбце и в каждой строке. Но заметьте, Ватсон – в нашей таблице можно переставлять строки и столбцы, и ничего не испортится – если соответственно переставлять ключи и замки, не так ли?

– Пожалуй, да.

– Тогда отыщем плюс в первом столбце и переставим строку с этим плюсом на самый верх, затем найдем плюс во втором столбце и поставим строку с этим плюсом прямо под первой строкой и так далее.

– Вы хотите, чтобы плюсы аккуратно выстроились по диагонали?

– Да. Это не обязательно, но так решение будет особенно наглядным. Итак, в таблицу ставят меньше 4950 минусов, после чего плюсы однозначно выстраиваются по диагонали, никаких других вариантов. Но что такое 4950? Сколько всего клеток в таблице?

– Таблица у нас $100\times100$, всего 10000 клеток.

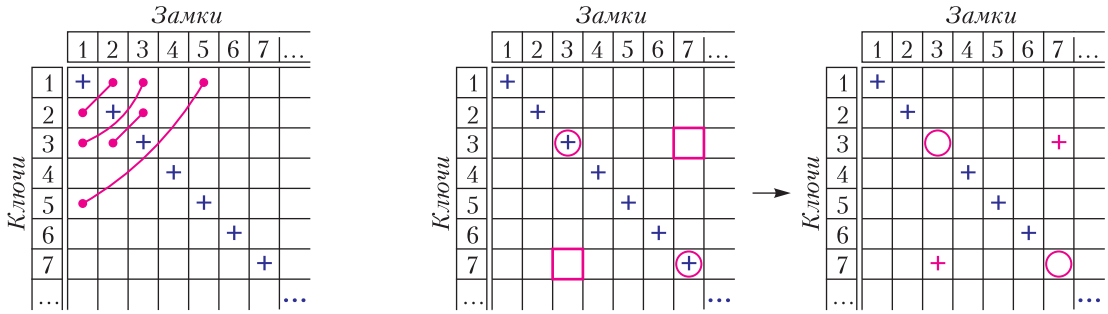
– А сколько клеток на диагонали?

– Разумеется, 100.

– Значит, остается 9900 клеток для минусов, которых меньше 4950 – меньше половины от числа оставшихся клеток!

– К чему вы клоните, Холмс?

– Надо разбить клетки на пары симметричных относительно диагонали! Вот, я




отметил красным несколько пар на салфетке. Видите? Пар ровно 4950, а минусов – меньше. Значит, найдется пара, в которой нет ни одного минуса. Скажем, клетка в третьей строке и седьмом столбце, условно клетка (3,7), и симметричная клетка (7,3). В них пусто.

– Видимо, проверять их не было необходимости.

– Все еще не понимаете? Давайте я вам нарисую. Мориарти поставил плюсы в клетки (3,3) и (7,7). Но ведь клетки (3,7) и (7,3) пусты – значит, ничего не мешает переставить эти два плюса туда. Короче говоря, поменять внутренность замков 3 и 7 местами. Ни одна предыдущая проверка не нарушится. Значит, Мориарти не мог все понять про ключи 3 и 7 – есть альтернативный вариант. Противоречие, Ватсон!

– Но как, Холмс? Как вы до этого догадались?

– Вы застали меня в полном расстройстве, Ватсон. Я даже надел на ноги разные ботинки и все пытался понять, почему они не симметричны. После вашей задачи мне гораздо лучше. Но без очередного дела…

– Мистер Холмс, к вам посетитель. Судя по всему, ученый или учитель математики.

– Почему вы так решили, миссис Хадсон?

– Пиджак испачкан мелом, бормочет под нос какие-то вычисления.

– Может это маркёр или бухгалтер?

– Бухгалтеры и маркёры не настолько рассеяны, чтобы являться в чужой дом в разных ботинках.

# Как облегчить сизифов труд

**С.ДВОРЯНИНОВ**

Начнем с такой задачи.

**Задача 1.** *Есть два бетонных столба – две правильные прямые призмы, четырехугольная и треугольная (рис. 1). Их высоты и массы одинаковы. Требуется переместить их на большое расстояние по горизонтальной плоскости, перекатывая через ребра длиной h. Для какой призмы потребуется бóльшая работа? Во сколько раз?*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230103

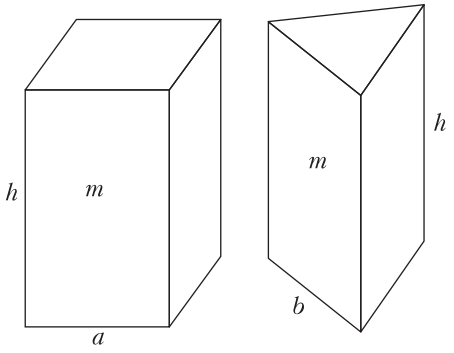



*Рис. 1*

При одном опрокидывании четырехугольной призмы со стороной основания $a$ совершается работа $mg\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}\right)$. На большом расстоянии $L$ сторона основания ук-

ладывается (примерно) $L/a$ раз, поэтому вся работа равна

$$A_1 = mgL\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Эта работа не зависит от $a$. Для треугольной призмы на пути $L$ работа также не зависит от стороны основания $b$ и равна

$$A_2 = mgL\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Отсюда получаем

$$A_2 : A_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}4 > 1.$$

Результат показывает, что четырехугольное «колесо» лучше треугольного. Заметим, что этот вывод справедлив и для призм с разными высотами.

Теперь рассмотрим другую задачу.

**Задача 2.** *Есть два тяжелых закрытых ящика, полностью заполненных гвоздями. Размеры ящиков* $3\times4\times5$ *и* $5\times6\times8$. *Переворачивая (опрокидывая) каждый ящик вокруг ребра, следует переместить его на большое расстояние с наименьшими затратами энергии. Вокруг какого ребра следует вращать каждый ящик?*

Вообразим, что каменную махину массой $m$, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда $a\times b\times c$, требуется переместить на большое расстояние $L$. Конечно, просто тащить-толкать эту глыбу не стоит, ибо трение очень велико. Давайте будем этот «ящик» кантовать, медленно (без ускорения) переворачивая через ребро $c$ (рис. 2). При этом центр тяжести такого «ящика» вначале будет двигаться по дуге окружности с начальной высоты $\frac{1}{2}a$ на максимальную высоту $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Требуемая для этого работа будет равна

$$A_1 = \frac{1}{2}mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right).$$

Падая, ящик из положения 1 перейдет в положение 2, и его центр тяжести окажется на высоте $\frac{1}{2}b$. Затем, снова поворачивая

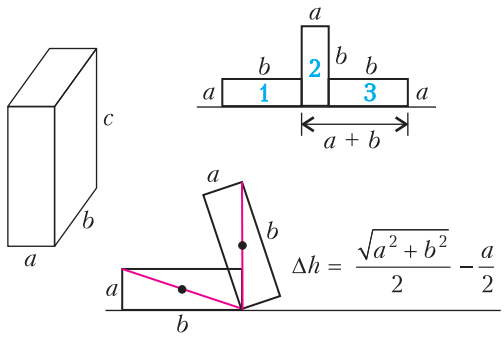



*Рис. 2*

ящик вокруг другого ребра длины $c$ и переводя его в положение 3, мы совершим работу

$$A_2 = \frac{1}{2}mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right).$$

Далее процесс переворачивания будет периодически повторяться. За один цикл, переводя ящик из положения 1 в положение 3, мы совершаем работу

$$A_1 + A_2 =$$

$$= \frac{1}{2}mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+\frac{1}{2}mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right) =$$

$$= mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a+b}{2}\right).$$

При этом ящик смещается на расстояние $a+b$. Отсюда следует, что для такого перемещения ящика на большое расстояние $L$ требуется совершить работу

$$A_c = mg\left(\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{L}{a+b} =$$

$$= mgL\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}-\frac{1}{2}\right).$$

Индекс «$c$» указывает, что ящик опрокидывают вокруг ребра длины $c$. Аналогично,

$$A_a = mgL\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}-\frac{1}{2}\right),$$

$$A_b = mgL\left(\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{c+a}-\frac{1}{2}\right).$$

Величина работы $A_c$ на пути $L$ зависит от длины двух ребер $a$ и $b$ симметричным образом, т.е. она не меняется, если $a$ и $b$ поменять местами. Легко видеть, что совершаемая работа зависит от отношения длин двух ребер ящика:

$$A_c = mgL\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{1+\frac{b}{a}} - \frac{1}{2}\right).$$

Вокруг какого же ребра из трех следует переворачивать наш ящик? Будем считать, что $a \le b \le c$. Соответственно имеем три таких отношения большего ребра к меньшему:

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}.$$

Каждое отношение не меньше 1. Для значений $x \ge 1$ график функции $y(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$ показан на рисунке 3. Наименьшее значение этой функции получается при $x = 1$. Функция монотонно возрастает. Чем ближе значение аргумента $x$ к 1, тем меньше значение функции $y(x)$. Если мы хотим переместить ящик на длинную дистанцию с наименьшими затратами энергии, то нам следует выбрать наименьшее из трех отношений. Ясно, что выбирать надо одно из двух: $\dfrac{b}{a}$ и $\dfrac{c}{b}$.

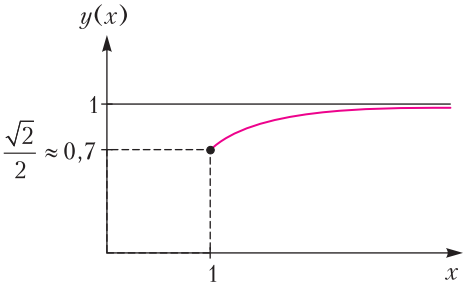


Рис. 3

Пусть $\dfrac{b}{a} < \dfrac{c}{b}$, т.е. $b^2 < ac$. В этом случае вращать ящик нужно вокруг самого длинного ребра $c$.

Пусть $\dfrac{c}{b} < \dfrac{b}{a}$, т.е. $b^2 > ac$. В таком случае вращаем ящик вокруг самого короткого ребра $a$.

Вернемся к нашим ящикам с гвоздями. Для ящика размером $3\times4\times5$ имеем $b^2 = 16 > ac = 15$. Этот ящик следует опрокидывать вокруг самого короткого ребра длины 3. Для ящика размером $5\times6\times8$ получается $b^2 = 36 < ac = 40$. Такой ящик следует опрокидывать вокруг самого длинного ребра длины 8.

# Геометрия фейерверка

**А.ЗАСЛАВСКИЙ, Ф.НИЛОВ**

НАВЕРНОЕ, ВСЕ ЧИТАТЕЛИ ВИДЕли, а возможно, и запускали фейерверки. Оказывается, что за этим красивым зрелищем скрывается много интересных с точки зрения как физики, так и геометрии фактов, о которых мы и хотим рассказать. Мы предполагаем, что читатели знакомы с простейшими свойствами кривых второго порядка, о которых можно прочитать в книжке [1].

Итак, представим себе ракету, взлетающую вертикально вверх и взрывающуюся в высшей точки своей траектории. Чтобы на движение частиц взрыва не оказывало влияние вращение Земли, будем запускать ракету на северном полюсе. Тогда частицы взрыва вылетают из одной точки в разных направлениях с одной скоростью и движутся под действием силы тяжести (сопротивлением воздуха мы пренебрежем). Сначала будем считать, что ракета взрывается на небольшой по сравнению с радиусом Земли высоте. Тогда Землю можно считать плоской, а ускорение $g$ силы тяжести постоянным во всех точках пространства. Как известно, в этом случае траекторией каждой частицы будет парабола.

**Утверждение 1.** *Фокусы всех парабол лежат на одной сфере с центром в точке $O$ запуска фейерверка, а директрисы – в одной горизонтальной плоскости.*

**Доказательство.** Пусть $v$ – начальная скорость частицы, $\varphi$ – угол между направлением скорости и вертикалью, $F$ – фокус параболы, $P$ – его проекция на горизонтальную плоскость, проходящую через $O$. Так как вертикальная составляющая скорости убывает до нуля за время $\frac{v\cos\varphi}{g}$, а горизонтальная постоянна и равна $v\sin\varphi$, то $OP = \frac{v^2\sin 2\varphi}{2g}$. Но из оптического свойства параболы следует, что $\angle OFP = 2\varphi$, т.е. длина отрезка $OF$ не зависит от $\varphi$ (рис. 1). Значит, расстояние $h$ от $O$ до директрисы параболы тоже не зависит от $\varphi$, т.е. все директрисы лежат в одной горизонтальной плоскости (расстояние от $O$ до этой плоскости равно высоте $h$, на которую поднимается частица, запущенная вертикально).

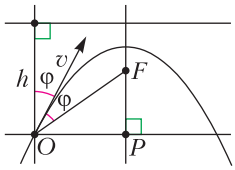


Рис. 1

Исследуем теперь границу области безопасности, т.е. поверхность, ограничивающую точки пространства, в которые могут попасть частицы. Очевидно, что эта поверхность получается вращением некоторой кривой относительно вертикальной прямой, проходящей через точку взрыва. Рекомендуем читателям прежде, чем читать дальше, попробовать нарисовать эту кривую с помощью какой-нибудь программы компьютерной графики.

**Утверждение 2.** *Траектории всех частиц касаются параболоида вращения с фокусом $O$ и вершиной, лежащей на расстоянии $h$ от $O$.*

**Доказательство.** Рассмотрим все частицы, траектории которых лежат в одной вертикальной плоскости. Пусть $F$ – фокус одной из таких траекторий, $X$ – точка пересечения траектории с лучом $OF$, $l$ – горизонтальная прямая, расстояние от которой до $O$ равно $2h$. Тогда расстояние от $X$ до $l$ равно $XF + h = XO$, т.е. $X$ лежит на параболе с фокусом $O$ и директрисой $l$ (рис. 2). Из оптического свойства параболы получаем, что касательные в точке $X$ к этой параболе и траектории частицы совпадают (поскольку совпадают направления на фокусы и направления осей парабол), т.е. все траектории, лежащие в одной вертикальной плоскости, касаются одной и той же параболы (рис. 3). Вращая ее вокруг оси, получим искомый параболоид.

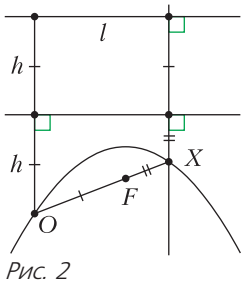


Рис. 2

Очевидно, что частицы могут попасть только в точки, лежа-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230104

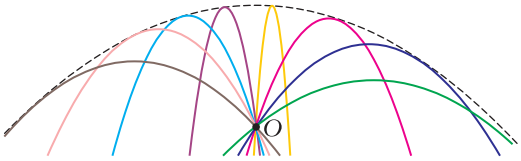



*Рис. 3*

щие ниже параболоида. Этот результат был получен Э.Торричелли[1] в 1644 году.

**Утверждение 3.** *В любой момент времени фронт (геометрическое место частиц) является сферой.*

**Доказательство.** Поскольку все частицы движутся с одинаковым ускорением, их центр масс движется с тем же ускорением и частицы удаляются от него со скоростью $v$. Следовательно, фронт – сфера с радиусом $vt$, расстояние от ее центра до $O$ равно $\frac{gt^2}{2}$.

Пусть теперь ракета взрывается на большой высоте. Тогда частицы движутся под действием центральной силы, т.е. на частицу в точке $X$ действует сила, направленная к центру Земли $G$ и равная $\frac{1}{GX^2}$ (точнее говоря, сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния, но, выбирая единицы измерения длины и времени, можно сделать коэффициент пропорциональности равным единице). Тогда движение частицы описывается следующими тремя законами[2]:

1. Частицы движутся по коникам с фокусом $G$.

2. Радиус-вектор частицы, направленный из $G$, за равные промежутки времени заметает равные площади.

3. Если начальная скорость невелика (мы рассматриваем именно такой случай), траектории частиц являются эллипсами, а квадраты периодов обращения пропорциональны кубам больших осей.

Пользуясь этими законами, докажем несколько свойств траекторий.

**Утверждение 4.** *Большие оси всех эллипсов, а значит, и периоды обращения всех частиц равны.*

**Доказательство.** Пусть $r$ – расстояние от частицы до $G$, а $v$ – ее скорость. Тогда кинетическая энергия частицы равна $\frac{v^2}{2}$ (можно считать, что масса частицы равна 1), а потенциальная равна $-\frac{1}{r}$. Сумма этих величин $E$ постоянна и одинакова для всех частиц (условие $E = 0$ определяет вторую космическую скорость, при которой частица начинает двигаться по параболе. Мы считаем, что скорость частицы меньше второй космической, т.е. $E < 0$). С другой стороны, по второму закону Кеплера величина $vr\sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между радиус-вектором частицы и направлением ее скорости, постоянна, следовательно, в концах большой оси эллипса $vr = v_0 r_0 \sin\alpha_0$. Исключая из этих уравнений $v$, получаем квадратное уравнение на $r$:

$$v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2r - 2Er^2 = 0.$$

Поскольку от $\alpha_0$ зависит только свободный член уравнения, сумма его корней, равная большой оси эллипса, одна и та же для всех частиц (она пропорциональна $-\frac{1}{E}$, соответственно, период пропорционален $(-E)^{3/2}$).

**Утверждение 5.** *Вторые фокусы всех эллипсов лежат на сфере с центром $O$.*

**Доказательство.** Если $F$ – второй фокус некоторого эллипса, то сумма $OF + OG$ равна большой оси этого эллипса, т.е. одна и та же для всех частиц, следовательно, длина отрезка $OF$ тоже одинакова.

**Утверждение 6.** *Траектории всех частиц касаются эллипсоида вращения с фокусами $G$ и $O$ (рис. 4).*

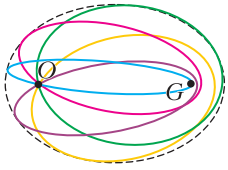



*Рис. 4*

[1] Эванджелиста Торричелли (1608–1647) – итальянский физик и математик, ученик и помощник Галилея. Автор книги «О движении свободно брошенных и падающих тяжелых тел», посвященной решению ряда задач баллистики. Изобретатель ртутного барометра. Именем Торричелли названа точка внутри треугольника, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна.

[2] Эти законы обобщают законы движения планет, открытые немецким астрономом Иоганном Кеплером (1571–1600). Элементарные доказательства первых двух законов Кеплера можно посмотреть на [2].

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 2, и мы предлагаем читателям провести его самостоятельно или прочитать, например, в статье [3]. Также предлагаем самостоятельно разобраться со случаем, когда начальная скорость частиц больше второй космической.

Авторы благодарны членам редколлегии «Кванта» за замечания, позволившие улучшить первоначальную версию статьи.

**Литература**

1. *А.А.Заславский, А.В.Акопян.* Геометрические свойства кривых второго порядка (2-е изд., дополн.). – М.: МЦНМО, 2011.

2. D.L.Goodstein, I.R.Goodstein. Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun. – Norton, 1996.

3. *Бутиков Е.И.* Огибающая семейства эллиптических орбит и баллистических траекторий. – Компьютерные инструменты в образовании, №3, с. 50–65, 2016.

# КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

***Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).***

***Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com . Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь.***

***Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.***

***Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest***

***Желаем успеха!***

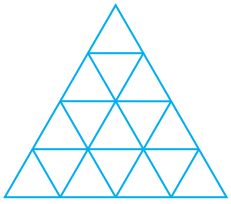
**17.** Квантик написал на каждой грани куба целое число (все шесть чисел различны). Потом в каждой вершине он написал сумму чисел на трех содержащих эту вершину гранях. Ноутик выписал полученные восемь сумм в ряд по возрастанию. Могло ли получиться так, что все разности между соседними числами в этом ряду одинаковы?

*С.Полозков*

**18.** На острове в разных местах есть пристань, крепость и деревня. Расстояние по прямой от пристани до крепости равно 3 км, от крепости до деревни – тоже 3 км. Петя получил достоверные сведения, что на острове зарыт клад. Известны расстояния по прямой до клада от пристани, крепости и деревни. Петя нашел такое место, но не обнаружил ни клада, ни следов предыдущих раскопок. Сколько километров от пристани до деревни?

*Б.Френкин*

**19.** Равносторонний треугольник со стороной $n$ разделили отрезками на равносторонние треугольники со стороной 1. Пусть $X_n$ – общее количество получившихся треугольников. Например, $X_2 = 5$ (один треугольник со стороной 2 и четыре со стороной 1), а $X_4 = 27$ (см. рисунок). Найдите: а) $X_{10}$; б) общую формулу для $X_n$.



*Е.Бакаев*

**20.** На все черные клетки шахматной доски поставлены короли. Каждым ходом один из них сдвигается на свободную по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее суммарное число ходов все короли могут снова оказаться на черных клетках и при этом ни один король не попадет в клетку, на которой стоял изначально?

*И.Акулич*

## ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (МФТИ) проводит набор учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.) для обучения в 8–11 классах на 2023/24 учебный год.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики, высшей математики, департамента химии и лаборатории геномной инженерии МФТИ, а также другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренными школьниками.

Обучение в ЗФТШ ведется по физике, математике, информатике, химии и биологии (шесть заданий в год по каждому предмету). Полная программа рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В ЗФТШ работают три отделения: заочное, очное и очно-заочное. Обучение на всех отделениях ведется по единым программам естественно-научного профиля.

Учащиеся по окончании 11 класса получают свидетельство. Также выпускники могут добавить дополнительные баллы при поступлении в МФТИ (подробная информация имеется на сайте Приемной комиссии МФТИ https://pk.mipt.ru/ в разделе «Перечень засчитываемых олимпиад»).

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает online-лекторий по программам ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ.

Вступительные испытания на все отделения пройдут *с 1 марта по 31 мая 2023 года* в формате онлайн-олимпиады на сайте https://zftsh.online (при регистрации необходимо прикрепить справку из школы). Поступать можно для обучения одному или нескольким предметам. На выполнение каждого вступительного задания дается 4 часа.

Решение приемной комиссии будет известно после 5 июня 2023 года.

Обучение для школьников, проживающих в Российской Федерации, в рамках плана приема бесплатное. Для школьников, проживающих за пределами РФ или не прошедших по конкурсу, возможно только платное обучение.

### ОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

*(заочное обучение с посещением очных консультаций)*

Телефон: (925) 755-55-80

Группа ВК: https://vk.com/vftsh

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты.

Занятия с учащимися проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский Московской области, а также в школе № 2107 города Москвы. Ведут занятия студенты, аспиранты и выпускники МФТИ.

Выбирая это отделение, учащийся должен объективно оценить свои возможности один раз в неделю посещать очные занятия продолжительностью 1 ч. 30 мин. в 8-10 классах и 2 ч. 15 мин. в 11 классе по каждому предмету.

### ОЧНО-ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

*(обучение в факультативных группах)*

Телефон: (498) 744-63-51

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении по одному или нескольким предметам. Группы формируют учителя на основании списков школьников, успешно справившихся со вступительной олимпиадой ЗФТШ. Занятия проходят на базе общеобразовательных учебных заведений под руководством учителей.

Выбирая это отделение, учащемуся следует сначала уточнить у своих школьных учителей, работает ли в данном учебном заведении факультатив ЗФТШ по интересующим его предметам. Если такого факультатива нет и не планируется его организация, то поступление в ЗФТШ возможно только на заочное отделение.

Обучение в ЗФТШ для государственных общеобразовательных учебных учреждений бесплатное. Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение.

### ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

*(индивидуальное заочное обучение)*

Телефон:(495) 408-51-45

Это отделение для тех школьников, у кого нет возможности посещать очные занятия в городах Долгопрудном или Жуковском Московской области или в школе № 2107 города Москвы, и для тех, в чьих школах нет факультативных групп, работающих по программам ЗФТШ. Обучение ведется индивидуально. Учащиеся заочного отделения самостоятельно изучают теоретическую часть каждого задания, выполняют на платформе zftsh.online тесты и задачи и в установленные сроки отправляют все, что удалось решить, на проверку. За каждым учеником закрепляется преподаватель (студент, аспирант или выпускник МФТИ), осуществляющий проверку и рецензирование работ учащихся. После проверки учащимся становятся доступны авторские решения.

**Контакты**

Телефоны: (495) 408-51-45 – заочное отделение
(925) 755-55-80 – очное отделение
(498) 744-63-51 – очно-заочное отделение
E-mail: edu@zftsh.online
Web: https://zftsh.online
Очное отделение при ФАЛТ МФТИ в Жуковском – E-mail: vftsh@mail.ru
ВК: https://vk.com/vftshfalt

Ждем вас в ЗФТШ!

# Как частица к Солнцу стремилась

**А.СТАСЕНКО**

*Долетайте до самого Солнца*
*И домой возвращайтесь скорей.*
Е.Долматовский

КАК-ТО РАЗ ДАЛЕКО-ДАЛЕКО, НА орбите Плутона, столкнулись два железных микрометеорита и одна из образовавшихся частиц (конечно, сферическая) обнаружила, что не имеет ни орбитальной, ни радиальной скорости. Что было делать? И частица немедленно начала двигаться к центру Солнца строго по радиусу (конечно, для простоты дальнейших рассуждений).

Какие силы действуют на частицу, находящуюся на расстоянии $r$ от Солнца? Разумеется, прежде всего это сила тяготения, которую можно записать в виде $mg\dfrac{R^2}{r^2}$, где $m=\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ – масса частицы, $\rho$ – плотность ее вещества; $R$ и $g$ – радиус Солнца и ускорение тяготения на его «поверхности».

Но от Солнца летят фотоны – кванты света – и каждый из них обладает импульсом, который передается частице при поглощении. Если плотность потока энергии квантов на поверхности светила (при $r=R$) равна $q$ (размерность $\text{Дж}/\left(\text{м}^2\cdot c\right)$), то на расстоянии $r$ от его центра она равна $q\dfrac{R^2}{r^2}$, а поток энергии, приходящийся на поперечное сечения шаровой частицы, равен $q\dfrac{R^2}{r^2}\pi a^2$. Предполагая, что он полностью поглощается частицей (модель абсолютно черного тела) и разделив на скорость света $c$, получим поток импульса, т.е. силу, действующую на частицу. Таким образом, уравнение радиального движения частицы запишется в виде

$$\frac{dv}{dt}=\left(-g+\frac{q}{c}\frac{\pi a^2}{m}\right)\frac{R^2}{r^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{2}\right),\ v=\frac{dr}{dt}. \quad (1)$$

Интегрируя по радиусу, конечно, получим закон сохранения энергии:

$$\frac{v^2}{2}-0=\left(g-\frac{3}{4}\frac{q}{\rho ca}\right)\left(\frac{R}{r}-\frac{R}{r_0}\right)R, \quad (2)$$

где $r_0$ – начальная координата частицы.

Из только что приведенных соотношений следует первая неожиданность: оказывается, не всякая частица может двигаться к Солнцу, а только такая, радиус которой больше чем

$$a_*=\frac{3}{4}\frac{q}{\rho cg}. \quad (3)$$

Более мелкие частицы выметаются излучением из Солнечной системы. Поэтому, для того чтобы двигаться к Солнцу, начальный радиус частицы должен превышать $a_*$, что и будем далее предполагать. Из равенства (2) несложно найти и «расписание» движения частицы $r(t)$ или $t(r)$:

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^{3/2}-\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}=\frac{3}{2}\left(v_\text{C}^2-\frac{3}{2}\frac{q}{c\rho a_0}R\right)^{1/2}\frac{t}{R}. \quad (4)$$

Здесь $v_\text{C}=\sqrt{2Rg}$ – вторая космическая скорость для Солнца, которую нужно сообщить телу, чтобы удалить его на бесконечность (скорость убегания).

Понятно, что в приведенных выражениях масса и радиус частицы предполагаются постоянными: $m=m_0$, $a=a_0$ (и $1/r_0$ много меньше $1/r$). Однако, так ли это?

Частица, поглотив энергию падающих на нее квантов, почти мгновенно (в сравнении с временны́м масштабом ее движения) прогревается по объему и достигает равновесной температуры. Для определения последней придется прибегнуть к закону Стефана–Больцмана: плотность потока энергии, излучаемой нагретым телом, пропорциональна четвертой степени температуры, т.е. $q=\sigma T^4$, где $\sigma$ – постоянная Стефана–Больцмана. Приравнивая значения энергий, поглощенной и излученной частицей, получим

$$\sigma T_\text{C}^4\frac{R^2}{r^2}\pi a^2=\sigma T^4\cdot 4\pi a^2, \quad (5)$$

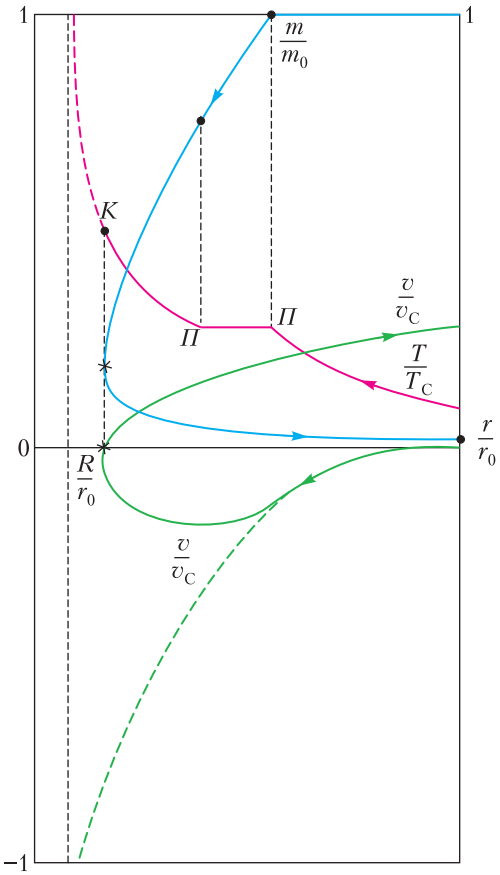
DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230105

откуда

$$\frac{T}{T_C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2R}{r}} = \frac{1}{2\alpha^{1/2}}.$$

Здесь $\alpha$ – угол, под которым диаметр Солнца виден с расстояния $r$.

Вполне понятно, что с приближением к Солнцу равновесная температура частицы $T$ растет. Но – опять открытие: эта температура не зависит от размеров тела! И еще: для ее определения не обязательно знать константу $\sigma$. И еще: уравнение энергетического равновесия (5) предполагает, что излучение с поверхности частицы изотропно, т.е. одинаково во всех направлениях. Поэтому его суммарный вектор потока импульса равен нулю и не вошел в уравнение (1).




*Эволюция параметров частицы, отнесенных к их характерным значениям: индекс 0 – начальные условия; $T_C$ и $v_C$ – температура «поверхности» Солнца и вторая космическая скорость для Солнца; ПП – участок плавления материала частицы K – начало кипения материала частицы; * – точка поворота частицы. Штриховые участки кривых соответствуют случаю гипотетического массивного тела, способного долететь до поверхности Солнца. Обратная стрелка на кривой температуры – начало возврата частицы*

Однако, температура частицы, постепенно повышаясь с приближением к Солнцу, может достичь температуры плавления $T_{пл}$ (участок $ПП$ на рисунке). Масса частицы начинает заметно уменьшаться за счет испарения атомов с ее поверхности (кривая $m(r)$). По окончании плавления температура образовавшейся капли растет, и если она достигнет точки кипения $T_к$ (точка $K$), масса капли резко упадает за счет испарения. Но если частице повезет и она не закипит, то до ее окончательного исчезновения силы гравитации и светового давления успеют сравняться, капля начнет удаляться от Солнца, проходя участки охлаждения, отвердевания и вновь охлаждения до первоначального значения $T_0$ на орбите Плутона. Качественно картина изменения всех трех физических величин представлена на рисунке. Это обычный путь научного поиска – попытаться предвидеть результат до начала вычислений.

Но теперь ясно, что в уравнении (1) в общем случае должна быть записана функция $a(t) \sim m^{1/3}(t)$ – переменный радиус частицы; локальное значение температуры – кусочно-непрерывная функция; отрезок траектории, на котором ее значение постоянно, зависит от скорости плавления. Таким образом, эволюция всех трех характеристик движения капли $(a, r, T)$ должна описываться *системой* уравнений, вообще говоря (как выражаются математики), нелинейной и нестационарной.

Конечно, выписывать и решать такие системы уравнений – слишком утомительно для научно-популярного чтения. Однако, почему бы не сделать несколько оценок масштабов явления.

Например, плотность потока энергии с поверхности Солнца равна

$$q = \sigma T_C^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Дж}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^{-4}\right) \cdot 5800^4 \text{К}^4 \approx$$

$$\approx 6 \cdot 10^7\ \text{Дж}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{с}\right).$$

(Легко рассчитать, что на орбите Земли $q = 1400$ Дж/(м$^2 \cdot$ с), что очень важно для перспективной «зеленой» солнечной энергетики.)

Вторая космическая скорость для Солнца (скорость убегания тела на бесконечно большое расстояние или падения тела «из бесконечности») равна

$$v_C = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot 270 \text{ м/с}^2} = 6 \cdot 10^5 \text{ м/с}$$

(здесь подставлены известные астрономические данные).

Время падения тела от орбиты Плутона ($r_0 = 6 \cdot 10^{12}$ м) изначально массивного тела, способного «выжить» до этого желанного момента, легко получить из выражения (4) в приближении $r_0 \gg R$:

$$\tau \approx \frac{2}{3} \frac{r_0^{3/2}}{v_C R^{1/2}} = \frac{2}{3} \frac{\left(6 \cdot 10^{12} \text{ м}\right)^{3/2}}{6 \cdot 10^5 \text{ м/с} \cdot \left(7 \cdot 10^8 \text{ м}\right)^{1/2}} \approx$$

$$\approx 20 \text{ лет.}$$

Критический радиус (3) равен

$$a_* = \frac{3}{4} \frac{6 \cdot 10^7 \text{ Дж/(м}^2 \cdot \text{с)}}{7{,}8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 270 \text{ м/с}^2} \approx$$

$$\approx 0{,}1 \text{ мкм}$$

(для железа $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м$^3$; $T_{\text{пл}} = 1800$ К; $T_{\text{к}} = 3100$ К). Таким образом, если частице удастся повернуть обратно, то он нее останется малая часть: тому, кто стремится к Солнцу, нужно готовиться потерять почти все, чтобы хоть что-то сберечь.

Конечно, здесь учтены не все физические процессы. Например – взаимодействие частицы с корпускулярными потоками (солнечный ветер); изменение массы частицы на начальном участке пути (до точки плавления); проскакивание частицы по инерции после уравнивания сил гравитации и солнечного давления; обрезание спектра фотонов (со стороны длинных волн), которые могут быть поглощены или излучены слишком малой частицей…

Эти недостатки могут быть восполнены вдумчивым Читателем немедленно или в недалеком будущем.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## Конкурс имени А.П.Савина

*(см. «Квант» №10 за 2022 г.)*

**5.** 1/3.

Число делится на 3, если и только если сумма его цифр делится на 3. Откинем в слове «случайность» первую «с». Останутся 10 различных букв, тогда это цифры от 0 до 9, и с + л + у + ч + а + й + н + о + с + т + ь = с + 45. Буква «с» может принимать 9 значений от 1 до 9, но сумма цифр делится на 3 лишь в трех случаях (с = 3, 6, 9), искомая вероятность равна 3/9.

**6.** 6.

В каждой вершине пирамидки сходятся три треугольничка, граничащие друг с другом, т.е. красный, синий и зеленый. Остаются треугольнички в серединах четырех граней. Никакие три из них не могут быть все красными: иначе при общей вершине трех граней с красными центральными треугольничками не будет красного треугольничка. Значит, всего красных треугольничков не более 4 + 2 = 6. На рисунке 1 показана подходящая раскраска развертки пирамидки (линиями соединены грани, которые станут соседними, если склеить развертку).

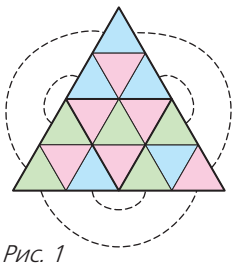


*Рис. 1*

**7.** а) 203; б) 404.

Обозначим левую часть исходного уравнения как $f(x)$.

Пусть $x = k$, где $k$ – целое число от –100 до 100. Модуль $|x - k|$ равен нулю. Модули левее его будут давать сумму $1 + 2 + \ldots + (100 - k)$, а модули правее его – сумму $1 + 2 + \ldots + (100 + k)$, что в сумме дает

$$\frac{1}{2}\left((100 - k)(101 - k) + (100 + k)(101 + k)\right) =$$

$$= k^2 + 100 \cdot 101.$$

То же самое верно и для $k$, равного –101 или 101, с той оговоркой, что соответствующего модуля в списке нет, и тогда с одной стороны будут все модули, а с другой стороны – ни одного. Итак, мы выяснили, что при целых $x$ от –101 до 101 функция $f(x)$ совпадает с $x^2 + 100 \cdot 101$.

На интервалах вида $(k; k+1)$ при целых $k$ от –100 до 99 функция $f(x)$ является линейной, таким

образом, на этом интервале ее график представляет собой отрезок, соединяющий две целые точки. При $x \ge 100$ левая часть равенства представляет собой линейную функцию $f(x)$, и, значит, эта часть ее графика представляет собой луч. Аналогично для $x \le 100$.

Теперь мы знаем, как выглядит график функции $y = f(x)$.

а) Разберемся со случаем целого $x$. При $a = 100 \cdot 101$ уравнение имеет 203 целых корня – все целые числа от $-101$ до 101. Мы уже проверили, что это корни. При $x > 101$ корней нет, так как на области $x \ge 100$ график функции $f(x)$ является лучом и, значит, он может пересекать параболу $y = x^2 + a$ не больше чем в двух точках – и это точки 100 и 101. Аналогично для $x < -101$.

При других $a$ уравнение не будет иметь корней от $-101$ до 101, и по тем же причинам не будет иметь больше 4 корней среди других чисел. Таким образом, ответ: 203.

б) Осталось рассмотреть случай действительных $x$. Если снова взять $a = 100 \cdot 101$ и увеличить его на очень маленькую величину $\varepsilon$, то концы отрезков и лучей (объединением которых является график $y = f(x)$) окажутся чуть ниже параболы $y = x^2 + 100$. Достаточно взять $\varepsilon$ так, чтобы ниже параболы не оказался ни один из таких отрезков целиком. График представляет собой объединение 200 отрезков и 2 лучей и в этом случае каждый из них пересекает параболу ровно в двух точках (и тогда корней 404). При любых значениях $a$ не может быть большего количества пересечений, так как отрезок и луч пересекают параболу не больше чем в двух точках.

Для примера нарисуем графики для ситуации, когда в условии задачи 100 заменено на 2. На рисунке 2 изображены графики $y = f(x) = |x-2| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+2|$ и $y = x^2 + 2 \cdot 3$. График $y = f(x)$ состоит из 4 отрезков и 2 лучей.

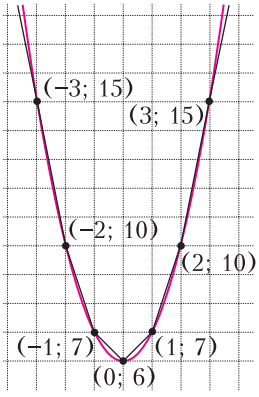


Рис. 2

**8.** В любом треугольнике эти точки лежат на одной окружности – окружности девяти точек. (Об этом можно прочитать, например, в статье И.Шарыгина, А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» в «Кванте» №8 за 1981 г.) Обозначим точки, как на рисунке 3. Угол

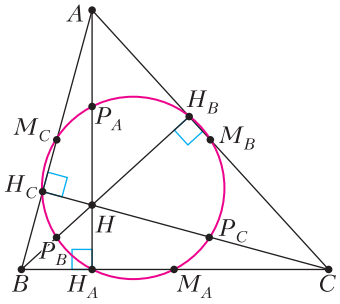


Рис. 3

$P_AH_AM_A$ прямой, поэтому $P_AM_A$ – диаметр окружности девяти точек. Это верно и в том случае, когда $M_A$ и $H_A$ совпадают – тогда треугольник $ABC$ равнобедренный и $P_AM_A$ – диаметр.

Итак, данный правильный $k$-угольник вписан в окружность девяти точек и какие-то две из его вершин $P_A$ и $M_A$ в нем диаметрально противоположны. А следовательно, $k$ четно.

Покажем, что для четных $k > 2$ существуют примеры. Для $k = 4$ подходит равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 4), для $k = 6$ – равносторонний треугольник (рис. 5), для $k = 8$ –

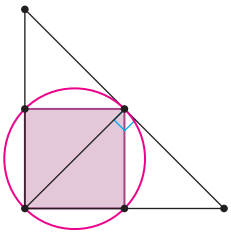


Рис. 4

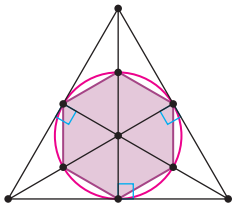


Рис. 5

равнобедренный треугольник с углом $A = 45°$ напротив основания (рис. 6).

Первые два примера очевидны, с третьим надо разобраться подробнее. Покажем, что восемь точек образуют правильный восьмиугольник. Во-первых, они лежат на одной окружности. Во-вторых, этот восьмиугольник симметричен относительно $AH_A$, так как вся конструкция симметрична. В-третьих, $P_AM_A$, $P_BM_B$ и $P_CM_C$ – это диаметры (как обсуждалось ранее), и $H_BH_C$ – это тоже диаметр, так как угол $H_CM_BC$ прямой, таким образом, восьмиугольник центрально симметричен. Из этого можно заключить, что равны следующие дуги окружности девяти точек: $P_BH_C = P_CH_B = M_CH_C = M_BH_B$ и $P_BM_A = P_CM_A =$

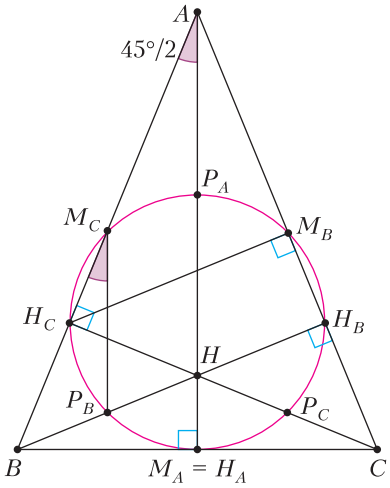



Рис. 6

$= M_CP_A = M_BP_A$. Покажем, что одна из них равна 45°, и тогда все остальные дуги тоже 45°, поскольку в сумме они дают $360° = 45° \cdot 8$. Дуга $P_BH_C$ равна 45°, так как вписанный угол $\angle P_BM_CH_C = \angle HAH_C = 45°/2$. Эти точки делят окружность на 8 равных дуг, поэтому они образуют правильный восьмиугольник.

## Физико-математическая олимпиада «Физтех»

*(см. «Квант» №11–12 за 2022 г.)*

### Математика

*10 класс*

**Вариант 1**

**1.** $-1$.

Числа $a$, $b$, $c$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. При этом оказывается, что дискриминант квадратного уравнения равен нулю, а четвертый член прогрессии равен корню этого уравнения, т.е. $b_4 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{qa}{a} = -q$, где $q$ – знаменатель прогрессии. С другой стороны, $b_4 = aq^3$. Отсюда получаем значение третьего члена прогрессии: $b_3 = aq^2 = -1$.

**2.** 99.

Рассмотрим треугольник $ABC$. Пусть его биссектриса $AN$ и медиана $BM$ пересекаются в точке $O$. В треугольнике $ABM$ отрезок $AO$ является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$.

Обозначим $AB = y$, $y \in \mathbb{Z}$. Тогда $AM = MC = y$. По свойству биссектрисы $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x + y) = 1200$, откуда $y = 400 - x$, поэтому $x \in \mathbb{Z}$.

Учтем неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \\ y < 2y + 3x \end{cases} \Leftrightarrow x < y < 3x.$$

Так как $y = 400 - x$, то $x < 400 - x < 3x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 100 < x < 200$. На этом интервале содержится 99 целых значений $x$.

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a;b;c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника $y$, $2y$ и $3x$ сторона $y$ – наименьшая. Тогда по заданному значению $y$ вся тройка $(a;b;c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно $y$, еще одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$, где $p$ – периметр. Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями $y$.

**3.** $(0;1)$, $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

Первое уравнение при условии $y - 2x \geq 0$ равносильно уравнению $(y - 2x)^2 = xy - 2x - y + 2$, откуда $y^2 + (1 - 5x)y + (4x^2 + 2x - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной $x$, имеем $D = (1 - 5x)^2 - 4(4x^2 + 2x - 2) =$ $= (3x - 3)^2$; $y = 4x - 2$ или $y = x + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $y = 4x - 2$, то $6x^2 - 12x + 5 = 0$, и получаем две пары $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $y = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{6}}$ и $x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $y = 2 - \dfrac{4}{\sqrt{6}}$. Если $y = x + 1$, то $3x^2 - 6x = 0$, откуда также имеем две пары $x = 0$, $y = 1$ и $x = 2$, $y = 3$. Из четырех найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только две из них: $(0;1)$, $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}; 2 + \dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$.

**4.** $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{2}{5}$; $S_{\Delta CDE} = \dfrac{6}{5}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CDE = \angle BAC +$ $+ \angle AED = 90° + \alpha$, $\angle DCE = 180° - (90° + \alpha) - 45° =$ $= 45° - \alpha$. Пусть $AD = 3x$. Отсюда $AC = 5x$, $CD = 2x$, $DE = AD \sin\alpha = 3x \sin\alpha$. По теореме синусов для треугольника $CDE$ имеем $\dfrac{2x}{\sin 45°} = \dfrac{3x \sin\alpha}{\sin(45° - \alpha)}$.

Следовательно, $3 \sin\alpha \sin 45° = 2 \sin(45° - \alpha)$, откуда $5 \sin\alpha = 2 \cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Площадь треугольника $CDE$ равна

$$\frac{1}{2}DC\cdot DE\cdot\sin\angle CDE=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3x\sin\alpha\sin\left(90^\circ+\alpha\right)=$$

$$=\frac{3}{2}x^2\sin 2\alpha=\frac{3x^2}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{6}{5}.$$

**5.** $R=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $r=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, $S_{BACE}=4\sqrt{2}$.

Обозначим $\angle ABC=\psi$, а радиусы окружностей $\Omega$ и $\omega$ – через $R$ и $r$ соответственно. Пусть $O$ и $Q$ – центры $\Omega$ и $\omega$ соответственно; $K$ – точка пересечения $\omega$ и $AB$, отличная от $A$.

Отметим, что $\angle BDQ=90^\circ$ (касательная $BD$ перпендикулярна радиусу $DQ$) и $\angle BCA=90^\circ$ (угол вписан в окружность $\Omega$ и опирается на ее диаметр). Значит, треугольники $BDQ$ и $BCA$ подобны (по двум углам). Отсюда $\dfrac{BD}{BQ}=\dfrac{BC}{BA}$, т.е. $\dfrac{3}{2R-r}=\dfrac{4}{2R}$, а значит, $R=2r$. По теореме о касательной и секущей $BD^2=BK\cdot BA=(2R-2r)\cdot 2R=8r^2$. Следовательно, $BD=2r\sqrt{2}$, $r=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, $R=2r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Далее находим углы: $\angle BQD=90^\circ-\angle QBD=90^\circ-\psi$; $\angle AQD=180^\circ-\angle BQD=90^\circ+\psi$; $\angle QDA=\angle QAD=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle AQD)=45^\circ-\dfrac{\psi}{2}$; $\angle QDA=\angle QAD=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle AQD)=45^\circ-\dfrac{\psi}{2}$. Следовательно, $\angle BDE=180^\circ-\angle BDQ-\angle ADQ=180^\circ-90^\circ-\left(45^\circ-\dfrac{\psi}{2}\right)=45^\circ+\dfrac{\psi}{2}$.

Перейдем к нахождению площади. Она равна половине произведения диагоналей, умноженной на синус угла между ними, т.е.

$$\frac{1}{2}BC\cdot AE\cdot\sin\left(45^\circ+\frac{\psi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\psi\cdot 2R\cos\left(45^\circ-\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\psi}{2}\right)=$$

$$=R^2\cos\psi\left(\sin 90^\circ+\sin\psi\right).$$

Поскольку

$$\sin\psi=\frac{DQ}{BQ}=\frac{r}{2R-r}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то окончательно

$$S=\frac{9}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=4\sqrt{2}.$$

**6.** $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$.

Рассмотрим первое неравенство. Обозначим $h(x)=2x^2-x-1$. График – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка имеем $h\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{5}{8}$, $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=2$. Так как неравенство должно выполняться на всем промежутке, то точки $M\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{8}\right)$ и $N\left(\dfrac{3}{2};2\right)$ могут располагаться на прямой $y=ax+b$ или ниже нее. Отсюда самое «низкое» расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая $MN$. Составляя ее уравнение по двум точкам, имеем $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{4}$; назовем эту прямую $l$.

График правой части неравенства – «уголок» $g(x)=x+|2x-1|$ с вершиной в точке $P\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ и ветвями, направленными вверх. Заметим, что точка $P$ лежит на прямой $l$, поэтому любая прямая, расположенная выше $l$, пересекает график $y=g(x)$ на рассматриваемом промежутке, и правая часть неравенства выполняется не при всех $x$.

Итак, $l$ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$.

**7.** 182.

Подставляя $a=1$ в равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, получаем $f(b)=f(1)+f(b)$, значит, $f(1)=0$. Если же для произвольных натуральных $x$, $y$ положить $a=\dfrac{x}{y}$, $b=y$, то получаем $f(x)=f\left(\dfrac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)+f(y)$, откуда $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

Таким образом, чтобы вычислить значение функции $f$ в произвольной положительной рациональной точке, нам достаточно значения функции $f$ для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab)=f(a)+f(b)$, например,

$$f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=$$

$$=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]=1+2=3.$$

Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n\in[1;21]$ и записываем их в таблицу:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 5 |

| $n$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 8 | 3 | 9 | 4 | 4 |

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right)>0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Посчитаем количество пар $(x;y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, нужно найти количество пар $(x;y)$ из таблицы, для которых $f(x)=f(y)$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $x=y$. В данном случае имеется 21 вариант.

2) $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=1$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f=1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать двумя способами, а второй – одним способом. Значит, количество пар такого типа равно $2\cdot1=2$.

3) $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=2$. Аналогично предыдущему пункту, получаем $4\cdot3=12$ пар.

4) $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=3$. Здесь $6\cdot5=30$ пар.

5) $x\neq y$, а $f(x)=f(y)=4$. Здесь $4\cdot3=12$ пар.

Итого, есть $21+2+12+30+12=77$ пар натуральных чисел $(x;y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Всего имеется $21^2=441$ пара, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, ровно $\frac{441-77}{2}=182$.

*11 класс*

**Вариант 1**

**1.** 0, –2, $-\frac{1}{2}$.

Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5}.$$

Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac{2}{5}\ \Leftrightarrow\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5},$$

$$\text{откуда } \sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \text{ или } \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}.$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5},\\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5},\\ \sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5},\\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5},\\ \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}.\end{cases}$$

Из первой системы получаем

$$\begin{cases}\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5},\\ \cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5},\\ \sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5},\end{cases}$$

откуда

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}.$$

Далее имеем

$$4\sin\alpha\cos\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right),$$

$$\text{откуда } 2\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0,$$

$$\text{и } \cos\alpha=0 \text{ или } \cos\alpha=2\sin\alpha.$$

В первом случае $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, а во втором случае $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Аналогично рассматриваем вторую систему, из нее получаем $\sin\alpha=0$ или $2\cos\alpha=-\sin\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=0$ или $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$ – это 0, –2 и $-\frac{1}{2}$.

**2.** (6; 2), $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Решение аналогично решению задачи 3 для 10 класса.

**3.** $[-24;-18)\cup(0;6]$.

Заметим, что $x^2+18x>0$. Следовательно, $\left|x^2+18x\right|=x^2+18x$. Область допустимых значений – это $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}+\left(x^2+18x\right)\ge\left(x^2+18x\right)^{\log_{12}13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}+12^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}\ge 13^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)}\ge 1.$$

Рассмотрим неравенство

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{y}+\left(\frac{12}{13}\right)^{y}\ge 1.$$

Функция $h(y)=\left(\frac{5}{13}\right)^{y}+\left(\frac{12}{13}\right)^{y}$ – убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2)=1$, поэтому если $y>2$, то $h(y)<1$, а если $y<2$, то $h(y)>1$. Таким образом, это неравенство дает $y\le 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_{12}\left(x^2+18x\right)\le 2$. Отсюда получаем

$$0<x^2+18x\le 144,\ x\in[-24;-18)\cup(0;6].$$

**4.** $R=\frac{85}{6}$, $r=\frac{136}{15}$, $\angle AFE=45^\circ+\frac{1}{2}\arccos\frac{15}{17}$, $S_{\Delta AEF}=\frac{2125}{12}$.

Решение аналогично решению задачи 5 для 10 класса.

**5.** 198.

См. решение задачи 7 для 10 класса.

**6.** $a=-2$, $b=-\frac{1}{2}$.

Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

**7.** $BC=\sqrt{7}$, $R_{\min}=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Пусть $K$, $L$, $M$, $N$, $P$ – середины ребер $AB$, $BD$, $CD$, $AC$, $BC$ соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $KLMN$ и $AKPN$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями $KLM$ и $ABC$, поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол $BAC$ – прямой; прямые $AD$ и $BC$ перпендикулярны, так как $AD\parallel KL$, $KL\perp LM$, $BC\parallel LM$.

Отметим в плоскости $ABC$ точку $D'$ такую, что $\Delta BCD=\Delta BCD'$, а точки $A$ и $D'$ лежат по разные стороны от прямой $BC$ (треугольник $BCD'$ может быть получен из треугольника $BCD$ поворотом вокруг прямой $BC$). Из равенства треугольников $BCD$ и $BCD'$ следует, что основания их высот, опущенных на $BC$, – это одна и та же точка, назовем ее $H$. Плоскость $DD'H$ перпендикулярна $BC$ (так как $DH\perp BC$, $D'H\perp BC$), поэтому $DD'\perp BC$. Поскольку $DD'\perp BC$ и $AD\perp BC$, то плоскость $ADD'$ перпендикулярна $BC$ и $AD'\perp BC$.

Значит, $ABCD'$ – четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, пусть $X$ – точка их пересечения. По теореме Пифагора $AB^2=AX^2+BX^2$, $CD'^2=CX^2+D'X^2$, $BD'^2=BX^2+D'X^2$, $AC^2=AX^2+CX^2$, следовательно, $AB^2+CD'^2=BD'^2+AC^2$, откуда $AC=\sqrt{1^2+3^2-2^2}=\sqrt{6}$. Из прямоугольного треугольника $ABC$ находим $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{7}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$, не меньше радиуса $R$ окружности, описанной около грани $BCD$. Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса $R$ и окружность – ее сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник $BCD$ и через прямую $BC$ проведем плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром $BC$, в которую можно вписать прямоугольный треугольник $ABC$. По теореме косинусов из треугольника $BCD$ находим, что $\cos\angle BDC=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2\cdot CD\cdot BD}=\frac{1}{2}$, $\angle BDC=60^\circ$. По теореме синусов $R=\frac{BC}{2\sin\angle BDC}=\frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

### Вариант 2

**1.** $(9;\ -28)$.

Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases}(4x+y)-2\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}=24,\\ 4x-y=64\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4x+y)-2\sqrt[3]{\left(-4^3\right)(y+4x)}=24,\\ y-4x=-4^3,\end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{4x+y}=t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3+8t-24=0$.

Заметим, что функция $f(t)=t^3+8t-24$ является строго возрастающей на всей числовой оси, а $f(2)=0$. Следовательно, $t=2$ является единственным решением уравнения, а значит, $4x+y=8$. В итоге получаем

$$\begin{cases}4x+y=8,\\ 4x-y=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9,\\ y=-28.\end{cases}$$

**2.** $\left(\frac{1}{9};3^{-\frac{4}{3}}\right]\cup\{1\}$.

Переходя в обоих логарифмах к основанию 3, имеем

$$\sqrt{\frac{\log_3\left(x^4\right)}{\log_3(3x)}}\le\frac{\log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log_3(9x)}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{4\log_3 x}{1+\log_3 x}}\le\frac{-2\log_3 x}{2+\log_3 x}.$$

Обозначаем $\log_3 x=t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+t}}\le-\frac{t}{2+t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t}{2+t}\le 0,\\ \dfrac{t}{1+t}\ge 0,\\ \dfrac{t}{1+t}\le\dfrac{t^2}{(2+t)^2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(-2;0],\\ t\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty),\\ t\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{4}{3}\right]\cup(-1;0],\end{cases}$$

откуда $t\in\left(-2;-\frac{4}{3}\right]\cup\{0\}$.

Возвращаясь к переменной $x$, окончательно находим $-2<\log_3 x\le-\frac{4}{3}$, $\log_3 x=0\Leftrightarrow\frac{1}{9}<x\le 3^{-\frac{4}{3}}$, $x=1$.

**3.** 189.

Пусть искомое число есть $\overline{abcdefg}$ $(a\ne 0)$.

Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на которую происходит деление. Возможны несколько случаев:

1) Если максимальная степень десятки равна 4 или меньше, то сумма остатков меньше $10^4+10^3+10^2$, что меньше 12345.

2) Если максимальная степень десятки равна 7 или больше, то сумма остатков не меньше $a\cdot 10^6$, что больше 12345.

3) Максимальная степень десятки равна 5 или 6. Эти случаи возможны.

Разберем их.

1) Пусть максимальная степень десятки равна 5. Тогда остатки от деления на $10^5$, $10^4$, $10^3$ равны $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$, $\overline{efg}$ соответственно, и сумма остатков есть $c\cdot 10^4+2d\cdot 10^3+3S$, где $S=\overline{efg}$, $0\le S<1000$.

Рассмотрим уравнение $c\cdot 10^4+2d\cdot 10^3+3S=12345$. Так как $12345<2\cdot 10^4$, то либо $c=0$, либо $c=1$. Если $c=0$, то $2d\cdot 10^3+3S=12345$. Тогда $2d\cdot 10^3=12345-3S=3(4115-S)$. Поэтому $2d$ делится на 3. При этом $9<2d\le 12$, так как $0\le S<1000$. Поэтому $d=6$, откуда $S=115$. Тем самым число имеет вид $\overline{ab06115}$. Таких чисел 90.

Если $c=1$, то $2d\cdot 10^3+3S=2345$. Тогда $2d\cdot 10^3=2345-3S$. Поэтому либо $d=0$, либо $d=1$. Если $d=0$, то $3S=2345$, что невозможно. Если $d=1$, то $3S=345$, откуда $S=115$. Значит, число имеет вид $\overline{ab11115}$. Таких чисел 90.

2) Пусть максимальная степень десятки равна 6. Тогда остатки от деления на $10^6$, $10^5$, $10^4$ равны $\overline{bcdefg}$, $\overline{cdefg}$, $\overline{defg}$ соответственно. И сумма остатков есть $b\cdot 10^5+2c\cdot 10^4+3S$, где $S=\overline{defg}$, $0\le S<10000$.

Рассмотрим уравнение $b\cdot 10^5+2c\cdot 10^4+3S=12345$. Это равенство возможно только при $b=c=0$. Значит, $3S=12345$, откуда $S=4115$, т.е. число имеет вид $\overline{a004115}$. Таких чисел 9.

Следовательно, искомое количество семизначных чисел есть $90+90+9=189$.

**4.** $\angle ADC=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$, $\angle NQC=90^\circ$, $S_{NCDQ}=60$.

Обозначим данный в условии угол $NCP$ через $\psi$. Тогда $\angle CPD=\angle NCP=\psi$ (накрест лежащие при параллельных прямых); $\angle BPC=\angle CPD=\psi$ (окружность $\omega$ вписана в угол $BPD$ и ее центр $C$ лежит на биссектрисе этого угла); $\angle NBP=\angle BCP+\angle BCP=2\psi$ (теорема о внешнем угле треугольника); $\angle BPN=90^\circ-\angle BPC=90^\circ-\psi$; $\angle BNP=180^\circ-\angle BPN-\angle NBP=\psi$. Отсюда следует, что треугольники $BPC$ и $BPN$ равнобедренные и $NB=BP=BC$. Значит, $NB=BP=BC=\frac{13}{2}$.

Далее заметим, что $\angle BQP=\angle TBC=\angle PBC=\angle BPQ$ (здесь $T$ – точка касания прямой $BQ$ и окружности; первое и последнее равенства следуют из параллельности прямых $BC$ и $AD$, а второе – из того, что окружность вписана в угол $TBP$). Выходит, что треугольник $BPQ$ равнобедренный, и поэтому $BQ=BP=\frac{13}{2}$. Следовательно, в треугольнике $NQC$ медиана $QB$ равна половине стороны $CN$, к которой она проведена.

Значит, треугольник $NQC$ прямоугольный, $\angle NQC = 90°$.

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

Пусть $CH$ – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники $BCP$ и $CPD$, получаем

$$CP = 2BC\cos\psi, \quad CH = CP\sin\psi = 2BC\sin\psi\cos\psi = \frac{2BC\sin\psi\cos\psi}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \frac{2BC\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{60}{13}.$$

Из равенства треугольников $BNQ$ и $BPC$ (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырехугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 13$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 60$.

**5.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos(x+2y) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(x+2y) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Сложим это уравнение с первым из исходных уравнений и преобразуем:

$$\sin(x+y) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+y) = 2\sin(x+y)\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right),$$

откуда

$$\sin(x+y) = 0 \text{ или } \cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Если $\sin(x+y) = 0$, то первое из исходных уравнений дает $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ (здесь и далее в этой задаче $k, n \in \mathbb{Z}$), $y = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Если $\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, то либо $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y$ не определено), либо $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Подставляя в первое из данных в условии уравнений, имеем

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{9}{2}\cos x + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{3}\sin x = 5\cos x.$$

Значит, $\operatorname{tg}x = -\frac{5}{4\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = -\frac{5}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

**6.** $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{25}{3}$.

Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса и задачи 6 из варианта 1 для 11 класса.

**7.** $\angle BB_1C_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}} = \pi - \arccos\frac{1}{5}$, $V = 80$.

Пусть $O$ – центр сферы $S$, а $K$ – ее точка касания с прямой $C_1B_1$. Плоскость $A_1AD$ перпендикулярна $AB$, так как $AB \perp AD$ и $AB \perp AA_1$ (отсюда $\angle AD_1C_1 = 90°$). Сфера $S$ касается $ABC$ в точке $A$, поэтому $O$ лежит на перпендикуляре к плоскости $ABC$, проходящем через точку $A$. Так как плоскости $A_1AD$ и $ABC$ перпендикулярны, точка $O$ лежит в плоскости $AA_1D$. Поскольку сфера $S$ касается прямой $C_1D_1$ и плоскости $CDD_1$, а ее центр лежит в плоскости $AA_1D$, то точкой касания является $D_1$. По теореме о касательной и секущей $C_1K = C_1D_1 = \sqrt{C_1M \cdot C_1A} = \sqrt{3\cdot 8}$. Из теоремы Пифагора для треугольника $AD_1C_1$ находим $AD_1 = \sqrt{AC_1^2 - C_1D_1^2} = \sqrt{8^2 - 24} = \sqrt{40}$.

Обозначим через $K'$ проекцию точки $K$ на плоскость $AA_1D$ (точки $A$, $O$, $K'$ лежат на одной прямой). Далее отметим, что

$$\angle BB_1C_1 = \angle(DD_1, DA) \overset{(*)}{=} \angle(D_1O, AO) =$$

$$= 180° - \angle D_1OA = \angle AD_1O + \angle D_1AO \overset{(**)}{=} 2\angle D_1AO =$$

$$= 2\arcsin\frac{D_1K'}{AD_1} = 2\arcsin\frac{C_1K}{AD_1} = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $D_1O \perp DD_1$ и $AO \perp DA$, а равенство $(**)$ – так как $OD_1 = OA$ как радиусы сферы.

Пусть $H$ – середина основания $AD_1$ равнобедренного треугольника $ADD_1$ ($DD_1 = DA$ по свойству касательных). Тогда

$$\angle ADH = \frac{1}{2}\angle ADD_1 = \arcsin\sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$AD = \frac{AH}{\sin\angle ADH} = \frac{\sqrt{40}}{2} : \sqrt{\frac{3}{5}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен

$$AD \cdot C_1D_1 \cdot AK' = 5\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{40-24} = 80.$$

## Физика

### 9 класс

**1.** 1) $v_y = \frac{v_0}{3} = v_0 - gt_1$, $t_1 = \frac{2}{3}\frac{v_0}{g} = 0{,}8$ с; $v_y = -\frac{v_0}{3} = v_0 - gt_2$, $t_2 = \frac{4}{3}\frac{v_0}{g} = 1{,}6$ с.

2) $h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{4}{9}\frac{v_0^2}{g} = 6{,}4$ м.

**2.** 1) Пусть $p$ – давление под левым поршнем, $p_0$ – атмосферное давление, $x$ – удлинение пружины. Тогда $p_0 = p + g\rho h$. Условие равновесия поршня: $kx + pS = p_0 S$. Отсюда находим

$$x = \frac{g\rho hS}{k}.$$

2) Левый поршень поднялся на $x$, а правый опустился на $x'$, при этом $Sx = \frac{S}{2}x'$. В новом положении равновесия $g\rho(h + x + x') = \frac{mg}{S/2}$. Получаем

$$m = \frac{\rho hS}{2}\left(1 + \frac{3g\rho S}{k}\right).$$

**3.** 1) $mg = G\frac{mM}{(2R)^2} = G\frac{\frac{4}{3}m\pi R^3\rho}{4R^2}$, $g = \frac{\pi}{3}G\rho R$.

2) $G\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$, $v = \frac{2\pi(R+h)}{T}$,

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{3/2} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2G\rho}}.$$

**4.** 1) Уравнения движения брусков: $m_1 a_{10} = F_0$, $m_2 a_{20} = 2F_0 - \mu(m_1 + m_2)g$. Брусок 1 покоится относительно бруска 2, поэтому $a_{10} = a_{20}$. Отсюда получаем

$$F_0 = \mu m_1 g\frac{m_1 + m_2}{2m_1 - m_2} = 10\mu mg.$$

2) Уравнения движения брусков: $m_1 a_1 = F + \mu m_1 g$, $m_2 a_2 = 2F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g$. По условию $a_2 > a_1$. Получаем

$$F > 2\mu m_1 g\frac{m_1 + m_2}{2m_1 - m_2} = 2F_0 = 20\mu mg.$$

**5.** 1) $p_1 = p_0 + \rho g H = 125$ кПа.

2) Сила Архимеда $\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_1$, где $\vec{F}_1$ – сила, действующая на область приклеивания, если бы вместо клея была вода, $F_1 = pS$, $F_A = \rho V g$. В проекциях на вертикальное направление вниз: $-F_A = F - F_1$. Отсюда $F = F_1 - F_A = pS - \rho V g = p_0 S + \rho g(HS - V) = 170$ Н, вниз!

### 10 класс

**1.** 1) $v_0 = \sqrt{2gH} = 10\sqrt{13}$ м/с $\approx 36$ м/с,

2) $E_к = \frac{m}{2}\left(\frac{g\tau}{2}\right)^2 = 2500$ Дж.

**2.** 1) Запишем законы сохранения импульса и энергии: $mv_0\cos\alpha = 2mv_1$, $\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{2m}{2}v_1^2 + mgH$. Отсюда

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) = \frac{5}{16}\frac{v_0^2}{g} = 0{,}125$$ м.

2) Так как движение шайбы равнопеременное, то при возвращении шайбы на уровень старта вертикальная проекция скорости шайбы сменит знак и будет равна $v_y = -v_0\sin\alpha$. Законы сохранения импульса и энергии будут иметь вид $mv_0\cos\alpha = mv_x + mv$, $\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}\left((v_0\sin\alpha)^2 + v_x^2\right) + \frac{m}{2}v^2$. Отсюда следует $v_x = 0$, $v = v_0\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}7$ м/с.

**3.** 1) При движении в горизонтальной плоскости $F_{тр} = mg$, $m\frac{v^2}{R} = N$, $\vec{F} = -\left(\vec{N} + \vec{F}_{тр}\right)$. Получаем

$$F = m\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + g^2} \approx 6{,}1$$ Н.

2) На модель действуют силы тяжести, трения и нормальной реакции. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$. В высшей точке траектории перейдем к проекциям сил и ускорения на ось, перпендикулярную плоскости большого круга, в которой происходит движение: $mg\cos\alpha = F_{тр} \le \mu N$. Следовательно, $N \ge \frac{1}{\mu}mg\cos\alpha$. Переход к проекциям ускорения и сил на нормальное направление:

$$m\frac{v_{min}^2}{R} = mg\sin\alpha + N = mg\sin\alpha + \frac{1}{\mu}mg\cos\alpha$$

приводит к ответу на вопрос задачи:

$$v_{min} = \sqrt{gR\left(\sin\alpha + \frac{1}{\mu}\cos\alpha\right)} = \sqrt{6 + \frac{20}{\sqrt{3}}}$$ м/с $\approx 4{,}2$ м/с.

**4.** 1) Тепло подводится на участке *1–2*:

$$Q = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)p_1V_1 = \left(\frac{11}{2} + \frac{\pi}{4}\right)RT_1.$$

2) Работа газа за цикл

$$A = \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = \frac{\pi}{4} RT_1.$$

3) КПД цикла $\eta = \dfrac{A}{Q} \cdot 100\% = \dfrac{\frac{\pi}{4} RT_1}{\left(\frac{11}{2} + \frac{\pi}{4}\right) RT_1} \cdot 100\% =$

$= \dfrac{\pi}{22 + \pi} \cdot 100\% \approx 12{,}5\%.$

**5.** 1) Для определенности будем считать все заряды положительными. Тогда

$$F_1 = qE(2R) = k\frac{Qq}{4R^2}.$$

2) Если однородно заряженный отрезок лежит на линии напряженности поля $E_x(x)$, то суммарная сила, действующая со стороны этого поля на заряженный отрезок с линейной плотностью заряда $\lambda$, равна

$$F = \sum_{x_1 \le x \le x_2} \lambda \cdot \Delta x \cdot E_x(x) =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{x_1 \le x \le x_2} E_x(x) \cdot \Delta x = \lambda \cdot \left(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right).$$

В рассматриваемом случае $\left(\varphi(2R) - \varphi(3R)\right) =$ $= \dfrac{kQ}{2R} - \dfrac{kQ}{3R} = \dfrac{kQ}{6R}$. Тогда

$$F_2 = \lambda\left(\varphi(2R) - \varphi(3R)\right) = \frac{kQq}{6R^2}.$$

*11 класс*

**Вариант 1**

**1.** 1) Вдоль горизонтальной оси $x$ импульс сохраняется (рис. 7): $v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$. Отсюда

$$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{3}{2} v_1 = 12 \text{ м/с}.$$

2) Пусть $v_{\text{отн}1}$ и $v_{\text{отн}2}$ – скорости шарика относительно плиты до и после удара. Тогда

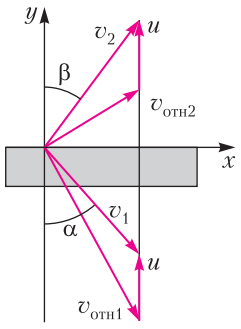



*Рис. 7*

$$0 \le v_{y\,\text{отн}2} \le \left|v_{y\,\text{отн}1}\right|,$$

$$0 \le v_2 \cos\beta - u \le v_1 \cos\alpha + u,$$

$$\frac{1}{2}\left(v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha\right) \le u \le v_2 \cos\beta,$$

$$\frac{1}{2} v_1 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - \cos\alpha\right) \le u \le v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta,$$

$\left(3\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)$ м/с $\le u \le 6\sqrt{3}$ м/с.

**2.** 1) $p_0 V_{01} = \nu R T_1$, $p_0 V_{02} = \nu R T_2$, $\dfrac{V_{01}}{V_{02}} = \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{3}{5}$.

2) $\nu C_V T_1 + \nu C_V T_2 = (\nu + \nu) C_V T$, $T = \dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) =$ $= 400$ К.

3) Покажем, что $p = \text{const}$: $p\Delta V_1 + V_1 \Delta p = \nu R \Delta T_1$, $p\Delta V_2 + V_2 \Delta p = \nu R \Delta T_2$, $\nu C_V \Delta T_1 + \nu C_V \Delta T_2 = 0$, $\Delta V_1 =$ $= -\Delta V_2$, откуда $(V_1 + V_2)\Delta p = 0$, $p = \text{const}$. Тогда

$$Q = \nu(C_V + R)(T - T_1) = \frac{7}{4} \nu R (T_2 - T_1) = 1250 \text{ Дж}.$$

**3.** 1) Увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

2) Покажем, что плоская пластина произвольной формы с плотностью заряда $\sigma > 0$ создает в точке $D$ поле с такой напряженностью $E$, что $E_z = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$, где $E_z$ – проекция напряженности на ось $z$, перпендикулярную пластине, $\Omega$ – телесный угол, под которым из точки $D$ видна пластина. От малой площадки площадью $\Delta S$ поле $\Delta E_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma \Delta S}{r^2}\cos\gamma$, где $\dfrac{\Delta S}{r^2}\cos\gamma = \Delta\Omega$ – телесный угол, под которым из точки $D$ видна $\Delta S$ (рис. 8). Тогда

$$E_z = \Sigma \Delta E_z = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma \Delta\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega.$$

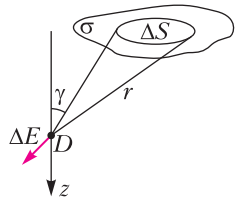



*Рис. 8*

Пластина $BC$ из точки $K$ видна под углом $\Omega_1$, который пропорционален $2\alpha$: $\dfrac{\Omega_1}{2\pi} = \dfrac{2\alpha}{\pi}$. Отсюда $\Omega_1 = 4\alpha$, $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_1 = \dfrac{\sigma_1 \alpha}{\pi\varepsilon_0}$.

Для пластины $AB$: $\Omega_2 = 2\pi - \Omega_1 = 2\pi - 4\alpha$, $E_2 =$ $= \dfrac{\sigma_2}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_2 = \dfrac{\sigma_2(\pi/2 - \alpha)}{\pi\varepsilon_0}$.

Окончательно

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\sqrt{(\sigma_1\alpha)^2 + \sigma_2^2(\pi/2 - \alpha)^2} = \frac{\sqrt{41}}{14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**4.** После замыкания ключа ток возрастает, диод закрыт. Ток достигает максимальной величины $I_m = \mathcal{E}\sqrt{C/(L_1 + L_2)}$. Когда ток начнет убывать, в некоторый момент напряжение на катушке индуктивностью $L_1$ изменит знак и диод откроется, напряжение на диоде станет равным нулю. Ток через катушку останется в дальнейшем постоянным и равным $I_m$, а в контуре из $\mathcal{E}$, $L_2$, $D$ и $C$ будут происходить колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{L_2 C}$ и амплитудой $I_m$. Диод будет всегда открыт, ток через диод будет изменяться от нуля до $2I_m$.

1) В установившемся режиме ток через катушку индуктивностью $L_1$ постоянный, т.е. период $T = \infty$.

2) $I_{m1} = I_m = \mathcal{E}\sqrt{C/(L_1 + L_2)} = \mathcal{E}\sqrt{C/(3L)}$.

3) $I_{m2} = I_{m1} = \mathcal{E}\sqrt{C/(3L)}$.

**5.** 1) $\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_0}$, $x = 2F_0$.

2) Мишень пересекает световой конус диаметром $D_1 = AB = D/2$ (рис. 9). Из графика находим отношение диаметра мишени $D_м$ к $D_1$: $\left(\frac{D_м}{D_1}\right)^2 = \frac{I_0 - I_1}{I_0}$. Имеем $D_м = D_1/2 = D/4$. За время $\tau_0$ мишень входит в конус, откуда скорость $v = \frac{D_м}{\tau_0} = \frac{D_м}{4\tau_0}$.

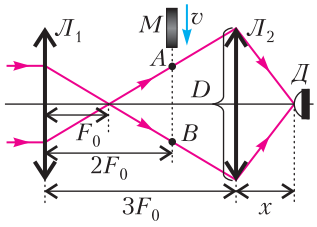



Рис. 9

3) Интервал от начала входа в конус до начала выхода из конуса равен

$$t_1 = \frac{D_1}{v} = 2\tau_0.$$

### Вариант 2

**1.** 1) $v_0 = v_1\cos\alpha_1 = v_2\cos\alpha_2 = v_3\cos\alpha_3$, $v_2 = \frac{v_0}{\cos\alpha_2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}v_0$.

2) $A_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha_2} - \frac{1}{\cos^2\alpha_1}\right) = \frac{11}{30}mv_0^2$.

3) Пусть $H$ – высота стены. За время $t_{12}$ длина троса уменьшается на $\frac{H}{\sin\alpha_1} - \frac{H}{\sin\alpha_2}$. Имеем $v_0 t_{12} = \frac{H}{\sin\alpha_1} - \frac{H}{\sin\alpha_2}$. Аналогично, $v_0 t_{13} = \frac{H}{\sin\alpha_1} - \frac{H}{\sin\alpha_3}$. Отсюда

$$t_{13} = t_{12}\frac{1/\sin\alpha_1 - 1/\sin\alpha_3}{1/\sin\alpha_1 - 1/\sin\alpha_2} = \frac{6}{15}t_{12}.$$

**2.** 1) $(p_0 + p_0/8)V_1 = (p_0 - p_0/8)V_2$, $V_2 = 9V_1/7$.

2) Модуль изменения объема пара равен приближенно изменению объема воздуха: $p_0(V_2 - V_1) = \frac{\Delta m}{\mathrm{M}}RT_0$. Зная $V_2$, находим $\Delta m = \frac{2}{7}\frac{p_0 V_1 \mathrm{M}}{RT_0}$.

3) Изменится только внутренняя энергия массы пара $\Delta m$, перешедшего в воду. При испарении $L\Delta m = -\Delta U + A$, $A \approx p_0(V_2 - V_1)$. Тогда

$$\Delta U = -\frac{2}{7}p_0 V_1\left(\frac{L\mathrm{M}}{RT_0} - 1\right) < 0.$$

**3.** 1) Потенциал внешнего шара станет нулевым: $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = 0$, $q_1 = -Q$.

2) Энергия $W_1$ – это энергия конденсатора, у которого одна обкладка – внешняя поверхность внутреннего шара, а другая – внутренняя поверхность внешнего шара. Заряды обкладок $Q$ и $-Q$. Можно показать, что емкость этого конденсатора $C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$, тогда

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2(r_1 - r_2)}{8\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}.$$

3) Система состоит из двух конденсаторов емкостями $C_1$ и $C_2$. Обкладки первого – внешняя поверхность внутреннего шара и внутренняя поверхность внешнего шара. Обкладки второго – внешняя поверхность внешнего шара и бесконечность. Можно показать, что $C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$, $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_1$. По закону сохранения энергии начальная энергия этих конденсаторов $W_н$ перейдет в конечную энергию $W_к$ и теплоту $W$: $W_н = W_к + W$, $W_н = W_1 + \frac{(Q+q)^2}{2C_2} = W_1\frac{(Q+q)^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}$, $W_к = W_1 + 0$, $W = \frac{(Q+q)^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}$.

**4.** 1) Сопротивление параллельно соединенных резистора и вольтметра равно $R_{2V} = 15R/8$. Вольтметр покажет

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_{2V}} R_{2V} = \frac{5}{23}\mathcal{E}_0.$$

2) ЭДС индукции равна $kS$ и «направлена» против часовой стрелки. Пусть ток $I_1$ через $R_1$ и ток $I$ через вольтметр идут «вверх», а ток $I_2$ через $R_2$ – «вниз». По правилам Кирхгофа $I_2 = I_1 + I$, $kS + \mathcal{E}_0 = -I_1R_1 + IR_V$, $\mathcal{E}_0 = -I_1R_1 - I_2R_2$. Отсюда

$$I = \frac{1}{23}\frac{3\mathcal{E}_0 + 4kS}{R},\ U_2 = |I|R_V = \frac{5}{23}(3\mathcal{E}_0 + 4kS).$$

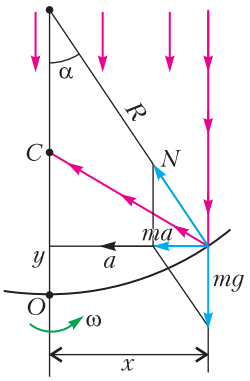


Рис. 10

**5.** 1) Малый «кусочек» жидкости массой $m$ на поверхности жидкости имеет ускорение $a = \omega^2 x$ (рис. 10). Из второго закона Ньютона $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{ma}{mg}$. Имеем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\omega^2 x}{g}$. Так как угол $\alpha$ мал, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{R - y} \approx \frac{x}{R}.$$

Итак,

$$\frac{\omega^2 x}{g} = \frac{x}{R}.$$

Отсюда радиус кривизны

$$R = \frac{g}{\omega^2} = 62{,}5 \text{ см}.$$

2) Изображение находится в точке $C$ на расстоянии $L = \dfrac{1}{2}R \approx 31$ см от точки $O$. Это можно показать, рассматривая поверхность жидкости вблизи точки $O$ как сферическое зеркало. Можно сразу сказать, что изображение получается в фокусе зеркала, или рассмотреть ход падающего и отраженного лучей при малом $\alpha$.

## Лингвистические задачи

**1.** Зашифрованы известные строки:

*Жил-был у бабушки серенький козлик,*
*вот как, вот как, серенький козлик.*

Звонкие согласные заменены соответствующими глухими, глухие – звонкими, буква *л* заменена на *р*, *м* на *н* и наоборот, *й* остается без изменений. Гласные *а*, *у*, *о*… заменены на *я*, *ю*, *ё*… и наоборот.

**2.** Любая фраза из данных слов должна содержать четыре члена предложения: подлежащее, сказуемое, дополнение и обстоятельство места. Они могут стоять в любом порядке – итого $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ возможности. При этом отрицание *не* может стоять на любом из четырех мест; дополнение может быть выражено либо словом *старика*, либо словом *осла* (обстоятельство тогда определяется однозначно). Итак, всего можно составить $24 \times 4 \times 2 = 192$ предложения.

**3.** Это слово соответствует русскому тягать (т.е. «тянуть») с фрикативным (украинским) [г]; буква т̆ обозначает мягкое [т]. Значение – «к себе». Один из славянских языков (словацкий).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
М.Н.Грицук

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256
Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 218-40-40

# Абсолютный ЧЕМПИОН

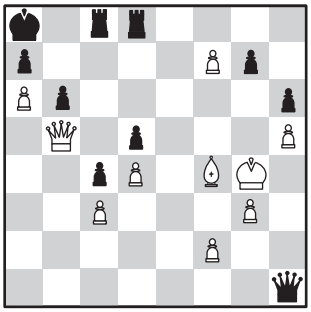
На прошедшем в конце декабря в Казахстане чемпионате мира по рапиду и блицу Магнус Карлсен в очередной раз подтвердил статус сильнейшего шахматиста современности, выиграв оба турнира и сделав себе подарок на новый год, который он может встретить в ранге абсолютного чемпиона мира.

Наиболее яркая партия всего чемпионата состоялась в 12 туре турнира по блицу, в которой Карлсен вместе с Рихардом Раппортом подарили зрителям настоящий боевик.

**М.Карлсен – Р.Раппорт**
**Алматы, 2022, блиц**

**1. d4 e6 2. e4 d5 3. ♘c3 ♗b4 4. e5 c5 5. a3 ♗c3+ 6. bc ♕c7 7. h4 ♘e7 8. h5 h6 9. ♘f3 b6 10. ♗b5+ ♗d7 11. ♗d3 c4 12. ♗e2 ♗a4 13. ♗f4 ♘a6 14. ♕d2 0-0-0 15. ♘h2 ♚b7 16. ♘f1 ♕d7 17. ♘e3 ♘c7 18. ♔f1 ♘c6 19. g3 ♕e8 20. ♔g2 ♕g8 21. ♖ ab1 ♕h7 22. ♗f3 ♚b8 23. ♕e2 ♖c8 24. ♖b2 ♘b5 25. ♘d5 ed 26. e6+?** Требовалась еще жертва качества – 26. ♖b5! ♗b5 27. ♗d5 с угрозами по большой диагонали. **26...♚b7 27. ef ♕f5 28. ♖b4 ♘b4 29. ♕e7+ ♚a6?** Выпускает почти все преимущество. Точнее 29...♘c7, беря под контроль пешку d5. **30. ♕b4 ♗c2 31. a4 ♘c7?** Поздно. Необходимо 31...♘c3!, отвлекая ферзя от поля b5. **32. ♗c7 ♗e4 33. ♗f4 ♗f3+ 34. ♔f3 ♕e4+ 35. ♔g4 ♕h1 36. ♕b5+ ♚b7 37. a5 ♖hd8??** Проигрывает. Баланс сохраняло 37...g6 38. ♕d7+ ♚a6 с вероятным вечным шахом. **38. a6+ ♚a8.**

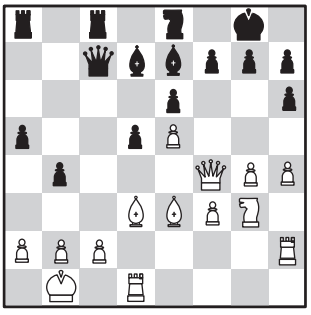
Критическая позиция. **39. f8♕??** К победе вело перекрытие – 39. f3!, и черная ладья перегружена защитой пешки d5 и поля f8. После хода в партии позиция выиграна уже у черных. Позже норвежец признался, что не смог найти выигрывающий ход в цейтноте.



**39...♖f8 40. ♕d7 ♖f4+ 41. gf ♕g2+ 42. ♔h4 ♕f2+ 43. ♔g4 ♕g2+ 44. ♔h4 g5+ 45. hg ♕h2+ 46. ♔g4 h5+ 47. ♔f3 ♕h1+ 48. ♔f2 ♕h4+ 49. ♔f3 ♕g4+ 50. ♕g4 hg+ 51. ♔g4 b5 52. f5 b4 53. f6 bc 54. f7 c2 55. g7 c1♕ 56. f8♕ ♕g1+ 57. ♔h5 ♕h2+ 58. ♔g6 ♕g3+ 59. ♔h6 ♕h4+ 60. ♔g6 ♕g4+ 61. ♔h6 c3 62. ♕f7 ♕h4+ 63. ♔g6 ♕e4+?** К простому выигрышу ферзя и быстрому мату вело 63...♖c6+ 64. ♔f5 ♕f2+. **64. ♔g5 ♕e3+??** Грубая ошибка, выпускающая победу – необходимо 64...♖b8, защищаясь от мата с b7 и сохраняя контроль над пешкой d5. **65. ♔h5 ♕e8??** Грубый зевок, но здесь у черных был уже лишь вечный шах. **66. g8♕ ♕e2+ 67. ♕g4 ♖h8+ 68. ♔g5 ♕e3+ 69. ♔f6 ♕h6+ 70. ♔e7 ♕c6 71. ♕gg8+,** ввиду мата в два хода, **черные сдались.**

**М.Карлсен – П.Магсудлу**
**Алматы, 2022, рапид**

**1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♘f6 5. ♘c3 ♘c6 6. ♗g5 e6 7. ♕d2 a6 8. 0-0-0 ♗d7 9. f3 ♘d4 10. ♕d4 ♗e7 11. ♔b1 b5 12. h4 ♖b8 13. g4 b4 14. ♘e2 a5 15. ♘g3 ♕c7 16. ♗e3 ♖c8 17. ♖ h2?!** Пешка c2 отравлена – 17. ♗a6! ♕c2+ 18. ♔a1 ♖c6 19. ♗b5 ♖c8 20. ♗d7+ ♘d7 21. ♖c1 с выигрышем ладьи. **17...d5 18. e5 0-0 19. ♗a6 ♖a8 20. ♗d3 ♖fc8?** Черные недооценивают атакующий потенциал белых. Лучше 20...♘e8, сохраняя защитников на королевском фланге. **21. ♕f4 ♘e8.**

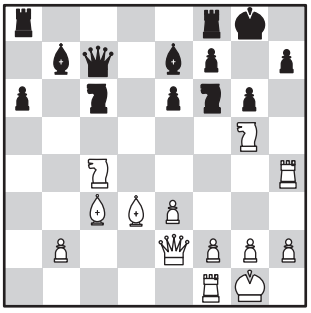


**22. g5! ♗c5 23. ♗c5 ♕c5 24. h5 ♗b5?!** Допускает красивую решающую комбинацию, но и остальные продолжения не сильно лучше. **25. ♗h7+! ♔h7 26. g6+ fg 27. ♕f7 g5 28. h6,** и нет защиты от 29. hg, поэтому **черные сдались.**

Красивую миниатюру с классической жертвой ферзя создал в турнире по рапиду мастер атакующей игры Даниил Дубов.

**Д.Дубов – С.Нихал**
**Алматы, 2022, рапид**

**1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♘f3 ♘f6 4. e3 e6 5. ♗c4 c5 6. 0-0 a6 7. ♕e2 b5 8. ♗d3 cd 9. a4 ba 10. ♖a4 ♗e7 11. ♖d4 ♕b6 12. ♘bd2 ♘c6 13. ♖h4 ♗b7 14. ♘c4 ♕c7 15. ♗d2 0-0± 16. ♗c3 g6 17. ♘g5.**



**17...♘d5??** Необходимо 17...e5 со сложной игрой, перекрывая большую диагональ, ход в партии проигрывает мгновенно. **18. ♕h5!!,** и **черные сдались** ввиду неизбежного мата слоном или ферзем с h7.

*А.Русанов*

Индекс 90964

# ОПРОКИДЫВАНИЕ ЧЕРЕЗ РЕБРО

Какое «колесо» лучше –треугольное или четырехугольное?

# Прогулки с физикой

ISSN 0130-2221 23001
9 770130 222238

(Подробнее – на с. 36 внутри журнала)