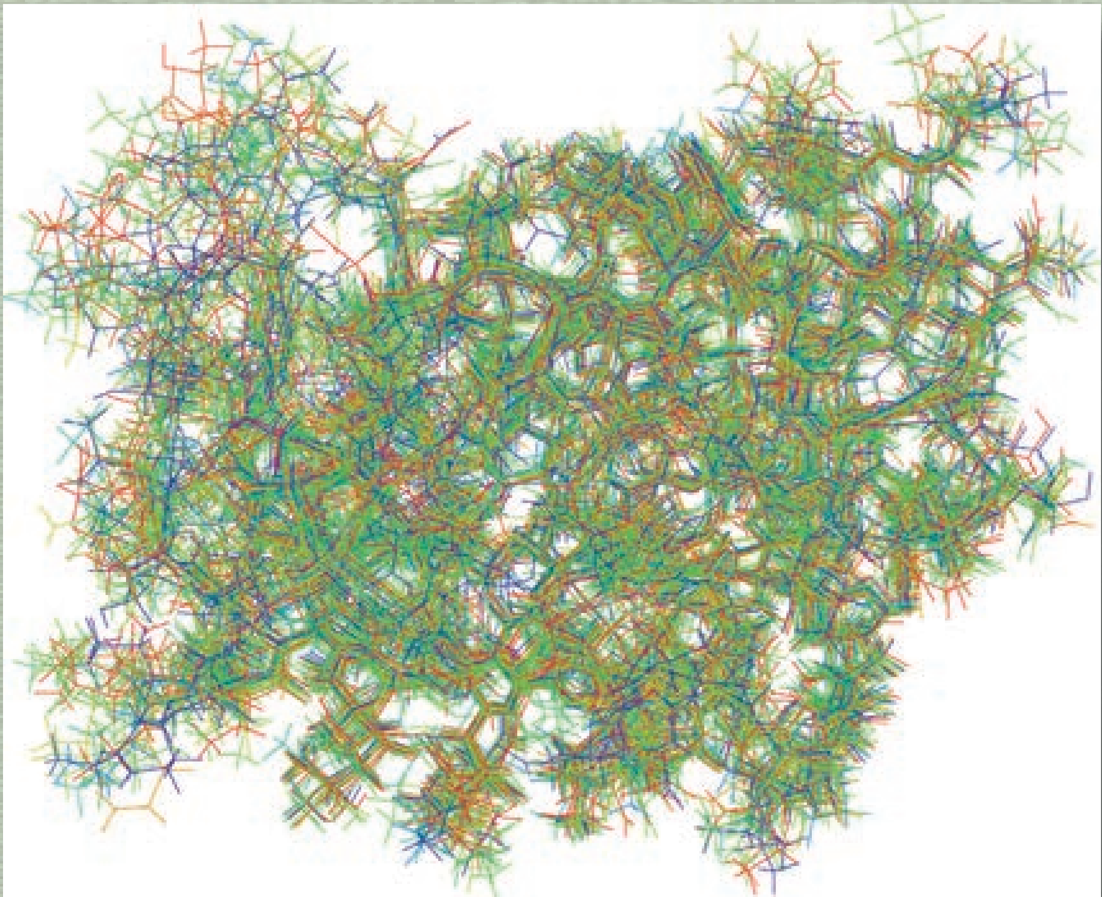
ISSN 0130-2221
ДЕКАБРЬ
2019 · №12

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Три в одном

Изобретатель Гох Пит Хиам (Goh Pit Khiam), живущий в Сингапуре, широко известен в головоломочном мире как один из самых изощренных авторов. Его произведения – а иначе придуманные им головоломки и не назовешь – отличаются изяществом и сложностью. Часто при этом на вид они кажутся довольно простыми. К таким относится и сегодняшняя головоломка.

Она состоит из трех наборов по пять одинаковых деталей и квадратной рамки 8х8. Рамка, как видно по фотографии, непростая: ее край окаймлен бортиком так, что размещать детали внутри рамки можно только через «окно» 6х6. В том варианте, который показан на фото, все размеры подогнаны так хорошо, что жульничать (например, пытаться задвинуть деталь под бортик под углом) практически невозможно. Да и зачем? Ведь так совсем неинтересно.

Чтобы попробовать решить головоломку дома, можно просто нарисовать рамку с бортиком на листе в клетку, вырезать детали из картона, а затем класть их в рамку на «окно» и только после этого уже передвигать по ней.

Детали каждого типа – это квадраты 4х4, из которых вырезано разными способами по семь единичных квадратиков.

Цель головоломки – разместить каждый из наборов полностью внутри рамки.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

КВАНТ

ДЕКАБРЬ 2019 №12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

На перекрестке идей: история открытия магнитного резонанса

В.ПТУШЕНКО

МИНУВШИЙ 2019 ГОД – ЮБИЛЕЙНЫЙ не только для таблицы Менделеева. Ровно вдвое меньше, 75 лет, исполнилось одному из наиболее значительных открытий в физике XX века – открытию электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Открытие это было сделано в предпоследнем военном, 1944 году в городе Казани Евгением Константиновичем Завойским.

Евгений Константинович Завойский (1907–1976)

А спустя два года, в 1946 году, в США было открыто родственное явление ядерного магнитного резонанса (ЯМР) Эдвардом Парселлом и независимо от него Феликсом Блохом. С тех пор круг применений ЭПР и ЯМР и родственных им явлений, называемых обобщающим термином *магнитно-резонансные явления*, чрезвычайно вырос.

На первый взгляд, эти явления несравнимы с таблицей Менделеева – как минимум, по своей известности. Про таблицу Менделеева знает каждый школьник, а многие ли, кроме специалистов, слышали про ЭПР и ЯМР? Однако в действительности даже только одно из многих применений магнитно-резонансных явлений, а именно магнитно-резонансная томография (МРТ), наверняка известно почти всем, а аббревиатуру «МРТ», украшающую фасады или крыши самых высоких домов, можно увидеть, даже не выходя из поезда, проезжающего через хоть сколь-либо крупные города.

Здесь мы кратко расскажем о том, как и в результате развития каких физических идей появилась эта область науки, какие плоды она принесла и какова судьба ее исследователей.

Радио, атомное ядро...

Открытия часто делаются на пересечении нескольких линий исследований, как на пересечении лучей прожекторов. В случае с магнитным резонансом одну из линий можно считать зародившейся в конце XIX века. Все началось с открытия электромагнитных волн Генрихом Герцем в 1888 году и изобретения радио в 1895 году Александром Степановичем Поповым. Первые десятилетия двадцатого века проходят «под знаком радио»: им увлекаются, ему внимают, от него многого ожидают. Чтобы понять его социальное значение, достаточно вспомнить фразу из записных книжек писателя Ильи Ильфа, записанную им в 1930 году: «В фантастических романах главное это было радио. При нем ожидалось счастье человечества. Вот радио есть,

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191201

а счастья нет». Несмотря на грустную усмешку великого сатирика, радио в действительности вдохновляло очень многих в те годы – и тех, кто слушал первые радиопередачи, и тех, кто собирал радиоприемники и радиопередатчики своими руками. Выросло несколько поколений радиолюбителей. Среди них был и юный Женя Завойский, со студенческой скамьи мечтавший об исследованиях вещества с помощью радио.

Вторая же линия – эта те самые исследования вещества. В 1897 году Иоганн Эмиль Вихерт и Джозеф Джон Томсон открыли электрон. Наконец-то могла появиться первая (не считая натурфилософских теорий античности) модель атома – точнее, даже несколько моделей. Самая известная из них – это модель пудинга, предложенная тем же Дж.Дж.Томсоном в 1904 году, в соответствии с которой электроны погружены в распределенный в пространстве положительно заряженный материал, как изюм в тесто (рис.1,*а*). Однако к 1911 году эксперименты Эрнста Резерфорда по прохождению альфа-частиц через золотую фольгу показали, что есть небольшое число частиц, отраженных назад. Такое было бы невозможно при прохождении частиц через «пудинг», в котором весь заряд как бы «размазан» по большому объему. Существенно изменить свое направление частицы могли бы только при столкновениях с очень маленькими элементами объема, несущими в себе весь заряд атома. Эти области компактного расположения заряда были названы ядрами. Начала свое существование *ядерная физика*.

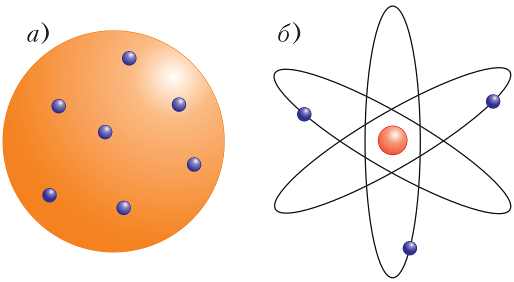


Рис. 1. Пудинговая (а) и плантерная (б) модели атома, предложенные Дж.Дж.Томсоном (1904 г.) и Э.Резерфордом (1911 г.) соответственно

Атомное ядро, ядерная физика – такой же символ первой половины двадцатого века, как и радио. И исследование атомного ядра с помощью радиоволн – это задача, в которой встречались сразу два символа физики этого времени.

...и квантовая физика

Разумеется, не только Завойский думал об этой задаче. Здесь стоит вспомнить еще одно направление развития физики. Модель атома, предложенная Резерфордом (рис.1,*б*), дала начало не только ядерной физике, но и новому этапу в становлении *квантовой физики*. Согласно этой модели, электроны в атоме вращаются вокруг маленького центрального ядра, подобно планетам вокруг Солнца (отсюда название модели – планетарная). Но в отличие от планет электроны – заряженные частицы. А заряженная частица при всяком движении, кроме равномерного прямолинейного, должна порождать электромагнитное излучение, как утверждают законы классической электродинамики, т.е. должна излучать, а значит – терять энергию. Что происходит с планетой или, нам проще это представить, со спутником, вращающимся вокруг планеты и теряющим энергию, например за счет трения о ее атмосферу? Спутник постепенно снижается и в конце концов падает на поверхность планеты. Планета при потере энергии должна была бы упасть на Солнце, а электрон – на ядро. Почему же он не падает?

Через два года, в 1913 году, Нильс Бор предположил, что в атомах электроны могут находиться только в определенных состояниях, двигаясь по так называемым *стационарным* орбитам без какого-либо излучения. А излучают они лишь при переходе с одной орбиты на другую. Иными словами, энергия электрона, а точнее, его момент импульса, может принимать лишь ряд определенных дискретных значений, т.е. *квантуется*. Напомним, что в классической механике момент импульса – это мера вращательного движения тела, тем большая, чем дальше находятся его точки от оси вращения и чем большую тангенциальную скорость они имеют. Но

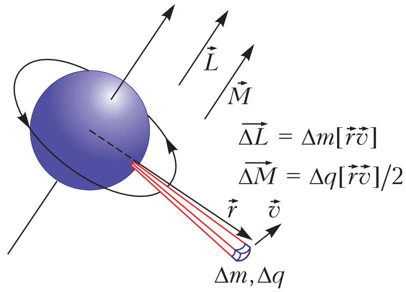


Рис. 2. Возникновение момента импульса и магнитного момента у вращающегося заряженного тела

вращение заряженной частицы – электрона – это одновременно вращение и массы, и заряда. Первое создает момент импульса $\vec{L}$, а второе – магнитный дипольный момент $\vec{M}$, т.е. делает частицу микроскопическим магнитом (рис.2).

Магнит макроскопических размеров, а стало быть, и его магнитный дипольный момент (который является векторной величиной) можно сориентировать во внешнем магнитном поле любым образом. Прошло еще почти десять лет, и немецкие физики Отто Штерн и Вальтер Герлах в эксперименте с пучками атомов (1922 г.) обнаружили, что ориентация магнитного дипольного момента атома в магнитном поле также квантуется. Они заставляли атомы серебра пролетать (естественно, в вакууме) через зазор магнита с очень неоднородным полем (рис.3). В таком поле траектория частицы, имеющей магнитный дипольный момент, искривляется: она втягивается в область более сильного магнитного поля или выталкивается из нее в зависимости от ориентации своего магнитного момента относительно направления магнитного поля. В итоге атомы с разной ориентацией магнитного момента прилетали в разные участки детектора (пластинки) на выходе из магнита. Однако вместо произвольного набора траекторий наблюдались только две.

В том же 1922 году Альберт Эйнштейн и Пауль Эренфест, анализируя эксперимент Штерна и Герлаха, предположили, что при переходе атома между состояниями с разными ориентациями его дипольного момента также должны излучаться или поглощаться электромагнитные волны, подобно тому, как это происходит при переходах электрона между разными орбитами в атоме (рис.4). На языке классической физики частица ведет себя как заряженный волчок. Под действием внешнего постоянного магнитного поля этот волчок начинает прецессировать вокруг направления поля. Если же одновременно подействовать на него дополнительным переменным магнитным полем подходящей ориентации и частоты, то волчок, не переставая прецессировать, развернется относительно постоянного магнитного поля. На квантовом языке,

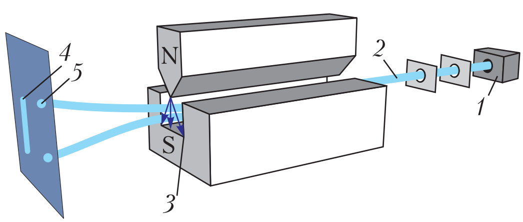


Рис. 3. Схема эксперимента Штерна и Герлаха. Здесь 1 – нагреватель, 2 – пучок атомов серебра, 3 – неоднородное магнитное поле, 4 – результат, ожидаемый на основе классических представлений о магнитном моменте, 5 – наблюдаемый результат эксперимента

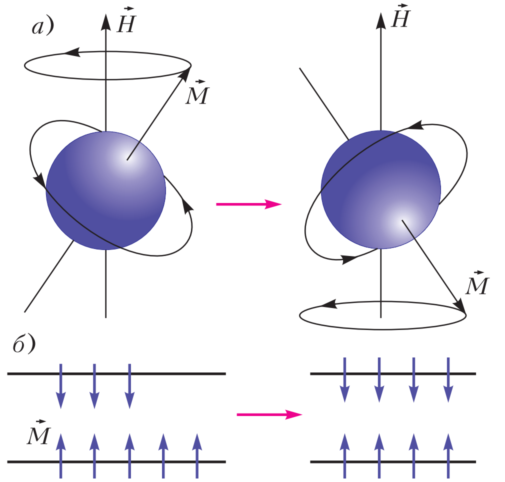
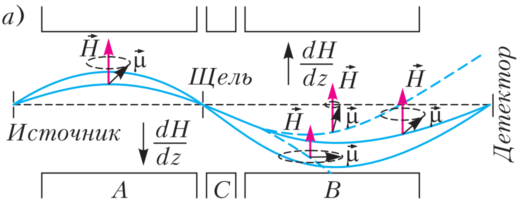


Рис. 4. Иллюстрация переходов между состояниями с разными ориентациями дипольного момента частицы $\vec{M}$ относительно внешнего магнитного поля напряженности $\vec{H}$ в терминах классической (а) и квантовой (б) физики. В обоих случаях переход обозначен красной стрелкой

частица, находящаяся на нижнем магнитном уровне, поглотит квант энергии переменного магнитного поля и перейдет на верхний магнитный уровень. И вот в 1937 году это поглощение было обнаружено американским физиком Исидором Раби, также в экспериментах с пучками, правда на этот раз – молекулярными, а исследуемый магнитный момент принадлежал ядрам, а не электронам. Его эксперимент был похож на эксперимент Штерна и Герлаха, только наряду с зазорами магнитов с сильно неоднородным полем молекулы также пролетали через участок с однородным полем, в котором их облучали радиочастотным излучением (рис.5,*а*). При поглощении этого излучения молекулы могли изменить ориентацию магнитного момента своих ядер и в результате «перейти» с одной траектории на другую. И такое поглощение было обнаружено! Причем, что важно, оно было резонансным, т.е. происходило только при определенной частоте, которая соответствовала величине кванта электромагнитного излучения, как раз равной разности между энергиями двух соседних ориентаций ядра в магнитном поле (рис.5,*б*). Это было первое в мире экспериментальное обнаружение ядерно-магнитного резонанса.

а)


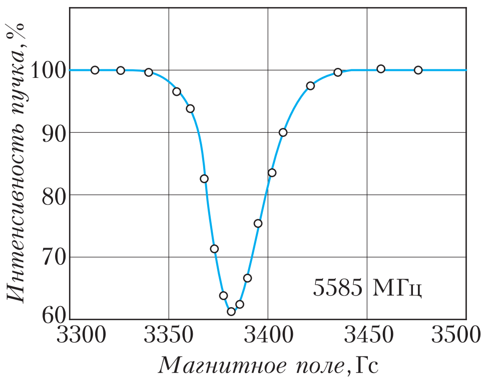
б)


Рис. 5. Схема эксперимента Раби (а) и полученная им резонансная кривая (б). Здесь А и В – магниты, создающие неоднородное магнитное поле dH/dz; С – магнит, создающий однородное магнитное поле $\vec{H}$, в котором частицы облучаются радиоизлучением и могут поглощать его и изменять ориентацию своего магнитного момента $\vec{\mu}$; щель на выходе из первого магнита пропускает только частицы с нужными траекториями

От резонанса в пучках к резонансу в конденсированном веществе

И все же это был еще не настоящий ЯМР. Дело в том, что поглотить излучение – это лишь полдела, нужно еще и избавиться от поглощенной энергии. Ведь в результате поглощения и вызванного им перехода между энергетическими уровнями происходит обеднение нижнего уровня, т.е. становится меньше таких частиц, которые могли бы поглотить следующую порцию энергии. А на верхнем уровне, наоборот, частиц становится все больше, и они могут возвращаться на нижний, испуская излучение. В конечном итоге их станет одинаковое количество (как говорят, произойдет выравнивание заселенностей уровней) и поглощение электромагнитной энергии прекратится, возникнет равновесие. Чтобы поглощение не прекращалось, нужно, чтобы частицы возвращались на нижний уровень без излучения и разность заселенностей уровней всегда оставалась ненулевой. Обычно так и происходит в системе любых частиц. Безызлучательная потеря энергии, или *релаксация* возбужденного состояния, происходит в любой системе, где есть взаимодействие частицы с каким-либо окружением. А какое окружение у частиц, летящих в вакууме?! Другое дело – в веществе: там ядра находятся в составе кристаллической решетки (если исследуется твердое вещество) или же окружены молекулами растворителя (если вещество жидкое). Взаимодействия, которые испытывает ядерный спин с окружением, очень разнообразны, и именно они определяют характеристики резонансного поглощения радиоизлучения магнитным диполем ядра: форму, положение и интенсивность линий поглощения, их зависимость от интенсивности излучения, температуры, механических напряжений и многих других факторов, которые только могут играть роль в каждом конкретном случае. И именно эта связь характеристик сигнала магнитного резонанса со свойствами окружения и делает его таким замечательным методом исследования вещества!

Но магнитный резонанс в веществе еще предстояло открыть. И это оказалось очень непросто. То, что удалось сделать Раби в пучке невзаимодействующих молекул, никак не удавалось сделать в конденсированном состоянии (т.е. в жидкости или твердом теле). Важную роль здесь играл и метод регистрации, и выбор вещества. Для наблюдения электронного парамагнитного резонанса необходимо было исследовать парамагнитные вещества, т.е. вещества, обладающие собственными микроскопическими магнитами электронного происхождения. Наблюдать ядерный магнитный резонанс можно было и в диамагнитных веществах, обладающих только ядерными магнитами. Еще за несколько лет до Раби поиском ЯМР в кристаллических диамагнитных солях начал заниматься голландский физик Корнелис Якоб Гортер. Его поиски оказались безуспешными, но приобретенный им опыт работ позволил ему дать ценные советы Раби, которые и помогли сделать открытие. А опыты Раби, в свою очередь, вдохновили Завойского на поиск ЯМР.

К тому времени Завойский уже активно занимался изучением взаимодействия радиочастотных электрических полей с веществом, но сведения об открытии Раби указали ему наиболее интересное направление поисков. Поиски эти были на грани технических возможностей того времени, поскольку поглощаемая веществом при резонансе энергия радиочастотного излучения чрезвычайно мала. Чтобы ее зарегистрировать, Гортер использовал прямой метод: он измерял, насколько нагрелось исследуемое вещество в результате облучения. Завойский же разработал метод, основанный на измерениях свойств самого генератора радиоизлучения; этот косвенный метод оказался очень чувствительным. Полностью погрузившись в исследования поглощения радиоизлучения веществом, помещенным в магнитное поле, весной 1941 года Евгений Константинович Завойский со своими единомышленниками Семеном Александровичем Альтшулером и Борисом Михайловичем Козыревым смогли увидеть первые сигналы ЯМР от ядер водорода воды.

Но начавшаяся война и непонимание коллег не позволили довести исследования до конца. Работы Завойского были признаны бесперспективными, экспериментальная установка уничтожена. Условия военного времени вскоре заставили его заняться работами, имеющими военное приложение, а также многочисленными общественными работами, характерными для военного времени: дежурством в пожарных командах, рытьем окопов, военной подготовкой, заготовкой сена и дров для университета и т.п. Однако в 1943 году, как только появилась малейшая возможность заняться своими основными научными работами, Завойский вернулся к предвоенным исследованиям. Было ясно, что для этих измерений нужно однородное магнитное поле. Из-за отсутствия хороших магнитов он стал работать с магнитными полями, создаваемыми обычным соленоидом (катушка из нескольких витков провода) – более однородными, но относительно слабыми (рис.6; фото из музея Е.К.Завойского). В таких слабых полях измерить поглощение радиоволн атомными ядрами очень

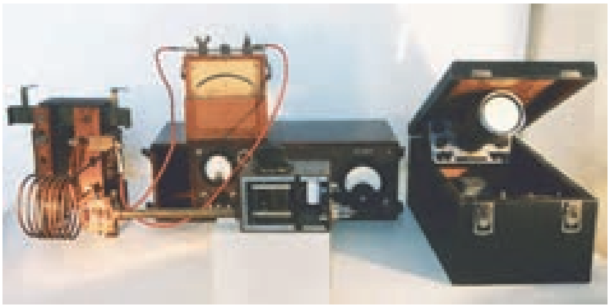


Рис. 6. Экспериментальная установка Е.К.Завойского, 1943–1944 годы

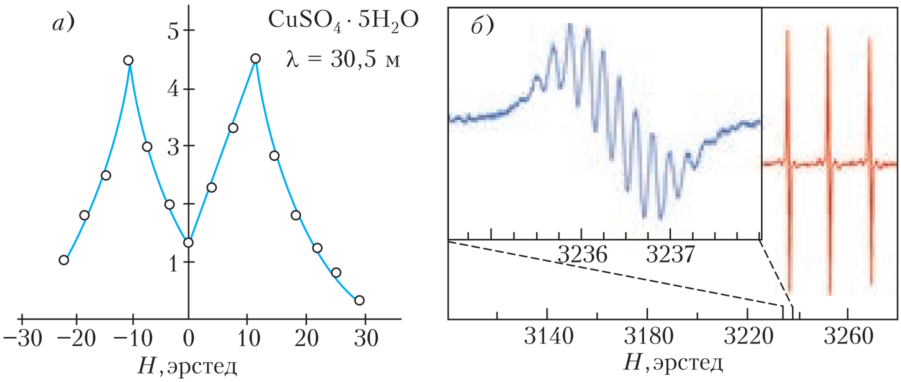


Рис. 7. Спектр электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), впервые полученный Е.К.Завойским в 1944 году (а) и один из «современных» примеров спектра ЭПР (б)

сложно: у ядра очень маленький магнитный момент, его взаимодействие со слабым магнитным полем приводит к совсем ничтожному эффекту. По сравнению с ядром электрон является гораздо более сильным магнитом – его магнитный момент в тысячи раз больше, чем у ядра. И наблюдать, как поворачивается магнитный момент электрона в слабом магнитном поле (поглощая при этом энергию радиоволн), было гораздо проще. В 1944 году Завойский смог обнаружить резонансное поглощение радиоизлучения в парамагнитных кристаллах, помещенных в магнитное поле (рис.7). Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) был открыт.

Эстафета открытий

Спустя два года, два американских физика, Эдвард Парселл и Феликс Блох, независимо друг от друга открыли поглощение энергии радиоволн ядрами водорода (ЯМР) в воде и в парафине. Эти открытия сразу были оценены физиками в Европе и в США (в СССР – тоже, но примерно с десятилетним запозданием). Начался вал исследований в этой области. Одна за другой, открывались все новые и новые разновидности магнитных резонансов (поглощение радиоизлучения ядрами, обладающими квадрупольным электрическим моментом, ферромагнитными и антиферромагнитными веществами и др.), все новые их свойства (например, сверхтонкая структура спектров ЭПР, обусловленная магнитным взаимодействием электронов и ядер), все новые методы (импульсные варианты магнитно-резонансной спектроскопии, так называемые двойные резонансы и др.). В нашей стране С.А. Альтшулер теоретически предсказал акустический парамагнитный резонанс – резонансное поглощение звука парамагнитным веществом, помещенным в магнитное поле.

Возможно, одним из самых важных для приложений ЯМР в химии (и не только) стало открытие так называемого *химического сдвига*. Атомное ядро «чувствует» расположение соседних электронов в молекуле, в итоге частота, при которой оно дает сигнал ЯМР, будет немного различаться у двух одинаковых ядер, принадлежащих разным молекулам или даже разным атомным группам в составе одной молекулы. А значит, получив спектр ЯМР какого-либо вещества, можно определить, какие группы входят в состав его молекул, сколько их и даже как они друг относительно друга расположены – т.е. определить химическую структуру молекулы! Поэтому ЯМР уже с конца 1950-х годов стал одним из важнейших аналитических методов в химии. Он был просто незаменим при изучении сложных органических молекул, а со временем стал эффективно применяться и для исследования пространственной структуры белков, наряду с методом рентгеноструктурного анализа (рис.8; выполнен с использованием базы данных 3-мерных структур белков). С помощью ЯМР удалось увидеть подвиж-

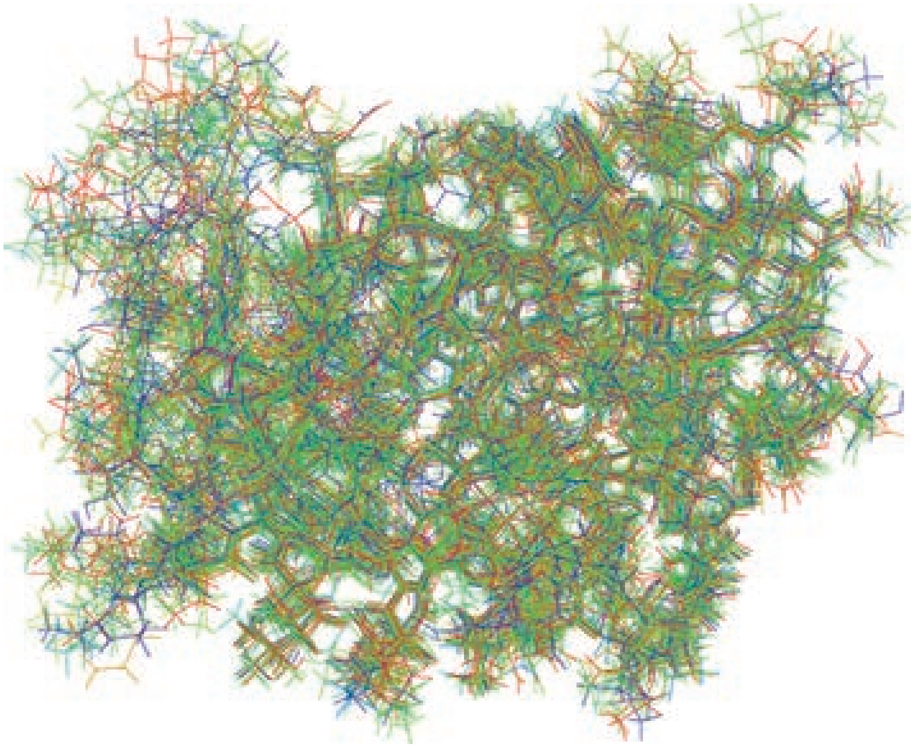


Рис. 8. Пространственные структуры белка цитохрома с, полученные методом ЯМР-спектроскопии. Видна подвижность белка в растворе (разными цветами показаны структуры белка в разные моменты времени)

ность белка в растворе, тогда как рентгеноструктурный анализ позволяет работать только с закристаллизованными белками и информации о подвижности белка в его естественной среде дать не может.

Но еще большую славу магнитно-резонансной спектроскопии принесло применение так называемого *градиентного магнитного поля*. Первые исследователи ЯМР и ЭПР стремились к созданию наиболее однородного магнитного поля: ведь если напряженность поля будет различаться в разных участках изучаемого объекта, то находящиеся в них ядра или электроны окажутся в разных условиях и дадут сигналы при разных частотах. В итоге узкая резонансная линия «размажется» и исказит свою форму или вовсе перестанет быть видна. Но если создать неоднородное магнитное поле, изменяющееся не как попало, а, например, равномерно и только в одном направлении (т.е. создать магнитное поле, имеющее *градиент* величины напряженности), то можно различить сигналы одинаковых ядер, расположенных в разных участках исследуемого образца вдоль градиента поля. Иными словами, увидев, насколько сдвинулась резонансная линия какого-либо ядра, можно определить, где находится это ядро. А значит, можно построить пространственную картину исследуемого объекта! Изменяя направление градиента поля, можно получить полноценное трехмерное изображение, причем изображение его «внутренностей», не нарушая целостности объекта, т.е. без каких-либо разрезов, внедрений зондов и тому подобное.

Этот метод широко известен под названием магнитно-резонансной томографии (МРТ), или ЯМР-томографии, и становится в последнее время одним из основных важнейших методов диагностики в медицине. Метод ЭПР-томографии менее распространен, но также используется в медицинских исследованиях.

Путь к признанию

Можно смело сказать, что у методов, эстафета открытия которых празднует в этом году свой 75-летний юбилей, счастливая судьба. Судьба же их первооткрывателей оказалась разной. Э.М.Парселл и Ф.Блох очень скоро после открытия получили Нобелевскую премию и стали в ряд самых именитых физиков в западной науке, возглавляя в разные периоды крупные исследовательские физические центры или общества. Е.К.Завойский продолжал работу в области ЭПР в Казанском университете (где он работал со студенческой скамьи и где было сделано его выдающееся открытие) лишь в течение трех лет после своего открытия. Отсутствие даже простых приборов для проведения исследований и невозможность получить их через официальные каналы государственного снабжения науки (а других практически не было) делали ситуацию бесперспективной. Из-за невозможности продолжения работы, а также из-за невыносимых условий жизни, угрожавших здоровью семьи, в 1947 году Завойский принял предложение И.В.Курчатова покинуть Казань и заняться работами по созданию советского ядерного оружия. Следующие четыре года он работал в ядерном центре в городе Сарове, однако горько сожалел об этой своей деятельности. Как только появилась возможность, он перешел на работу в Лабораторию измерительных приборов АН СССР, известную нам сейчас как Институт атомной энергии имени И.В.Курчатова, и занялся мирными приложениями – созданием сверхбыстрых электронно-оптических преобразователей, пучков ядер с поляризованными спинами и, наконец, исследованиями плазмы, что было необходимо для реализации управляемого термоядерного синтеза.

Но свои работы по ЭПР Завойский, к счастью для отечественной науки, успел опубликовать до того момента, когда все научные работы в стране стали рассматриваться как секретные. Поэтому они были переведены на английский язык и опубликованы в специальных англоязычных журналах, которые СССР издавал для распространения за границей сведений о работах советских ученых. (Очень скоро выпуск этих журналов прекратился.) Так работы Завойского стали известны во всем мире, и приоритет его не был потерян для нашей страны.

В 1957 году за открытие ЭПР Завойский получил Ленинскую премию, его портрет и статья были опубликованы в газете «Правда». С этого момента иностранные ученые, увидев, наконец, что загадочный автор первых в мире работ по ЭПР, исчезнувший десять лет назад со страниц научных журналов, существует в действительности и жив, начали ежегодно выдвигать его кандидатуру на Нобелевскую премию. С 1958 по 1966 год его 15 раз выдвигали ученые из Швеции, Швейцарии, Великобритании, Нидерландов и ГДР, а также 7 раз – соотечественники (подробнее «Нобелевская история» Е.К. Завойского описана в журнале «Наука и жизнь» №12 за 2019 г.). Но количество работ «Нобелевского уровня» в эти годы было очень велико, списки претендентов содержат десятки, а то и сотни имен, известных нам сейчас по учебникам, а премии могли получить лишь несколько человек (напомним, что Нобелевские премии в этот период получили советские физики И.Е.Тамм, И.М.Франк, П.А.Черенков, Л.Д.Ландау, А.М.Прохоров и Н.Г.Басов). Возможно, свою негативную роль сыграло и то обстоятельство, что Завойского почти не выпускали из СССР на международные конференции, а живое общение с иностранными коллегами всегда способствовало международному признанию ученого. А может быть, Завойский просто не успел получить свою заслуженную премию: он умер в 1976 году, не дожив до 70 лет.

Тем не менее, приоритет Завойского в открытии ЭПР признан во всем мире, его имя помнят и ценят. Уже более четверти века назад учреждена и ежегодно вручается ученым из самых разных стран мира престижная Международная премия имени Е.К.Завойского за научные достижения в области магнитного резонанса.

Египетские дроби

С.КУЗНЕЦОВ

Многим, наверное, известно, что в Древнем Египте дробные числа записывали довольно своеобразным способом. Египтяне использовали только дроби с числителем 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, такие дроби называются *аликвотными*, а также дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$. Остальные дроби представлялись в виде сумм упомянутых выше дробей; при этом египтяне следили, чтобы все дроби в сумме были различны.

Для чего же может быть полезно такое странное представление дробей? Рассмотрим следующую задачу: нужно разделить 5 лепешек поровну между 8 людьми. Ясно, что каждый должен получить $\frac{5}{8}$ лепешки – можно разделить каждую лепешку на 8 равных частей и дать каждому по 5 таких частей. Египетская дробь, однако, дает более экономный способ разделения: поскольку $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, достаточно разделить 4 лепешки пополам (и каждому дать по половине), и только последнюю, 5-ю, лепешку делить на 8 частей.

Возникает естественный вопрос – а всякое ли рациональное число от 0 до 1, т.е. правильную дробь, можно представить таким образом. Этот вопрос нетривиален из-за требования различности дробей: нельзя просто разложить дробь $\frac{k}{n}$ в сумму $\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k \text{ раз}}$.

Уже в древнеегипетском источнике – папирусе Ринда – мы находим таблицу разложений в суммы различных аликвотных дробей для чисел вида $\frac{2}{n}$.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191202

К счастью, в современных обозначениях не составляет труда решить задачу и в общем виде. Для этого воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Применяя это тождество, мы будем раскладывать данную аликвотную дробь в сумму других аликвотных дробей, но уже с бóльшими знаменателями. Тем самым мы будем избегать повторяющихся дробей в разложении. Например, упомянутая ранее задача из папируса Ринда в общем виде решается так:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Аналогично можно поступить и с произвольной дробью $\frac{k}{n}$: сначала представить ее в виде суммы k одинаковых дробей $\frac{1}{n}$, а потом, оставив первую из них в покое, начать «разгонять» остальные – заменить вторую на $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, к третьей применять это же равенство до тех пор, пока все компоненты не станут больше $\frac{1}{n(n+1)}$, и так далее.

Таким методом действительно можно разложить произвольное число в сумму различных аликвотных дробей, однако их количество и их знаменатели окажутся, в общем случае, астрономически велики. Фибоначчи предложил другой метод построения египетской дроби (суммы различных аликвотных дробей) для данной обыкновенной дроби $\frac{k}{n}$, где $k < n$. Через $\lceil n/k \rceil$ обозначается наименьшее целое число, не меньшее $\frac{n}{k}$. (Поскольку $\frac{n}{k} > 1$, это число не меньше 2.) Далее,

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{\lceil n/k \rceil} + \frac{k\lceil n/k \rceil - n}{n\lceil n/k \rceil}.$$

Первая дробь в этом разложении уже аликвотная, а ко второй дроби, если она окажется не аликвотной, мы опять применим ту же процедуру.

Поскольку $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$, новый числитель $k\lceil n/k \rceil - n$ окажется меньше старого числителя k. Таким образом, наш процесс не может продолжаться бесконечно и остановится не более чем через k шагов. С другой стороны, несложная выкладка показывает, что знаменатели получаемых аликвотных дробей все время растут, а значит, все эти дроби различны.

Алгоритм Фибоначчи эффективнее показанного ранее метода, однако и он в некоторых случаях дает неоптимальные разложения. Например,

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363},$$

в то время как метод Фибоначчи даст разложение

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180193} + \frac{1}{1527612795642093418846225}.$$

Здесь эффективности алгоритма мешает его *жадность*: он всегда пытается вычленить из $\frac{k}{n}$ наибольшую возможную аликвотную дробь, $\frac{1}{\lceil n/k \rceil}$ – в нашем случае это $\frac{1}{25}$, в то время как более скромное начало с $\frac{1}{33}$ дает лучший результат.

Современные методы позволяют раскладывать дробь в сумму различных аликвотных довольно эффективно. Например, М.Воуз в 1985 году построил алгоритм, раскладывающий дробь $\frac{k}{n}$ в сумму не более чем $C\sqrt{\log_2 n}$ аликвотных (здесь C – константа, не зависящая от k и n).

С египетскими дробями связаны несколько открытых вопросов теории чисел. Так, гипотеза Эрдёша–Штрауса утверждает, что любая дробь с числителем 4 может быть разложена в сумму трех (!) аликвотных, независимо от значения знаменателя n. Эту гипотезу проверили на компьютере для значений n до 10^{14}, однако доказательства для всех n пока не найдено.

В заключение расскажем еще об одном применении разложения дроби в сумму аликвотных – правда, не обязательно различных. Начнем с известной задачи: даны два бикфордовых шнура, каждый из которых горит ровно 1 минуту, но, возможно, неравномерно. Как с помощью этих шнуров отмерить полторы минуты? Поскольку $1,5 = 1 + \frac{1}{2}$, мы можем сначала отмерить минуту с помощью одного шнура, а затем поджечь второй шнур *с двух сторон* – тогда он сгорит за полминуты.

Эту конструкцию можно обобщить на произвольную аликвотную дробь: если мы будем поддерживать на шнуре одновременно n точек горения, то шнур сгорит за $\frac{1}{n}$ минут. Например, подожжем шнур с краю и в середине. Средний огонек пойдет в обе стороны, т.е. раздвоится. Таким образом, один кусок шнура будет гореть с двух сторон, а другой – с одной. Если первый шнурок догорит раньше, то подожжем второй, опять же, изнутри. Иначе – погасим один из концов первого шнурка и подожжем его изнутри. Будем так действовать до тех пор, пока все шнурки не догорят, поддерживая в любой момент времени ровно 3 точки горения. Тогда шнур сгорит за $\frac{1}{3}$ минуты.

Произвольную же дробь можно разложить в сумму аликвотных – таким образом, мы научились отмерять произвольное время, выраженное в минутах рациональным числом. При этом чем меньше аликвотных дробей в сумме, тем меньше шнуров нам потребуется.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2586–М2589 предлагались на XLI Турнире городов.

Автор задач Ф2593–Ф2596 – С.Дмитриев.

Задачи М2586–М2589, Ф2593–Ф2596

М2586. Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовем две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин четно.

М.Скопенков, А.Заславский

М2587. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят а) ровно три фишки; б) ровно четыре фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Е.Бакаев

М2588*. Точка M лежит внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD .$$

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ а) вписанный; б) описанный.

Н.Седракян

М2589*. Дана возрастающая последовательность положительных чисел $\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, …, либо с некоторого момента постоянна.

И.Митрофанов

Ф2593. Две одинаковые по длине дорожки в парке заметены снегом. Два дворника, Вася и Петя, должны очистить дорожки от снега. Первую дорожку они начали чистить с двух концов, и, когда она была очищена, выяснилось, что Вася очистил 20 метров длины. Вторую дорожку они тоже начали чистить с двух концов, но теперь Вася увеличил скорость в 3 раза, а Петя сохранил прежний темп. Когда обе дорожки были очищены, оказалось, что на Васину долю пришлось всего 50 метров. А сколько метров дорожек очистил Петя?

Ф2594. Для переправки цистерн с нефтепродуктами по Каспийскому морю из Баку в Астрахань во время второй мировой войны их заполняли не полностью, и в этом случае стальная цистерна вместе со стальной платформой и стальными колесами плавала в воде. Грузоподъемность современной цистерны для перевозки бензина 60 т. Это при полном заполнении кузова – емкости для хранения жидкости. Масса тары цистерны 23,4 т, объем кузова $73{,}1\ м^3$. Какое максимальное количество бензина (в тоннах) можно переправить морем таким способом в одной цистерне за один рейс? Плотность стали $7{,}8\ т/м^3$, плотность воды в Каспии – примерно $1\ т/м^3$.

Ф2595. «Водность» тумана (облака) – это общая масса водяных капелек в единице объема тумана. Над землей на высоте 1 км находится неподвижное облако с водностью $3\ г/м^3$. Облако окружено прозрачным воздухом, температура которого 273 К, а давление 10^5 Па. Какова средняя температура внутри облака? Давление насыщенных паров воды при 273 К равно 611 Па.

Ф2596. Чайник потребляет от электрической сети мощность 2 кВт. Масса воды, которую Вася с небольшим запасом наливает в чайник, равна 0,3 кг (а в чашку помещается 0,2 л воды). В таком чайнике Вася нагревает для приготовления чая чистую и первоначально холодную ($20\ °C$) воду, доводя ее до кипения. Как только вода (через одну минуту после включения чайника) начинает кипеть, Вася тут же отключает чайник от сети, но вода продолжает кипеть еще примерно 10 секунд. Каков КПД использования электроэнергии, если считать полезной только то количество теплоты, которое нужно, чтобы вода, наливаемая в чашку, имела температуру $100\ °C$? Удельная теплоемкость воды $4200\ Дж/(кг \cdot К)$.

Решения задачи М2574–М2577, Ф2581–Ф2584

М2574. *Дано натуральное число n. Докажите, что числа вида $x^n + y^n$ при всевозможных натуральных x и y дают не более чем $\frac{n(n+1)}{2}$ остатков при делении на n^2.*

Заметим, что остаток числа x^n при делении на n^2 зависит только от остатка числа x при делении на n. Действительно,

$$(x+n)^n = x^n + C_n^1 \cdot n + C_n^2 \cdot n^2 + \ldots + C_n^n \cdot n^n = x^n + n^2 + tn^2,$$

где t – целое число; таким образом, от прибавления (или вычитания) к числу x числа n остаток n-й степени при делении на n^2 не меняется.

Заменив в выражении $x^n + y^n$ числа x и y на их остатки при делении на n, считаем теперь, что $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Кроме того, выражение $x^n + y^n$ симметрично, поэтому можно рассматривать лишь выражения с $0 \le x \le y \le n-1$.

Для фиксированного $y \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ имеем $y+1$ соответствующих значений x. Итого, имеем не более $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ пар $0 \le x \le y \le n-1$, что доказывает требуемую в задаче оценку.

Н.Сафаеи

М2575. *Дано вещественное число $t \in (1; 2)$. Докажите, что существует многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, у которого все коэффициенты равны ± 1 ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$), и такой, что $|P(t) - 2019| \le 1$.*

Сведем утверждение задачи к некоторому более общему утверждению.

Последовательность положительных чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ назовем *разновесом*, если $b_0 \le 1$ и $b_k \le 1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_{k-1}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем следующую **лемму о разновесах**: *пусть число a таково, что $|a| \le 1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ для некоторого разновеса $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда в выражении $\pm b_n \pm b_{n-1} \pm \ldots \pm b_0$ можно выбрать знаки «плюс» или «минус» так, чтобы значение этого выражения отличалось от a не более чем на 1.*

(Лемму можно переформулировать в терминах взвешиваний так: гири масс $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ можно разложить на две чаши весов так, чтобы разность масс на чашах отличалась от a не более чем на 1.)

Докажем лемму индукцией по n.

База: при $n = 0$ каждое число $a \in [-b_0 - 1; b_0 + 1]$ отличается от b_0 или от $-b_0$ не больше чем на 1.

Переход. Пусть утверждение верно для разновеса $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Рассмотрим разновес $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Число a для определенности будем считать неотрицательным (иначе сменим все знаки в выражении $\pm b_n \pm b_{n-1} \pm \ldots \pm b_0$). Рассмотрим число $a' = a - b_n$. Тогда

$$a' \le (1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_n) - b_n = 1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}.$$

С другой стороны,

$$-a' = b_n - a \le b_n \le 1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}.$$

Таким образом, $|a'| \le 1 + b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$. Тогда можно применить лемму к числу a' и разновесу $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$: выберем знаки так, чтобы $|(\pm b_{n-1} \pm b_{n-2} \pm \ldots \pm b_0) - a'| \le 1$, а значит, $|(b_n \pm b_{n-1} \pm b_{n-2} \pm \ldots \pm b_0) - a| \le 1$, что нам и требовалось. Лемма доказана.

Для решения задачи теперь достаточно положить $a = 2019$ и заметить, что для некоторого n число t^n больше a, а числа $1, t, t^2, \ldots, t^n$ представляют собой разновес. Докажем последнее утверждение индукцией по n. При $n = 1$ имеем $t < 1 + 1$ – верно по условию. Сделаем переход: предположим, что $t^{n-1} \le 1 + (1 + t + \ldots + t^{n-2})$. Тогда

$$t^n = t \cdot t^{n-1} \le 2 \cdot t^{n-1} = t^{n-1} + t^{n-1} \le \le 1 + (1 + t + \ldots + t^{n-2}) + t^{n-1},$$

что завершает доказательство перехода.

Н.Сафаеи, П.Кожевников

М2576. *Доска 8×8 разрезана на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1).*

а) Докажите, что длина границы между горизонтальными и вертикальными доминошками не превышает 52.

б) Найдите максимально возможную длину границы между горизонтальными и вертикальными доминошками.*

а) У каждой из 32 доминошек разбиения есть две короткие стороны (длины 1) и две длинные (длины 2). Заметим, что если горизонтальная и вертикальная доминошки граничат, то хотя бы одна из них примыкает к другой доминошке короткой стороной. Поэтому для решения задачи достаточно найти среди всех 64 коротких сторон всех доминошек хотя бы $64 - 52 = 12$ коротких сторон, которые примыкают либо друг к другу, либо к краю доски.

Пусть к краю доски примыкают l длинных сторон доминошек. Периметр доски равен 32, поэтому к краю доски примыкают $32 - 2l$ коротких сторон; положим $2k = 32 - 2l$, тогда $l = 16 - k$.

Если $k \ge 6$, то уже найдено $2k \ge 12$ коротких сторон, примыкающих к краю доски. Пусть $k \le 5$, тогда $l - 2k = 16 - 3k > 0$, т.е. к краю доски примыкает длинных сторон на $16 - 3k$ больше, чем коротких. Следовательно, на периметре доски найдется $t \ge 16 - 3k$ пар соседних (имеющих общий конец) длинных сторон. Каждой такой паре соответствует пара доминошек, примыкающих короткими сторонами друг к другу. Значит, мы имеем по крайней мере $2t + 2k \ge 2(16 - 3k) + 2k = 32 - 4k \ge \ge 12$ коротких сторон, которые примыкают либо друг к другу, либо к краю доски.

б) **Ответ:** 50.

Для доказательства оценки усилим рассуждения из пункта а) и докажем, что найдется хотя бы $64 - 50 = 14$ коротких сторон, которые примыкают либо друг к другу, либо к краю доски. Из рассуждения в пункте а) следует, что это количество может оказаться меньше 14 только при k, равном 5 или 6. При этом (i) если $k = 5$, то на периметре доски не должны соседствовать друг с другом короткие стороны (иначе увеличится число t пар соседствующих длинных сторон и мы получим оценку $2t + 2k \ge 2(16 - 3k + 1) + 2k = 34 - 4k = = 14$; (ii) если же $k = 6$, то на доске вообще не должно быть пар примыкающих друг к другу коротких сторон, в частности, не должно быть пар соседствующих друг с другом длинных сторон на периметре доски.

Докажем, что ни одна из двух указанных возможностей не реализуется. Предварительно отметим, что к каждой стороне доски должно примыкать четное количество коротких сторон.

(i) Имеем $2k = 10$ коротких сторон, примыкающих к краям доски, значит, на одной из сторон доски не менее 3, а значит, не менее 4 коротких и не более 2 длинных сторон. Ясно, что тогда среди коротких сторон на периметре найдутся две соседствующие – противоречие.

(ii) Имеем $2k = 12$ коротких сторон, примыкающих к краям доски $ABCD$ (рис.1).

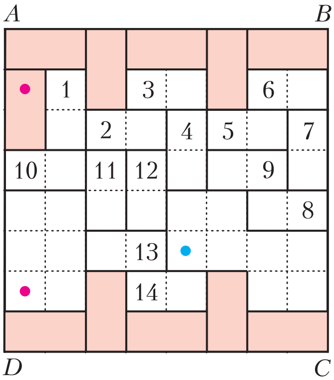


Рис. 1

Так как не должно быть пар соседствующих друг с другом длинных сторон на периметре доски, к каждой стороне доски примыкают не менее двух коротких сторон. Значит, к какой-то стороне доски, для определенности к горизонтальному отрезку AB, примыкают ровно две короткие стороны, в таком случае примыкание к AB определяется так: длинная-короткая-длинная-короткая-длинная. Тогда к каждому из отрезков AD и BC примыкает не менее 4 коротких сторон, а значит, ровно по 4; к CD тогда примыкают ровно две короткие стороны.

Далее, обе клетки, помеченные красными точками, не могут быть покрыты горизонтальными доминошками, иначе на AD найдутся два соседних длинных отрезка. Для определенности, пусть верхняя клетка с красной точкой покрыта вертикальной доминошкой, так что на рисунке 1 закрашены зафиксированные в настоящий момент доминошки. Теперь, так как никакие доминошки не могут примыкать друг к другу короткими сторонами, мы последовательно однозначно определяем положение доминошек, закрывающих клетки с номерами 1–14. Но после этого закрыть, не нарушая правила, клетку, помеченную синей точкой, невозможно. Противоречие.

Пример с длиной границы 50 приведен на рисунке 2. Тем самым, доказанная в пункте б) оценка точна, и задача полностью решена.

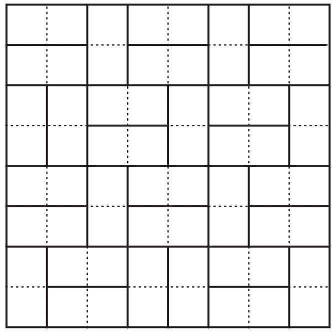


Рис. 2

В завершение несколько слов об истории задачи. Пункт а) (автор – Б.Френкин) был предложен летом 2019 года на Турнире матбоев имени А.П.Савина, причем на тот момент жюри не знало точного значения максимума. Задача не была решена ни одной из команд, однако участница турнира Е.Аржанцева построила пример с длиной границы, равной 50, после чего автору удалось усилить оценку до точной.

А.Заславский

M2577*. *Внутри остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle CBQ$ и $\angle ACP =$*

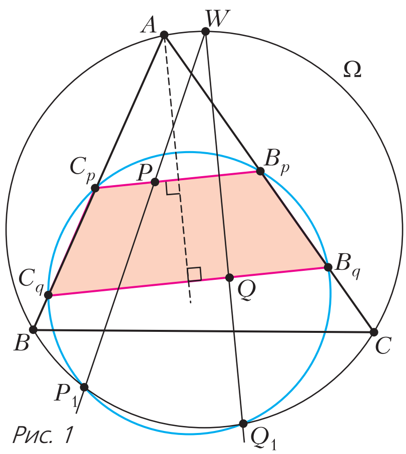


Рис. 1

$= \angle BCQ$ *(т.е. изогонально сопряженные точки). Через точки P и Q провели прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC (рис.1). Эти перпендикуляры пересекают отрезки AB и AC в точках B_p, B_q, C_p, C_q. Пусть W – середина дуги BAC описанной окружности Ω треугольника ABC. Прямые WP и WQ пересекают вторично Ω в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности трапеции $B_pB_qC_qC_p$.*

Докажем, что P_1 лежит на окружности $\left(B_pB_qC_qC_p\right)$ (для Q_1 доказательство будет аналогичным). Проведем рассуждения для случая, когда P_1 лежит на дуге BC, не содержащей A (иначе рассуждения в направленных углах аналогичны). Каждый из вписанных углов $\angle BP_1W$, $\angle CP_1W$ равен четверти дуги BWC, или $90° - \frac{\angle BAC}{2}$ (рис.2). Этому же значению

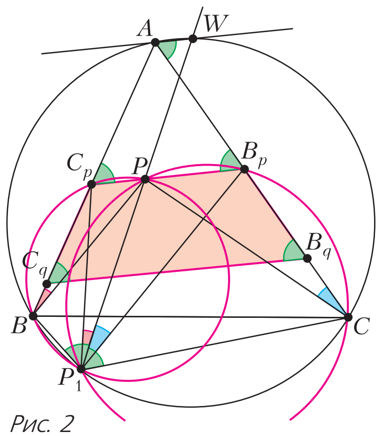


Рис. 2

равны углы $\angle AB_pC_p$ и $\angle AC_pB_p$ в равнобедренном треугольнике AB_pC_p. Из равенства $\angle BP_1P = \angle AC_pP$ следует, что точки P_1, B, C_p и P лежат на одной окружности, откуда $\angle C_pP_1P = \angle C_pBP$. Аналогично, $\angle B_pP_1P = \angle B_pCP$, таким образом, $\angle C_pP_1B_p = \angle C_pBP + \angle B_pCP$. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что $\angle C_pC_qB_p = \angle C_pBP + \angle B_pCP$.

Пусть P_a, P_b, P_c – проекции точки P на прямые BC, CA, AB соответственно; аналогично определим проекции Q_a, Q_b, Q_c

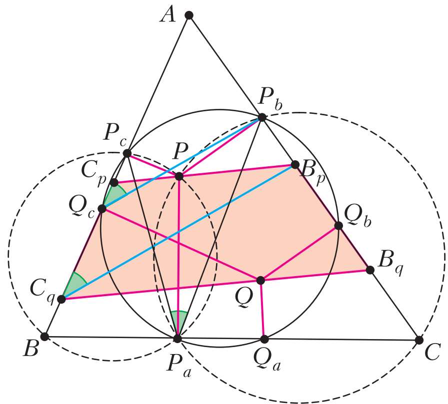


Рис. 3

точки Q (рис.3). Как известно, точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c лежат на одной окружности (см. например, статью «Изогонально сопряженные точки» в «Кванте» №1 за 2016 г.). Используя также окружности $\left(BP_cPP_a\right)$ и $\left(CP_bPP_a\right)$, имеем

$$\angle C_pBP + \angle B_pCP = \angle P_cBP + \angle P_bCP =$$

$$= \angle P_cP_aP + \angle P_bP_aP = \angle P_cP_aP_b = \angle P_cQ_cP_b.$$

Итак, достаточно установить, что $\angle C_pC_qB_p = \angle P_cQ_cP_b$, т.е. что $C_qB_p \parallel Q_cP_b$. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее равнобедренный треугольник AB_pC_p в AC_qB_q. Из условия изогональности $\left(\angle BAP = CAQ\right)$ следует, что при этом преобразовании P переходит в Q и, следовательно, P_b переходит в Q_c. Отсюда $AP_b : AB_p = AQ_c : AC_q$, следовательно, $C_qB_p \parallel Q_cP_b$. Задача решена.

Отметим, что данная задача обобщает известные факты о точках касания со сторонами и описанной окружностью так называемой «полувписанной» окружности (т.е. окружности, касающейся прямых AB, AC и окружности (ABC)). Действительно, в «предельном» случае $P = Q = I$ точки B_p и B_q «склеиваются» в точку касания окружности с прямой AC. Аналогично имеем точки касания $C_p = C_q$ и $P_1 = Q_1$.

В конструкции, рассматриваемой в задаче, можно обнаружить много красивых фактов. Сюжет на эту тему планируется напечатать в одном из следующих номеров журнала «Математическое просвещение».

П.Бибиков, Ф.Петров

Ф2581.[1] *Гелий находится в сосуде кубической формы с ребром $a = 1$ м и жесткими стенками, имеющими нулевую теплоемкость и нулевую теплопроводность. Сосуд движется со скорость $v = 1$ км/с в направлении жесткой стенки. Удар – и сосуд мгновенно остановился. До удара давление газа было $p = 1$ Па, а температура была $T = 1$ К. Каковы установившиеся давление и температура внутри сосуда после удара? Каким было максимальное давление газа на одну из стенок сосуда после удара?*

Понятно, что в состоянии теплового равновесия, которое установится после удара, кинетическая энергия хаотического теплового движения молекул с начальной температурой 1 К сложится с кинетической энергией упорядоченного движения молекул до удара, и вместе они будут энергией теплового движения при новой установившейся температуре. Энергия упорядоченного движения молекул газа больше энергии теплового движения при начальной температуре в

$$\frac{v^2}{v_т^2} = \frac{v^2}{3kT/m} = \frac{v^2 \cdot 4m_p}{3kT} \approx 160 \text{ раз}$$

(здесь $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг – масса протона, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана). Поэтому новая температура и новое давление будут в 161 раз больше прежних величин. Это значит, что установившаяся температура после удара будет равна 161 К, а новое давление будет равно 161 Па.

Сразу после соприкосновения стенки сосуда, т.е. одной из граней кубика, с неподвижной жесткой стенкой давление на эту грань изнутри будут оказывать налетающие на нее молекулы гелия. Можно считать, что в течение короткого промежутка времени $\Delta t = a/v \approx 10^{-3}$ с давление будет оказываться не на все 6 граней, а только на одну. Поэтому максимальное давление на эту грань сосуда будет равно $(160 \cdot 6 + 1)$ Па, т.е. $p_{max} = 961$ Па.

[1] Автор решений задач Ф2581–Ф2584 – С.Варламов.

Ф2582. *В космосе вдали от других тел находятся 8 одинаковых легких маленьких шариков, каждый из которых несет на себе электрический заряд Q. Шарики связаны тонкими непроводящими нитями одинаковой длины. В состоянии равновесия шарики находятся в вершинах куба с ребром b, а нити расположились вдоль ребер куба. Каковы силы натяжения нитей?*

Каждая нить, прикрепленная к одному шарику, а к каждому шарику прикреплены три взаимно перпендикулярные нити, компенсирует своим натяжением все проекции на ее направление кулоновских сил, действующих на этот шарик со стороны других шариков. Поскольку суммарная проекция всех кулоновских сил на направление одного из ребер куба равна

$$F = \frac{kQ^2}{b^2}\left(1 + 2^{-0,5} + 3^{-1,5}\right)$$

(здесь k – постоянная в законе Кулона), то такой и будет сила натяжения каждой нити.

Ф2583. *К батарейке подключен резистор сопротивлением R, и по нему течет ток I. К этому резистору параллельно ему подключили еще один такой же резистор, и ток через первый резистор уменьшился на одну шестую часть. Резистор какого сопротивления нужно подключить к этой батарейке, чтобы в нем выделялась максимальная мощность? Какова величина этой максимальной мощности?*

Обозначим неизвестные параметры батарейки – ЭДС и ее внутреннее сопротивление – через $\mathcal{E}$ и r соответственно. Из условия задачи следует, что

$$\frac{5}{6}I = \frac{5}{6}\frac{\mathcal{E}}{r+R} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{r+R/2}.$$

Отсюда получаются неизвестные параметры батарейки:

$$\mathcal{E} = \frac{5}{4}IR, \quad r = \frac{R}{4}.$$

Чтобы в нагрузке выделялась максимальная мощность, ее сопротивление должно

(Продолжение см. на с. 22)

Задачи

1. Из трех палочек можно сложить треугольник. От каждой палочки отломили по куску и сложили из них другой треугольник. Всегда ли из оставшихся частей тоже можно сложить треугольник?

Л.Емельянов

2. Приведите пример натурального числа a, при котором число

$$a\cdot 1001\cdot 1003\cdot 1005 + 4$$

будет точным квадратом.

Н.Агаханов

3. На контурную карту нанесены 10 городов (без названий) и дороги между некоторыми из них. Незнайке дали задание нанести на карту названия

городов, но выдали лишь список пар городов, напрямую соединенных дорогой. Этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Как такое могло быть?

С.Волчёнков

4. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски, назовем *важным*, если все его угловые клетки черные. На каждой клетке шахматной доски написано количество важных прямоугольников, содержащих эту клетку. Пусть B – сумма чисел, написанных на черных клетках, а W – сумма чисел, написанных на белых клетках. Найдите $B - W$.

Олимпиада ЮАР

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предлагались на XIV Южном математическом турнире.

Периметр и площадь на клеточках

Е.БАКАЕВ

В этой статье речь пойдет о клеточных фигурках – таких фигурках, которые составлены из клеточек листа клетчатой бумаги. Как связаны площадь и периметр такой фигурки? Среди всех фигурок одной и той же площади у каких периметр наибольший? Вот основные вопросы, с которыми мы разберемся.

Решать упражнения не обязательно для понимания дальнейшего материала, но они позволяют лучше разобраться с пройденным, так что рекомендуем уделить им внимание. Ответы и указания к ним даны в конце журнала. Решения задач даны сразу после условий; над ними тоже лучше сначала поразмышлять самостоятельно.

Условимся, что фигурки, о которых пойдет речь, являются *связными*. Это значит, что от любой клетки фигурки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по стороне клетки. Например, множества клеток *А*, *Б* и *В* на рисунке 1 – это фигурки, но *Б* и *В* вместе не образуют одну фигурку,

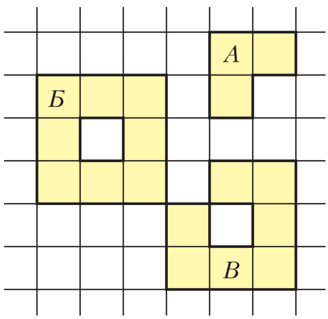


Рис. 1

так как от клеток *Б* до клеток *В* указанным способом дойти нельзя.

Периметром фигурки называют длину ее границы. Например, у фигурки *А* периметр 8, а у *Б* и *В* – по 16.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191203

Некоторые (но не все!) клеточные фигурки являются *многоугольниками* (напомним, что граница многоугольника должна быть замкнутой несамопересекающейся ломаной, иначе говоря, многоугольник – это фигурка «без дыр»). Например, фигурка *А* является многоугольником, а фигурки *Б* и *В* – нет.

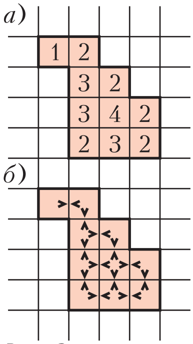


Рис. 2

Введем некоторые новые понятия. В каждой клетке фигурки будем писать, сколько сторон этой клетки лежит **внутри** фигурки. Назовем это *внутренним* набором чисел фигурки. Пример показан на рисунке 2,*а*.

Упражнение 1. Существует ли фигурка с таким внутренним набором чисел:

а) 1,1,1,1,4;
б) 0,1,2,3,4;
в) 1,1,1,1;
г) 2,2,2,2,3,3,3,3,4?

Задача 1. *Докажите, что сумма чисел внутреннего набора фигурки всегда четна.*

В сумме чисел внутреннего набора, будем обозначать ее $\sum_{\text{внутр}}$, каждая внутренняя перегородка между клетками посчитана по 2 раза (рис.2,*б*). Таким образом, $\sum_{\text{внутр}} = 2i$, где i – количество внутренних перегородок.

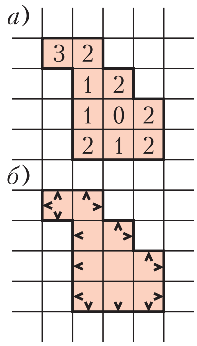


Рис. 3

Теперь в каждой клетке фигурки будем писать, сколько сторон этой клетки лежит **на границе** фигурки. Назовем это *внешним* набором чисел фигурки. Пример приведен на рисунке 3,*а*.

Упражнение 2. Существует ли фигурка с таким внешним набором чисел:

а) 0,3,3,3,3;
б) 0,2,3,3;
в) 0,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3;
г) 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1?

Задача 2. *Как по внешнему набору чисел найти периметр фигурки?*

Во внешнем наборе каждый единичный отрезок периметра посчитан один раз (рис.3,*б*). Значит, сумма чисел внешнего набора равна периметру: $\sum_{\text{внешн}} = p$.

Теперь используем найденные свойства внутреннего и внешнего наборов для вывода полезной формулы.

Задача 3. *Пусть s – это площадь фигурки, p – ее периметр, а i – количество внутренних перегородок. Найдите и докажите формулу, связывающую эти три величины.*

Поймем, как связаны внешний и внутренний наборы. В одном случае мы для каждой клетки считали, сколько из ее сторон лежит внутри, а в другом – сколько на границе. Таким образом, в двух наборах вместе мы посчитали все 4 стороны каждой из s клеток. Значит, $\sum_{\text{внутр}} + \sum_{\text{внешн}} = 4s$. Используя результаты предыдущих задач, получим:

$$2i + p = 4s.$$

Упражнение 3. Найдите все фигурки, у которых периметр больше площади

а) в 5 раз; б) в 4 раза;
в) в 3 раза.

Из доказанной формулы следует такое свойство.

Задача 4. *Докажите, что периметр клетчатой фигурки всегда является четным числом.*

Из формулы видно, что p является разностью четных чисел $4s$ и $2i$, поэтому оно тоже четно.

В следующих упражнениях снова помогает та идея, что при суммировании периметров частей разрезы учитываются дважды.

Упражнения

4. Квадрат 5×5 разрезали на несколько многоугольников так, что суммарная длина разрезов равна 12. Чему может быть равен суммарный периметр всех многоугольников?

5. Доску 6×6 разрезали на прямоугольники 1×2. Какой может быть суммарная длина разрезов?

6. Квадрат 8×8 разрезали на тетраминошки (фигурки из четырех клеток). Суммарная длина разрезов оказалась равна 60. Сколько среди этих фигурок может быть квадратов?

Теперь обсудим следующую задачу.

Задача 5 (Н.Стрелкова). *Квартира 3×3 состоит из 9 квадратных комнат 1×1. Каждые две соседние комнаты соединены дверью. Какое наименьшее количество дверей должно быть открыто, чтобы кот, находящийся в одной из комнат, мог свободно гулять по всей квартире?*

Территорией будем называть множество комнат, между которыми можно свободно передвигаться. Если от одной комнаты нельзя дойти до другой, то они отнесены к разным территориям. (В примере на рисунке 4 территория кота состоит

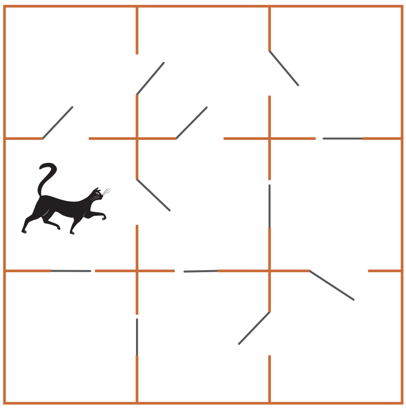


Рис. 4

из 5 комнат, а общее количество территорий равно 3.)

Первое решение (размер территории кота). Сначала закроем все двери и будем открывать их по порядку. Пусть этот порядок выбирает сам кот. Он может подойти к любой закрытой двери и мяукнуть, и тогда мы откроем ему эту дверь. Если она ведет в новую комнату, территория кота увеличится на одну комнату. Если же эта дверь ведет в комнату, до которой кот уже мог дойти иным путем, то территория не изменится. Получается, с каждой открытой дверью территория кота увеличивается не больше чем на 1. Сначала она равна 1, а в конце – 9. Значит, потребуется открыть хотя бы 8 дверей.

Задача решена. Подумайте, где именно используется, что мы предлагаем выбрать дверь коту, а не открываем ее сами.

Второе решение (количество территорий). Снова закроем все двери и будем открывать их по одной. Теперь будем считать общее количество территорий. Сначала каждая комната образует одну территорию, т.е. всего территорий 9. В конце все комнаты образуют одну территорию. Дверь может соединять либо две разные территории – тогда при ее открывании количество территорий уменьшится на 1, либо соединять территорию с самой собой – тогда количество территорий не уменьшится. Снова выходит, что хотя бы 8 дверей должны быть открыты.

В следующем упражнении помогает тот же прием.

Упражнение 7. В квадратном лабиринте размером 6×6 от любой клетки можно дойти до любой другой. Какое наибольшее количество внутренних перегородок может в нем быть?

Теперь применим этот подход к клетчатым фигуркам.

Задача 6. *Какое наименьшее количество внутренних отрезков сетки может быть в фигурке с площадью s?*

Рассмотрим произвольную фигурку площади s, покрасим ее всю в белый цвет. Выберем одну из клеток фигурки, покрасим ее в черный. Далее будем закрашивать по одной белой клетке в черный цвет так, чтобы новая черная клетка примыкала по стороне к уже закрашенной части. (Такую клетку всегда получится найти: если есть и белая клетка, и черная, то на пути от одной до другой встретится пара из двух соседних разноцветных клеток.) Каждый раз количество внутренних отрезков сетки в черной фигурке будет увеличиваться хотя бы на единицу. В итоге все клетки станут черными. Значит, внутренних отрезков исходной фигурки не меньше $s-1$.

Заметим, что алгоритм добавления клеток здесь ровно такой же, что и в задаче про кота.

Легко привести пример, в котором внутренних отрезков действительно столько: это, например, прямоугольник $1\times s$.

Задача 7. *Какой наибольший периметр может быть у фигурки с площадью s?*

Нами уже доказана формула $2i+p=4s$. Из нее видно, что при фиксированном s чем больше p, тем меньше i. Значит, периметр наибольший тогда, когда количество внутренних отрезков наименьшее. Как мы уже выяснили, это достигается в случае $i=s-1$. Подставив это в формулу $2i+p=4s$, получим, что $p=2s+2$. Итак, периметр фигурки с площадью s не больше чем $2s+2$. Пример подходит прежний.

Попробуйте применить ту же идею последовательного добавления клеток в следующих упражнениях.

Упражнения

8. Из фигурки, состоящей из 20 клеток, можно вырезать квадрат 3×3. Докажите, что ее периметр не больше 34.

9. Известно, что некоторую клеточную фигурку можно разрезать на 5 квадратов 2×2. Какой наибольший периметр у нее может быть?

10. Нарисуйте по 10 разных фигурок, у каждой из которых периметр равен 14, а площадь равна а) 6; б) 7.

в) Почему фигурки из пункта б) содержат квадрат 2×2, а фигурки из пункта а) – нет?

Разберем теперь задачу, где можно применить доказанную в задаче 7 оценку периметра.

Задача 8. *Можно ли квадрат 5×5 разрезать на два клетчатых многоугольника, у каждого из которых периметр равен 28?*

Предположим, что можно так разрезать. Дальше можно действовать по-разному.

Первое решение. Так как сумма площадей фигурок равна 25, то у одной из полученных фигурок площадь не больше 12. По предыдущей задаче, ее периметр не больше $2\cdot12+2=26$. Противоречие.

Второе решение. Пусть длина разреза равна v, тогда суммарный периметр фигурок равен $20 + 2v$, а по условию это $28 \cdot 2$. Из полученного равенства находим $v = 18$. Так как частей две, то разрез один и не может разветвляться – он представляет собой одну цепочку отрезков, проходящую по узлам внутри квадрата 5×5. (Поясним это подробнее. Если узел находится на разрезе, то из него выходит ровно два отрезка разреза. Ведь один отрезок выходить не может, и 3 или 4 также не могут – потому что фигур две и разрез должен разделять две разные фигуры. Значит, если пойти от границы по разрезу, то будем всегда идти по линии без развилок.) Итак, разрез – это цепочка из 18 отрезков, значит, на ней лежит 17 узлов. Но внутри квадрата находится $4 \cdot 4 = 16$ узлов – на 1 меньше минимального необходимого количества. Противоречие.

Напоследок заметим, что в задачах 5 и 6 речь по сути идет о теореме из теории графов: *в связном графе на n вершинах не менее $n-1$ ребер*. Соответственно, эту теорему можно доказать аналогично задаче 5. Подробнее о графах говорить не будем: вместо этого порекомендуем статью П.Кожевникова и А.Шаповалова «Свяжитесь с графом» («Квант» №4 за 2014 г.), посвященную задачам, в которых скрыта упомянутая теорема.

(Начало см. на с. 13)

равняться внутреннему сопротивлению батарейки. Это означает, что нужно подключить к батарейке резистор сопротивлением

$$R' = \frac{R}{4}.$$

Максимальная мощность в этом случае будет равна

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{25}{16} I^2 R.$$

Ф2584. *Молоко жирностью 3,2% пролили на лист бумаги с напечатанным мелким тестом. Через слой молока толщиной 0,1 мм текст еще читается, а через более толстый слой – нет. Оцените размеры капелек жира в таком молоке.*

Поскольку размеры капелек жира требуется оценить, а не вычислить точно, то для простоты расчетов можно принять, что все капельки масла, взвешенные в воде, имеют такую же плотность, как и вода, а их форма не шарик, а кубик с ребром D. Обозначим концентрацию капелек жира через n, тогда из условия задачи, очевидно, следует, что

$$nD^3 = 0{,}032.$$

Жир имеет отличающийся от воды коэффициент преломления, поэтому на стенках капелек свет частично отражается, а частично проходит сквозь границу раздела. Это рассеяние света молоком и приводит к эффекту «исчезновения» темных букв текста на фоне белого рассеянного света. Если на слой молока с очень малой толщиной x порядка D падает свет и площадь, на которую он падает, равна $S = D^2$, то доля света, прошедшего через воду и не попавшего ни на одну капельку жира, равна

$$p = \left(1 - xnD^2\right).$$

Пусть расстояние, пройденное светом в молоке, равно L, тогда соответствующая доля прошедшего света, не рассеянного капельками, составляет

$$p^{L/x} = \left(1 - xnD^2\right)^{L/x} = \exp\left(-LnD^2\right).$$

Согласно условию задачи при слое молока толщиной 0,1 мм текст уже не виден. А этот слой свет проходит дважды, т.е. $L = 2 \cdot 0{,}1$ мм. «Текст не виден» означает, что контрастность видимой картины распределения света и темноты стала меньше, например, чем 10%. Тогда

$$\exp\left(-2LnD^2\right) = 0{,}1, \text{ откуда } nD^2 \approx 1.$$

Из двух соотношений для размеров капелек D и концентрации n получаем оценочное значение для размеров капелек жира: $D \approx 3 \cdot 10^{-6}$ м.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

13. Можно ли в клетках таблицы 6×7 расставить 29 семерок и 13 пятерок так, чтобы во всех столбцах, кроме одного, суммы чисел были одинаковые и во всех строках, кроме одной, суммы чисел были одинаковые?

Н.Чернятьев

14. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отметили точку K. Середина отрезка CK равноудалена от точек A и B. Докажите, что $AK < BC$.

Е.Бакаев

15. Даны k палочек, длина каждой – натуральное число, при этом нет двух одинаковых по длине палочек. Известно, что из любых трех палочек можно составить треугольник периметра не больше 1000. Каково наибольшее возможное значение k?

П.Кожевников

16. Квантик и Ноутик хотят показать такой фокус. Зритель задумывает два натуральных числа: n и n^2, затем сообщает одно из них Квантику, а другое Ноутику. После этого Квантик показывает Ноутику черную или белую карточку, и Ноутик сразу угадывает число Квантика. Помогите Квантику и Ноутику договориться о своих действиях, чтобы фокус всегда удавался.

Жюри

17. Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме n-угольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого n-угольника либо меньше $10°$, либо больше $350°$. Может ли барон быть прав? Решите задачу для а) $n = 10$; б) $n = 11$; в) $n = 101$.[1]

А.Перепечко

[1] Интересно также подумать над общим случаем: что получается при всех n.

18. Вычислите сумму

$$\frac{100}{99} + \frac{100 \cdot 98}{99 \cdot 97} + \frac{100 \cdot 98 \cdot 96}{99 \cdot 97 \cdot 95} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{100 \cdot 98 \cdot 96 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{99 \cdot 97 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}.$$

Г.Мерзон

19. Квантик и Ноутик по очереди закрашивают клетки на доске 8×8, по одной клетке за ход, начинает Квантик. Первый ход можно сделать куда угодно. Каждый следующий ход должен быть таким, чтобы новая клетка граничила по стороне ровно с одной закрашенной клеткой. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто может обеспечить себе победу?

Н.Чернятьев

20. В каждой вершине правильного $4k$-угольника сидело по блохе. Каждая блоха дружит с двумя своими соседями. Половина блох – красные, половина – синие, причем красные и синие блохи чередуются. Блохи начали прыгать. В первую секунду прыгнули красные: каждая прыгнула в точку, симметричную ей относительно прямой, соединяющей двух ее друзей. Во вторую секунду аналогичным образом прыгнули все синие блохи. В третью секунду снова прыгнули все красные и т.д. Докажите, что через k секунд все блохи снова окажутся в вершинах некоторого правильного $4k$-угольника.

Е.Бакаев

Задачи 17–20 перенесены из «Кванта» №1 за 2020 год.

Самое правильное уравнение динамики

А.СТАСЕНКО

Лет триста назад, а то и раньше, суть законов физики выяснялась в течение многословных диспутов, например между Симпличио и Сагредо – героев Галилео Галилея (1632 г.). Первый из двух был, как сказал бы Н.В.Гоголь, просто «умный» (simplex – простой), второй – «умный во всех отношениях».

Вообразим себе их беседу о динамике тела переменной массы в наше время.

Симпличио: Дорогой друг, я слышал, что, согласно великому Ньютону, изменение импульса тела p со временем равно внешней силе F, действующей на это тело:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Но ведь $p = mv$. Если масса тела постоянна, ее можно вынести за знак дифференциала:

$$m\frac{dv}{dt} = ma = F.$$

Это уравнение хорошо известно всем здравомыслящим школьникам: ускорение тела a пропорционально действующей силе. А если масса тела изменяется, например, как в случае ракеты или межконтинентального самолета, испаряющейся или растущей за счет конденсации капли воды в облаке..., то какое выражение правильнее было бы написать:

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \text{или} \quad \frac{dmv}{dt} = F?$$

Сагредо: Дорогой Симпличио, в случае тела переменной массы и то и другое неверно. Но поступим, как древние греки – воспользуемся доказательством от противного (reductio ad absurdum – приведение к противоречию). Возьмем частный случай – отсутствие внешней силы, т.е. $F = 0$. Тогда из двух испытуемых выражений получим, что или v совершенно не зависит от времени или $v \sim \frac{1}{m}$.

Правильным же является уравнение Мещерского:

$$m\frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt}u, \qquad (1)$$

где u – скорость выбрасываемой или присоединяемой массы относительно тела; она может быть и постоянной и даже равной скорости самого тела v, в общем – любой. Однако рассмотрим все по порядку.

Сравним ракету с другим, казалось бы, близким ей «по духу», летательным аппаратом – прямоточным воздушно-реактивным двигателем. Но прежде – о самой ракете. Представим себе, что в некоторый произвольный момент времени t ракета имела скорость v и массу m. Мысленно разобьем ракету на две части – ту, обозначим ее массу через ΔM, которая через малый промежуток времени Δt «собирается» отлететь назад (отработанное топливо ракеты), и тот «остаток» массы $m - \Delta M$, который полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v + \Delta v$. Скорость части массы, отлетевшей от «остатка», обозначим через u, тогда ее скорость относительно земного наблюдателя будет равна $(v + \Delta v) - u$. Так как разделение этих двух частей произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты не изменится:

$$mv = (m - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M(v + \Delta v - u).$$

В результате алгебраических преобразований уравнение закона сохранения импульса примет вид

$$m\Delta v = u\Delta M.$$

Если учесть, что отброшенная масса ΔM в точности равна убыли массы ракеты, $\Delta M = -\Delta m$, то полученное равенство можно переписать в виде

$$\frac{\Delta v}{u} = -\frac{\Delta m}{m}. \qquad (2)$$

Тот, кто умеет суммировать бесконечно малые приращения, т.е. интегрировать, из выражения (2) легко получит (учитывая,

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191204

что в момент $t = 0$ было $v = 0$ и $m = m_0$)

$$\frac{v - 0}{u} = -(\ln m - \ln m_0),$$

или

$$\frac{v}{u} = \ln\frac{m_0}{m}. \qquad (3)$$

Это – знаменитая формула Циолковского. Историки науки говорят, что он затратил на нее немало времени: первооткрывателю всегда трудно. Сегодня грамотный школьник выведет ее за несколько минут.

Проанализируем полученную формулу (3). Если убыль массы ракеты в единицу времени есть величина постоянная, обозначим ее через $\mu = -\frac{\Delta m}{\Delta t}$, то с течением времени масса ракеты изменяется по закону (рис.1)

$$m = m_0 - \mu t.$$

По прошествии времени τ, когда сгорит и будет выброшено все топливо, масса ракеты станет равной $m_\tau = m_0 - \mu\tau$, а ее скорость будет

$$v_\tau = u\ln\frac{m_0}{m_\tau}.$$

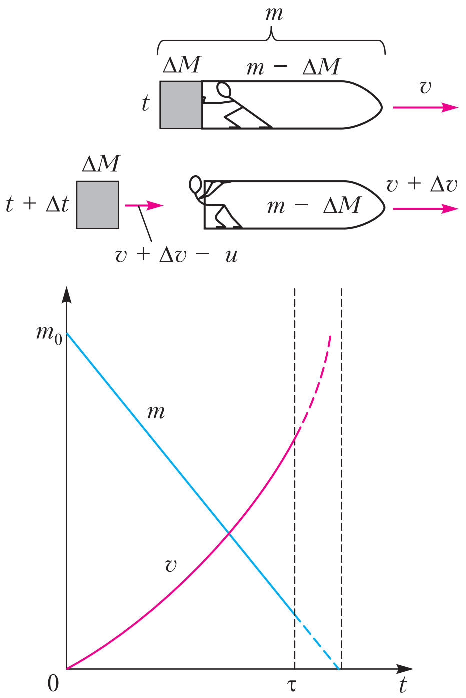


Рис. 1. Ракета ускоряется за счет отбрасывания назад только собственной массы, ее скорость и ускорение могут достичь произвольно заданной величины

Очевидно, что ракета достигнет тем большей скорости, чем меньше станет ее оставшаяся масса. Это печально, ибо неэкономно, но что поделаешь – такова природа. Хорошо уже то, что найдена лазейка, используя которую можно достичь «скорости убегания» от планеты, хотя и дорогой ценой.

Но есть еще одна возможность – увеличение относительной скорости выброса отработанного топлива. Вот что писал К.Э.Циолковский по этому поводу: «Чтобы снаряд получил наибольшую скорость, надо, чтобы каждая частица продуктов горения или иного отброса получила наибольшую относительную скорость. Она же постоянна для определенных веществ отброса. Экономия энергии тут не должна иметь места: невозможна и невыгодна».

Итак, нужно постараться увеличить скорость выброса u.

Теперь аналогично обсудим воздушно-реактивный двигатель (рис.2). Вот он «гото-

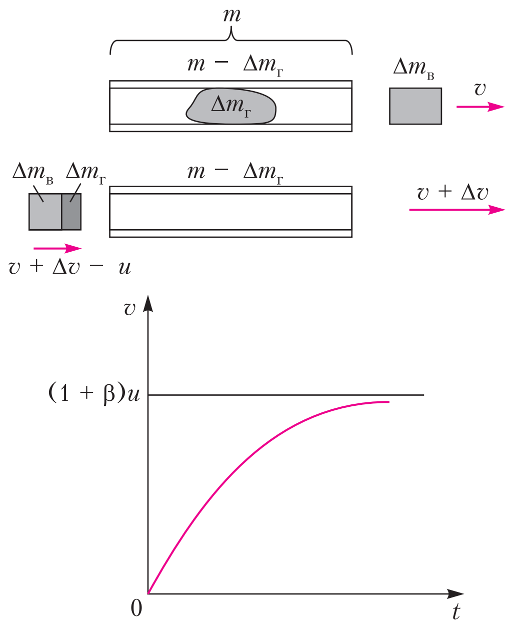


Рис. 2. Прямоточный реактивный двигатель отбрасывает не только массу горючего, но и захваченный для его сжигания атмосферный воздух. Тепло, выделяемое при горении, создает скорость истечения массы продуктов сгорания из двигателя и, как следствие, его тягу. Основная масса воздуха – инертный азот, который в двигателе лишь подогревается. Его ускорение стремится к нулю, а скорость не может превзойти некоторой константы

вится» в момент времени t «заглотить» порцию воздуха массой $\Delta m_{\text{в}}$ и, израсходовав массу горючего $\Delta m_{\text{г}}$, выбросить образовавшуюся смесь с относительной скоростью u. При этом, разумеется, изменение массы самого летательного аппарата будет равно $\Delta m = -\Delta m_{\text{г}}$. Запишем закон сохранения импульса для системы двигатель – горючее – воздух:

$$\Delta m_{\text{в}} \cdot 0 + mv = \left(\Delta m_{\text{в}} + \Delta m_{\text{г}}\right)\left(v + \Delta v - u\right) + \\ + \left(m - \Delta m_{\text{г}}\right)\left(v + \Delta v\right).$$

Здесь v – скорость аппарата в момент времени t, $v + \Delta v$ – его новая скорость в момент времени $t + \Delta t$, первое слагаемое слева отражает тот факт, что поглощенный двигателем воздух первоначально покоился. Отсюда, пренебрегая совсем малыми величинами – произведением $\Delta m \Delta v$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m} - \frac{\Delta m_{\text{в}}}{m}\left(\frac{v}{u} - 1\right).$$

Отношение масс $\Delta m_{\text{г}}/\Delta m_{\text{в}}$ обозначим через β. Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\frac{\Delta v}{u} = \frac{\Delta m_{\text{г}}}{m}\frac{1 + \beta - v/u}{\beta} \text{ или}$$

$$\frac{\Delta v}{u} = -\frac{\Delta m}{m}\frac{1 + \beta - v/u}{\beta}. \quad (4)$$

Посмотрите внимательно на уравнения (3) и (4). Они имеют нечто общее, а именно: для того чтобы скорость летательного аппарата росла ($\Delta v > 0$), нужно, чтобы его масса убывала ($\Delta m < 0$). Но есть и очень важное отличие: в правую часть уравнения (4) входит множитель $1 + \beta - v/u$, который по достижении скорости $v = u(1 + \beta)$ становится равным нулю. Это значит, что воздушно-реактивный двигатель, «заглатывающий воздух», не может разогнаться до скорости, существенно большей, чем относительная скорость истечения продуктов сгорания. Скорость такого двигателя имеет предел, преодолеть который невозможно. А для ракеты аналогичного предела нет.

На самом деле этим уже все сказано, однако в принципе можно получить и точные выражения для скорости ракеты и воздушно-реактивного двигателя.

Наконец, рассмотрим прямо противоположный случай – когда масса тела растет со временем. Пусть в облаке из микрокапель одна из них стала падать, поглощая на своем пути встречные капли. (В начальный момент времени, когда ее скорость еще невелика, пренебрежем сопротивлением воздуха.) В этом случае в уравнении Мещерского (1) можно положить $u = -v$. Изменение импульса падающей капли переменной массы за малое время Δt равно

$$\Delta(mv) = mg\Delta t. \quad (5)$$

По условию задачи изменение массы капли за время Δt равно

$$\Delta m = \alpha\rho v_{\text{ср}} S \Delta t, \quad (6)$$

где ρ – плотность воды, $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость капли за время Δt, $S = 4\pi r^2$ – площадь поверхности капли, α – безразмерный коэффициент пропорциональности. С другой стороны, поскольку $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ (здесь r – радиус капли), то $\Delta m = 4\pi r^2 \rho \Delta r = S\rho\Delta r$. Если за время Δt капля проходит расстояние Δy, то

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_{\text{ср}}}.$$

Подставив выражения для Δm и Δt в равенство (6), получим

$$\Delta r = \alpha \Delta y \sim \Delta y.$$

Следовательно, радиус капли растет пропорционально пройденному пути, т.е. пропорционально y.

Поскольку капля движется с постоянным ускорением a, то $y = at^2/2$, т.е. $y \sim t^2$. Значит,

$$r \sim t^2, \; m \sim r^3 \sim t^6.$$

Учитывая эти соотношения, из уравнения (5) получаем

$$\Delta\left(t^6 at\right) = t^6 g \Delta t.$$

Дифференцируя левую часть этого равенства находим ускорение a:

$$\Delta\left(at^7\right) = 7at^6\Delta t = t^6 g \Delta t, \text{ и } a = \frac{g}{7}.$$

К глубокому сожалению, наш любимый преподаватель МФТИ Г.И.Косоуров, утверждавший, что в физике никогда не получается семерки, не дожил до решения этой задачи. Много сделавший для журнала «Квант» и для Всесоюзных олимпиад он, несомненно, порадовался бы вместе с нами.

Что такое фазовый портрет

В.СОЛОВЬЕВ, С.ДВОРЯНИНОВ

Следовать за мыслями великого человека есть наука самая занимательная.

А.С.Пушкин

Космология Фридмана

О том, что Вселенная расширяется, в наши дни многие наверняка слышали, читали и знают. А какой может быть эволюция наблюдаемой Вселенной в будущем? Удивительно, но еще в 1922 году А.А.Фридман в статье «О кривизне пространства» определил возможные варианты развития Вселенной. Сейчас мы хотим познакомить читателей с этой статьей. Конечно, рассказать о работе ученого непросто. Свою статью Фридман адресовал коллегам физикам, университетским профессорам. Тем не менее, мы постараемся сделать доступной основную канву мыслей ученого, внесшего решающий вклад в понимание структуры космоса.

Начнем с простой школьной задачи. На плоскости с координатами $(x_1; x_2)$ надо изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_2 = cx_1^2$, где c – произвольная постоянная. Такое уравнение задает семейство квадратичных парабол (рис.1). Эволюция этих парабол такова: при возрастании параметра c от $-\infty$ до нуля ветви парабол отходят от отрицательной полуоси ординат и приближаются к оси абсцисс. При $c = 0$ имеем прямую линию. При изменении c от нуля до $+\infty$ ветви парабол неограниченно приближаются к оси ординат.

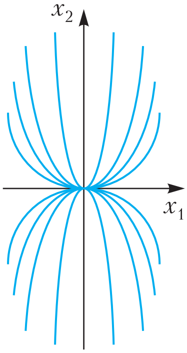


Рис. 1

Ясное дело, что координаты точек плоскости и параметр можно обозначать разными буквами. На плоскости с координатами $(R; R')$ уравнение $R^2 + \lambda R'^2 = 1$ при каждом отрицательном значении параметра λ задает две ветви гиперболы (рис.2). При $\lambda = 0$ получаем две прямые $R = \pm 1$. При положительных значениях λ получаем эллипсы, которые при возрастании параметра от нуля до $+\infty$ отходят от этих прямых и неограниченно приближаются к отрезку $-1 \le R \le 1$ оси абсцисс.

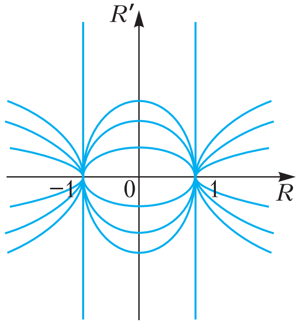


Рис. 2

Мы специально использовали непривычные для школы буквы R, R' и λ для обозначения координат кривой второго порядка и для параметра. Почему? Да потому, что именно такие обозначения мы видим в одном знаменитом уравнении!

Уравнение Фридмана. В 1922 году работавший в Петрограде Александр Александрович Фридман впервые получил и исследовал такое уравнение:

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \frac{\kappa}{2} c^2 \rho . \qquad (*)$$

Об этом уравнении можно прочитать, например, в статье С.Дворянинова и В.Соловьева «Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные» («Квант», 2017, №1, 2). Здесь c и κ – постоянные: c – скорость света, $\kappa = \frac{16\pi G}{c^2}$, где G – гравитационная постоянная из закона всемирного тяготения Ньютона; $\rho = \frac{M}{2\pi^2 R^3}$, где M – постоянная положительная величина.

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191205

Сейчас мы будем рассматривать уравнение ($*$) как *алгебраическое* уравнение на плоскости $(R;R')$ с фиксированным положительным параметром λ, причем $R>0$. Наша ближайшая цель сугубо математическая – показать на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Для этого запишем его в виде

$$R'^2=-c^2+\frac{\lambda}{3}R^2+\frac{a}{3R},$$

где новая постоянная a выражается через старые постоянные. Это уравнение связывает координаты R и R'.

Для построения графика этой функции на плоскости $(R;R')$ рассмотрим при положительных значениях аргумента R вспомогательную функцию

$$y(R)=-c^2+\frac{\lambda}{3}R^2+\frac{a}{3R}.$$

При малых R график этой функции ведет себя как гипербола, имеющая асимптотой ось ординат, а при больших R – как парабола. Эта функция имеет единственную точку минимума (проверьте!). Минимальное значение в зависимости от λ может быть положительным, равным нулю и отрицательным (рис.3). Если значения λ достаточно велики,

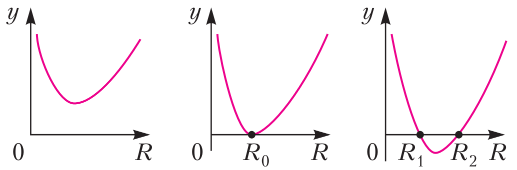


Рис. 3

то минимальное значение оказывается положительным, и тогда $y(R)>0$ при всех положительных значениях R. При других значениях λ эта функция может иметь одно нулевое значение – в точке R_0 или два – в точках R_1 и R_2. При неотрицательных значениях y «извлекаем квадратный корень» и приходим к графику уравнения Фридмана (рис.4).

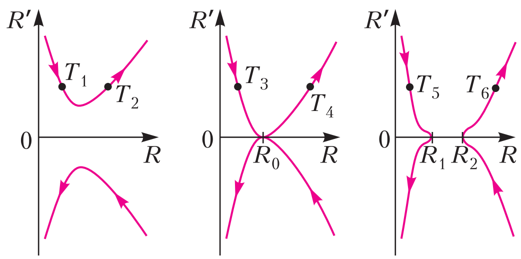


Рис. 4

Фазовые траектории. Теперь пришло время сказать, что в уравнении Фридмана величина R зависит от времени: $R=R(t)$ и что R' есть производная $R'(t)$ этой величины. Стало быть, уравнение ($*$) – это *дифференциальное уравнение*, а кривые на рисунке 4 – это фазовые траектории (о них рассказывается в первой части статьи). Стрелки вдоль траекторий показывают направление движения фазовой точки в зависимости от времени. В верхней полуплоскости $R'(t)>0$, поэтому функция $R(t)$ здесь возрастает и вдоль каждой фазовой траектории фазовая точка движется вправо. В нижней полуплоскости – наоборот, фазовая точка движется справа налево. Этот рисунок не является фазовым портретом уравнения ($*$), на нем показано лишь несколько фазовых траекторий, так как в этом уравнении нет произвольной постоянной.

В зависимости от λ на фазовой плоскости $(R;R')$ есть или одна точка покоя – $(R_0;0)$, или две – $(R_1;0)$ и $(R_2;0)$. Единственной точки покоя другие фазовые траектории не достигают никогда, а вот в каждую из двух точек покоя фазовая траектория попадает за конечное время (в этих двух точках касательная к траектории вертикальна).

Заметим, что фазовые траектории вблизи точек покоя ведут себя подобно графикам двух дифференциальных уравнений $x'^2=x^2$ и $x'^2=-4x$. Решения первого уравнения $x(t)=ce^{\pm t}$ с ненулевым начальным условием никогда в ноль не обращаются, т.е. точка покоя для них недостижима. Второе уравнение имеет, например, решение $x(t)=-(t-1)^2$ с начальным условием $x(0)=-1$, оно обращается в ноль при $t=1$, т.е. за конечное время. Соответствующая траектория попадает в точку покоя за конечное время, может оставаться там при $1\le t\le t_1$, а затем ее покинуть и двигаться по закону $x(t)=-(t-t_1)^2$. Такую точку покоя можно назвать точкой поворота (возврата). О связи этого свойства фазовых траекторий с практическими задачами причаливания кораблей рассказано в статье С.Дворянинова, З.Краутера и В.Протасова «Сколько времени длится причаливание» («Квант», 2017, №11).

А каков же физический смысл величины R?

Как устроена видимая нами Вселенная. Для муравья, ползущего по веревке, весь мир сводится к двум направлениям: вперед или назад. Это – одномерный мир. Для ребенка, еще не вставшего на ноги и играющего на полу, мир не просто плоский, двумерный, он вдобавок еще и ограничен размером его детской. Таков же мир животных, обитающих на заповедном острове и не умеющих плавать.

Долгое время человек представлял поверхность Земли плоской. Ощущения и непосредственные наблюдения могут формировать ложные представления. Если человеку завязать глаза и попросить его двигаться по прямой линии, то его траектория окажется похожей на окружность. У большинства людей шаг правой ногой чуть-чуть длиннее шага левой, и потому на каждом шаге происходит малый, но все же поворот. Идти по прямой не получается. При этом человек убежден, что он идет строго по прямой. Вообразим еще, что человек может обозреть на поверхности Земли лишь круг радиусом, скажем, 10 метров. Поставим перед ним задачу продолжить нарисованный на земле прямолинейный отрезок длиной 5 метров. Пусть вся поверхность Земли – суша. Человек, продолжая этот отрезок с помощью, например, метровой линейки, несомненно удивится, вернувшись в исходную точку с противоположной стороны.

А как устроен видимый нами мир? Если на ракете лететь все время, как нам кажется, по прямой, то где в конце концов мы окажемся? Эйнштейн в своей первой статье по космологии в 1917 году предположил, что наш мир искривлен и представляет собой трехмерную сферу. В свое время люди считали наш мир куском плоскости, на деле Земля оказалась двумерной сферой. Давайте по аналогии вслед за Эйнштейном примем допущение о том, что и наш мир искривлен и это – сфера, но трехмерная. Она – «поверхность» четырехмерного шара радиусом R, и, как показали математики, ее объем равен $V = 2\pi^2 R^3$. При таком подходе R называют радиусом мира, а величину $\rho = \dfrac{M}{V}$ – средней плотностью вещества во Вселенной, где M – масса вещества.

Уравнения Фридмана есть следствия уравнений общей теории относительности (ОТО) и сделанных Эйнштейном предположений об однородности и изотропности пространства. Десять уравнений ОТО сводятся к двум дифференциальным уравнениям, наиболее простое из которых – уравнение ($*$) – и называется сейчас уравнением Фридмана. Это уравнение оставляет Вселенной только одну степень свободы – ее радиус.

При выводе своих уравнений Фридман считал, вслед за Эйнштейном, что Вселенная в среднем равномерно заполнена пылью, которая не создает никакого давления. Пространство однородно и изотропно, т.е. его свойства одинаковы по всем направлениям и в любой точке.

Величина λ, входящая в уравнение ($*$), – это введенная Эйнштейном космологическая постоянная. Эйнштейн ввел ее для того, чтобы его уравнения имели пространственно однородное статическое решение, соответствующее точке покоя R_0, для которого R есть постоянная величина, не зависящая от времени.

В наши дни мы наблюдаем расширяющуюся Вселенную. Об этом свидетельствует так называемое красное смещение света от далеких галактик. Следовательно, в настоящий момент фазовая точка, соответствующая наблюдаемому состоянию Вселенной, – это какая-то из точек $T_1 - T_6$ (см. рис.4) первой координатной четверти, в этой четверти производная $R'(t) > 0$ и $R(t)$ возрастает. Фазовая траектория, проходящая через такую точку, определяет будущее Вселенной, ее эволюцию. Здесь возможны несколько сценариев. Напомним, что данные наблюдений (а именно, реликтовое излучение, открытое в 1965 году) говорят, что в самом начале эволюции Вселенной произошел «Большой взрыв». Тогда радиус R практически равнялся нулю, и поэтому нынешнему состоянию Вселенной *не могут* соответствовать точки, обозначенные как T_4 и T_6. Для таких точек в прошлом $R \neq 0$.

Первый сценарий. С ходом времени Вселенная продолжит расширение. При этом скорость расширения либо будет сначала убывать (для точки T_1), достигнет положительного минимума и затем начнет неограниченно возрастать, либо будет монотонно и неограниченно возрастать (для точки T_2). В обоих случаях Вселенная будет монотонно и неограниченно расширяться.

Второй сценарий. Скорость расширения будет монотонно убывать (для точки T_3), неограниченно приближаясь к нулю. Вселенная будет расширяться, но при этом величина R останется ограниченной. Этот процесс будет длиться бесконечно долго. Время приближения к точке $(R_0;0)$ бесконечно. Здесь фазовые траектории не пересекаются, подобно тому, как сепаратриса на фазовом портрете маятника не содержит точку покоя (см. первую часть статьи).

Третий вариант. Для точки T_5 Вселенная будет расширяться, скорость расширения будет уменьшаться и через некоторое конечное время станет равной нулю. Вселенная окажется в стационарном состоянии с радиусом $R = R_1$ и может оставаться таковой сколь угодно долго. А может затем и начать сжиматься с неограниченно возрастающей скоростью, при этом радиус Вселенной будет стремиться к нулю. Это объясняется тем, что в точке $(R_1;0)$ нарушается единственность решения дифференциального уравнения $(*)$ и фазовые траектории пересекаются.

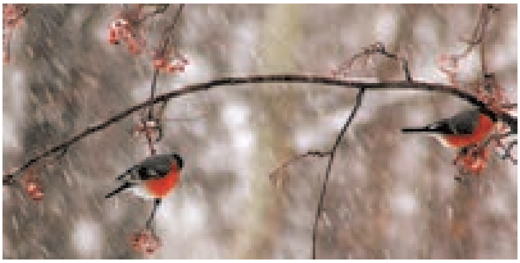
Реальная история. Фридман умер в 1925 году, так и не узнав о том, что Вселенная и впрямь подчиняется его уравнению, что она расширяется (1929 г.), что имел место Большой взрыв (1965 г.) и что расширение в нашу эпоху происходит с ускорением (1998 г.). Наш анализ мог бы быть актуальным в период между 1965 и 1998 годами. Сейчас из всех сценариев лишь точка T_2 на качественном уровне соответствует имеющимся данным. Количественную связь между двумя параметрами a и λ, следующую из современных данных, мы обсуждали в упомянутой статье «Космология Фридмана...».

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

КУДА ДУЕТ ВЕТЕР?

Осенью или зимой в тихую и туманную погоду ветки на деревьях и кустах, провода, мачты антенн покрываются мохнатым инеем или инееобразным ледяным слоем — изморозью. Иней и изморозь состоят из мельчайших частичек льда, слипшихся в виде столбиков, тонких перьев, игл и т.п. Обычно инеем называют снежные кристаллы, которые образуются из водяных паров в насыщенной влагой атмосфере, а изморозью — ледяной осадок, возникший из переохлажденных капелек тумана. Иней и изморозь могут появляться, а могут и исчезать — если вдруг потеплеет или подует сухой ветер (кристаллики льда тают или испаряются соответственно).

Оказывается, даже небольшой ветерок способен сильно изменить картину морозных узоров. Посмотрите на фотографию ветки растения, покрытого изморозью. Ветка была сфотографирована морозным утром, когда был очень сильный туман, гололед и дул слабый ветер. Можно ли по этой фотографии однозначно установить направление ветра? Давайте попробуем.



Так как изморозь образуется из капелек тумана, она появляется на предметах преимущественно с подветренной стороны и может быстро расти при ветре. В нашем случае во время съемки погодные условия были благоприятны росту изморози (а не таянию льда), а слабый ветер способствовал появлению анизотропии формы ледяных наростов. Поэтому, глядя на фотографию, легко определить преимущественное направление ветра — слева направо.

А теперь подумайте, как по виду ледяных кристалликов изморози или инея (не привлекая каких-либо метеоданных) узнать, давно или недавно образовался ледяной нарост на ветках.

А.Митрофанов

Метод перераспределения зарядов

Е.БАКАЕВ, А.ПОЛЯНСКИЙ, Г.ЧЕЛНОКОВ

Задачи этой статьи решаются с помощью двойного подсчета (подсчета двумя способами). Когда такой подсчет не совсем элементарен, его бывает удобно сформулировать как назначение объектам некоторых величин и их последующее перераспределение. Эти величины будем называть *зарядами*.

Здесь мы представим несколько красивых и непростых «олимпиадных» задач, решающихся с помощью такого подхода. *Метод перераспределения зарядов* (по-английски discharging method) применяется и за пределами олимпиад: например, с помощью него была доказана знаменитая теорема о четырех красках. Подробнее с методом можно ознакомиться в проекте Летней конференции Турнира городов.[1] Представленные в статье задачи составляют вводный раздел этого проекта.

К следующим задачам даны решения, но рекомендуем перед прочтением решений подумать над задачами самостоятельно.

1. *В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звездочка, что в одной строке с нею находится больше звездочек, чем в одном столбце с нею.*

Дадим каждому непустому столбцу заряд -1, а каждой непустой строке заряд 1. Тогда сумма зарядов отрицательна. Теперь пусть каждый ряд (столбец или строка) раздаст свой заряд поровну всем звездочкам, которые в нем стоят. Так как суммарный заряд отрицательный, то найдется звездочка с отрицательным зарядом. Если в ее строке a звездочек, а в ее столбце их b, то ее заряд $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Раз эта величина отрицательная, то $a > b$, значит, эта звездочка искомая.

2. *В библиотеке на полках стоят книги, при этом ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдется хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.*

В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Распределим заряды так: если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $1/n$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдает полке заряд $1/m$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k. Но заряд каждой книги меняется меньше чем на 1.

Значит, есть по крайней мере $k+1$ книг, которые отдали больше, чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

3. *На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).*

Дадим каждой точке пересечения заряд 1. Пусть точка, лежащая в пересечении k окружностей, отдает им по $1/k$. Покажем, что теперь у каждой окружности заряд не менее 1.

Выберем на произвольной окружности s точку P, которая отдала этой окружности не больше, чем другие точки, пусть это $1/m$. Тогда через P проходит $m-1$ окружностей, пересекающихся с s в каких-то $m-1$ различных точках, отличных от P. Таким образом, на s не менее m точек пересечения и все они отдали ей хотя бы по $1/m$. Значит, каждая окружность получила заряд не менее 1. Следовательно, количество окружностей не превышает количество точек пересечения.

[1] Проект представляли: Е.Бакаев, В.Буланкина, А.Полянский, А.Рябичев, Г.Челноков, см. https://www.turgor.ru/lktg/2019/

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191206

Подумайте: где в доказательстве использовалось то, что окружности единичного радиуса?

4. *На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдется не менее $n-2$ треугольников.*

На каждой из этих прямых будет образовано по $n-2$ отрезка, значит, всего на них будет $n(n-2)$ отрезков. Эти n прямых делят плоскость на $\frac{n(n+1)}{2}+1$ частей (это можно доказать по индукции; оставим доказательство этого утверждения в качестве упражнения). Из них $2n$ частей будут неограниченными (опять же, подумайте самостоятельно, почему это так). Значит, ограниченных частей (в виде многоугольников) будет $m = \frac{n(n+1)}{2}+1-2n = \frac{n^2-3n+2}{2}$ конечных граней. Пусть среди них t треугольников.

Рассмотрим отрезок AB. Пусть две другие данные прямые, кроме AB, проходящие через A и B, пересекаются в точке C. Назовем ту полуплоскость относительно AB, в которой лежит точка C, *верхней* для отрезка AB.

Дадим каждому отрезку AB заряд 1 и передадим этот заряд в ту смежную с ним грань, которая лежит в верхней для AB полуплоскости. Каждый треугольник получит заряд 3. Докажем, что остальные грани получат не больше 2. Если грань получает заряд от стороны AB, то внешние углы A и B этой грани в сумме больше 180°. Сумма внешних углов многоугольника равна 360°, так что получить заряд от трех ребер можно, только когда все эти три ребра попарно соседние, т.е. только в случае треугольника.

Исходная сумма зарядов отрезков равна получившейся сумме зарядов граней, откуда получаем $n(n-2) \le 3t + 2(m-t) = 2m + t$. Преобразовав, получим $n^2 - 2n \le n^2 - 3n + 2 + t$. Отсюда $n - 2 \le t$.

Другому решению этой задачи посвящена статья А.Канеля и А.Ковальджи «Треугольники и катастрофы» в «Кванте» №11 за 1992 год.

Можете также подумать, как распространить решение этой задачи на псевдопрямые в общем положении:

Внутри окружности нарисовано $n \ge 3$ кривых, соединяющих противоположные точки на окружности. Известно, что любые две кривые имеют ровно одну общую точку и никакие три из них не проходят через одну точку. Кривые делят круг на несколько частей; внутренней назовем часть, если она не ограничена окружностью; а треугольной назовем часть, если ее ограничивают ровно три кривые. Докажите, что число внутренних треугольных частей по крайней мере $n-2$.

5. *Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдется два с общей стороной.*

Предположим, нашлось разбиение, в котором никакие два треугольника не имеют общей стороны. Присвоим каждой вершине разрезания заряд, равный сумме сходящихся в ней углов треугольников. Таким образом, вершины бывают трех видов:

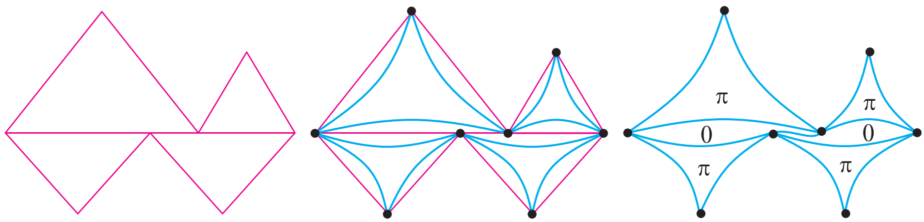
1) вершины квадрата – с зарядом $\pi/2$;

2) вершины, лежащие на стороне квадрата или на стороне одного из треугольников, – с зарядом π;

3) вершины, не лежащие на стороне квадрата или треугольника, – с зарядом 2π.

Пусть есть a вершин второго типа и b вершин третьего типа. Тогда заряды в сумме дают $(a+2b+2)\pi$, следовательно, число треугольников равно $a+2b+2$.

Построим следующий плоский граф. Возьмем все вершины треугольников в качестве вершин. Проведем в каждом треуголь-



Построение графа по разрезанию квадрата на треугольники нике по три ребра (см. рисунок) и посадим на получившуюся треугольную грань заряд π. Остальные грани имеют не менее 3 вершин, разобьем их диагоналями на треугольники (включая внешнюю грань, которая является четырехугольником) и посадим на каждый из них заряд 0.

Итак, в полученном плоском графе все грани треугольные и имеют заряд 0 или π. По построению сумма зарядов равна $(a+2b+2)\pi$ и никакие две грани с зарядами π не граничат по ребру. Пусть V, E, F – количество вершин, ребер и граней соответственно. Из равенства $2E = 3F$ и формулы Эйлера $V - E + F = 2$ получаем соотношение

$$E = 3V - 6 = 3(a+b+4) - 6.$$

Теперь пусть каждая грань отдаст по трети своего заряда смежным с нею ребрам. Средний заряд ребер будет равен $\frac{(a+2b+2)\pi}{3a+3b+12-6} \geq \frac{1}{3}\pi$. Но как минимум одно ребро имеет заряд 0. Именно, хотя бы одно ребро было проведено за пределами квадрата, его-то заряд точно нулевой. Следовательно, найдется ребро, по которому граничат два треугольника с зарядом π, противоречие.

Задачи для самостоятельного решения

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее столбце совпадает с количеством звездочек в ее строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

7. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф – не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них – соперников-гномов. Докажите, что $D \leq \frac{10}{11}E$.

8. Таблица $n \times n$ заполнена нулями и единицами так, что если число в какой-то клетке таблицы равно 0, то сумма всех чисел в ее кресте (*крестом* клетки называется объединение ее столбца и ее строки) не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

9. Пусть есть выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Докажите, что

$$m \geq n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\left[(n-1)/2\right]}\right).$$

Источники задач

1. М1214 «Задачника «Кванта» (А.Разборов).

2, 6, 8. Фольклор.

3. Теорема 1 (K.Bezdek, R.Connelly) из статьи: H.Last, R.Pinchasi. At Least $n-1$ Intersection Points in a Connected Family of n Unit Circles in the Plane. – Discrete & Computational Geometry, 38:2 (2007), 321–354.

4. Идея этого решения предложена Felsner и Kriegel, см. Теорему 5.15 из книги: Stefan Felsner. Geometric Graphs and Arrangements.

5. Эта задача переоткрывалась неоднократно. Например, М320 «Задачника» (А.Печковский) или теорема 6 в статье: Andrey Kupavskii, János Pach, Gábor Tardos. Tilings with noncongruent triangles. – European Journal of Combinatorics, 73 (2018), 72–80.

7. Переформулировка задачи Д.Карпова, IV Кубок памяти А.Н.Колмогорова.

9. Теорема 3 в статье: J.Matoušek. Blocking Visibility for Points in General Position. – Discrete & Computational Geometry, 42:2 (2009), 219–223.

XLI Турнир городов

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. (3)[1] Фокусник выложил в ряд колоду из 52 карт и объявил, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счету с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

А.Воропаев

2. (4) Дана окружность ω с центром O и две ее различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P.

А.Соколов

3. (4) См. задачу М2587,а «Задачника «Кванта».

4. (5) Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41?

Б.Френкин

5. (5) У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трех кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где m, n и k – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

М.Евдокимов

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

10–11 классы

1. (3) См. задачу 1 базового варианта для 8–9 классов.

2. (4) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$.

Е.Бакаев

3. (4) См. задачу М2582 «Задачника «Кванта».

4. (5) См. задачу М2586 «Задачника «Кванта».

5. (5) См. задачу М2587,б «Задачника «Кванта».

Сложный вариант

8–9 классы

1. Назовем *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые. Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

а) (2) не больше, чем у n; б) (2) меньше, чем у n?

Б.Френкин

2. (7) Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 – внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 – площади этих треугольников соответственно. Докажите, что

$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}.$$

Н.Седракян, И.Богданов

3. (7) Есть 100 внешне неразличимых монет трех типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят (имеют массу) по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

В.Новиков

4. (7) Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

А.Соколов

5. (8) Назовем пару (m,n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m+1)(n+1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m,n) хорошая.

Ю.Маркелов

6. (9) У Пети было несколько сторублевок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублевками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке *дешевой* (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублевкой. К моменту, когда сторублевок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги (к этому моменту) хотя бы 5000 рублей?

Т.Казицына

7. (10) В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны черной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли черный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, черные?

А.Грибалко

10–11 классы

1. (5) Многочлен $P(x,y)$ таков, что для всякого целого $n\ge0$ каждый из многочленов $P(n,y)$ и $P(x,n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x,x)$ иметь нечетную степень?

Б.Френкин

2. (5) Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведенные хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC.

Г.Гальперин

3. (6) См. задачу 3 сложного варианта для 8–9 классов.

4. (10) См. задачу М2589 «Задачника «Кванта».

5. (6+6) См. задачу М2588 «Задачника «Кванта».

6. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными ребрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

а) (6) Докажите, что можно выбрать такие $2n^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

б) (6) Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

Н.Гладков, А.Зимин

7. (12) Некоторые из чисел 1, 2, 3, …, n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b-c)$ делится на n, то $b=c$. Докажите, что красных чисел не больше $\varphi(n)$.

А.Семенов

Материал подготовили Е.Бакаев, А.Глуцюк, С.Дориченко, А.Заславский, П.Кожевников, Л.Медников, В.Новиков, В.Ретинский, А.Рябичев, Е.Рябов, А.Семенов, М.Скопенков, И.Фролов, А.Шаповалов

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

Вступительные экзамены

ФИЗИКА

ВАРИАНТ 1

1. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное удвоенному диаметру шаров?

2. Какую массу воды надо дополнительно испарить в комнате объемом $49{,}8\ \text{м}^3$, чтобы при температуре $27\ ^\circ\text{C}$ повысить относительную влажность от 25% до 50%? Давление насыщенных паров при температуре $27\ ^\circ\text{C}$ равно $3{,}6$ кПа, молярная масса воды 18 г/моль, универсальная газовая постоянная $8{,}3$ Дж/(моль · К).

3. Расстояние между пластинами в плоском конденсаторе 10 мм. Разность потенциалов между обкладками 300 В. Какая сила со стороны электрического поля будет действовать на заряд 1 нКл, внесенный в конденсатор?

4. Квадратная рамка со стороной 15 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией 0,02 Тл так, что нормаль к ее поверхности образует угол 60° с вектором индукции. Определите магнитный поток через плоскость рамки.

5. Подвешенный на легкой пружине шарик совершает гармонические колебания с периодом T и амплитудой A вдоль вертикальной оси. Найдите модуль скорости шарика в те моменты, когда его ускорение по модулю составляет часть α амплитуды ускорения ($\alpha < 1$).

6. На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой M с высоты h падает резиновый шарик массой m и отскакивает под углом α к горизонту (рис.1). Найдите скорость клина после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим. Трение между столом и клином не учитывать.

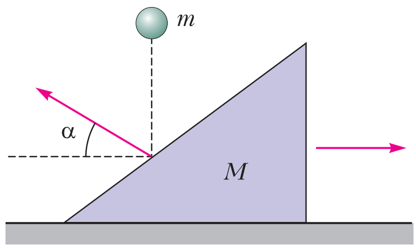


Рис. 1

7. Одноименные клеммы двух источников с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно соединили так, что образовалась замкнутая цепь. Затем к клеммам одного из источников подключили идеальный вольтметр. Найдите его показания, если $\mathscr{E}_1 = 5$ В, $\mathscr{E}_2 = 2$ В, $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 5$ Ом.

8. Стержень движется с постоянной скоростью относительно лабораторной системы отсчета (ЛСО) в продольном направлении мимо двух меток A и B, расположенных на расстоянии Δx друг от друга (в ЛСО). Сначала в момент времени t_1 напротив метки A оказался передний конец стержня. Затем напротив метки B в моменты t_2 и t_3 оказались передний и задний концы стержня соответственно. Найдите собственную длину стержня L_0.

ВАРИАНТ 2

1. Автомобиль стартует с постоянным ускорением и проезжает участок длиной 100 м. Какова скорость автомобиля в конце участка, если он проезжает его за 5 с?

2. С некоторой высоты со скоростью 20 м/с горизонтально брошен камень. Через 4 с после броска кинетическая энергия камня стала равной 3000 Дж. Какова масса камня?

3. ЭДС источника 5 В, его внутреннее сопротивление 3 Ом. Какой ток протекает в цепи, если на нагрузке выделяется мощность 0,75 Вт?

4. Сколько фотонов попадает за 1 с в глаз человека, если глаз воспринимает свет с длиной волны 550 нм при мощности светового потока $1{,}8 \cdot 10^{-16}$ Вт. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

5. К первому грузу массой m_1 подвешен на веревке второй груз массой m_2. Масса веревки m. К первому грузу приложена сила F, направленная вертикально вверх. Найдите натяжение веревки в сечении на одной четверти длины сверху.

6. Чтобы изотермически уменьшить объем газа в открытом в атмосферу вертикальном цилиндре с герметичным поршнем в n раз, на поршень поместили груз массой m. Груз какой массы следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в k раз?

7. В тонкостенной диэлектрической однородно заряженной сфере радиусом R имеется маленькое отверстие. Заряженная частица с зарядом q движется из бесконечности к сфере вдоль прямой, проходящей через отверстие и центр сферы. В тот момент, когда частица находилась на расстоянии $2R$ от центра сферы, ее скорость была v_1, а потенциал в центре ближайшего отверстия был равен φ. Какова будет скорость частицы, когда она достигнет центра сферы? Сфера закреплена и неподвижна.

8. Проволочное полукольцо радиусом $a = 10$ см находится в однородном магнитном ноле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл (рис.2).

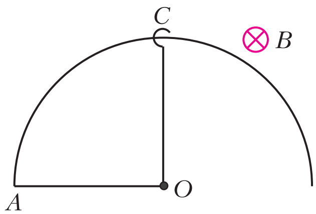


Рис. 2

Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости полукольца. Центр полукольца соединен с ним двумя проводниками, один на которых, AO, неподвижный, другой, OC, поворачивают вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Сопротивление единицы длины всех проводников $\rho = 0{,}65$ Ом/м. Найдите ток в контуре AOC в момент, когда угол между AO и OC равен π.

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций

МАТЕМАТИКА

1 (9–10 классы). В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- вверх (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- вниз (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- влево (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- вправо (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (вверх, вправо, вниз, влево), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 4 команд, возвращающих робота в исходное положение?

2 (9). Имеются карандаш, линейка, а также некоторое специальное устройство, которое для любого изображенного на плоскости угла строит два луча, делящие этот угол на три равных угла. С помощью этих инструментов постройте на плоскости угол величиной 10°. (Напомним, что карандашом можно отметить точку плоскости, в частности, точку пересечения двух прямых. Линейка лишь позволяет провести прямую через две отмеченные точки и никаких «параллельных» или «перпендикулярных» краев у нее нет.)

3 (9–10). Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c), где

$$a = 2x + 5y,\ b = 3z + 5y,\ c = 3z - 2x.$$

4 (9–11). Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

5 (9–11). В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что

$$S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2},\ BC = 3\sqrt{2},$$

$$\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

6 (9–11). Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид 101010…101 (единицы и нули чередуются).

7 (9–10). Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900} = 0{,}25712712712\ldots = 0{,}25(712)$ равна 3.)

8 (9–11). Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов обязательно ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.

9 (10–11). Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство $0{,}999 < A + B\sqrt{2} < 1$.

10 (11). Известно, что уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень x_0. Придумайте хотя бы одно уравнение вида

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d – целые числа и $a \neq 0$, одним из корней которого было бы число $z = x_0^2 + 3x_0 + 1$.

11 (11). Докажите, что для всех $x \in \left(0; \frac{3\pi}{8}\right)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin 2x}.$$

Указание: воспользуйтесь выпуклостью вниз графика функции $f(t) = \frac{1}{\sin t}$ на интервале $(0;\pi)$.

12 (11). В каждую из k ячеек квадратной таблицы $n \times n$ записана единица, а в остальные ячейки – ноль. Найдите максимальное значение k, при котором, независимо от исходного расположения единиц, меняя местами строки между собой и столбцы между собой, можно добиться того, что все единицы окажутся выше побочной диагонали или на ней. (Побочной называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол. На рисунке 3 приведен пример; содержимое ячеек, лежащих выше побочной диагонали или на ней, выделено жирным.)

0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	0
1	**1**	0	0
0	0	0	0

Рис. 3

ФИЗИКА

9 класс

1. Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определите радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) $\sigma = 0{,}073$ Н/м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. (15 баллов)

2. Два одинаковых проводящих шарика несут заряды разного знака. Отношение величин зарядов равно k. Шарики были приведены в соприкосновение и снова удалены на прежнее расстояние. Во сколько раз n сила взаимодействия шариков до соприкосновения больше силы их взаимодействия после соприкосновения? (15 б.)

3. Железный стержень длиной L = 1,5 м при продольной нагрузке P = 5000 Н не должен удлиняться более чем на $\Delta L = 0{,}3$ мм. Какого сечения S надо взять этот стержень? Модуль Юнга железа $E = 19{,}6 \cdot 10^9$ Н/м^2. (15 б.)

4. Однородный тонкий обруч массой m и радиусом R скатывается без скольжения с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность. На какую высоту h подпрыгнет обруч после удара о горизонтальную поверхность, если он скатился с высоты H? Угол наклона плоскости к горизонту равен α. (25 б.).

5. Найдите работу A, совершаемую одним молем ($\nu = 1$ моль) идеального газа в цикле (*1–2–3–1*), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис.4). Точки *1* и *2* лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках *1* и *2* известны, $T_3 = T_1$. (30 б.).

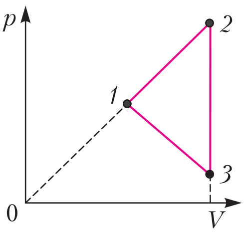


Рис. 4

10 класс

1. В спирт на незначительную глубину опущена трубка с диаметром внутреннего канала $d = 0{,}5$ мм. Определите вес P спирта, вошедшего в капилляр. Коэффициент поверхностного натяжения спирта (при температуре, когда был проведен эксперимент) $\sigma = 0{,}023$ Н/м. (20 баллов)

2. Частица в прямоугольном сосуде, имевшая скорость $\vec{v}$, столкнулась последовательно с тремя взаимно перпендикулярными стенками. Найдите изменение вектора скорости частицы $\Delta\vec{v}$. Все столкновения считать абсолютно упругими. (20 б.)

3. В половине куба с длиной ребра a из материала плотностью ρ сделана полусферическая выемка диаметром a (рис.5). Оставшуюся часть распилили пополам по вертикали и положили на гладкую горизонтальную поверхность. Небольшое тело массой m поместили на внутреннюю стенку первой половины на высоту H и отпустили. На какую высоту h тело поднимется на второй половине? Трение не учитывать. (20 б.)

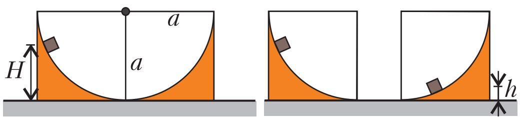


Рис. 5

4. В ряде случаев молекулу газа позволительно представлять в виде шарика диаметром d. Найдите число столкновений ν в единицу времени выделенной молекулы газа с другими молекулами. Средняя скорость относительного движения молекул газа $\langle v_{\text{отн}} \rangle$, концентрация молекул n. (20 б.).

5. В схеме, изображенной на рисунке 6, известны сопротивления, они одинаковы:

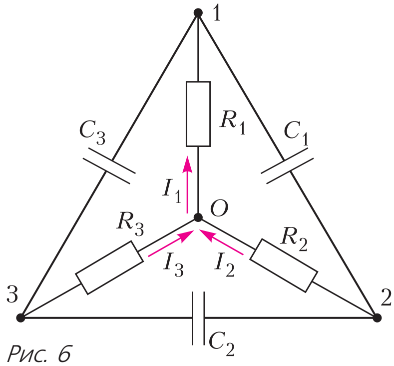


Рис. 6

$R_1 = R_2 = R_3 = R$, также известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе емкостью C_1. (20 б.)

11 класс

1. На чаше весов массой M, закрепленной на пружине, сидит птичка массой m (рис.7). Сразу после того, как птичка улетела в горизонтальном направлении, чаша стала колебаться по вертикали с амплитудой колебаний A. Найдите период колебаний. Массой пружины и затуханием колебаний пренебречь, чаша весов может двигаться только по вертикали. Ускорение свободного падения равно g. (20 баллов)

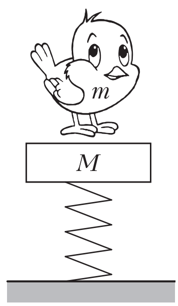


Рис. 7

2. После орудийного выстрела снаряд массой 40 кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами величиной $p_1 = 1{,}8 \cdot 10^4$ кг·м/с и $p_2 = 0{,}6 \cdot 10^4$ кг·м/с. Импульсы осколков направлены под углом

$\alpha = 60°$ друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной, и найдите эту энергию. (20 б).

3. В схеме, изображенной на рисунке 6, известны сопротивления, они одинаковы и равны R каждый, также известны емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3 и их заряды q_1, q_2, q_3. Найдите ток I_1. (20 б.)

4. Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис.8). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определите силу тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше, чем установившийся ток через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь. (20 б.)

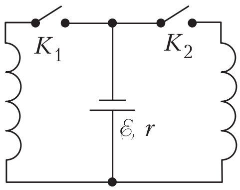


Рис. 8

5. Найдите работу A, совершаемую одним молем ($\nu = 1$ моль) идеального газа в цикле 1–2–3–4–1, состоящем из участка линейной зависимости давления от объема, двух изохор и изобары (рис.9). Точки 1 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Температуры T_1 и T_3 в соответствующих точках 1 и 3 известны, $T_4 = T_1$. (20 б.)

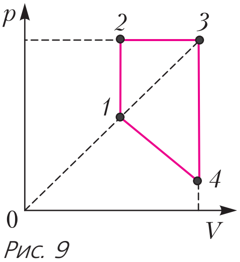


Рис. 9

МАТЕМАТИКА И КРИПТОГРАФИЯ

Избранные задачи

1 (8–9, 10 классы). Каждому набору $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (где $(x_i \in \{0,1\})$) функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ставит в соответствие либо 0, либо 1. Условимся значения 0 и 1 называть противоположными. Известно, что если в произвольном наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменить значение x_1 или x_5 на противоположное, то и соответствующее значение функции изменится на противоположное. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ получена по правилу:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

$$x_{k+5} = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}),\ k = 1, 2, \ldots$$

Найдите x_{14}, если известны первые 13 членов этой последовательности: 0,0,0,0,0,1,0, 1,1,0,0,1,1. Ответ обоснуйте.

2 (8–9, 10 кл.). Для зашифрования слова из пяти букв каждая его буква заменяется на число согласно таблице на рисунке 10. Полученный набор чисел $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ затем

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ъ**	**Ы**	**Ь**	**Э**	**Ю**	**Я**
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Рис. 10

преобразуется в набор $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ по следующему правилу. Сначала вычисляют вспомогательные числа $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$ по формулам

$$\bar{y}_0 = 2^0 \cdot x_0 + 2^4 \cdot x_1 + 2^3 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_3 + 2^1 \cdot x_4,$$

$$\bar{y}_k = \left(2^k \cdot x_0 + 2^{k-1} \cdot x_1 + \ldots + 2^0 \cdot x_k\right) + \left(2^4 \cdot x_{k+1} + 2^3 \cdot x_{k+2} + \ldots + 2^{k+1} \cdot x_4\right),$$

$$k = 1, 2, 3,$$

$$\bar{y}_4 = 2^4 \cdot x_0 + 2^3 \cdot x_1 + 2^2 \cdot x_2 + 2^1 \cdot x_3 + 2^0 \cdot x_4.$$

А затем полагают y_k равным остатку от деления числа $\bar{y}_k$ на 32. Расшифруйте исходное слово, если

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (11, 27, 2, 16, 0).$$

3 (8–9, 10 кл.). В каждую клетку доски 4×4 Аня положила по нескольку зерен (рис.11) и передала доску Боре. *Трансверсалью* доски называется набор из 4 клеток, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах. Боря за один ход может снять одинаковое количество зерен с каждой клетки какой-либо одной трансверсали. За какое минимальное чис-

1	7	2	5
4	5	4	2
2	1	5	7
8	2	4	1

Рис. 11

ло ходов Боря может снять все зерна с доски?

4 (8–9 кл.). Ваня покрасил n точек числовой прямой с координатами $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 2 = 3$, …, $a_n = a_{n-1} + n$ в белый цвет, а остальные точки из отрезка $[a_1, a_n]$ с целыми координатами – в синий. Какое максимальное количество отрезков разной длины, один из концов которого белый, а другой синий, он сможет построить?

5 (8–9, 10 кл.). Для зашифрования слова каждая его буква заменяется на двухзначное число согласно таблице на рисунке 12. Затем

А	Б	В	Г	Д	Е,Ё	Ж	З	И,Й	К	Л	М	Н	О	П
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
Р	**С**	**Т**	**У**	**Ф**	**Х**	**Ц**	**Ч**	**Ш**	**Щ**	**Ы**	**Ь,Ъ**	**Э**	**Ю**	**Я**
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Рис. 12

выбираются секретные ключи K_1, K_2 – натуральные числа от 1 до 9. С их помощью каждое двузначное число преобразуется так. Пусть A – первая цифра двузначного числа, B – его вторая цифра. Двузначное число (A, B) преобразуется в число (A_1, B_1) по формулам $A_1 = B$, $B_1 = r_{10}(A + K_1 \cdot B)$. Здесь $r_{10}(x)$ – остаток от деления числа x на 10. Затем число (A_1, B_1) преобразуется в число (A_2, B_2) по аналогичным формулам, но только вместо ключа K_1 используется ключ K_2. Далее каждое исходное двузначное число (A, B) было заменено числом (A_2, B_2). В результате получилось вот что: **59 28 77 64 95 64 90 41 64**. Восстановите исходное слово.

6 (8–11 кл.). При входе в личный кабинет на терминале требуется ввести четырехзначный пароль из 0 и 1. Для этого на терминале имеются 4 кнопки и 4 окошка. При нажатии на кнопку в соответствующем окошке текущий символ заменяется на противоположный (т.е. если в окошке сейчас горит цифра 1, то после нажатия на кнопку там будет 0 и наоборот). Сейчас во всех окошках выставлена 1 (рис.13). Какое наименьшее количество нажатий кнопок потребуется, чтобы перебрать все возможные варианты пароля?

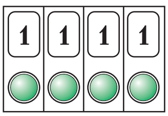


Рис. 13

7 (10 кл.). Про числа A и B известно следующее:

1) $A = p_1^2 \cdot p_2^2$, где p_1 и p_2 – различные простые числа,

2) $B = q^2, q \in \mathbb{N}$,

3) $B - A = 36^2$.

Найдите все такие числа A и B.

8 (11 кл.). В Крипто-Вегасе на табло игрового автомата отображаются два натуральных числа $x_0 = 5$ и $y_0 = 201$. При нажатии кнопки первое из этих чисел заменяется на $x_1 = r_{11}(a \cdot x_0 + b)$, где a и b – некоторые неизвестные натуральные числа, а второе число заменяется на $y_1 = r_{2017}(y_0 + 523)$. Здесь $r_k(m)$ – остаток от деления натурального числа m на k. Нажав кнопку еще раз, получим (по таким же формулам) числа $x_2 = r_{11}(a \cdot x_1 + b)$ и $y_2 = r_{2017}(y_1 + 523)$ и так далее. Игрок получает приз, если при очередном нажатии на табло загорятся числа $x_n = 4$ и $y_n = 1993$. Определите:

а) какие из следующих четырех последовательностей **(1)**: $(2, 5, 4, 7, 1)$; **(2)**: $(6, 9, 7, 1, 3)$; **(3)**: $(7, 10, 9, 2, 8)$; **(4)**: $(1, 0, 8, 8, 7)$ при надлежащем выборе a и b и вышеуказанных фиксированных x_0, y_0 могли бы совпасть с последовательностью $(x_1, \ldots, x_5)$, полученной на этом игровом автомате;

б) может ли игрок получить приз, если $(x_1, \ldots, x_5)$ – одна из (реализуемых) последовательностей из пункта а)?

9 (11 кл.). Для подтверждения переводимой в банк суммы братья A и B используют «кольцевую подпись», которая не позволяет определить, кто именно из них совершил перевод. Брат A имеет свой открытый ключ $e_A = 5$ и некий секрет, позволяющий для любого натурального y $(y \le 90)$ находить x_A такое, что $y = r_{91}\left(x_A^{e_A}\right)$. Здесь $r_k(m)$ – остаток от деления натурального числа m на k. У брата B есть свой ключ $e_B = 25$ и свой секрет. Тогда A для подписи суммы M случайно выбирает натуральные числа x_B и v, не превосходящие 100, вычисляет $y_B = r_{91}\left(x_B^{e_B}\right)$ и находит y_A из уравнения

$$r_{101}\left(M\left(y_A + M\left(y_B + v\right)\right) - v^3\right) = 0. \quad (*)$$

Используя свой секрет, A находит x_A такой, что $y_A = r_{91}\left(x_A^{e_A}\right)$. Тогда тройка чисел (x_A, x_B, v) будет подтверждением факта перевода суммы M. В банке корректность подтверждения проверяют подстановкой $y_A = r_{91}\left(x_A^{e_A}\right)$, $y_B = r_{91}\left(x_B^{e_B}\right)$ и v в уравнение $(*)$. Например, $(1, 90, 46)$ – корректное подтверждение суммы $M = 46$. Постройте хотя бы одно корректное подтверждение суммы $M = 69$.

10 (11 кл.). Известно, что оба числа p и $p^{2018} + 800$ простые. Докажите, что число $p^4 + 8$ тоже простое.

Публикацию по математике, а также математике и криптографии подготовил С.Рамоданов; по физике – М.Алексеев, В.Попов

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 100 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт.

Обучение в школе ведется по четырем предметам научно-технической направленности – физике, математике, информатике и химии. В 8 классе изучаются только физика и математика. В 9–11 классах к этим предметам добавляются математические основы информатики и ИКТ (информатика) и химия. Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два, три или четыре предмета.

Количество заданий в год по классам и предметам представлено в таблице:

	Физика	Математика	Информатика	Химия
8 класс	5	6		
9 класс	6	7	4	4
10 класс	6	7	4	4
11 класс	6	8	5	4

Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики, высшей математики и департамента химии МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренными школьниками. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными общеразвивающими программами и едины для всех отделений.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2020/21 учебный год проводится на заочное, очное и очно-заочное отделения.

Полная программа обучения рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

Согласно положению о ЗФТШ учащийся может обучаться *только на одном отделении ЗФТШ*.

Учащиеся всех отделений, успешно справившиеся с программой ЗФТШ, по окончании 11 класса получают свидетельство с итоговыми оценками по изучавшимся в 11-м классе предметам. Свидетельство учитывается при поступлении в МФТИ в соответствии с правилами приема в МФТИ и Порядком учета индивидуальных достижений поступающих (https://pk.mipt.ru/bachelor/2020_ID).

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ – 2021», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в феврале или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает online-лекторий по физике, математике и химии по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ.

Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение на заочном или очно-заочном отделениях.

Заочное отделение *(индивидуальное заочное обучение)*

Телефон: (495) 408-51-45,
e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам.

Школьники, поступающие на заочное отделение, выполняют вступительное задание на сайте https://zftsh.online с помощью встроенного редактора или путем прикрепления скан-копий или фотографий работ, выполненных в тетради.

Работы, выполненные в тетрадях и присланные по почте, приниматься не будут.

При регистрации на https://zftsh.online необходимо прикрепить хорошо читаемую копию справки из школы.

Вступительное задание необходимо отправить на проверку не позднее *1 марта 2020 года.*

Решение приемной комиссии будет сообщено в июле 2020 года по указанному при регистрации адресу электронной почты. Также в личном аккаунте появится справка о зачислении в ЗФТШ.

Вниманию школьников, уже обучающихся на заочном отделении ЗФТШ

Если школьник уже обучается в ЗФТШ и хочет добавить на следующий год еще предмет, необходимо *до 1 марта 2020 года* выполнить на сайте https://zftsh.online вступительное задание по этому предмету. Выполнить вступительное задание нужно из своего уже имеющегося аккаунта. *Еще раз регистрироваться не надо.*

Решение приемной комиссии в таких случаях не высылается, а справка о добавлении предмета и задания по нему становятся доступными ученику в личном аккаунте в июле в случае положительного решения приемной комиссии.

Обучение на платформе zftsh.online

Ученик в течение учебного года в соответствии с программой получает в личном кабинете на сайте https://zftsh.online доступ к заданиям по изучаемым предметам. Ученик выполняет на сайте задания с помощью встроенного редактора или путем прикрепления скан-копий или фотографий работ, выполненных в тетради.

Работы по истечении срока выполнения проверяют на сайте закрепленные за учеником преподаватели ЗФТШ. Как только работа проверена, ученик видит свою работу с рецензией и авторскими решениями контрольной части задания.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Телефон: (498) 744-63-51,
e-mail: fakultativ@mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя, тремя или четырьмя преподавателями* – физики, математики, информатики и химии, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ (работы проверяются руководителями групп и в ЗФТШ не высылаются).

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть на сайте ЗФТШ в разделе «отделения» → «очно-заочное» → «поступление»). В заявлении должны быть указаны Ф.И.О. руководителей факультативной группы по предметам и поименный алфавитный список обучающихся (Ф. И. О. в алфавитном порядке полностью с указанием класса, *в который поступают учащиеся*, и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным предметам, *адрес, телефон и e-mail школы*).

Заявление можно выслать обычной почтой, вложив конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»), или выслать в отсканированном виде (с подписями и печатью) на e-mail: fakultativ@mipt.ru *до 1 апреля 2020 года*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике, химии и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики (kpk.mipt.ru), проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп (в ЗФТШ не высылаются), а в ЗФТШ высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость (11 класс) за год, образец – на сайте ЗФТШ. (Подробнее – в разделе «Рекомендации».)

Очное отделение *(заочное обучение с посещением очных консультаций)*

Телефон: (925) 755-55-80,

Группа ВК: https://vk.com/vftsh

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится в сентябре в два этапа:

- заочный этап – тестирование на сайте http://zftsh.online,
- очный этап – устные экзамены.

Более подробная информация о наборе на очное отделение будет размещена на сайтах ЗФТШ в августе 2020 года. Занятия с учащимися очного отделения проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский.

Контакты ЗФТШ

Почтовый адрес: Институтский пер., д.9, г.Долгопрудный, Московская область, 141700, ЗФТШ.

Телефоны: (495) 408–51–45 – заочное отделение, (498) 744–63–51 – очно-заочное отделение, (498) 744–65-83 и (925) 755–55–80 – очное отделение.

E-mail: zftsh@mail.mipt.ru – заочное отделение, fakultativ@mipt.ru – очно-заочное отделение.

Web: www.school.mipt.ru

https://zftsh.online

ВК: https://vk.com/club1032617

Очное отделение при ФАЛТ МФТИ в Жуковском –

E-mail: vftsh@mail.ru

ВК: https://vk.com/vftshfalt

Ниже приводятся вступительные задания по физике, математике, информатике и химии. Номера задач, обязательных для выполнения (для поступления на заочное и очно-заочное отделения), и максимальные баллы приводятся в таблицах (в физике

Номера задач

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	4–8	8–12	7,8, 12–14
Математика	1–5	3–8	4,5,7–10	5,7–12
Информатика		1–7	6,8–12	8,9,11, 13–15
Химия		1–5	2,3,6–9	2,3,7, 10–12

Максимальные баллы

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	25
Математика	21	25	26	31
Информатика		10	11	12
Химия		30	40	40

каждая задача оценивается по пятибалльной системе, в остальных предметах максимальное количество баллов за задачу указано в скобках).

Вступительные задания

ФИЗИКА

1. Поезд длиной 150 м, двигаясь с постоянной скоростью, въезжает на мост длиной 300 м. Последний вагон покидает мост через 1,5 мин после въезда поезда на мост. Найдите скорость поезда.

2. U–образная трубка с вертикально расположенными коленами частично заполнена водой. В правое колено долили масло. В результате в правом колене оказались вода и слой масла высотой 20 см, а в левом – вода. Найдите разность уровней верхних поверхностей жидкостей в коленах трубки. Плотность воды и масла $1\ г/см^3$ и $0{,}9\ г/см^3$ соответственно. Вода и масло не смешиваются.

3. С какой силой действует вода на пробку в дне бочки? Площадь пробки $S = 10\ см^2$. Высота слоя воды в бочке $H = 1{,}5$ м. Атмосферное давление $p_0 = 100000$ Па. Плотность воды $\rho = 1\ г/см^3$. Принять $g = 10\ м/с^2$.

4. На концах легкой линейки, расположенной горизонтально, лежат два груза (рис.1). Масса более тяжелого груза

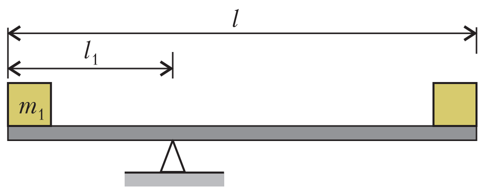


Рис. 1

$m_1 = 100$ г. Длина линейки $l = 40$ см. Расстояние от опоры до груза с большей массой $l_1 = 15$ см. Найдите силу давления линейки на опору при равновесии системы. Размеры грузов малы по сравнению с длиной линейки. Принять $g = 10\ м/с^2$.

5. Однородный шар висит на нити в воздухе. Сила натяжения нити $F = 13{,}5$ Н. Если шар погрузить полностью в воду, то сила натяжения уменьшится на $F_1 = 5$ Н. Найдите плотность шара.

6. В батарею отопления вода поступает по трубе при температуре $t_1 = 50\ °C$, а выходит при температуре $t_2 = 48\ °C$ Сечение трубы $S = 4\ см^2$, скорость воды $v = 0{,}25$ м/с. Какое количество теплоты получит помещение от этой батареи за $\tau = 1$ ч? Плотность воды $\rho = 1\ г/см^3$, удельная теплоемкость воды $c = 4200\ Дж/(кг \cdot К)$.

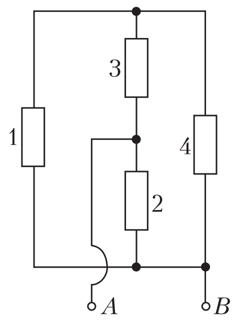


Рис. 2

7. Цепь собрана из четырех одинаковых резисторов (рис.2). К точкам A и B цепи подведено напряжение. Найдите отношение мощностей, выделяющихся на резисторах 2 и 1.

8. Чувствительные равноплечные весы уравновешены. На одной чашке лежит кусок льда массой $m = 1{,}5$ кг, а на другой – гиря. Когда лед растаял, вся вода осталась в чашке, но равновесие нарушилось. Какой массы грузик надо положить на чашку с гирей для восстановления равновесия? Плотность воды, льда и воздуха $\rho_в = 10^3\ кг/м^3$, $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3\ кг/м^3$, $\rho = 1{,}2\ кг/м^3$ соответственно.

9. Камень бросили со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На какой высоте окажется камень после $t = 1{,}6$ с полета? Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 10\ м/с^2$.

10. Пять одинаковых брусков, связанных легкими нитями, движутся по горизонтальной поверхности стола под действием горизонтальной силы $F = 1{,}25$ Н (рис.3). Масса

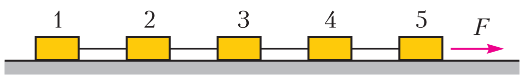


Рис. 3

одного бруска $m = 0{,}1$ кг, коэффициент трения между каждым бруском и столом $\mu = 0{,}2$. Найдите силу натяжения между вторым и третьим брусками. Принять $g = 10\ м/с^2$.

11. Спутник Земли движется по круговой орбите радиусом $3R$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. Найдите период обращения спутника (в минутах).

12. На гладком горизонтальном столе удерживают горку с небольшой шайбой на вершине. Масса горки в 8 раз больше массы шайбы. Если горку продолжать удерживать, а шайбе сообщить незначительный толчок, то шайба, съехав с горки, имеет на столе скорость v_1. Какую скорость v_2 будет иметь шайба после съезда на стол, если горку и шайбу одновременно отпустить и шайба от незначительного толчка начнет съезжать с горки? Поверхность горки гладкая и имеет плавный переход к поверхности стола. Шайба скользит по горке, не отрываясь от нее.

13. Идеальный одноатомный газ в количестве ν моль нагревают изобарически от температуры T до температуры $1{,}2T$. Какое количество теплоты получил газ?

14. В двух ближайших вершинах квадрата со стороной a находятся точечные заряды Q и $2Q$. Найдите напряженность электростатического поля в ближайшей к заряду Q третьей вершине квадрата.

МАТЕМАТИКА

1 (4 балла). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке L. Найдите угол при вершине C треугольника, если известно, что $\angle A_1AL = 72°$, $\angle B_1BL = 75°$.

2 (4 б.). Найдите все пары натуральных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $xy = 38x + 38y$.

3 (3 б). Фигура Φ на плоскости определяется системой

$$\begin{cases} x + |x| = 0, \\ y - |y| = 0, \\ 3x + a \geq y. \end{cases}$$

Найдите все значения параметра a, при которых площадь фигуры Φ равна 5046.

4 (4 б). Сумма двух натуральных чисел равна 3597. При этом если к одному из этих чисел справа приписать цифру 6, а у другого вычеркнуть последнюю цифру, то получатся два одинаковых натуральных числа. Найдите эти числа.

5 (6 б.). Антон, Борис и Василий решили переплыть с одного берега озера на противоположный, расстояние между которыми составляет 3 км. При этом Антон решил плыть вместе с Борисом на лодке, а Василий отправился вплавь самостоятельно со скоростью 10 метров в минуту. В некоторый момент времени Борис выпрыгнул из лодки и поплыл к месту назначения также со скоростью 10 метров в минуту. В тот же самый момент, когда Борис выпрыгнул из лодки, Антон развернулся, доплыл до встречи с Василием, после чего Василий залез обратно в лодку и они отправились к пункту назначения. Оказалось, что все трое прибыли на противоположный берег реки одновременно, а скорость лодки в 12 раз больше скорости каждого из пловцов. Определите, сколько времени заняла переправа.

6 (4 б.). Мотоциклист проехал по замкнутому пути $ABCA$ такому, что ABC – прямоугольный треугольник с катетами AB и BC, причем $AB + 1 = BC$. По участкам AB и BC мотоциклист ехал со скоростью 41 км/ч, а на промежутке CA пошел дождь и вследствие ухудшения погодных условий скорость была снижена до 29 км/ч. В результате оказалось, что на путь ABC вдоль катетов треугольника мотоциклист затратил столько же времени, сколько и на путь вдоль гипотенузы CA. Определите длину пути $ABCA$, пройденного мотоциклистом.

7 (4 б.). Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два корня такие, что их разность равна 17, а разность их кубов равна 1547. Найдите коэффициенты a и b.

8 (4 б.). Медианы треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, взаимно перпендикулярны. Найдите AC, если $AB^2 + BC^2 = 605$.

9 (5 б.). На отрезке KM выбрана точка L такая, что $KL = 6$, $LM = 30$. На отрезках KL, LM и KM как на диаметрах в одну сторону построены полуокружности. Окружность ω касается всех трех полуокружностей. Найдите радиус окружности ω.

10 (3 б.). Длины сторон прямоугольного треугольника равны a, b, c, а его площадь равна S. Известно, что числа a, b, c, S составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите периметр треугольника.

11 (5 б.). Числа x, y, z образуют (в указанном порядке) геометрическую прогрессию; числа x, $y + 10$, z образуют (в указанном порядке) арифметическую прогрессию, а числа x, $y + 10$ и $z + 80$ (в указанном порядке) – также геометрическую прогрессию. Найдите x, y и z.

12 (4 б). Известно, что $\operatorname{ctg} x = 3$. Найдите значение выражения

$$\sin^2\left(30^\circ + x\right) - \sin^2\left(45^\circ - x\right) + \\ + \cos 75^\circ \sin\left(75^\circ + 2x\right).$$

ИНФОРМАТИКА

1 (1 балл). В какой системе счисления справедливо равенство 22 + 44 = 110?

2 (1 б.). Автомат получает на вход трехзначное десятичное число, в котором нет цифр больше чем 7. По этому числу строится новое число по следующим правилам.

1. Вычисляется сумма первой и второй, а также второй и третьей цифры.

2. Полученные два числа записываются друг за другом в порядке убывания (без разделителей).

Определите, какое из следующих чисел может быть результатом работы автомата.

1) 1510; 2) 1406; 3) 1210; 4) 1014.

3 (2 б.). Исполнитель умеет двигаться вперед, оставляя след, и поворачиваться на угол, кратный 60 градусам. Какие фигуры можно нарисовать с помощью данного исполнителя?

1) Правильный шестиугольник; 2) правильный пятиугольник; 3) квадрат; 4) правильный треугольник.

4 (2 б.). Чертежнику был дан для исполнения следующий алгоритм:

Сместиться на $(3,-6)$
Повтори N раз
Сместиться на $(4,b)$
Сместиться на $(6,-6)$
конец
Сместиться на $(-53,26)$

Найдите целое значение b, для которого после выполнения программы Чертежник окажется в исходной точке.

5 (1 б.). Выберите правильный ответ.

Для того чтобы значения переменных X и Y поменялись местами, необходима следующая последовательность команд присваивания:

1) B=X; X=Y; Y=B; 2) B=X; X=Y; X=B; 3) B=X; X=Y; B=Y; 4) X=Y; Y=X.

6 (2 б.). Дана схема изображения в виде таблицы пикселей (рис.4). Чему равно минимальное количество бит для его кодирования?

1) 40; 2) 120; 3) 160; 4) 80.

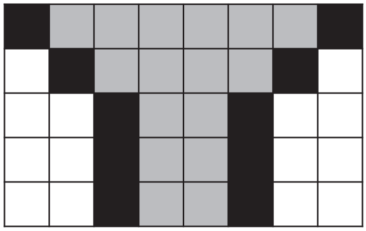


Рис. 4

7 (1 б.). Чему равно значение переменной а после выхода из цикла (рис.5)?

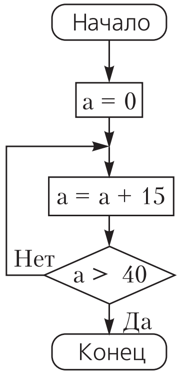


Рис. 5

8 (1 б.). Логическая функция задана выражением

$$F = (A + B) * \\ * \left(\bar{B} + C\right) * A * \bar{C}.$$

Найдите значение функции при $A = 1$, $B = 0$ и $C = 0$.

9 (2 б.). Дан фрагмент программы на языке программирования Pascal. Вычислите, что будет выведено на экран монитора в результате выполнения следующей последовательности операторов:

```
ws:='электрификация';
sw:='тр';
p:=pos(sw,ws);
write(p:2).
```

10 (2 б.). Исполнителю был дан следующий алгоритм:

ПОКА число меньше 100, выполняй:
Прибавь 3
Умножь на 2

Сколько раз будет выполнен данный цикл, если исходное число равно 5?

11 (2 б.). Рассматриваются символьные последовательности длиной 5 в шестибуквенном алфавите {А, Б, В, Г, Д, Е}. Сколько существует таких последовательностей, которые начинаются с буквы А и заканчиваются буквой Е?

12 (2 б.). Что будет напечатано в результате выполнения процедуры (рис.6)?

13 (2 б.). В электронной таблице значение формулы **=СРЗНАЧ(A2:C2)** равно 5. Чему равно значение формулы **=СУММ(A2:D2)**, если значение ячейки D2 равно 7?

1) **27**; 2) 22; 3) 15; 4) **20**.

14 (2 б.). В динамической (электронной) таблице приведены данные о продаже путе-

```
procedure proc;
var
  x,y,z:integer;
begin
  x:=17;
  y:=x div 5;
  z:=y mod 2;
  write(z);
end;
begin
  proc;
end.
```

Рис. 6

вок турфирмой «Все на отдых» за 4 месяца (рис.7). Для каждого месяца вычислено общее количество проданных путевок и сред-

Страна	Май		Июнь	
	Продано, шт.	Цена, тыс. руб.	Продано, шт	Цена, тыс. руб.
Египет	12	24	15	25
Турция	13	27	16	27
ОАЭ	12	19	10	22
Хорватия	6	30	7	34

Страна	Июль		Август	
	Продано, шт.	Цена, тыс. руб.	Продано, шт.	Цена, тыс. руб.
Египет	8	22	10	25
Турция	15	26	16	28
ОАЭ	10	21	9	22
Хорватия	13	35	10	33

Рис. 7

няя цена одной путевки (рис.8). Известно, что доход фирмы от продажи каждой путевки не зависит от места отдыха и равен 10% от средней цены путевки в текущем месяце. В каком месяце доход турфирмы был максимальный?

Продано, шт.	43	48	46	45
Средняя цена, тыс. руб.	25	27	26	27

Рис. 8

1) Май; 2) июнь; 3) июль; 4) август.

15 (3 б.). На вход программе подается последовательность натуральных чисел. Признак конца ввода – ноль. Напишите программу, которая находит сумму трехзначных чисел, кратных трем и последняя цифра которых равна 7. Числа не превосходят 10000. Массивы не использовать.

ХИМИЯ

1 (2 б.). Рассчитайте плотность 12%-го раствора карбоната натрия, полученного упариванием его 10%-го раствора массой 150 г до объема 112 мл.

2 (5 б.). Бертоллетову соль массой 24,5 г прокалили в присутствии диоксида марганца. Полученный газ смешали с газом, который образовался при взаимодействии диоксида марганца массой 26,1 г с избытком концентрированной соляной кислоты. Определите относительную плотность полученной газовой смеси по воздуху. Возможно ли взаимодействие компонентов данной смеси друг с другом?

3 (15 б.). Даны четыре вещества: водный раствор гидроксида натрия, соляная кислота, углекислый газ и оксид хрома (III). Напишите не менее пятнадцати уравнений реакций с участием данных веществ, а также с участием продуктов их взаимодействия.

4 (4 б.). В водном растворе соляной и азотной кислот массой 170 г соотношение массы воды и массы обеих кислот составляет 3:2. При обработке этого раствора избытком гидрокарбоната натрия выделилось 33,6 л газа. Определите массовые доли каждой из кислот в растворе.

5 (4 б.). Масса атома стабильного изотопа элемента X равна $4{,}98 \cdot 10^{-24}$ г. Определите, что это за элемент, и рассчитайте объем фтора (л, н. у.), который может прореагировать с простым веществом элемента X массой 6,0 г. Каким станет данный объем при давлении 2 атм и температуре 40 °C ?

6 (8 б.). Изотопы элементов X и Y имеют массовые числа 37 и 40 соответственно. Их ядра содержат по 20 нейтронов. 1) Определите, каким химическим элементам соответствуют изотопы, напишите электронные конфигурации для их атомов. 2) Определите характерные степени окисления данных элементов и напишите электронные конфигурации для всех полученных заряженных частиц. 3) Приведите формулы высших оксидов данных элементов. Возможно ли взаимодействие между этими оксидами? Объясните, почему. Если возможно, напишите уравнение реакции.

7 (4 б.). Растворимость сульфата натрия в 100 г воды при 20 °C составляет 19,2 г, а при 30 °C – 40,8 г. Вычислите массу глауберовой соли, которая выпадет в осадок, если 500 г насыщенного при 30 °C раствора охладить до 20 °C .

8 (3 б.). При добавлении по каплям раствора гидроксида натрия к раствору хлорида алюминия образуется белый аморфный осадок, а при добавлении раствора хлорида алюминия к раствору гидроксида натрия – нет (рис.9). Объясните данное

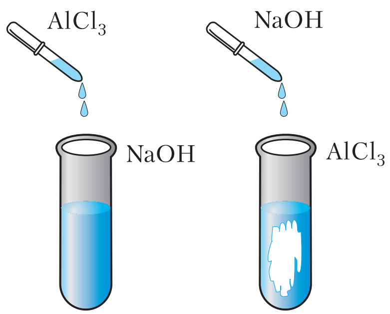


Рис. 9

явление, напишите уравнения протекающих реакций в молекулярной и краткой ионной формах.

9 (5 б.). Осуществите цепочку превращений (рис.10).

$$A \rightarrow PH_3 \rightarrow H_3PO_4 \rightarrow B \rightarrow C$$

Рис. 10

10 (6 б.). Изотопы элементов X и Y имеют массовые числа 37 и 40 соответственно. Их ядра содержат по 20 нейтронов. 1) Определите, каким химическим элементам соответствуют изотопы, напишите электронные конфигурации для их атомов. 2) Определите характерные степени окисления данных элементов и напишите электронные конфигурации заряженных частиц в высшей и низшей степенях окисления. 3) Приведите формулы высших оксидов данных элементов. Возможно ли взаимодействие между этими оксидами? Объясните, почему. Если возможно, напишите уравнение реакции.

11 (4 б.). При сжигании дихлоралкена массой 37,5 г получили смесь газов (200 °C) общей массой 85,5 г. Установите молекулярную и структурную формулы органического вещества, если известно, что оно не имеет ни геометрических изомеров, ни заместителей при атомах углерода, находящихся в sp^3-гибридном состоянии.

12 (6 б.). Составьте цепочку превращений (рис.11).

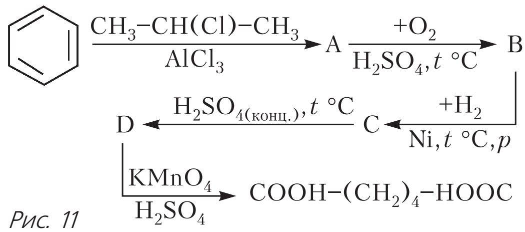


Рис. 11

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №11)

1. Ответ приведен на рисунке 1.

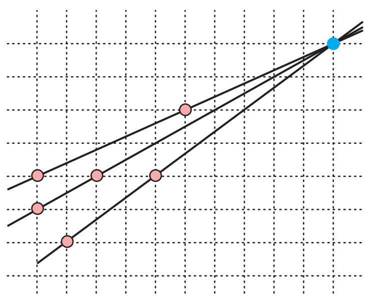


Рис. 1

2. 8 минут 20 секунд.

Если расстояние от пальмы до баобаба равно S метров, то скорость реки $S/25$ м/мин. Пусть скорость живого крокодила V м/мин, тогда $S = 25(V - S/25)$, так как живой крокодил расстояние S проплывает за 25 минут против течения реки. Отсюда находим, что $V = 2S/25$. Значит, когда живой крокодил плывет от пальмы до баобаба по течению реки со скоростью $V + S/25 = 3S/25$, он тратит на путь длиной S время, равное $S : (3S/25) = 25/3$ минуты.

3. 9.

Нетрудно понять, что схема (граф) того, как пенсионеры играли в первый день, это шестиугольник, а во второй – пятиугольник. Пример показан на рисунке 2. Если пенсионеров не больше 8, то найдутся трое, которые выходили оба раза. Тогда какие-то двое из них играли во второй день. Значит, в шестиугольнике они стоят напротив. Тогда третий граничит в шестиугольнике с одним из этих двух, а в пятиугольнике между ними расстояние 2, и мы нашли треугольник.

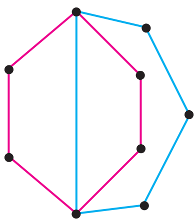


Рис. 2

4. Не может.

Рассмотрим задачу на построение треугольника по следующим данным: острому углу A, высоте BH и медиане CM. Из условия следует, что она должна иметь два решения. При этом прямоугольный треугольник ABH по катету и острому углу восстанавливается однозначно. Вершина C должна находиться от середины M стороны AB на расстоянии, равном заданной медиане, т.е. окружность с центром M и радиусом, равным медиане, должна пересечь отрезок AH в двух внутренних точках C_1 и C_2 (рис.3). Тогда оба

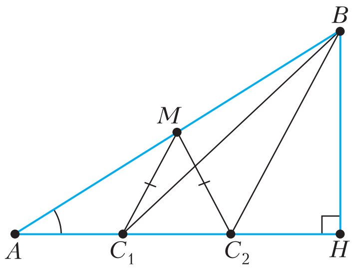


Рис. 3

треугольника ABC_1 и ABC_2 обязательно будут тупоугольными.

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №12)

1. Нет.

Пусть есть три палочки по 10 см. Отломим от первых двух куски по 9 см, а от третьей – 1 см. Из кусков 9 см, 9 см, 1 см можно сложить треугольник, а из оставшихся – нельзя по неравенству треугольника ($1 + 1 < 9$).

2. Например, при $a = 1003$ получится $1001 \cdot 1005 \cdot 1003^2 + 4 = \left(1003^2 - 4\right) \cdot 1003^2 + 4 = \left(1003^2 - 2\right)^2$, при $a = 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 4$ получится $(1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 2)^2$.

3. Проверьте, что карта на рисунке 4 подходит.

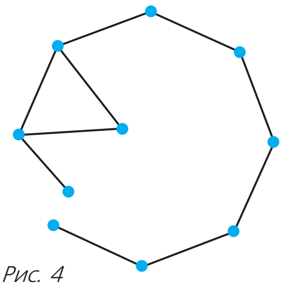


Рис. 4

4. 200.

В каждом важном прямоугольнике черных клеток на одну больше, чем белых. Значит, разность $B - W$ равна количеству важных прямоугольников. Посчитаем его. Рассмотрим произвольный важный прямоугольник. Рассмотрим 2 строки, в которых лежат самые верхние и самые нижние клетки прямоугольника (эти строки могут и совпадать). Аналогично рассмотрим 2 столбца, в которых лежат его самые левые и самые правые клетки. Посмотрев на рисунок 5, можно заметить,

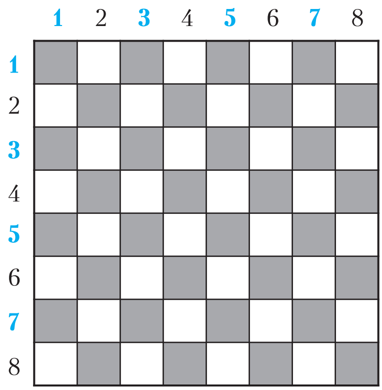


Рис. 5

что для важных прямоугольников номера этих 4 рядов имеют одинаковую четность. Количество важных прямоугольников равно количеству способов выбрать такие 4 ряда – посчитаем его. Выбрать пару нечетных строк можно 10 способами (4 способа, если строки совпадают, и $3 \times 4/2 = 6$, если различаются), столькими же способами можем выбрать пару нечетных столбцов. Значит, выбрать комбинацию из 4 нечетных рядов можно $10 \times 10 = 100$ способами. Столько же способов есть выбрать комбинацию из 4 четных рядов.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №10)

5. а) Нет.

Сложим все десять полученных сумм. Получим удвоенную сумму всех чисел, стоящих по кругу, а это четное число. Но среди 10 подряд идущих чисел ровно 5 нечетных, следовательно, их сумма нечетна. Значит, получившиеся 10 чисел не могут быть подряд идущими.

б) Да.

Например, если по кругу выписаны числа 1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4.

6. Да.

Приведем один из возможных примеров. Разделим каждую сторону треугольника на три равные части, после чего проведем через точки деления прямые, параллельные сторонам (рис.6).

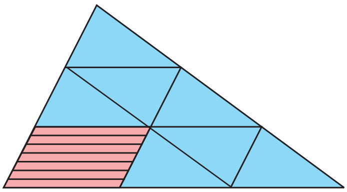


Рис. 6

Они разобьют треугольник на 9 равных маленьких треугольничков, подобных исходному. В качестве первой части возьмем два соседних по стороне треугольника (красные на рисунке), а в качестве второй – остальные семь (синие на рисунке). Красная часть – параллелограмм, и его можно разрезать на 7 равных параллелограммов отрезками, параллельными сторонам. Синяя же часть сама по себе состоит из семи равных треугольников.

7. а) Квантик; б) да.

а) Нам понадобится **лемма**: *в такой последовательности после каждого числа, в котором хотя бы 100 цифр, следует число с меньшим количеством цифр.*

Из леммы получается, что в последовательности после любого числа хотя бы с 100 цифрами рано или поздно встретится число с менее чем 100 цифрами, поскольку количество цифр будет уменьшаться и в какой-то момент станет меньше 100. Тогда числа с менее чем 100 цифрами никогда не закончатся в нашей последовательности – иначе после последнего из них шли бы только числа с хотя бы 100 цифрами, что невозможно. Поэтому чисел с менее чем 100 цифрами в последовательности бесконечно много, а всего различных таких чисел конечное количество. Значит, какое-то из них повторится.

Докажем лемму. Пусть A – число из нашей последовательности, в нем k цифр, а в числе k в свою очередь n цифр. Следующее за A число нашей последовательности состоит не более чем из 10 групп вида «число, не превышающее k, и цифра». Тогда в этом следующем числе не более $10(n+1)$ цифр, и мы хотели бы доказать для $k \geq 100$, что $10(n+1) < k$, т.е. $n+1 < \frac{k}{10}$. Так как $n+1 \leq 2n$, достаточно доказать, что $n < \frac{k}{20}$.

Осталось проверить условие: *для любого числа $k \geq 100$ количество цифр в числе k не превышает $\frac{k}{20}$*. Для чисел от 100 до 119 условие, очевидно, выполнено (так как 3 < 5). Любое другое число, большее 100, получается из какого-то числа от 100 до 119 прибавлением нужного количества двадцаток. При каждом таком прибавлении количество цифр числа k увеличивается не более чем на 1, а отношение $\frac{k}{20}$ увеличивается ровно на 1, поэтому условие не нарушается.

б) Например, после числа 22 снова будет идти 22. Другой пример: 31331415.

8. Рассмотрим места, пронумерованные от 1 до m. Найдем количество способов занять ровно s мест так, чтобы было занято хотя бы одно из первых t мест. Для этого нужно из всех возможных способов вычесть способы, когда ни одно из первых t мест не занято: $C_m^s - C_{m-t}^s$.

Посчитаем то же количество еще одним способом. Пусть A_i – множество способов выбрать s мест так, чтобы место под номером i было занято. Запишем формулу включений-исключений для множеств $A_1, A_2, \ldots, A_t$:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t\right| = \sum_i \left|A_i\right| - \sum_{i,j} \left|A_i \cap A_j\right| + $$
$$+ \sum_{i,j,k} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{t-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t\right|.$$

В левой части написано как раз искомое количество способов.

В правой части k-е слагаемое имеет вид

$$(-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|.$$

Количество комбинаций $i_1, i_2, \ldots, i_k$ равно C_t^k, ведь выбираются какие-то k из t множеств. Выражение $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|$ – это количество способов занять s мест так, чтобы места $i_1, i_2, \ldots, i_k$ были заняты, т.е. C_{m-k}^{s-k}. Значит, это k-е слагаемое равно $(-1)^{k-1} C_t^k C_{m-k}^{s-k}$.

Заменив таким образом каждое слагаемое в правой части, получим:

$$C_m^s - C_{m-t}^s = \sum_{k=1}^{t} (-1)^{k-1} C_t^k C_{m-k}^{s-k}.$$

Преобразуем, заметив, что при $k = 0$ выражение $(-1)^{k-1} C_t^k C_{m-k}^{s-k}$ равно $-C_m^s$:

$$C_{m-t}^s = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k C_{m-k}^{s-k}.$$

Подставив теперь $s = t = n$, $m = 2n$, получим то, что требовалось доказать:

$$1 = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_n^k C_{2n-k}^{n-k}.$$

Про формулу включений-исключений можно прочитать в книге Н.Я.Виленкина, А.Н.Виленкина, П.А.Виленкина «Комбинаторика» (М.: ФИМА, МЦНМО, 2010). В «Кванте» эта формула обсуждалась, например, в статье И.Яглома «Заплаты на кафтане» в №2 за 1974 год.

ПЕРИМЕТР И ПЛОЩАДЬ НА КЛЕТОЧКАХ

1. а) Да, б) нет, в) нет, г) да.
2. а) Да, б) нет, в) да, г) нет.
3. а) Таких фигурок нет.
Из формулы задачи 3 следует, что $p \le 4s$.
б) Только 1×1.
Подставим $p = 4s$ в формулу, получим $i = 0$, значит, в фигурке нет соседних клеток.
в) Только 1×2.
Рассмотрим внешний набор фигурки, у которой $p = 3s$. Сумма чисел набора в 3 раза больше количества чисел. Тогда все числа набора – тройки. Под это условие подходит только 1×2.
4. 44.
В суммарном периметре один раз учитывается периметр квадрата 5×5 и дважды – длина разрезов. Итого он равен $20 + 2 \cdot 12 = 44$.
5. 42.
Разрежем каждую доминошку пополам, на это уйдет 18 разрезов длины 1. В итоге доска будет нарезана на квадратики 1×1 и суммарная длина разрезов станет равна 60. Значит, до этого она равнялась $60 - 18 = 42$.
6. 4.
У всех тетраминошек, кроме квадрата, периметр 10. Пусть количество квадратов k, а других тетраминошек – d. Тогда количество тетраминошек $k + d = 16$, а суммарный их периметр $8k + 10d = 32 + 2 \cdot 60 = 152$. Отсюда находим $k = 4$.
7. 25.
Должно быть хотя бы 35 «открытых дверей». Всего перегородок 60, значит, должно остаться не больше 25 перегородок.
8. Построим нашу фигуру так. Возьмем квадрат 3×3 и далее будем прибавлять по одной клетке.
9. 32.
Рассмотрим произвольную такую фигурку. Закрасим в ней один квадрат 2×2, а далее будем последовательно закрашивать другие квадраты 2×2 так, чтобы каждый новый касался одного из ранее закрашенных. Отсюда понятно, что есть не менее 4 отрезков стыковки, каждый из которых в суммарном периметре квадратов учитывается дважды. Итого периметр фигурки не более $5 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 32$. Пример с периметром 32 легко привести.
10. в) В фигурках типа а) квадрата 2×2 нет, потому что при построении таких фигур «по одной клетке» каждая новая клетка должна касаться только одной из предыдущих, ведь здесь в точности $p = 2s + 2$. В фигурках типа б) есть квадрат 2×2, потому что $p < 2s + 2$, а значит, какая-то очередная клетка должна касаться двух предыдущих, а тогда образуется цикл (замкнутая цепочка) из клеток. Но циклы из меньше чем 8 клеток могут быть только вида 2×2 или 2×3.

МЕТОД ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

6. Заменим каждую звездочку числом $1/k$, где k – количество звездочек в ее строке (столбце). Тогда сумма чисел в каждой непустой строке равна 1, следовательно, сумма всех чисел в таблице равна числу непустых строк. Но, аналогично, она равна и числу непустых столбцов.
7. Дадим каждому эльфу заряд 1, тогда суммарный заряд равен E. Если эльф подрался с k гномами, то пусть отдаст каждому из них заряд $1/k$.
Если гном подрался с m эльфами, то каждый из них подрался не больше чем с $m - 1$ гномами ($m \le 11$), а значит, отдаст ему заряд не меньше $\frac{1}{m-1}$. Следовательно, каждый гном получит заряд не меньше $\frac{m}{m-1}$, что не меньше $\frac{11}{10}$.
Тогда суммарный заряд гномов не меньше $\frac{11}{10}D$, при этом он равен E. Отсюда получаем неравенство $\frac{11}{10}D \le E$, которое легко преобразуется к требуемому виду.
8. $500n$.
Пусть в таблице стоит x единиц. Поместим в каждую клетку c, в которой написано число 1, заряд, равный $2n$. Раздадим заряд n поровну между нулями столбца клетки c, а другой заряд n – между нулями строки клетки c. Отметим, что суммарный заряд равен $2nx$.
Нулей всего $n^2 - x$. Пусть в столбце с нулевой клеткой c' стоит s единиц, а в строке – t единиц. Тогда $s + t \ge 1000$. Итоговый заряд, который получит клетка c', равен $sN/(N - s) + tN/(N - t)$. Докажите самостоятельно, что он не меньше

$1000n/(n-500)$. Значит,

$$2nx \geq \frac{1000n\left(n^2-x\right)}{n-500}.$$

Из последнего неравенства следует, что $x \geq 500n$.

9. *Диагональю* в этом решении будем называть отрезок, соединяющий две вершины многоугольника (т.е. в том числе и его сторону).

Рассмотрим диагональ AB. Пусть по одну сторону от прямой AB находится k вершин, а по другую m вершин и $k \leq m$. Тогда назначим диагонали AB заряд $1/(k+1)$ (например, сторона многоугольника получит заряд 1). Таким образом назначим заряд каждой диагонали.

Для каждого k от 0 до $[(n-1)/2]-1$ есть по n диагоналей с зарядом $1/(k+1)$, а значит, суммарный заряд диагоналей не менее

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{[(n-1)/2]}\right).$$

Пусть каждая диагональ отдаст весь свой заряд любой из красных точек, которые на ней лежат. Покажем, что каждая красная точка получит заряд не более 1. Пусть она лежит на m диагоналях. Тогда по одну сторону от каждой из них лежит не меньше $m-1$ вершин, а значит, заряд каждой из этих диагоналей не более $1/m$.

Итак, количество m красных точек не меньше суммарного заряда этих точек, откуда следует требуемое неравенство.

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8—9 классы

1. При крайних положениях.

Тройку треф придется выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведем стратегию для зрителя: он называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она еще будет на столе) окажется в центре. Зритель назовет 2.

2. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

4. Верно.

Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, т.е. за 41 следует 1). Значит, $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и a_k делится на 41.

5. Так как mnk делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m \times n \times 3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* $1 \times 2 \times 3$. Если mn четно, то основание коробки можно разбить на доминошки 2×1 и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьем основание коробки на квадрат 3×3 и два прямоугольника, возможно, пустых (рис.7). Прямоугольники разобьем на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.

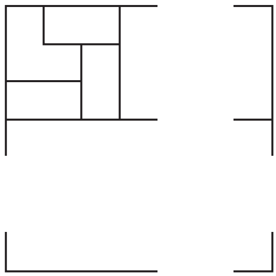


Рис. 7

10—11 классы

2. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F, а прямая, проходящая через B параллельно AE, пересекает отрезок CF в точке X. Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A, поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.

Замечание. На рисунке 8 точка F лежит на стороне AE, но в решении это не используется.

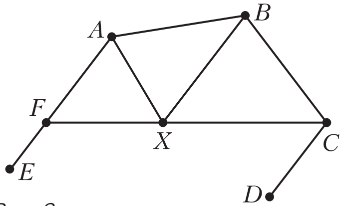


Рис. 8

Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

Сложный вариант

8–9 классы

1. а) Для $n = 2^k$.
Очевидно, 2^k – наименьшее число сложности k. Поэтому все числа между 2^k и 2^{k+1} имеют сложность не больше k. Пусть n – не степень двойки. Тогда между n и $2n$ есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую n, и удвоить ее). Очевидно, ее сложность больше, чем у n.
б) Таких чисел нет.
В силу пункта а), достаточно рассмотреть случай $n = 2^k$, где k натуральное. Но число $3 \cdot 2^{k-1}$ имеет такую же сложность, как и n, и находится между n и $2n$.

2. Пусть точки D и D_1 симметричны точкам A и A_1 относительно BC. Проведем биссектрисы AK и A_1K_1 наших треугольников. Заметим, что K и K_1 – центры окружностей, вписанных в четырехугольники $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$, а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство $r > r_1$, где r и r_1 – радиусы указанных окружностей.

3. Хватит даже 100 взвешиваний. Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причем про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k-1$ взвешивание.

Доказательство. *База.* Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k-1$ монеты. Если они не равны, скажем, что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A + a$ и $B + b$. Если веса пар равны, то $A = B$ и $a = b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a) и воспользоваться предположением индукции для $k-2$ монет.

Пусть веса пар различны и, для определенности, $A + a > B + b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса $(2, 1)$, либо $(2, 2)$, либо $(3, 2)$. Тогда, сравнив $A + b$ с $B + a$, мы однозначно восстановим веса всех четырех монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k-4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции усиливающее задачу утверждение.

Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, за k *взвешиваний*.

Доказательство. *База.* Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k-1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$, и воспользуемся утверждением 1.

4. Проведем гомотетию с центром B и коэффициентом 2. Точка O перейдет в точку D, диаметрально противоположную вершине B на описанной окружности Ω, точка P – в точку R пересечения биссектрисы угла B с Ω, точка Q – в диаметрально противоположную R точку S, «отрезок, соединяющий…» – в сторону AC (рис.9).

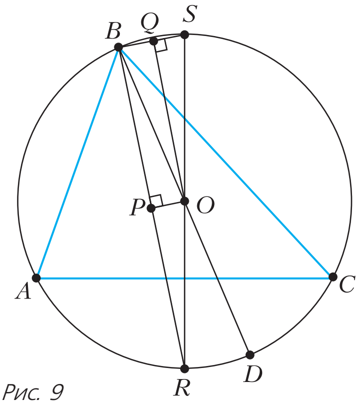


Рис. 9

Осталось заметить, что диаметр RS проходит через середину стороны AC, так как R – середина дуги AC.

5. Пара $\left(m, m(4m+3)^2\right)$ – хорошая (проверьте).

Путь к решению. Естественно попытаться найти такое n, что $\frac{n+1}{m+1} = k^2$, а $\frac{n}{m} = \frac{k^2(m+1)-1}{m} = k^2 + \frac{k^2-1}{m}$ – тоже квадрат. Самый простой способ это обеспечить – положить $\frac{k^2-1}{m} = 4k+4$, тогда $\frac{k-1}{m} = 4$ (т.е. $k = 4m+1$), а $\frac{n}{m} = (k+2)^2$.

6. Нет.
Посмотрим, сколько мелочи Петя мог получить. Рассмотрим самую последнюю дешевую покуп-

ку, которая увеличила количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки x, тогда перед этим было не более $x-1$ рублей мелочи, а значит, после этого ее станет не больше чем $x-1+100-x=99$ рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, то все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 рублей мелочи. Тем более все *дешевые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

Пусть было n покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок совсем не было, то на дорогие было бы потрачено не менее $2n$ сотен, а сдача составила бы не более $99n$ – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее $2n+1$ сторублевки, а мелочи в конце стало не больше $99n+99$. Значит, $(2n+1)50 \le 99n+99$, откуда $n \le 49$. Таким образом, мелочи останется не более $99 \cdot 49 + 99 < 5000$ руб. Значит, и потрачено менее 5000 рублей.

7. Мог.

Оказывается, любой квадрат $(2N+1)\times(2N+1)$ без угловой клетки можно получить, $2N$ раз приложив печать из $2N+2$ клеток. Приведем два примера, которые легко обобщаются. На рисунке 10,*а* ($N=4$) след печати окрашен в

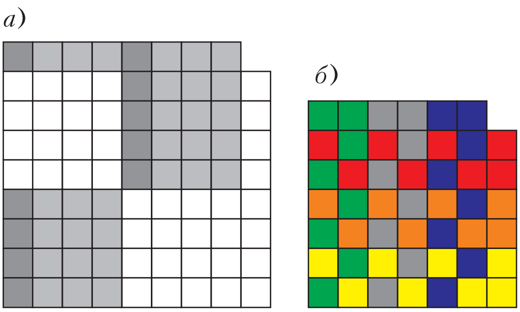


Рис. 10

темно-серый цвет. Сдвигая его вправо на одну клетку, мы постепенно покроем серую область. Развернув печать на $90°$, аналогично покроем белую область.

На рисунке 10,*б* ($N=3$) каждый отпечаток покрашен в свой цвет.

10–11 классы

1. Не может.

Пусть наибольшая степень, в которой встречается x, равна m, а наибольшая степень, в которой встречается y, равна n, Для определенности положим $n \ge m$. Запишем многочлен $P(x,y)$ в виде $A(x)y^n + B(x)y^{n-1} + \ldots$, где $A(x)$, $B(x), \ldots$ – многочлены от x. Поскольку при всех целых $0 \le k < n$ степень многочлена $P(k,y) = A(k)y^n + B(k)y^{n-1} + \ldots$ меньше n, то $A(0) = A(1) = \ldots = A(n-1) = 0$. У многочлена $A(x)$ есть n различных корней, поэтому его степень не меньше n. Но она не больше m, значит, $m=n$. При этом одночлен $x^n y^n$ заведомо встречается в произведении $A(x)y^n$ и не встречается в остальных произведениях, поэтому $\deg P(x,x) = 2n$.

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют все многочлены следующего вида и только они:

$$c_0 + xy\Big(c_1 + (x-1)(y-1)\Big(c_2 + \ldots \ldots + \Big(c_k + \big((x-k)(y-k)c_{k+1}\big)\ldots\Big)\Big)\Big),$$

где k – неотрицательное целое число, $c_0, \ldots, c_{k+1}$ – константы.

2. Пусть $2x$ – длина указанных хорд. По теореме о произведении отрезков хорд $x^2 = AP \cdot A'P = PB \cdot B'P = CP \cdot C'P$ (рис.11). По обратной теореме точки A, A', B и B' лежат на одной окружности. Значит, $\angle AA'B = \angle AB'B$.

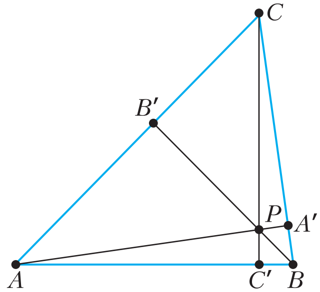


Рис. 11

Аналогично, $\angle AA'C = \angle AC'C$, $\angle BB'C = \angle BC'C$. Следовательно,

$$\angle AA'B = \angle AB'B = 180° - \angle BB'C = 180° - \angle BC'C = \angle AC'C = \angle AA'C,$$

т.е. AA' – высота. Аналогично, BB' и CC' – высоты.

6. Пусть ребра куба параллельны осям координат.

а) Разобьем куб на слои толщиной 1, параллельные плоскости Oxy. Рассмотрим только спицы направлений Ox и Oy. В каждом слое найдем максимум числа таких спиц, идущих в одном направлении. Точно так же найдем максимумы числа спиц для каждого слоя, параллельного Oxz и параллельного Oyz. Пусть k – минимум из $6n$ этих максимумов.

Рассмотрим слой K, где максимум равен k. В слое можно выбрать $2n-k$ строк и $2n-k$ столбцов, через которые не проходят спицы слоя. На пересечении выбранных рядов есть $(2n-k)^2$ кубиков, их протыкают $(2n-k)^2$ спиц, перпендикулярных K. Покрасим эти $(2n-k)^2$ спиц в синий цвет. Выберем грань P куба, перпендикулярную слою K. Рассмотрим слои, параллельные P и не содержащие синих спиц. Их ровно k. В каждом таком слое можно выбрать не менее k спиц одного направления, всего не менее k^2 спиц. Добавим к ним синие спицы. По известному неравенству,

$$k^2+(2n-k)^2 \geq \frac{1}{2}\left(k+(2n-k)\right)^2 = 2n^2 .$$

б) $2n^2$ спиц.

Выделим в нашем кубе два меньших куба со стороной n, примыкающих к противоположным вершинам. Они состоят из $2n^3$ единичных кубиков. Проткнем каждый выделенный кубик тремя перпендикулярными спицами. Тогда и все невыделенные единичные кубики тоже проткнуты. Заметим, что каждая спица протыкает ровно n выделенных кубиков. Значит, если спицы выбраны так, что никакой кубик не проткнут дважды, то спиц не более чем $2n^3 : n = 2n^2$.

7. Лемма. *Пусть D – некоторое множество различных простых делителей числа n. Количество натуральных чисел, не превосходящих n и не кратных ни одному числу из D, равно* $n\prod\limits_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, получаем формулу включений-исключений.

Пусть красных чисел больше $\varphi(n)$. Тогда некоторые красные числа имеют с n общий простой делитель. Пусть q – наибольшее из таких простых и a – красное число, кратное q. Для противоречия достаточно найти различные красные числа b и c, сравнимые по модулю $\frac{n}{q}$, а для этого достаточно показать, что $\varphi(n)$ больше количества возможных остатков красных чисел по модулю $\frac{n}{q}$.

По лемме, $\varphi(n) = n\prod\limits_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, где D – множество всех простых делителей у n, а указанное количество остатков не больше чем $\frac{n}{q}\prod\limits_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Достаточно доказать, что

$$n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Сокращая на n и на скобки, в которых $p>q$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p\in D,\, p<q}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \frac{1}{q},$$

что равносильно неравенству

$$q-1 \geq \prod_{p\in D,\, p<q}\frac{p}{p-1}.$$

Оно верно, поскольку

$$q-1 = \frac{q-1}{q-2}\cdot\frac{q-2}{q-3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}.$$

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. В 4 раза. **2.** $\Delta m = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{100\%}\frac{p_{\text{н}}VM}{RT} = 324$ г.

3. $F = q\frac{U}{d} = 30$ мкН.

4. $\Phi = Ba^2\cos\alpha = 225$ мкВб. **5.** $v = \frac{2\pi A\sqrt{1-\alpha^2}}{T}$.

6. $v = m\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2gh}{M\left(M+m\cos^2\alpha\right)}}$.

7. $U = \frac{\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1}{r_1+r_2} = 3$ В.

8. С точки зрения наблюдателя в ЛСО, движущийся стержень имеет длину $L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, где v – скорость стержня, c – скорость света. В той же ЛСО $\Delta x = v(t_2-t_1)$ и $L = v(t_3-t_2)$. Отсюда находим

$$L_0 = \frac{\Delta x\,(t_3-t_2)}{\sqrt{(t_2-t_1)^2-(\Delta x/c)^2}} .$$

Вариант 2

1. $v = \frac{2s}{t} = 40$ м/с . **2.** $m = \frac{2W}{v_0^2+g^2t^2} = 3$ кг .

3. $I_{1,2} = \frac{\mathscr{E}\pm\sqrt{\mathscr{E}^2-4Pr}}{2r}$, $I_1 = 1{,}5$ А , $I_2 \approx 0{,}17$ А .

4. $n = \frac{Nt\lambda}{hc} = 500$. **5.** $T = \frac{F\left(m_2+(3/4)m\right)}{m_1+m_2+m}$.

6. $\Delta m = m\frac{n(k-1)}{n-1}$.

7. $v_2 = \sqrt{v_1^2+\frac{q}{m}\left(\varphi-\frac{kq}{R}\right)}$.

8. $$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\Delta\Phi/\Delta t}{\rho l} = \frac{B\,(\Delta S/\Delta t)}{\rho\,(2a+\pi a)} = \frac{Ba^2\omega/2}{\rho a\,(2+\pi)} = \frac{Ba\omega}{2\rho\,(2+\pi)} \approx 1{,}5\cdot10^{-2}\text{ А}.$$

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

МАТЕМАТИКА

1. 36.
Для краткости команду влево будем обозначать Л, вправо – П, вверх – В, вниз – Н. Чтобы робот вернулся в исходное положение, необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд Л столько же, сколько и команд П, а команд В – столько же, сколько и Н. Пусть k –количество команд Л в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 2.

- $k = 0$. Последовательность состоит только из команд В и Н. Так как их поровну, то на 2 местах из 4 должна быть команда В, а на оставшихся двух – Н. Выбрать 2 места из 4 можно C_4^2 способами. Следовательно, $N_0 = C_4^2 = 6$.
- $k = 1$. Каждая из команд Л, П, В, Н встречается в последовательности ровно 1 раз. Число перестановок из 4 элементов равно 4!. Поэтому $N_1 = 4! = 24$.
- $k = 2$. Здесь две Л, две П и нет команд В и Н. Две команды Л можно разместить C_4^2 способами. Значит, $N_2 = C_4^2 = 6$.

Таким образом, искомое число последовательностей равно $N_0 + N_1 + N_2 = 36$.

2. На прямой, проведенной через две различные точки A и D, отметим точки B и C, как показано на рисунке 12. Разделим развернутые углы ABC и DCB (которые следует представлять себе отложенными сначала в верхнюю, а затем и в нижнюю полуплоскость относительно прямой AD) на три равные части. Получим в результате прямые, образующие угол $60°$ с прямой AD и пересекающиеся в точках K и L. Пусть O – точка пересечения AD и KL. Угол BKO равен, очевидно, $30°$. Разделив его на три части, получим требуемый угол.
Построение выполнено.

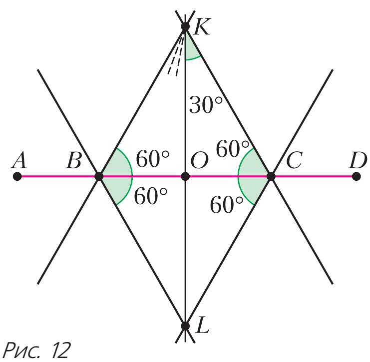


Рис. 12

3. $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.
Заметим, что
$$a - b + c = 0. \quad (1)$$
Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz$, $B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим систему
$$A - B = a(2x - 6z - 5y - 1) = 0,$$
$$B - C = b(5y + 4x - 3z + 1) = 0, \quad (1)$$
$$A - C = c(1 - 2x - 10y - 3z) = 0.$$
Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0$, $5y + 4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-м и вычтя 1-е, получим 3 = 0. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи.
1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).
2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.
3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\dfrac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$.
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$.
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

4. $f(x) = x$.
В тождестве из условия задачи
$$f(a+b)\cdot(f(a) + f(b)) = 2f(a)\cdot f(b) + a^2 + b^2 \quad (1)$$
положим $a = 1$, $b = 0$. Тогда
$$f(1)\cdot(f(1) + f(0)) = 2f(1)\cdot f(0) + 1.$$
Поскольку $f(1) = 1$, находим
$$f(0) = 0. \quad (2)$$
Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что
$$f(a)\cdot f(-a) = -a^2. \quad (3)$$
Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a)\cdot f(a) = a^2$. Значит, необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

5. $\dfrac{6}{\sqrt{37}}$.
Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересече-

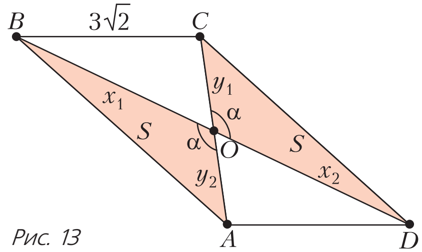


Рис. 13

ния (рис.13). Обозначим угол между диагоналями через α. По условию площади треугольников ABO и CDO равны, т.е. $\frac{1}{2}x_1y_2\sin\alpha = \frac{1}{2}x_2y_1\sin\alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD, а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD. Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k\cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т.е. диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC\cdot BD}.\;(*)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим сторону CD, записав формулу для площади параллелограмма:

$$S_{ABCD} = 4S = AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \frac{4S}{AD\cdot\sin\angle ADC} = \frac{4\cdot\frac{3}{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC и BCD:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC} = \sqrt{2},$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение $(*)$, получим $\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

6. 101.

Пусть $2n+1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010\ldots101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 - q^2 + \ldots + q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n.

• $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1}\cdot\frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$.

Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1}\pm 1$ делится без остатка на многочлен $q\pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.

• $n = 2k-1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1}\cdot\left(q^{2k}+1\right)$.

При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

7. 48.

Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.14). В результате найдем $\frac{34}{275} = 0{,}123636363\ldots = 0{,}12(36)$. Получена непериодическая часть 12 и период 36. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают *различные* числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получи-

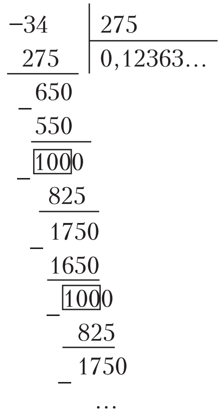


Рис. 14

лось дописыванием нуля к числу $r_1 = 65$ (остатку от деления на 275 числа 340). Значит, $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) \vdots 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет такой вид: $\frac{1}{221} = 0,(a_1a_2\ldots a_n)$. Найдем n. Обозначим $A = a_1a_2\ldots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n}\cdot A + 10^{-2n}\cdot A + \ldots$

По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n, при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13\cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит, число k_1 делится на 17, т.е. $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13\cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n, что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10$, $b_2 = 9$, $b_3 = 13$, $b_4 = 3$, $b_5 = 4$, $b_6 = 1, \ldots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6,16) = 48$.

8. Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).

Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги. Пусть x, y и $26 - x - y$ – количество точек на этих дугах, не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках k и m не задел корабль, надо, чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей x точек, можно, очевидно, C_x^2 способами. То же и для остальных дуг. Значит, число N «безопасных» выстрелов равно сумме $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$. Тогда следующий выстрел уже обязательно «ранит» корабль, поэтому $K = N + 1$.

Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y \le 26$, при которых значение N минимально. Запишем выражение для N в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26 - y) + y^2 - 265 + 325. \qquad (1)$$

При каждом фиксированном y от 0 до 26 будем искать такое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$0 \le x \le 26 - y, \qquad (2)$$

при котором значение N минимально. Если y фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26 - y}{2} \qquad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)). Это минимальное значение равно $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$. Оно, в свою очередь, минимально при $y = \frac{26}{3} \approx 8,6$. Из (3) тогда находим $x = \frac{26}{3}$. Среди точек с целыми координатами $(8,8)$, $(8,9)$, $(9,8)$, $(9,9)$ – ближайших целочисленных соседей точки минимума $\left(\frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right)$ – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение N. Это точки $(8,9)$, $(9,8)$, $(9,9)$. Для них $N = 100$.

9. Например, $A = -3362$, $B = 2378$.

Заметим, что если число вида $x + y\sqrt{2}$, где x, y целые, возвести в целую неотрицательную степень n, то вновь получим число такого же вида, т.е. $\left(x + y\sqrt{2}\right)^n = x_1 + y_1\sqrt{2}$, где x_1 и y_1 опять же целые. Положительное число $\sqrt{2} - 1$, очевидно, меньше 1. Значит, возводя его в достаточно большую степень, можно получить число сколь угодно малое. Найдем такое натуральное n, что $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < 0{,}001$. Поскольку $\left(\sqrt{2}-1\right)^n < \frac{1}{2^n}$, то, очевидно, достаточно взять $n = 10$, так как $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Остается возвести $\sqrt{2}-1$ в 10-ю степень. Находим

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-2\sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 17-12\sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = \left(17-12\sqrt{2}\right)^2 = 577-408\sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = \left(\sqrt{2}-1\right)^8 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 =$$
$$= \left(577-408\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3363-2378\sqrt{2}.$$

Таким образом, $0{,}999 < 1-\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} < 1$, поэтому можно взять $A = -3362$, $B = 2378$.

Замечание. Приведенная в решении оценка очень грубая. На самом деле, уже

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^8 = 577-408\sqrt{2} \approx 0{,}000867 < 0{,}001.$$

Но

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^7 \approx 0{,}002 > 0{,}001.$$

10. Например, $z^3-5z^2-10z-11=0$.

Запишем соотношения

$$z = x_0^2+3x_0+1,$$
$$zx_0 = x_0^3+3x_0^2+x_0,$$
$$zx_0^2 = x_0^4+3x_0^3+x_0^2.$$

Правые части можно упростить (привести по модулю $x_0^3-x_0-1$), воспользовавшись тем, что $x_0^3 = x_0+1$. В результате получим

$$z = x_0^2+3x_0+1,$$
$$zx_0 = 3x_0^2+2x_0+1,$$
$$zx_0^2 = 2x_0^2+4x_0+3.$$

Первые два равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений с двумя неизвестными x_0 и x_0^2. Решив ее, найдем $x_0 = \frac{3z-2}{z+7}$, $x_0^2 = \frac{z^2-3z-1}{z+7}$. Подставив эти соотношения в последнее равенство, получим искомое уравнение относительно z.

11. Выполнив преобразования, получим

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x}.$$

По условию, $x \in \left(0;\frac{3\pi}{8}\right)$. Следовательно, числа $\frac{x}{3}$, x, $2x$, $\frac{8x}{3}$ лежат на интервале $(0;\pi)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ее вторая производная $f''(x) = \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ положительна для всех $x \in (0;\pi)$, значит, на этом интервале функция выпукла вниз. На координатной плоскости отметим точки $A\left(\frac{x}{3};f\left(\frac{x}{3}\right)\right)$, $B\left(\frac{8x}{3};f\left(\frac{8x}{3}\right)\right)$, $C(x;f(x))$ и $D(2x;f(2x))$ (рис.15). Левая часть последнего неравенства – сумма ординат точек A и B или, что то же самое,

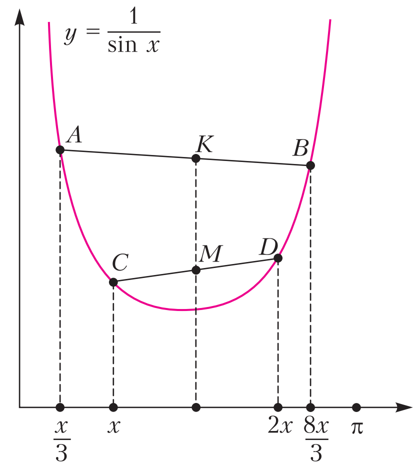


Рис. 15

удвоенная ордината точки K – середины отрезка AB. Аналогично, правая часть последнего неравенства – удвоенная ордината точки M, середины CD. Поскольку $f(x)$ выпукла вниз, весь отрезок AB расположен «выше» отрезка CD, а значит, ордината точки K больше ординаты точки M. Неравенство доказано.

12. $k = n+1$ при $n > 1$ и $k = 1$ при $n = 1$.

Таблицу размерами $n \times n$ будем обозначать T_n. Очевидно, что для таблицы T_2 искомое максимальное k равно 3. Экспериментируя с таблицей T_3, можно заметить, что $k = 4$ (ниже мы докажем это строго). Сделанные наблюдения позволяют предположить, что для произвольного $n > 1$ максимальное значение k равно $n+1$. Докажем это. Прежде всего, покажем, что $n+2$ единицы таблица содержать не может. Для этого приведем контрпример, но сначала вспомним определение трансверсали.

Трансверсалью таблицы T_n называют набор из n ячеек, содержащих 1, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах. Ясно, что если какие-то ячейки образовыва-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

n + 2 единицы и две трансверсали

Рис. 16

ли трансверсаль, то и после перестановки строк или столбцов они снова образуют трансверсаль. На рисунке 16 изображена таблица $n \times n$ с $n+2$ единицами, расположенными на главной диагонали, а также в таблице 2×2 в левом верхнем углу. Такая таблица содержит две трансверсали. В то же время таблица, у которой все 1 лежат на или выше побочной диагонали, содержит не более одной трансверсали. Значит, к требуемому в задаче виду таблица на рисунке приведена быть не может. Поэтому $k \le n+1$.

Покажем, что $n+1$ единицу всегда можно перенести на побочную диагональ или выше. Итак, дана таблица T_n, содержащая $0 < k \le n+1$ единиц. В такой таблице обязательно есть строка или ровно с одной 1, или не содержащей единиц вовсе. Рассмотрим эти случаи.

• В таблице T_n есть строка, содержащая ровно одну 1. Поставим эту строку на последнее место. Затем, переставляя столбцы, переместим эту единственную 1 в крайний левый столбец (рис.17).

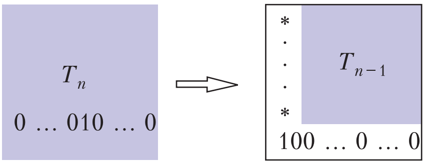


Рис. 17

• В таблице T_n есть строка, содержащая только нули. Поставим эту строку на последнее место. Переставляя столбцы, сделаем так, чтоб в крайнем левом столбце была хоть одна единица (рис.18).

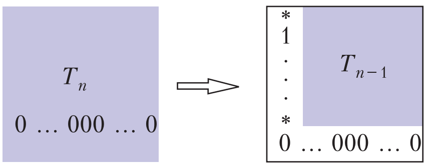


Рис. 18

В каждом случае получена подтаблица T_{n-1}, содержащая, по крайней мере, на одну 1 меньше, чем таблица T_n. С таблицей T_{n-1} можно выполнить аналогичные преобразования. В результате за $n-2$ шага придем к таблице T_2, для которой уже установлено, что $k=3$. Формула $k=n+1$ доказана.

ФИЗИКА

9 класс

1. $r = \dfrac{mg}{4\pi\sigma} \approx 1{,}4$ мм. **2.** $n = \dfrac{4k}{(k-1)^2}$.

3. $S = \dfrac{PL}{E\Delta L} = 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ м^2 $= 12{,}8$ см^2.

4. $h = \dfrac{H}{2}\sin^2\alpha$ (скорость катящегося обруча в конце наклонной плоскости равна $\sqrt{gH}$ и направлена под углом α к горизонту).

5. $A = \dfrac{RT_1}{2}\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)\left(1 - \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}\right)$ (работа численно равна площади треугольника *123*).

10 класс

1. $P = 2\sigma\pi d = 7{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н. **2.** $\Delta\vec{v} = -\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v}$.

3. $h = H\dfrac{M^2}{(m+M)^2} = H\dfrac{\rho^2 a^6 (6-\pi)^2}{\left(24m + \rho a^3 (6-\pi)\right)^2}$ (воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса).

4. $\nu = n\pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle$. **5.** $q_1 = C_1 R (I_1 + I_2)$.

11 класс

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{MA}{mg}}$.

2. $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{1}{3}$, $E_{\min} = \dfrac{p_1 p_2 (1 - \cos\alpha)}{M} = 1{,}35 \cdot 10^6$ Дж.

3. $I_1 = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{q_1}{C_1} - \dfrac{q_2}{C_2}\right)$. **4.** $I = \dfrac{\mathcal{E}}{3r}$.

5. $A = \dfrac{RT_1}{2}\left(\dfrac{T_3}{T_1} - 1\right)\left(1 - \dfrac{T_1}{T_3}\right)$.

МАТЕМАТИКА И КРИПТОГРАФИЯ

1. 1. **2.** ЛЕММА. **3.** За 5 ходов.

4. $\dfrac{n(n+1)}{2} - 2$. **5.** ОБРЕТЕНИЕ.

6. 15 нажатий; пароли можно перебирать, например, в таком порядке: 0111, 0011, 1011, 1001, 1101, 0101, 0001, 0000, 0100, 1100, 1000, 1010, 0010, 0110, 1110.

7. $A_1 = 225$, $B_1 = 1521$; $A_2 = 5929$, $B_2 = 7225$; $A_3 = 104329$, $B_3 = 105625$.

8. а) **(3):** (7, 10, 9, 2, 8); б) да.

9. Например, (2, 1, 69).

10. Перебором значений простого числа p можно показать, что $p = 3$ – единственно возможный вариант. Но тогда $p^4 + 8 = 89$ – простое число.

НАПЕЧАТАНО В 2019 ГОДУ

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86, http: //capitalpress.ru

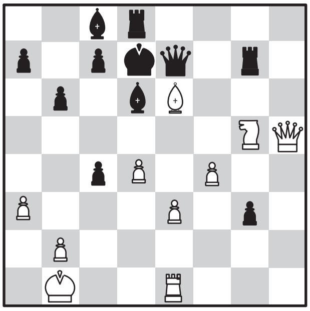
МосквичИ АТАКУЮТ

Сегодняшний выпуск мы посвятим творческим достижениям воспитанников московских шахматных школ, сыгравших ряд ярких партий осенью 2019 года. Особенно отличился действующий чемпион мира по быстрым шахматам Даниил Дубов, вдохновенная игра которого помогла сборной России завоевать титул чемпиона Европы.

Д.Дубов – Р.Сване

Батуми, 2019

1. c4 e6 2. ♘c3 d5 3. d4 ♞f6 4. ♘f3 ♝e7 5. ♗f4 0-0 6. e3 b6 7. ♕c2 ♝a6 8. 0-0-0. Многие гроссмейстеры предпочитают 8. ♘e5, однако белые намерены играть настоящий гамбит. **8... dc 9. ♘g5 ♞c6 10. a3 g6 11. h4 ♝d6 12. g3 ♛e7 13. h5 e5 14. hg hg 15. ♗g2 ef 16. ♗c6 fg 17. ♔b1 ♜ad8 18. f4?!** Излишняя агрессия. После 18. fg у белых две открытые линии на королевском фланге с комфортной для атаки позицией. **18...♝c8 19. ♖de1 ♚g7! 20. ♘d5!?** Черным удалось консолидировать позицию, поэтому здесь агрессия уже практически вынуждена. **20...♞d5 21. ♖h7+ ♚g8 22. ♖f7 ♜f7?** После точного 22...♞c3+ 23. ♕c3 ♜f7 24. ♗d5 ♜df8 25. ♕c4 ♚g7 черные успешно отбивали атаку. **23. ♕g6+ ♚f8 24. ♕h6+ ♜g7 25. ♗d5 ♚e8?!** Еще одна неточность: черные упускают возможность активизировать слона после промежуточного шаха: 25...♝f5+! 26. e4 ♚e8. **26. ♕h5+ ♚d7 27. ♕h3+ ♚e8 28. ♕h5+ ♚d7 29. ♗e6+.** Ключевой момент партии. В обоюдном цейтноте черные не поверили белым, решив сохранить материальное преимущество, расплатой за что станет форсированный мат. Необходимо было отдать ферзя: 29...♛e6

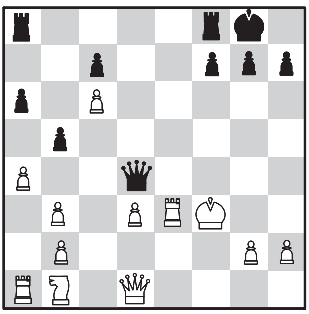


30. ♘e6 ♚e6 с обоюдными шансами. **29...♚c6 30. ♕f3+ ♚b5 31. ♗c4+ ♚a5 32. ♕d5+ ♝c5 33. b4+ ♚a4 34. ♕g2! ♝b4 35. ♕c6+ ♚a3 36. ♗b3!** Решающая жертва, **мат неизбежен**. **36...♝d7 37. ♕c1+ ♚b3 38. ♕c2+ ♚a3 39. ♕a2×.**

Й.Бьерре – Д.Дубов

Батуми, 2019

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♞f6 5. 0-0 ♝e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 0-0 8. a4 d5!? Смелая жертва в духе контратаки Маршалла. **9. ed ♞a5 10. ♘e5 ♞b3 11. cb ♝b7 12. ♘c6 ♝c6 13. dc ♝c5 14. d3** (следовало продолжить развитие 14. d4 ♝d4 15. ♘c3) **14...♝f2+ 15. ♔f2 ♛d4+ 16. ♗e3?** Первая и сразу решающая ошибка, следовало выбрать любое из отступлений королем. **16...♞g4+ 17. ♔f3 ♞e3 18. ♖e3.** Красноречивая позиция: у белых лишний конь, однако из-за неразвитости фигур ферзевого фланга они обречены.



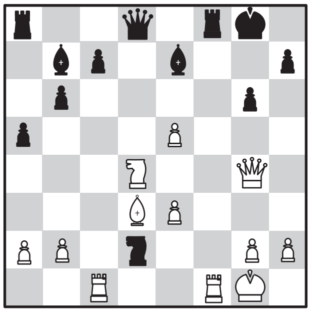
18...♜ae8 19. ♖e2 ♛f6+ 20. ♔g3 g5 21. ♖f2 ♛d6+ 22. ♔h3 ♛h6+ 23. ♔g4 ♛h4+. Ввиду неизбежных материальных потерь **белые сдались.**

В октябре 2019 г. на острове Мэн прошел турнир Grand Swiss, собравший наиболее сильный состав в истории шахмат. Во втором туре московскому гроссмейстеру Евгению Наеру удалось провести результативную атаку на В.Ананда.

Е.Наер – В.Ананд

о. Мэн, 2019

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♝b4 4. e3 0-0 5. ♗d2 d5 6. ♘f3 b6 7. ♖c1 ♝b7 8. cd ed 9. ♗d3 ♝e7 10. 0-0 ♞bd7 11. ♘e5 ♞e5 (надежнее 11...c5 12. f4 ♞e4) **12. de ♞d7 13. f4 ♞c5 14. ♗b1 d4 15. ♘b5 d3 16. ♘d4 a5 17. ♕g4 g6 18. f5 ♞e4 19. ♗d3 ♞d2 20. fg fg.**



21. ♗g6! ♚h8 22. ♗h7! Классический пример разрушающей жертвы: уничтожив пешечное прикрытие короля, белые получают решающее преимущество. **22...♜f1+**(22...♚h7 23. ♘f5) **23. ♖f1 ♝g5 24. ♘f5 ♛d3 25. ♖e1 ♝e3+ 26. ♔h1 ♝h6 27. ♕g6?** Естественный, но ошибочный ход, дающий черным шансы на спасение. Правильно 27. ♗g6! **27...♝g2+! 28. ♔g2 ♛d5+?** Ответная ошибка, ведущая к поражению. Спасало 28...♛f3+! 29. ♔g1 ♛f4 с угрозой вилки с f3. **29. ♔h3 ♛d3+** (29...♛f3+ 30. ♘g3) **30. ♔h4.** От следующего шаха король спрячется на h5, поэтому **черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

КУДА ДУЕТ ВЕТЕР?

Можно ли по фотографии ветки, покрытой изморозью, установить направление ветра?

ISSN 0130-2221 19012
9 770130 222191

(Подробнее – на с.30 внутри журнала)