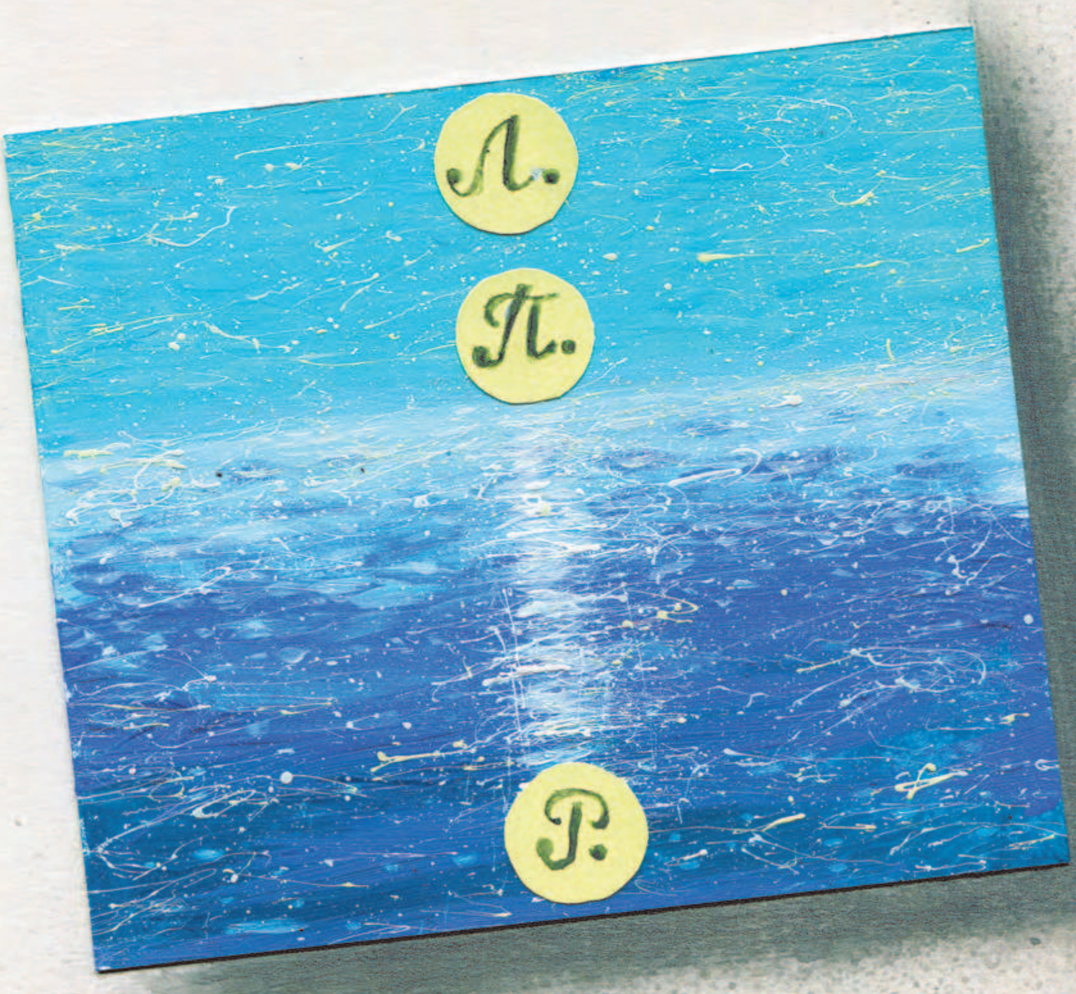
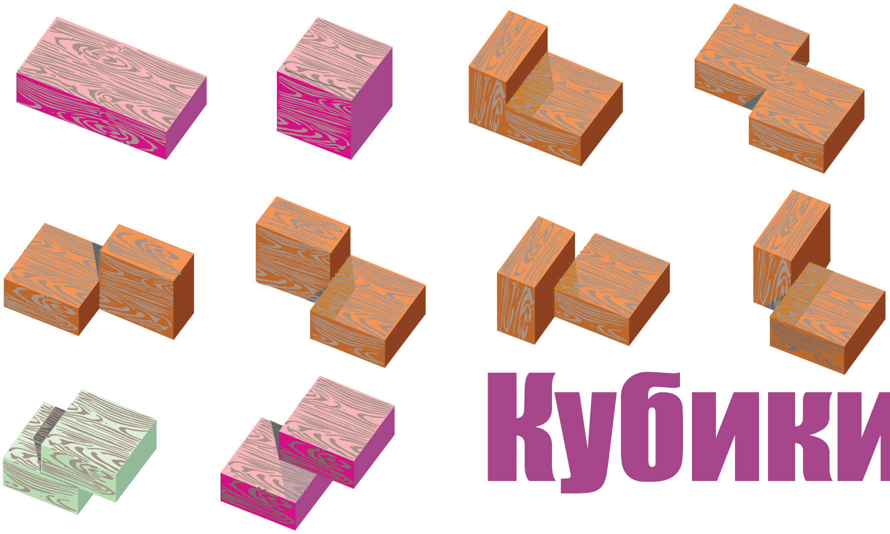
ISSN 0130-2221
ИЮЛЬ
2019 · №7

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





Кубики из полукубиков

Возьмем пару прямоугольных параллелепипедов размером 2×2×1. Если их склеить по самой большой грани, то получится кубик 2×2×2, поэтому такие детали можно назвать полукубиками. Далее два полукубика можно склеивать разными способами. Но если делать это, нанося клей только целиком на квадратики 1×1, на которые разбиваются грани полукубиков, то оказывается, что может получиться всего 10 разных фигур, показанных на рисунке. С наборами из таких фигур есть целый ряд головоломок, некоторые из них представлены ниже.

1 Используя все 10 фигур, сложите параллелепипед 5×4×4.

2 Выбирая подходящие N фигур из набора, где $3 \le N \le 9$, сложите параллелепипед $2 \times 4 \times N$.

3 Удвойте каждую из фигур набора, выбирая подходящие для этой восьмерки фигуры.

4 Если не брать красные фигуры, а зеленую взять в двух экземплярах, то из этих восьми фигур можно сложить куб 4×4×4.
Сделайте это!

А может вам удастся придумать свою головоломку с полукубиками?

Е.Епифанов

КВАНТ

ИЮЛЬ 2019 № 7

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

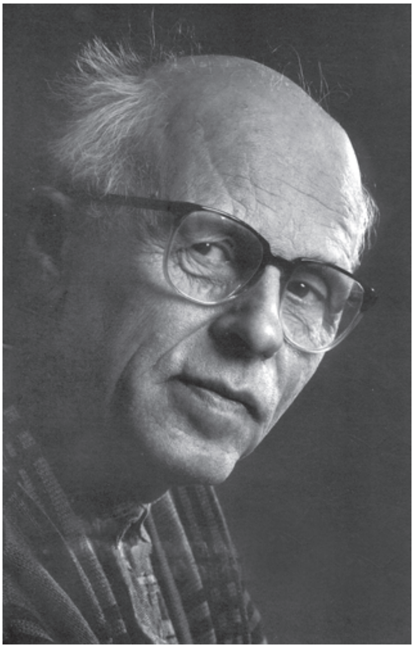
Симметрии в несимметричной вселенной Андрея Сахарова

Г.ГОРЕЛИК

Биографы седьмого класса

На мое желание заняться биографией Андрея Дмитриевича Сахарова откликнулся заокеанский Институт истории науки и техники. Вот почему в 1993 году я с семьей оказался в небольшом американском городе Бруклайне, что входит в Большой Бостон. Спустя три года я попал в кабинет директора Бруклайнской школы. Дело в том, что к тому времени мой сын настолько освоился в школе, что на перемене подрался с одноклассником.

Разбирательство директор школы проводил на моих глазах. И делал это замечательно. С уважением к достоинству 13-летних граждан он сообщил им немногословно, негромко, но совершенно твердо, что еще один подобный случай станет их последним событием в этой школе. После разбирательства, отпустив правонарушителей, директор вдруг спросил меня, не могу ли я рассказать семиклассникам о своих биографических исследованиях. Эта идея, думаю, неслучайно посетила директора школы, как-то узнавшего, что родитель его семиклассника пишет книгу о знаменитом гуманитарном физике. Биографией в этой школе занимались всерьез. Каждому семикласснику предоставили выбрать, по своему вкусу, личность, чем-нибудь замечательную, – хоть Архимеда, хоть кинозвезду. Надо было, собрав в библиотеке сведения, написать биографию, подобрать иллюстрации и, наконец, на итоговом смотре в школьном зале перевоплотиться в избранную замечательную личность. Вместе с другими родителями я побывал на этом перевоплощении. Побеседовал там с Эйнштейном, Пикассо, с каким-то знаменитым (хоть и неизвестным мне) футболистом. Другие родители беседовали с моим сыном, перевоплотившимся в Леонардо да Винчи, и он им объяснял свою Джоконду и свои научные изобретения.



Андрей Дмитриевич Сахаров

Получив нежданное домашнее задание, я начал думать, как рассказать американскому семикласснику о человеке, который в далекой советской России изобретал водородную бомбу, разгадывал загадки Вселенной, защищал свободу мысли и отстаивал права человека. Задание нелегкое.

Несколько недель спустя, в том же самом школьном зале, где происходили био-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190701

графические перевоплощения, те же самые семиклассники уютно расселись прямо на полу и устремили свои пытливые глаза на пришельца. Накануне каждый из них получил по листочку, в котором его спросили, знает ли он:

- что во время второй мировой войны советские и американские солдаты воевали с общим врагом – нацизмом;
- но что спустя полтора десятилетия советские термоядерные ракеты были нацелены на американские города, а американские ракеты – на Россию;
- что советское термоядерное оружие придумал молодой физик Андрей Сахаров и за это был щедро награжден советским правительством;
- что, осознав зловредное воздействие атмосферных ядерных испытаний на здоровье человечества, он способствовал запрету таких испытаний;
- а поняв, что несвобода угрожает жизни человечества, начал отстаивать права человека как основу надежного мира между народами;
- что его усилия Нобелевский комитет наградил премией мира, а советское правительство – высылкой в город Горький;
- что физика Сахарова больше всего интересовало, как устроена Вселенная;
- и – семиклассникам на десерт – что Андрей Сахаров начал учиться в школе именно с седьмого класса, а до того учился дома.

Из рукописного наследия Андрея Сахарова

Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать, и, чтобы помочь 13-летним американцам понять русского физика-гуманиста, я захватил с собой две его маленькие рукописи. Я надеялся, что они помогут связать невероятные повороты Сахаровской биографии, показав, как могут быть связаны симметрия и асимметрия.

Первой я показал рукопись, написанную частично на интернациональном языке арифметики (рис.1). Как только картинка появилась на экране, темнокожая отличница из первого ряда деликатно подсказала мне, что «прозрачку» я положил

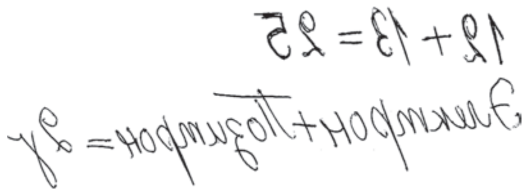


Рис. 1

не той стороной. (В те времена еще не научились показывать картинки прямо из флэшки, да и флэшку еще не изобрели. Поэтому приходилось печатать-писать-рисовать на прозрачных листах, которые помещали в проектор, иногда не той стороной.) Тогда я предъявил второй автограф, уже без арифметики (рис.2), и объяснил, что Сахаров умел писать не

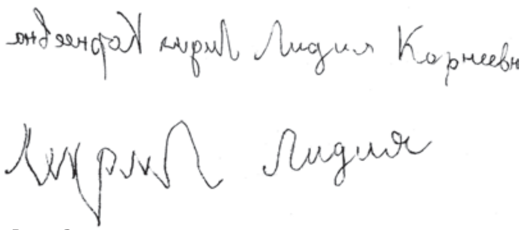


Рис. 2

только одной рукой в зеркальном изображении, но и обеими руками одновременно в разные стороны. А Лидия Корнеевна Чуковская, которой он демонстрировал свое умение и которая сберегла эти автографы, очевидно, так не умела. Если бы она была право-лево-рукой, как Сахаров, и если бы они оба писали по-английски, то мои слушатели увидели бы нечто, похожее на бабочку (рис.3). Труднее было объяснить по-английски, как

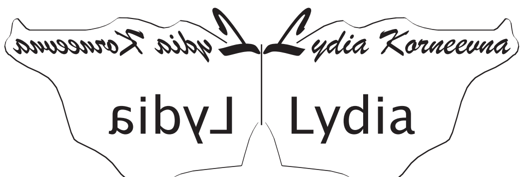


Рис. 3

защита униженных и оскорбленных связала этих двух людей с разными жизненными призваниями: у одного – физика, у другой – лирика. А что они не замыкались в своих мирах, ясно из приведенных картинок.

Эти же картинки помогли мне рассказать семиклассникам о симметриях и несимметриях того мира, в котором Андрею Сахарову довелось жить. Вот этот рассказ.

Правое и левое

В первые американские месяцы меня поразило обилие людей, пишущих левой рукой. За сорок пять лет предыдущей – российской – жизни ничего подобного я не видел. Разумеется, я знал, что такие люди есть, и конечно же читал лесковского «Левшу», но почему-то в повседневной жизни их не встречал и даже как-то связывал печальную судьбу Левши с его врожденной особенностью.

Сахарову повезло, что он относился к еще более редкому меньшинству обоюдоруких и потому был не столь уязвим для подавляющего большинства праворуких. Но что если бы его родители не обеспечили ему домашнее образование до 7-го класса, а сразу отдали бы его на перевоспитание в советскую школу? А там – по Маяковскому – скомандовали бы: «Кто там пишет левой?! Правой! Правой! Правой!» По мнению самого Андрея Сахарова, долгое домашнее обучение усилило его «неконтактность, от которой [он] страдал потом и в школе, и в университете, да и вообще почти всю жизнь». Кто знает, ранние тесные контакты с советской жизнью могли бы и подорвать чувство собственного достоинства этого мягкого человека с твердыми моральными устоями, и лишить его способности быть в меньшинстве. А ведь в науке новое слово всегда говорит самое маленькое меньшинство – один человек.

Симметрии в физике и политике

Словом «симметрия» обычно описывают форму здания, узор, геометрическую фигуру – это всегда какая-то закономерность формы. Однако в 20-м веке удалось в физических законах разглядеть проявления симметрий мироздания. Выяснилось, например, что крутящийся волчок долго не падает просто потому, что «не знает», в какую сторону упасть: все горизонтальные направления в пространстве равноправны – все стороны симметричны относительно вертикальной оси.[1] И вообще, всякий фундаментальный физический закон раскрывает некую симметрию Вселенной. Если же эксперимент обнаруживает какую-то асимметрию, то физик-теоретик получает трудную, но захватывающе интересную задачу – найти место этой асимметрии в гармонии мироздания.

Подобной задачей Сахаров заинтересовался в 60-е годы. Симметрия бабочки, или зеркальная симметрия, причастна к самой значительной его идее в космологии – в физике Вселенной. Однако прежде чем заняться этой абсолютно мирной идеей, предыдущие два десятилетия своей жизни – наиболее плодотворные годы для физика-теоретика – Сахаров отдал созданию самого разрушительного оружия в истории человечества. Почему? Асимметрии, формировавшие его жизнь, относилась не к физике, а к политике.

Андрей Сахаров поступил в университет в 1938 году, накануне мировой войны. Мир тогда представлялся ему крайне асимметричным. Впереди планеты всей шла страна, в которой ему посчастливилось родиться. Шла навстречу светлому будущему, обществу всепланетной социальной справедливости и беспредельных возможностей. Позади оставались страны капитализма и среди них наиболее зловещая гитлеровская Германия, в которой надругались над словом «социализм» приставкой «национал-» и отвергали научные теории из-за их «неарийского» происхождения.

Асимметрию эту отменила мировая война. Заостренная ось Берлин-Токио вонзилась почти одновременно в коммунистическую диктатуру и в крупнейшую капиталистическую демократию, что породило странную симметрию под немыслимым прежде названием «Объединенные нации»,

---

[1] Знаменитая теорема Нётер (доказанная Эмми Нётер в 1918 году) связывает различные симметрии физических систем с законами сохранения. В частности, изотропность пространства (равноправие всех направлений) связана с законом сохранения момента импульса. (*Прим. ред.*)

когда США и Великобритания стали союзниками СССР в войне против нацистской Германии.

Четыре года спустя, сломав воинственную ось, победившие союзники создали международную организацию – Организацию Объединенных нации – в качестве инструмента поддержания мира. После исчезновения оси, однако, «осевая» симметрия стремительно преобразилась в антисимметрию, и первые ядерные взрывы обозначили это превращение. В Хиросиме и Нагасаки наука зримо вошла в политику. И физики, причастные к этому, быстрее политиков поняли, что новая антисимметрия чревата самоуничтожением человечества. Крупнейшие физики-теоретики 20-го века Эйнштейн и Бор обращались к новорожденному мировому парламенту – ООН, призывая создать мировое правительство, чтобы ядерный век не стал последним веком цивилизации. Увы, тогда это была слишком теоретическая идея.

Теоретик–изобретатель

Слишком теоретической для 20-летнего Андрея Сахарова была и обрисованная глобальная картина мировых симметрий. В зловеще-практических обстоятельствах, когда фашисты подошли к Москве, студент-четверокурсник эвакуировался вместе с университетом в далекий Ашхабад. И после ускоренного окончания университета отправился на военный завод в Ульяновске. Завод делал патроны – для фронта, для победы. А молодой специалист по «оборонному металловедению», стараясь помочь победе, изобрел магнитный прибор для проверки качества пуль. И первая его самостоятельная задача в теоретической физике родилась из размышлений над этим изобретением.

Чтобы из патронного производства возникла физическая задачка сомнительной важности, нужен человек с призванием физика-теоретика. Иначе изобретение вполне конкретного прибора не поведет к странному вопросу: а что если магнитные силы заменить электрическими? Это был не производственный вопрос, это был вопрос к природе, в которой имеется странная симметрия электричества и магнетизма.

За сорок лет до того служащий патентного бюро в Берне Альберт Эйнштейн, размышляя над кажущейся несимметрией движущихся зарядов, создал самую знаменитую физическую теорию – теорию относительности. Начиная размышлять о какой-нибудь несимметрии природы, теоретик не знает, придет ли он к новой теории, просто к новой формуле или не придет ни к чему разумному вовсе. Но движет размышлениями одно и то же стремление к познанию.

Итак, в самом теплом и светлом помещении Ульяновского патронного завода – в парткабинете, рядом с полками политических книг, молодой инженер занимался теоретической физикой и придумал-таки, как решить свою электромагнитную задачу. За этой задачей последовали другие – ненужные для патронного производства, но интересные для начинающего теоретика. Теоретик задавал Природе вопросы, ответы на которые получал с помощью физических рассуждений и математики, умело распоряжаясь симметриями и асимметриями. Только одну из этих задач можно понять без пояснений: «С какой скоростью увеличивается толщина льда, окруженного ледяной водой?»

Решения двух других задач начинающий теоретик отправил отцу в Москву, а тот показал их Игорю Евгеньевичу Тамму, главному теоретику в Физическом институте Академии наук. В результате в начале 1945 года Андрей Сахаров стал аспирантом ФИАНа и целиком отдался теоретической физике. На чистую науку история дала ему всего несколько лет. Атомный взрыв в Хиросиме в августе 1945 года был услышан и в Советском Союзе. Ядерная асимметрия требовала ответа. Так считали не только политики, но и российские физики. Восстановление симметрии, создание советского ядерного оружия для физиков было не столько великодержавной претензией, сколько предотвращением новой войны. Летом 1948 года к разработке супер-бомбы подключили И.Е.Тамма и его сотрудников. Сахаров, только что за-

Андрей Сахаров с дочкой, лето 1948 года (несимметрично нацеленный фотоаппарат)

щитивший диссертацию по чистой науке, вернулся к физико-техническому изобретательству. Почти на два десятилетия. Он считал это дело необходимым, оно ему нравилось, и оно у него получалось. Через считанные недели у Сахарова родится идея «Слойки» – первой советской термоядерной бомбы. «Это лето памятно мне блеском воды, солнцем, свежей зеленью, скользящими по водохранилищу яхтами ... Несмотря на летнее время, мы все работали очень напряженно. Тот мир, в который мы погрузились, был странно-фантастическим, разительно контрастировавшим с повседневной городской и семейной жизнью за пределами нашей рабочей комнаты, с обычной научной работой».

Изобретательство совместимо с теоретической физикой. Знаменитый теоретик Энрико Ферми об изобретатении супербомбы сказал: «Превосходная физика!» Ведь термоядерный взрыв с его астрономическими температурами и давлениями дает теоретику возможность «проникнуть» внутрь звезды.

Все это так. Но спустя сорок лет Сахаров с грустью писал в письме: «Пытаюсь изучать сделанное умными людьми в области квантовой теории поля ... вещь крайне трудная, и я часто отчаиваюсь когда-нибудь выйти на должный уровень – упущено с 1948 года слишком многое, сплошные пробелы, и все последующие годы я только за счет удачи и «нахальства» мог что-то делать, часто попадая впросак или работая впустую». «Нахальство» по-другому называется смелостью, а удача – награда за смелость и в науке. Но нет оснований не верить Сахарову: термоядерное изобретательство отняло слишком много его сил.

Изобретательный теоретик или практический политик?

Как ни увлекательно видеть в водородной бомбе искусственную звезду, к концу 50-х годов цель была достигнута, научно проблема исчерпалась. Настала очередь изощренной техники. Там тоже есть творческий простор, но не для физика-теоретика. А как быть теоретику, который знает, что изобрел самое могущественное оружие в истории и – по воле истории – стал очень влиятельным ученым в военно-научном комплексе страны? Ответственность за происходящее вокруг – родовое чувство российской интеллигенции – привело физика-теоретика в практическую политику.

Свою политическую биографию Сахаров начал в области своей профессии: его заботили ядерные испытания в атмосфере – вредоносные для человечества и необязательные для поддержания ядерного баланса. Начинающему политику сопутствовал успех – в 1963 году международный договор запретил надземные испытания. Это утвердило Сахарова в важности своей новой роли. Вместе с тем, общение с высшими руководителями государства давало ему опытные знания о советском правительстве, недоступные другим. Сама проблема стратегического равновесия связана с общим потенциалом государства и общества.

В середине 60-х годов развитие ядерно-ракетного оружия подвело к необычайно опасному повороту в гонке вооружения, хотя речь шла об обороне. Противоракетная оборона оказалась опаснее для мира, чем средства нападения. Этот неочевидный, но вполне вероятный вывод Сахаров, как один из высших военно-технических экспертов, попытался объяснить правительству 21 июля 1967 года. Он направил – секретной почтой – соответствующее разъяснение. Однако советские руководители отвергли, а точнее проигнорировали, это предостережение.

Полученные «экспериментальные» факты о советском режиме и о состоянии ядерно-ракетного противостояния требовали теоретического осмысления, результатом чего и стали Сахаровские «Размышления о прогрессе, мирном сосуществовании и интеллектуальной свободе». В мае 1968 года он выпустил свою статью в Самиздат, в июле перевод статьи опубликовали на Западе. Сахаров не проповедовал мораль несимметричному человечеству, а предложил конкретный путь к симметризации – он был не морализатор, а теоретик-изобретатель. Корневая проблема выросла из его профессиональной области: как человечеству выжить в условиях ядерного равновесия, когда это равновесие – «по вине» научно-технического прогресса – становится неустойчивым. Технические эксперты обычно предлагают технические решения – как увеличить надежность своих страшных «изделий». Этим занимался и Сахаров вместе со своими коллегами, пока не осознал тупиковость узко-технических решений – слишком тесно главная проблема связана с жизнью человечества.

Дважды Герой Социалистического Труда академик Андрей Сахаров и трижды Герой Социалистического Труда академик Игорь Курчатов, 1958 год

И он вышел за предписанные рамки. Решение проблемы он увидел в том, что судьба человечества зависит от соблюдения прав отдельной личности. Всеобщие права человека означают открытый мир, в котором только и возможно взаимное узнавание, взаимопонимание, доверие и мирное сосуществование. В мире, разделенном глухими перегородками, само собой возникает взаимное недоверие и страх. Кратко Сахаровскую гуманитарную идею 1968 года можно описать так: справиться с губительной асимметрией большого целого можно, обеспечивая симметрию для его наименьших составляющих. Путь к этой идее, быть может, дался Сахарову легче оттого, что он уже думал о зависимости такого рода, хотя и в совсем другой сфере. Примерно за год до его размышлений о политических асимметриях родилась одна из самых ярких его идей в теоретической физике.

Симметрия и антисимметрия

Если в политике Сахаров размышлял о том, как обеспечить человечеству более симметричную жизнь, то в физике – наоборот – он пытался понять, почему столь несимметрична Вселенная, управляемая симметричными законами. В обоих случаях он связывал явления самых малых и самых больших масштабов. В социальной жизни – глобальный мир и свободу отдельной личности, а в физике – свойства Вселенной и поведение микрочастиц.

В 20-м веке физики открыли, что элементарные частицы бывают абсолютно тождественными и потому взаимозаменимыми, но бывают и абсолютно противоположными. Настолько противоположными, что при встрече взаимно уничтожаются, только вспышкой сообщая о своей совместной гибели. Такие противоположные частицы назвали античастицами. Первую античастицу теоретически предсказали и экспериментально открыли еще в начале 30-х годов. Это была антикопия электрона – антиэлектрон, за которым закрепилось название «позитрон». Потом экспериментаторы нашли антикопии и других элементарных частиц.

Асимметрия Вселенной, над которой Сахаров задумался в середине 60-х годов, состояла в том, что античастиц во Вселенной очень уж мало – по сравнению с частицами. И слава Богу за такую асимметрию – иначе каждый второй метеорит состоял бы из антивещества. А такой антиметеорит, даже если бы в нем был всего один грамм, соприкоснувшись с веществом Земли, произвел бы взрыв мощности атомной бомбы. Но эту волю Божью физики не понимали – самоочевидным казалось, что всякая частица и ее античастица созданы равными в своих правах. А значит, казалось бы, вещество и антивещество должны быть равно представлены во Вселенной. Астрофизики стали искать признаки антивещества в космосе. Писатели-фантасты устраивали драматические встречи земного космического корабля с неземным и – вполне возможно! – состоящим из антивещества.

Сахаров, однако, со всей серьезностью отнесся к наблюдаемой асимметрии и приписал ее Вселенной в целом, а не просто космическому окружению Земли. Тогда надлежало понять, как симметрия микрочастиц может совмещаться с асимметрией Вселенной. К тому времени, впрочем, симметрия микромира стала уже не столь простой, как правое и левое крылья бабочки, зеркально симметричные (рис.4). В 1956 году произошло знаменательное событие – экспериментаторы обнаружили, что в мире элементарных частиц нет паритета (*Parity*) правого и левого, или *P*-симметрии. Это знамение теоретики поняли как указание на то, что бабочка микромира выглядит, скорее, так, как на рисунке 5. Иными словами, бабочка не изменится, если одновременно с перестановкой правого и левого поменять местами черный и белый цвета – частицы поменять местами с античастицами и, соответственно, каждый заряд (*Charge*) заменить на противоположный ему. Это *CP*-симметрия. Но и она оказалась не последним словом науки. В 1964 году экспериментаторы обнаружили первое не *CP*-симметричное явление.

Рис. 4

Рис. 5

Что на это могли сказать теоретики? Например, то, что и в обыденной жизни нередко путают правое и левое и превращают белое в черное. Физики-теоретики умеют гораздо более хитрое – изменять направление времени на противоположное. Показывая фильм в обратном направлении, можно зубную пасту, выдавленную из тюбика, вернуть на экране вспять. В реальной жизни никто такого не видел, и физики называют такой процесс асимметричным во времени, или *T*-асимметричным. Что касается элементарных частиц, то физики долгое время считали, что в микромире все явления *T*-симметричны, как в бильярде: сняв на видео соударение шаров и пустив пленку в обратном направлении, ничего странного на экране не заметишь. После крушения *P*-симметрии физики стали всматриваться в другие симметрии. Им не нужна была кнопка обратной перемотки, чтобы задать вопрос о *T*-симметрии в микромире, им хватало ручки и бумаги. В результате они установили самый общий закон симметрии микромира – *CPT*-закон. Чтобы превратить одно крыло *CPT*-бабочки в другое, надо поменять местами правое и левое, частицу и ее античастицу (черное и белое), прошлое и будущее (перевернуть время *T*) (рис.6).

Рис. 6

И Сахаров придумал, как такой тройной симметрией микромира объяснить асимметрию Вселенной. Астрономы давно уже обнаружили, что Вселенная несимметрична во времени. Она расширяется – составляющие ее галактики удаляются друг от друга. Сегодня Вселенная шире, чем вчера. А поза-поза-поза…вчера? Запустим космологический фильм вспять. Расширение Вселенной теперь выглядит сжатием, галактики приближаются друг к другу, сливаются. При этом сближаются и сами элементарные частицы. Вселенная начинает чувствовать законы микромира.

Именно в ту эпоху, называемую Большим взрывом, асимметрия Вселенной – по идее Сахарова – складывалась в процессах, бурлящих тогда в каждой микроточке космического пространства, *Т*-асимметрия позволила породить наблюдаемую сейчас *С*-асимметрию – разное содержание частиц и античастиц. Помимо того крылышка вселенской бабочки, которое видно астрономам, физик-теоретик Сахаров увидел мысленно и другое крылышко, раскрывшееся до Большого взрыва (рис.7). Сама эта бабочка *СРТ*-симметрична, но увидеть ее целиком не дает краткость человеческой жизни по сравнению с возрастом Вселенной.

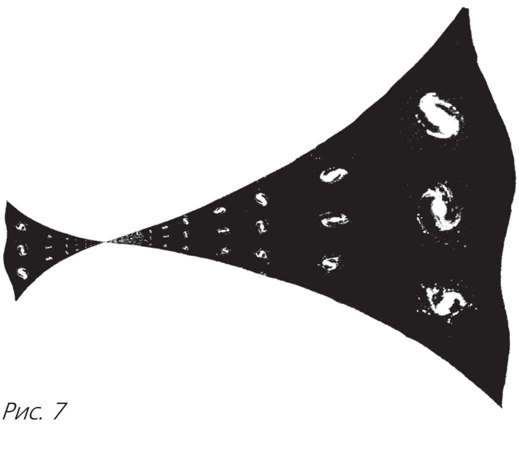


Рис. 7

* * *

Удивительно, как много может человек успеть за свою короткую жизнь: научиться писать правой и левой рукой одновременно, разглядеть симметрию асимметричного мира природы и сделать симметричнее мир человека. Примерно так я завершил рассказ об Андрее Сахарове для американских семиклассников. И не был уверен, что они поняли мой рассказ. Поэтому обрадовался, получив из школы пачку благодарственных писем. Одно из них доставило мне особое удовольствие. Автор по-американски сдержанно, но энергично поблагодарил меня за рассказ и выразил надежду, что моя будущая книга о Сахарове станет бестселлером. И подписался:

Не сразу я заметил, что он подписался иначе, чем Сахаров, хотя и зеркально-симметрично. Право-лево-рукий Сахаров писал двумя руками от центра к краям <= =>, а праворукий Вилли, имитируя двурукость, написал => <=. Замечательно, что и симметрии и люди бывают такими разными. И что многие загадки Вселенной ждут еще своих разгадок. Для тех, кто хочет ими заняться, Андрей Сахаров оставил совет:

Юбилей теоремы Райского

А.РОМАНОВ

50 ЛЕТ НАЗАД В ЖУРНАЛ «МАТЕМАтические заметки» была подана статья школьника Дмитрия Райского [1] с существенным продвижением в проблеме, поставленной Хадвигером [2]. Дмитрий доказал такую теорему:

При раскраске плоскости в три цвета (разбиении на три непересекающиеся множества) всегда можно выбрать цвет, в котором реализуются все расстояния, т.е. для любого положительного d найдутся две точки на расстоянии d, окрашенные в выбранный цвет.

Теорема Райского является заметным усилением доказанной в 1961 году братьями Мозерами теоремы о том, что при раскраске плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1. При подготовке статьи [1] к печати теорема была обобщена на N-мерное пространство и существенно отредактирована. В результате работа школьника оказалась трудночитаемой и недоступной для юных математиков. Здесь я постарался воспроизвести первоначальный вариант решения. Я благодарен Н.Н.Константинову, который в 1971 году рассказал мне доказательство теоремы Райского. Константинов помогал Дмитрию в подготовке статьи и без его участия публикация вряд ли была бы возможна.

Вспомогательные леммы

Пусть на плоскости задана фигура из n различных точек – n-точечник. Выберем одну из этих точек и назовем *n-пучком* набор векторов, выходящих из этой точки ко всем точкам n-точечника (один из векторов n-пучка – нуль-вектор). Определим произведение n-пучка и k-пучка как пучок векторов $a + c$, где вектор a берется из n-пучка, а c – из k-пучка.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190702

Определенное таким образом произведение содержит не более чем $n \cdot k$ различных векторов, так как суммы векторов для разных пар могут и совпадать.

Лемма 1. *Если мы рассмотрим повороты k-пучка на произвольный угол, то лишь для конечного числа углов поворота произведение фиксированного n-пучка и повернутого k-пучка будет содержать менее чем $n \cdot k$ различных векторов.*

Действительно, выбрать два различных вектора a, b из n-пучка и два различных вектора c, d из k-пучка можно лишь конечным числом способов. Для каждой такой четверки векторов рассмотрим повороты k-пучка на угол α и сравним суммы векторов $a + c_\alpha$ и $b + d_\alpha$. Так как окружности пересекаются не более чем в двух точках, не более двух углов α могут дать равенство этих сумм, что и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Если произведение n-пучка и k-пучка содержит $n \cdot k$ различных векторов, то $n \cdot k$ концов этих векторов образуют n фигур, полученных параллельным переносом k-точечника, и k фигур, полученных параллельным переносом n-точечника (рис.1).*

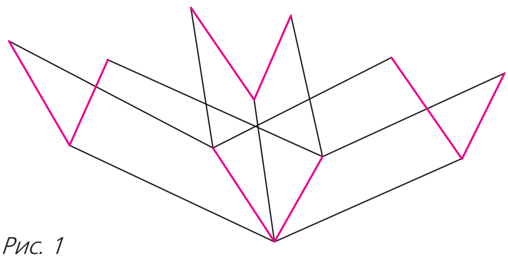


Рис. 1

Доказательство теоремы

Предположим, что утверждение неверно и существует раскраска плоскости в три цвета, для которой нельзя выбрать цвет, в котором реализуются все расстояния. Тогда для этой раскраски у каждого цвета есть расстояние, которого не может быть между двумя точками это цвета.

Рассмотрим 7-точечник, предложенный братьями Мозерами, который Райский назвал «зондом» (рис.2). Все нарисованные отрезки имеют длину 1. Простым перебором можно убедиться, что если из

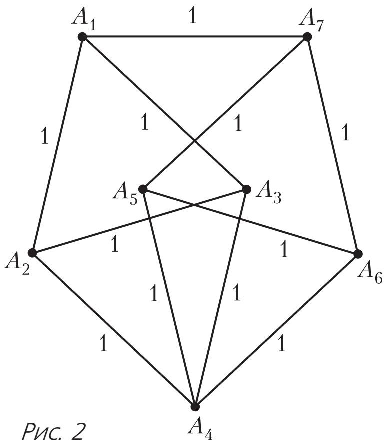


Рис. 2

этих семи точек выбрать любые три, то найдутся две выбранные точки, соединенные отрезком. Из этого сразу следует теорема Мозеров.

У нас для каждого цвета будет свой 7-точечник-зонд, в котором вместо 1 будет отсутствующее в этом цвете расстояние. Выберем произвольную точку плоскости и все векторы пучков будем считать выходящими из этой точки. Пронумеруем цвета произвольно и рассмотрим зонд для цвета 1. В каждом из трех 7-точечников-зондов выберем одну из 7 точек, например A_4. Тогда для каждого зонда определен свой 7-пучок. По лемме 1 повернем 7-точечник-зонд для цвета 2 на такой угол, чтобы произведение 7-пучков 1 и 2 содержало 7^2 различных векторов (было 49-пучком), а 7-точечник-зонд для цвета 3 повернем на такой угол, чтобы произведение 49-пучка и этого 7-пучка содержало 7^3 различных векторов. По лемме 2, концы этих 7^3 векторов – 7^3 различных точек на плоскости – образуют 49 зондов для цвета 3, они же образуют 49 зондов для цвета 2 и 49 зондов для цвета 1. Для завершения доказательства достаточно заметить, что в любом зонде для цвета 1 из 7 точек не более двух цвета 1, в любом зонде для цвета 2 из 7 точек не более двух цвета 2, а в любом зонде для цвета 3 из 7 точек не более двух цвета 3.

Тем самым, не более $2 \cdot 7^2$ точек может быть окрашено в каждый цвет, всего не более $6 \cdot 7^2$ точек из 7^3 может быть окрашено.

Доказательство завершено.

Многомерный случай

В статье Райского приведено доказательство теоремы для n-мерного пространства:

Пусть множества $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ образуют покрытие n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$; тогда среди них найдется такое множество A_i, что для всякого $d > 0$ найдется пара точек из этого множества, расстояние между которыми равно d.

Для доказательства теоремы в таком виде не требуется новых идей, кроме конструирования зонда в $\mathbb{R}^n$ и доказательства леммы 1. Чтобы не жертвовать доступностью изложения, рассмотрим случай трехмерного пространства, для больших измерений трудности носят чисто технический характер. (Заметим, что в статье Райского доказательство существенно отредактировано, здесь я постарался воспроизвести первоначальный вариант.)

Построим зонд для $\mathbb{R}^3$. Веретеном Райский назвал 5-точечник из четырех вершин правильного тетраэдра со стороной d и еще одной точки b, симметричной одной из его вершин – вершине a – относительно грани (рис.3). Зондом он назвал 9-точечник, полученный из двух веретен, совмещенных вершинами a и повернутых так, чтобы расстояние между точками b этих веретен тоже было равно d (рис.4).

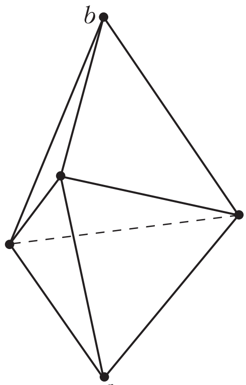


Рис. 3

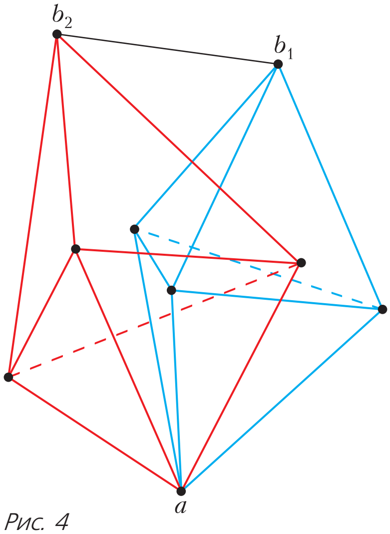


Рис. 4

Очевидно, что такой поворот веретен существует.

Доказательство леммы 1 нуждается в незначительной модернизации. Для заданного n-точечника выберем плоскость в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы проекция n-точечника на эту плоскость содержала n различных точек. Выберем исходное положение (поворот) k-точечника относительно этой плоскости, чтобы его проекция содержала k различных точек. На плоскости получились n-пучок и k-пучок, для которых справедлива лемма 1. Рассмотрим поворот исходного k-пучка вокруг прямой, перпендикулярной выбранной плоскости. Проекция на плоскость содержит $n \cdot k$ различных векторов, что и доказывает лемму 1 для $\mathbb{R}^3$. Остальная часть доказательства проводится без изменений.

Оптимизация доказательства теоремы Райского

Предложенное доказательство не использует идей, отсутствующих в первоначальном варианте Райского. Оказывается, можно отказаться от рассмотрения поворотов, делающих точки не совпадающими (лемма 1). Вместо этого можно каждому вектору произведения n-пучка и k-пучка приписать кратность – количество вариантов выбора вектора из n-пучка и вектора из k-пучка, для которых суммы векторов совпадают.

Лемма 2 меняется незначительно. Произведение n-пучка и k-пучка содержит $n \cdot k$ векторов с учетом кратности, и $n \cdot k$ концов этих векторов образуют n фигур, полученных параллельным переносом k-точечника, и k фигур, полученных параллельным переносом n-точечника. Каждая точка произведения пучков встречается в этих фигурах столько раз, какова кратность точки.

При таком подходе многомерный случай отличается от двумерного только конструкцией зонда.

Оценка сверху

До публикации статьи Райского была известна раскраска плоскости в 7 цветов, в которой любые две точки на расстоянии 1 раскрашены в разные цвета. Эта раскраска основана на разбиении плоскости на равные правильные шестиугольники.

С.Б.Стечкин заметил (и с разрешения Райского вставил в статью), что плоскость можно разбить на 6 таких множеств, чтобы на каждом из них реализовались не все расстояния. Элемент конструкции состоит из 4 правильных шестиугольников и 8 правильных треугольников. Путем параллельных переносов этим элементом мостится вся плоскость, как показано на рисунке 5. Все треугольники являются открытыми, а нижние и правые вершины шестиугольников не принадлежат этим фигурам. Если принять сторону треугольника за 1, то расстояние $d_1 = 2$ не реализуется на множествах $A_1, \ldots, A_4$ одинаково

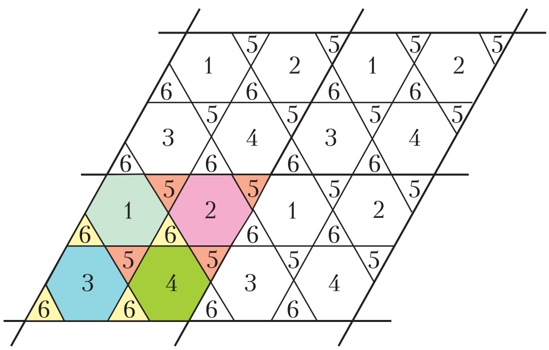


Рис. 5

(Продолжение см. на с. 23)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2566–М2569 предлагались на IV Кавказской математической олимпиаде.

Задачи М2566–М2569, Ф2573–Ф2576

М2566. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых является точным квадратом?

П.Кожевников

М2567. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника выбрана точка P так, что $PL \parallel BC$, $PM \parallel CA$, $PK \parallel AB$ (рис. 1). Может ли

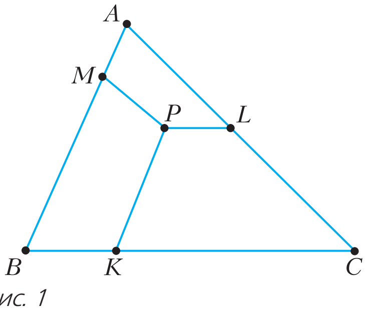


Рис. 1

оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ – описанные?

П.Кожевников

М2568. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться того, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

П.Кожевников

М2569*. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе. Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых можно класть ровно 10 камней. Назовем пару камней *ясной*, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?

В.Брагин

Ф2573. Шарик массой M с жесткими пластиковыми стенками после падения (без начальной скорости) с высоты h на стол подскакивает на высоту $0{,}7h$. Сколько песка (какую массу m) нужно насыпать внутрь шарика, чтобы он после падения с той же высоты подскакивал на высоту $0{,}3h$?

В.Шариков

Ф2574. На край большой вазы (он показан красной линией на рисунке 2; вид сверху), стоящей на горизонтальном столе, опираются три одинаковые длинные и тонкие палочки, каждая из которых имеет массу m, распределен-

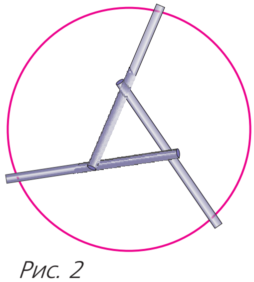


Рис. 2

ную равномерно по всей длине. С какой силой взаимодействуют две из трех палочек? Концы одной палочки касаются края вазы и середины другой палочки.

С.Татиков

Ф2575. Каковы показания одинаковых мультиметров в электрической цепи, изображенной на рисунке 3? Три прибора работают омметрами на диапазоне

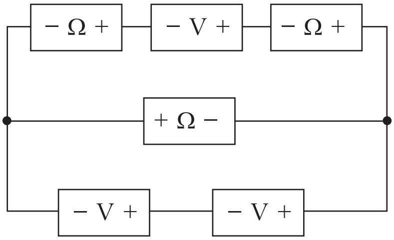


Рис. 3

2000 кОм, а три других измеряют напряжения. Внутренние сопротивления приборов в этих режимах измерений одинаковы и равны R = 1 МОм. ЭДС эквивалентной (для внешней цепи) батарейки в каждом омметре равна $\mathcal{E}$ = 2,2 В.

С.Варламов

Ф2576. Из однородного резинового шнура сделали петлю с «хвостом», т.е. один из концов шнура накрепко привязали узлом к одной из его точек между концами (рис.4). Шнур взяли за две точки и растянули так,

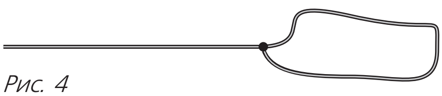


Рис. 4

что петля превратилась в два вытянутых вдоль друг друга отрезка одинаковой длины и массы, а хвост целиком вытянулся вдоль той же линии, на которой расположены участки петли. При этом все небольшие участки шнура приобрели длину, которая во много раз больше длины этих же участков в недеформированном состоянии. При растяжении шнур подчиняется закону Гука. Если «щелкнуть» по узлу, то волны, пробегающие по шнуру, отразившись от мест крепления, возвращаются к узлу одновременно. Какую долю от всей массы резинового шнура составляет хвост?

А. Шнуров

Решения задач М2553 – М2557, Ф2561–Ф2564

М2553*. Решение этой задачи см. в статье А.Заславского «Об одной ортоцентрической четверке».

М2554. *Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке C и касаются внутренним образом окружности Ω в точках A и B (рис.1). Прямая AB вторично пересекает окружность Ω_1 в точке D. Докажите, что $\angle BCD = 90^\circ$.*

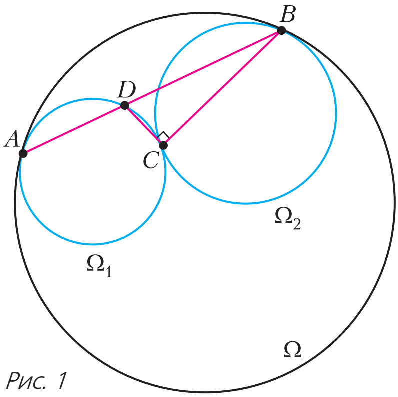


Рис. 1

Пусть O, O_1, O_2 – центры окружностей Ω, Ω_1, Ω_2 соответственно (рис. 2). Тогда точки O_1 и O_2 расположены на сторонах равнобедренного треугольника AOB. Треугольник AO_1D также равнобедренный, поэтому $\angle ADO_1 = \angle ABO$, откуда $O_1D \parallel OB$.
Пусть прямая DC пересекает вторично Ω_2 в точке E. Так как C лежит на O_1O_2, из равнобедренных треугольников DO_1C и

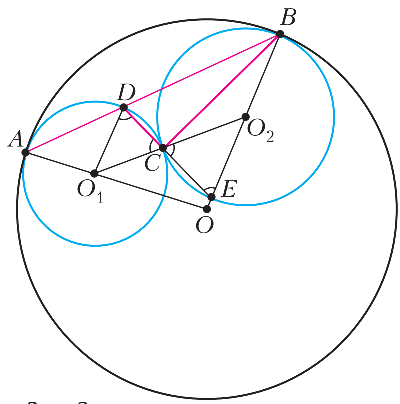


Рис. 2

EO_2C имеем

$$\angle EDO_1 = \angle O_1CD = \angle O_2CE = \angle O_2ED,$$

откуда $O_1D \parallel O_2E$. (Эту параллельность можно получить и по-другому, рассматривая гомотетию с центром C, переводящую Ω_1 в Ω_2.)

Таким образом, E лежит на прямой BO_2. Значит, BE – диаметр окружности Ω_2 и $\angle BCE = 90^\circ$. Отсюда $\angle BCD = 90^\circ$, что и требовалось.

В.Расторгуев

М2555. *В каждую клетку таблицы 2019×2019 записали число 1 или –1. Докажите, что для некоторого натурального k можно выделить k строк и k столбцов так, чтобы модуль суммы k^2 чисел в клетках на пересечении выделенных строк и столбцов был больше 1000.*

Положим $k = 1009$ и выделим в таблице первые 1009 строк. Оставшиеся строки далее не используем и сотрем, считая, что у нас таблица 1009×2019. Поскольку 1009 нечетно, в каждом столбце сумма нечетна, а значит, отлична от 0. Тем самым все столбцы разбиваются на стобцы с положительной суммой и отрицательной суммой. Столбцов какого-то вида не меньше 1009 (так как всего столбцов 2019), значит, мы можем выделить 1009 столбов одного вида. Если это столбцы с отрицательной суммой, то в каждом выделенном столбце сумма не больше –1, поэтому общая сумма в выделенных столбцах не больше –1009. Если же у нас 1009 столбцов с положительной суммой, то в каждом выделенном столбце сумма не меньше 1, поэтому общая сумма в выделенных столбцах не меньше 1009. Задача решена.

Доказанная оценка на максимальное значение модуля суммы чисел в «квадратной подтаблице», конечно, неточна.

П.Кожевников

М2556. *Аня и Боря играют в такую игру. Вначале Аня пишет на доске целое положительное число. Затем игроки делают ходы по очереди. Боря ходит первым. Каждым своим ходом Боря выбирает целое положительное число b и заменяет записанное на доске число n на число $n - b^2$. Каждым своим ходом Аня выбирает целое положительное число k и заменяет записанное на доске число n на число n^k. Боря выигрывает, если число, записанное на доске, когда-нибудь станет равным нулю. Сможет ли Аня помешать Боре выиграть?*

Ответ: нет, не сможет.

Предъявим выигрышную стратегию за Борю.

Назовем натуральное число q-квадратным, если оно представляется в виде суммы не более q точных квадратов. Например, точный квадрат является q-квадратным числом при любом натуральном q. Отметим, что n является n-квадратным, поскольку $n = \underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ слагаемых}}$.

Покажем, что если перед ходом Ани было q-квадратное натуральное число n, то и после хода Ани оно останется q-квадратным. Если k четно, то число n^k – точный квадрат, и значит, оно q-квадратное. Пусть теперь $k = 2m + 1$ нечетно. Тогда если $n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2$, то

$$n^k = n \cdot \left(n^m\right)^2 =$$
$$= \left(x_1 n^m\right)^2 + \left(x_2 n^m\right)^2 + \ldots + \left(x_q n^m\right)^2.$$

Боря же своим ходом может из q-квадратного числа получить $(q-1)$-квадратное (в частности, из 1-квадратного может получить 0). Действительно, из $n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_q^2$ Боря может получить $x_2^2 + \ldots + x_q^2$. Таким образом, если начальное число q-квадратное, Боря может за каждый ход уменьшать q на 1 и выиграть не более чем за q ходов. Задача решена.

На самом деле Боря может выиграть не более чем за 4 хода, поскольку, согласно знаменитой теореме Лагранжа, любое натуральное число представляется в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

М.Дидин

М2557. *Дано положительное число ε. Докажите, что существует натуральное N такое, что при любом натураль-*

ном $n \geq N$ верно следующее утверждение: в любом графе на n вершинах, у которого количество ребер не менее $(1+\varepsilon)n$, найдутся два различных простых цикла одинаковой длины.

Пусть G – граф с $v = n$ вершинами и не менее чем $(1+\varepsilon)v$ ребрами, у которого длины всех простых циклов попарно различны. Поскольку длина каждого простого цикла не превышает v, общее количество простых циклов не превышает v. Далее, предполагая (для достаточно больших v), что $\varepsilon^2 v > 1$, мы оценим снизу количество простых циклов квадратичной функцией от v, откуда будет следовать утверждение задачи.

В каждой компоненте связности графа G выберем *остовное дерево*, их объединение даст *остовный лес* F. Обозначим через A множество всех ребер этого остовного леса, а множество остальных ребер графа G обозначим через B. Ясно, что $|A| < v$, $|B| > \varepsilon v$. Добавим фиксированное ребро b из множества B к лесу F; в полученном графе есть единственный простой цикл C_b. Цикл C_b содержит ребро b. При удалении из цикла C_b ребра b остается простой путь S_b, состоящий из нескольких ребер множества A.

Поскольку циклы C_b имеют разные длины для разных ребер $b \in B$, имеем следующую оценку:

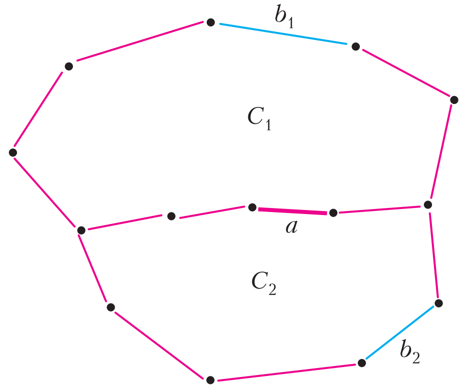
$$\sum_{b \in B} |S_b| \geq 2 + 3 + \ldots + (|B| + 1) =$$

$$= (|B| + 3)|B|/2 > \varepsilon^2 v^2/2 .$$

Следовательно, некоторое ребро из множества A принадлежит более чем $\varepsilon^2 v^2/(2v) = \varepsilon^2 v/2$ множествам S_b. Зафиксируем такое ребро $a \in A$, и пусть B' – множество ребер $b \in B$, для которых $a \in S_b$. Из определения ребра a вытекает, что $|B'| > \varepsilon^2 v/2$.

Для каждого двухэлементного подмножества $\{b_1, b_2\} \in B'$ рассмотрим объединение циклов $C_{b_1} \cup C_{b_2}$ (см. рисунок).

Множества S_{b_1} и S_{b_2} образуют простые пути в F, причем эти пути имеют общий подпуть, содержащий ребро a. Удалив из



$C_{b_1} \cup C_{b_2}$ этот подпуть, получим простой цикл, содержащий ровно два ребра из множества B – ребра b_1 и b_2. Таким образом, по каждой паре элементов множества B' мы построили простой цикл в графе G, причем для разных пар эти циклы разные.

Таким образом, количество циклов в графе G не меньше чем $|B'|(|B'| - 1)/2 \geq$ $\geq \varepsilon^2 v(\varepsilon^2 v - 2)/8$, что устанавливает нужную нам квадратичную оценку.

Ф.Петров

Ф2561. *В одной из моделей расширяющейся Вселенной радиус Вселенной изменяется со скоростью, которая зависит от времени t и текущего значения $r(t)$ по формуле $v(t) = v_0 \dfrac{R^2}{r^2(t)}\left(1 - \dfrac{t}{t_0}\right)$, где t – время, отсчитываемое от настоящего момента времени, когда радиус Вселенной равен R. Найдите время, через которое произойдет коллапс, т.е. сжатие в точку, в такой модели Вселенной, считая R, v_0 и t_0 известными.*

Как известно, объем шара радиусом r равен $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Малое изменение объема будет равно $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$, где Δr – малое изменение радиуса шара. В нашей модели расширяющейся Вселенной скорость изменения радиуса Вселенной равна

$$v(t) = \frac{\Delta r}{\Delta t} = v_0 \frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Выражая отсюда Δr, находим, что скорость изменения объема линейна по времени:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\pi v_0 R^2 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

Таким образом, начальная величина скорости изменения объема Вселенной равна $u_0 = 4\pi v_0 R^2$, а ускорение, с которым меняется скорость, отрицательно и по модулю равно $w = \frac{4\pi v_0 R^2}{t_0}$. Тогда закон изменения объема Вселенной имеет вид

$$V(t) = V_0 + u_0 t - \frac{wt^2}{2}, \text{ где } V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Во время коллапса объем будет равен нулю, и решение уравнения $V(t_к) = 0$ дает искомое время коллапса:

$$t_к = t_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2R}{3v_0 t_0}}\right).$$

А.Иванов

Ф2562. *Удельная теплота плавления снега, состоящего из плоских снежинок со средним диаметром $D = 5$ мм и средней массой $m = 0{,}004$ г, равна $L_с = 0{,}26$ МДж/кг, а удельная теплота плавления сплошного льда равна $L_л = 0{,}33$ МДж/кг. Если смотреть на снежинку, держа ее перед собой так, что она выглядит фигурой с шестилучевой симметрией (см. рисунок), то почти вся ее*

площадь закрыта ледяными кристаллами. Оцените минимальную работу внешних сил, которая необходима, чтобы расколоть кусок льда в форме куба с ребром 1 м на маленькие кубики с ребром 1 см.

Если сначала 1 кг сплошного льда, находящегося при температуре 0 °С, превратить в снежинки, а затем эти снежинки растопить, на что понадобится 0,26 МДж энергии, то получится 1 кг жидкой воды при 0 °С и на всю операцию потребуется 0,33 МДж энергии (изменение энергии системы зависит только от ее начального и конечного состояний). Таким образом, на образование поверхности всех снежинок, из которых состоит 1 кг снега, тратится энергия

$$L_л - L_с = 0{,}33 \text{ МДж} - 0{,}26 \text{ МДж} = 0{,}07 \text{ МДж}.$$

Оценим площадь поверхности всех снежинок, из которых состоит 1 кг снега:

$$S_1 = \frac{M}{m} \cdot 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \approx 9{,}4 \text{ м}^2 \gg 0{,}06 \text{ м}^2,$$

т.е. она во много раз больше, чем у сплошного ледяного кубика с ребром 0,01 м. Площадь поверхности всех ледяных кубиков с ребром 1 см, общий объем которых 1 м^3, равна

$$S_2 = 6 \times 10^{-4} \times 10^6 \text{ м}^2 = 600 \text{ м}^2.$$

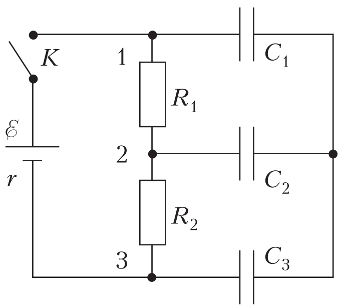
Это в 100 раз больше, чем площадь поверхности куба с ребром 1 м.

Итак, для раскалывания большого куба на много мелких кубиков потребуется энергия порядка

$$(L_л - L_с) \cdot \frac{S_2}{S_1} \approx 4{,}5 \text{ МДж}.$$

А.Айсберг

Ф2563. *Все параметры, отмеченные на схеме электрической цепи (см. рисунок), известны. Иными словами, известны ЭДС батарейки, ее внутреннее сопротивление, сопротивления резисторов и емкости конденсаторов. До замыкания ключа заряды всех пластин конденсаторов равны нулю. Каким будет заряд на пластине конденсатора, подключенной к точке 3,*



через большое время после замыкания ключа?

Поскольку суммарный заряд соединенных проводами трех пластин конденсаторов емкостями C_1, C_2 и C_3 измениться не может, то он был и останется равным нулю. Обозначим потенциалы точек 1, 2 и 3 через φ_1, φ_2 и φ_3 соответственно. А потенциал соединенных проводами пластин конденсаторов обозначим φ_4. Этот потенциал можно взять любым; например, пусть он будет равен нулю. Тогда, в соответствии с условием, нужно будет найти величину $C_3\varphi_3$.

Суммарный заряд пластин, соединенных проводами, равен

$$C_1(\varphi_4-\varphi_1)+C_2(\varphi_4-\varphi_2)+C_3(\varphi_4-\varphi_3)=0.$$

Если $\varphi_4=0$, то получим

$$C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3=0.$$

Разности потенциалов точек, взятых попарно, равны

$$\varphi_1-\varphi_3=\mathcal{E}\left(1-\frac{r}{R_1+R_2+r}\right),$$

откуда

$$\varphi_1=\varphi_3+\mathcal{E}\left(1-\frac{r}{R_1+R_2+r}\right);$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\mathcal{E}\frac{R_1}{R_1+R_2+r};$$

$$\varphi_2-\varphi_3=\mathcal{E}\frac{R_2}{R_1+R_2+r},$$

откуда

$$\varphi_2=\varphi_3+\mathcal{E}\frac{R_2}{R_1+R_2+r}.$$

Таким образом, получаем

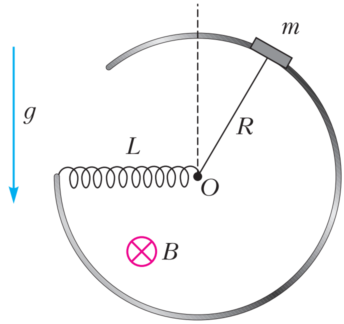
$$C_1\left(\varphi_3+\mathcal{E}\left(1-\frac{r}{R_1+R_2+r}\right)\right)+$$
$$+\;C_2\left(\varphi_3+\mathcal{E}\frac{R_2}{R_1+R_2+r}\right)+C_3\varphi_3=0.$$

Отсюда следует

$$C_3\varphi_3=-\mathcal{E}C_3\frac{C_1(R_1+R_2)+C_2R_2}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2+r)}.$$

А.Исагулов

Ф2564. *В однородном горизонтальном магнитном поле B в вертикальной плоскости находится закрепленная жесткая металлическая проволока, имеющая форму части окружности радиусом R (см. рисунок). Вдоль проволоки может без*



трения, но с обеспечением хорошего электрического контакта скользить маленькая по размерам металлическая шайба массой m. Шайба соединена с одним из выводов катушки индуктивностью L, находящимся в центре O проволочной окружности, тонким гибким и легким проводником, который всегда находится в почти выпрямленном положении. Второй вывод катушки соединен с изогнутой жесткой проволокой. Электрическим сопротивлением всех элементов конструкции можно пренебречь. Также можно пренебречь индуктивностью изогнутой проволоки, по которой скользит шайба, в сравнении с величиной L. В начальный момент шайба находится чуть правее самой верхней точки, ее скорость равна нулю и ток в проводах равен нулю. В тот момент, когда шайба оказывается в самой нижней точке, ее скорость становится равной нулю. С какой скоростью v и с каким ускорением a движется шайба в тот момент, когда она находится на уровне центра окружности O? Какой ток I течет в этот момент по проводам?

Методом размерностей можно получить ответы в таком виде:

$$v=(gR)^{0,5}\cdot\alpha,\quad I=\left(\frac{mgR}{L}\right)^{0,5}\cdot\beta,\quad a=g\cdot\gamma.$$

Численные значения безразмерных величин α, β, γ нужно искать, так как они методом размерностей не определяются.

Поскольку электрическое сопротивление проводников равно нулю, то это означает, что сохраняются энергия и суммарный магнитный поток, складывающийся из магнитного потока LI в катушке индуктивности и потока через замкнутый контур, образованный проводниками конструкции. Обозначим угол поворота выпрямленного проводника от начального вертикального положения до текущего положения через φ. Тогда условия сохранения магнитного потока и энергии запишутся в виде

$$LI - \frac{B\varphi R^2}{2} = 0,$$

$$Rmg = Rmg\cos\varphi + \frac{mR^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\left(B\varphi R^2/2\right)^2}{2L}.$$

Здесь предполагается, что потенциальная энергия в поле тяжести для шайбы отсчитывается от положения, когда она находится на уровне точки O. Поскольку в самой нижней точке скорость шайбы обратилась в ноль, то это означает, что

$$2Rmg = \frac{\left(B\pi R^2\right)^2}{8L}.$$

Когда шайба находится на уровне точки O, энергия магнитного поля равна

$$\frac{\left(BR^2(\pi/2)\right)^2}{8L} = \frac{\left(B\pi R^2\right)^2}{32L} = \frac{Rmg}{2}.$$

Следовательно, ток, текущий по проводам в этот момент, равен

$$I = \left(\frac{Rmg}{L}\right)^{0,5} \quad (\text{или } \beta = 1).$$

Потенциальная энергия шайбы в поле тяжести в этот момент равна нулю, поэтому кинетическая энергия равна $mv^2/2 = Rmg/2$, а скорость шайбы равна

$$v = (gR)^{0,5} \quad (\text{или } \alpha = 1).$$

Причем эта скорость может быть направлена или вверх или вниз, поскольку шайба это место будет проходить многократно.

Со стороны жесткой изогнутой проволоки на шайбу в горизонтальном направлении действует сила $mv^2/R = mg$, т.е. горизонтальная составляющая ускорения шайбы в этот момент равна по величине g. Найдем силу, которая действует на шайбу со стороны проводника, соединяющего шайбу с катушкой индуктивности. Эта сила направлена вверх вне зависимости от того, поднимается шайба вверх или опускается вниз. Поскольку считается, что масса этого проводника равна нулю, то сумма всех сил, которые на него действуют, в любой момент равна нулю. А действуют на него три силы: сила Ампера и силы, приложенные к его концам, одна из которых – со стороны шайбы. В рассматриваемый момент времени эти «концевые» силы, очевидно, одинаковы по величине и направлены вертикально, поскольку проводник находится в почти выпрямленном положении. Таким образом, каждая из этих сил по величине равна половине от величины силы Ампера:

$$F = \frac{F_A}{2} = \frac{BRI}{2} = \frac{BR(Rmg/L)^{0,5}}{2} = \frac{BR^2\left(mg/(RL)\right)^{0,5}}{2} = \frac{\left(16mgLR/\pi^2\right)^{0,5}\left(mg/(RL)\right)^{0,5}}{2} = \frac{\left(16mg/\pi^2\right)^{0,5}(mg)^{0,5}}{2} = \frac{2mg}{\pi}.$$

В результате на шайбу в этот момент в вертикальном направлении действуют сила тяжести mg, направленная вниз, и сила со стороны проводника, равная $2mg/\pi$ и направленная вверх. Следовательно, ускорение шайбы в рассматриваемый момент равно по модулю

$$a = g\left(1 + (1 - 2/\pi)^2\right)^{0,5} \approx 1,064g \quad (\text{или } \gamma = 1,064).$$

С.Дмитриев

Об одной ортоцентрической четверке

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Эта статья посвящена геометрической конструкции из задачи М2553 «Задачника «Кванта» (эта задача также предлагалась на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова). В процессе изучения этой конструкции, а также совместной работы над ней вместе с И.Богдановым и П.Кожевниковым обнаружилось довольно много интересных геометрических сюжетов, о которых мы и хотим рассказать читателям. Но начнем с самой исходной задачи.

Задача М2553*. *Обозначим через I центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, через A_1, B_1 и C_1 – точки ее касания со сторонами BC, CA и AB соответственно, через K и L – центры окружностей, вписанных в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 соответственно, через H – основание высоты,*

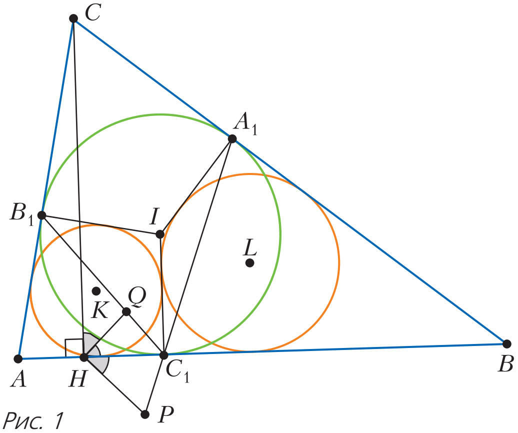


Рис. 1

опущенной из точки C (рис.1). Биссектриса угла AHC пересекает прямую A_1C_1 в точке P, а биссектриса угла BHC пересекает прямую B_1C_1 в точке Q. Докажите, что Q – ортоцентр треугольника KLP.

Условие задачи, очевидно, означает, что каждая из точек K, L, P, Q является ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными. Такая четверка точек называется *ортоцентрической*.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190703

Ниже для краткости будем называть две фигуры *перпендикулярно подобными*, если они подобны, одинаково ориентированы и углы между соответствующими отрезками фигур равны $90°$. Иными словами, называем фигуры перпендикулярно подобными, если одну из другой можно получить поворотной гомотетией (т.е. последовательным выполнением поворота и гомотетии) с углом поворота $90°$.

Решение задачи. В случае $AC = BC$ точки P, Q и C_1 совпадают, а треугольник KC_1L – прямоугольный и равнобедренный, следовательно, утверждение задачи верно. Далее не умаляя общности считаем, что $AC < BC$.

Из симметрии четырехугольника BA_1IC_1 относительно BI (рис.2) легко видеть, что

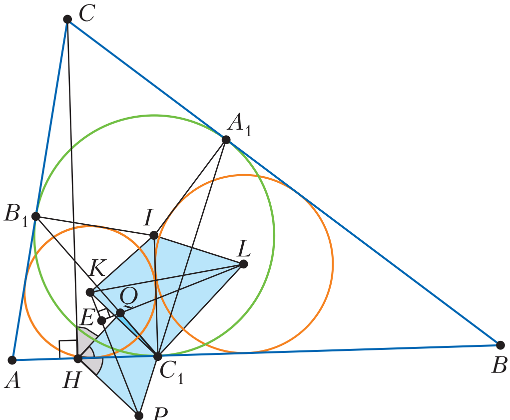


Рис. 2

прямая C_1A_1 (на которой также лежит P) перпендикулярна прямой BI (на которой также лежит L). Аналогично, перпендикулярны прямые C_1QB_1 и AKI. Далее, поскольку C_1K и C_1L – биссектрисы прямых углов AC_1I и BC_1I, имеем $PH \parallel C_1K \perp C_1L \parallel QH$. Поэтому треугольники KIC_1 и QC_1H перпендикулярно подобны. Также перпендикулярно подобны треугольники LIC_1 и C_1PH, а значит, то же верно и для четырехугольников $KILC_1$ и QC_1PH, откуда PQ и KL перпендикулярны как соответствующие диагонали перпендикулярно подобных четырехугольников.

Теперь достаточно показать, что $PK \perp QL$. Пусть $X = HP \cap AI$ и $Y = HQ \cap$

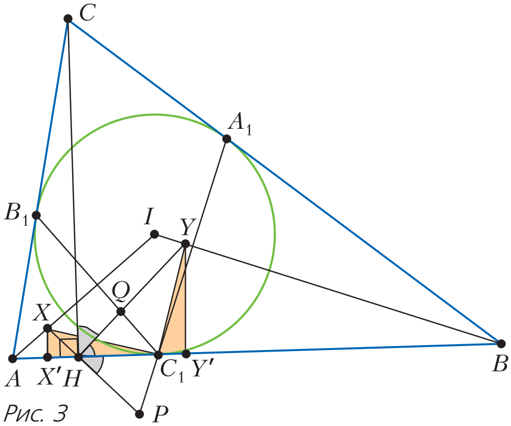


Рис. 3

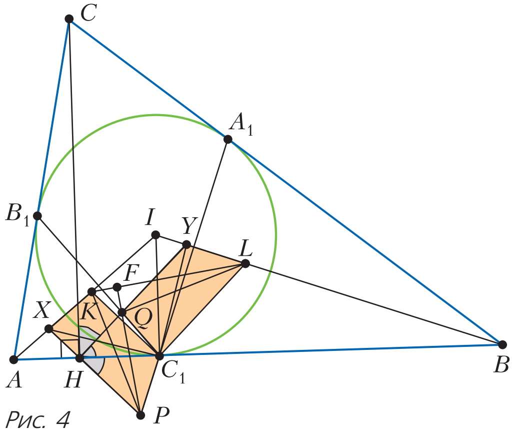


Рис. 4

$\cap BI$ – центры окружностей, вписанных в треугольники AHC, BHC (рис.3). Нетрудно показать, что $XC_1 \perp YC_1$ и $XC_1 = YC_1$. Действительно, если X', Y' – проекции X, Y на AB, то $XX' = C_1Y'$ и $YY' = C_1X'$ (см. упражнение 1 ниже), а значит, прямоугольные треугольники $XX'C_1$ и $C_1Y'Y$ равны.

Упражнение 1. Докажите, что $XX' = C_1Y'$.

Указание. Из прямоугольного треугольника AHC получаем $XX' = X'H$, а $C_1Y' = BC_1 - BY'$. Далее отрезки $X'H$, BC_1, BY' можно выразить как отрезки касательных до точки касания с вписанной окружностью в треугольниках AHC, BHC, ABC.

Из перпендикулярности XC_1 и YC_1 получаем, что треугольники PXC_1 и LC_1Y перпендикулярно подобны и даже равны (рис.4). Также перпендикулярно подобны треугольники KXC_1 и QC_1Y, а значит, то же верно и для четырехугольников (трапеций) $PXKC_1$ и LC_1QY, откуда $PK \perp LQ$, что завершает решение.

Итак, исходная задача решена. Однако рассматриваемая конфигурация обладает рядом других красивых свойств.

Укажем некоторые интересные описания оснований высот нашей ортоцентрической четверки K, L, P, Q; назовем эти точки $D = KQ \cap LP$, $E = LQ \cap KP$, $F = KL \cap PQ$.

Точка *F*

Из ортоцентрической четверки K, L, P, Q имеем подобие $\Delta KFP \backsim \Delta QFL$ (см. рис. 4), иначе говоря, F – центр поворотной гомотетии, переводящей вектор $\overrightarrow{KP}$ в $\overrightarrow{QL}$. Эта поворотная гомотетия совмещает диагонали перпендикулярно подобных и равных трапеций $PXKC_1$ и LC_1QY. Значит, на самом деле эта поворотная гомотетия – просто поворот (на $90°$), который, в частности, переводит $\overrightarrow{XC_1}$ в $\overrightarrow{C_1Y}$. Центр такого поворота – середина гипотенузы XY прямоугольного равнобедренного треугольника XC_1Y. Тем самым, F – середина XY.

Кроме того, мы поняли, что треугольники KFP и QFL не только подобны, но и равны, в частности $KP = QL$. Из этого же равенства треугольников вытекает, что треугольник PFL – равнобедренный, но, как мы знаем, он прямоугольный, откуда $\angle KLP = 45°$.

Упражнения

2. Докажите, что для любой ортоцентрической четверки K, L, P, Q условие $KP = QL$ эквивалентно равенству $45°$ или $180° + 45°$ любого из углов (невыпуклого) четырехугольника $KLPQ$.

3. Докажите, что F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку HC_1.

Указание. Можно использовать равенство $X'H = Y'C_1$ (см. упражнение 1).

Точка *E*

Пользуясь нашей ортоцентрической четверкой, понимаем, что E – центр поворотной гомотетии, переводящей вектор $\overrightarrow{PQ}$ в $\overrightarrow{LK}$ (см. рис.2). Эта поворотная гомотетия совмещает диагонали перпендикулярно подобных четырехугольников QC_1PH и $KILC_1$. Значит, это поворотная гомотетия (с углом поворота $90°$), которая переводит $\overrightarrow{HC_1}$ в $\overrightarrow{C_1I}$. Центр такой поворотной гомотетии – проекция вершины C_1 на гипотенузу IH прямоугольного треугольника IC_1H. Таким образом, E совпадает с проекцией C_1 на IH.

Точка *D*

Так как $PH \perp QH$ и $PD \perp DQ$, точка D лежит на окружности (PHQ) (рис.5).

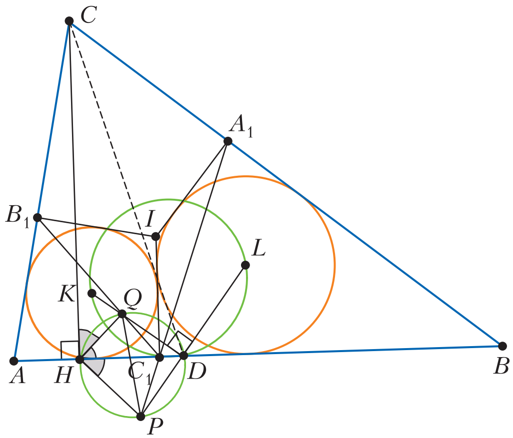


Рис. 5

Упражнение 4. Докажите, что E также лежит на окружности (PHQ).

Как мы знаем, треугольник PDQ – прямоугольный равнобедренный, D – середина дуги PQ, поэтому HD – биссектриса угла PHQ. Значит, прямая HD совпадает с AB, т.е. D лежит на AB.

Отметим, что D также лежит на окружности (KC_1L) с диаметром KL. Таким образом, D – точка, в которой окружность (KLC_1) вторично пересекает AB.

Известно (см., например, статью «Описанные четырехугольники и ломаные» в «Кванте» №1 за 2010 г., задача 3), что общая внутренняя касательная к окружностям, вписанным в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1, отличная от IC_1, проходит через C. Пусть эта касательная – CD', где D' – точка на прямой AB. Тогда C_1 и D' лежат на окружности с диаметром KL, поскольку $KD' \perp LD'$ (биссектрисы углов между прямыми CD' и AB) и, аналогично, $KC_1 \perp LC_1$ (биссектрисы углов между прямыми IC_1 и AB). Тогда D' совпадает с D.

Упражнения

5. Из полученных описаний точки D выведите, что прямые CD, IC_1 и KL пересекаются в одной точке.

Указание. Эти прямые – общие касательные и линия центров окружностей.

6. Докажите другим способом, используя теорему Дезарга, что а) D лежит на AB, б) E лежит на IH.

Указание. Можно применить теорему Дезарга к треугольникам а) KLC_1 и QPH, б) QYL и PXK.

Наконец, заметим еще один факт о точках P и Q: прямая PQ проходит через C. Доказать это можно, например следующим образом, используя гармонические четверки. Рассмотрим точки U и V пересечения CH с B_1C_1 и A_1C_1 соответственно (рис.6). Нетрудно доказать (например,

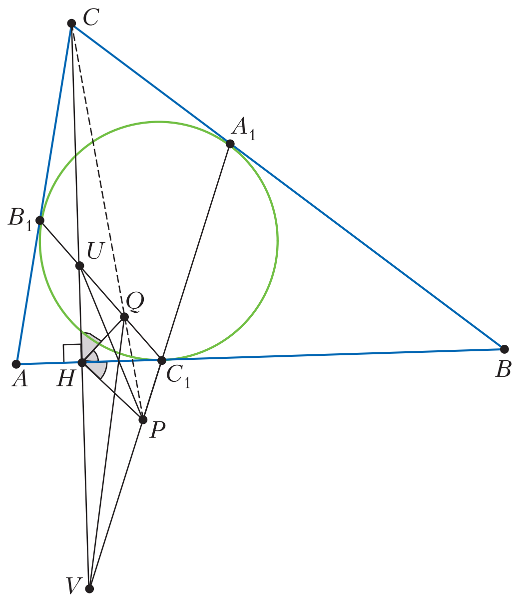


Рис. 6

пользуясь теоремой Чевы для треугольника C_1UV), что прямые UP, VQ и C_1H пересекаются в одной точке, следовательно, U, V, H и точка $PQ \cap CH$ образуют гармоническую четверку. Но прямые C_1B_1, C_1A_1, C_1H и C_1C также образуют гармоническую четверку, значит, точка пересечения $PQ \cap CH$ совпадает с C.

Упражнение 7. Докажите, что прямые AH и AD симметричны относительно AF.

Указание. Используйте упражнение 5.

Подведем итог, еще раз сформулировав основные свойства данной конфигурации.

1. Точки K, L, P, Q образуют ортоцентрическую четверку.

2. $KP = QL$; углы четырехугольника $KLPQ$ равны $45°$ или $180° + 45°$.

3. Точка $F = KL \cap PQ$ – середина отрезка XY.

4. Точка $E = LQ \cap KP$ – проекция C_1 на прямую IH.

5. Точка $D = KQ \cap LP$ лежит на прямой AB.

6. Прямая PQ проходит через C.

В завершение скажем, что на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова одиннадцатиклассник Владимир Петров из Санкт-Петербурга придумал другое решение исходной задачи, позволяющее обнаружить еще ряд свойств. Приведем план этого решения.

Так же, как и ранее, заметим перпендикулярное подобие четырехугольников $KILC_1$ и QC_1PH, откуда $PQ \perp KL$. Пусть E' – проекция C_1 на IH (по факту мы знаем, что $E' = E$), тогда E' – центр поворотной гомотетии (с углом поворота $90°$), переводящей $\overrightarrow{HC_1}$ в $\overrightarrow{C_1I}$, а значит, QC_1PH в $KILC_1$. Из поворотной гомотетии $E'P \perp E'L$. Теперь достаточно доказать, что $\angle KE'L = 90°$, т.е. точки K, C_1, E', L лежат на одной окружности.

При инверсии относительно вписанной окружности E' переходит в H. Отметим точку T на продолжении HC за точку C такую, что $CT = CB_1 = CA_1$. Тогда для завершения решения достаточно доказать, что образы K', L', H и C_1 точек K, L, E' и C_1 лежат на окружности с диаметром C_1T.

Упражнения

8. Докажите это.

9. Пусть окружность с центром C и радиусом $CA_1 = CB_1$ пересекает CH в точке G. Докажите, что F – середина GC_1.

Юбилей теоремы Райского

(Начало см. на с. 10)

отмеченных шестиугольников, а расстояние $d_2 = 1$ не реализуется на множествах A_5 и A_6 одинаково отмеченных треугольников.

Ожидаемые продвижения

Вопрос о том, можно ли аналогичным образом разбить плоскость на 4 или 5 множеств, остается открытым. Но недавнее доказательство [3] теоремы о том, что при раскраске плоскости в четыре цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1, дает основание надеяться, что для четырех цветов утверждение теоремы Райского тоже верно. Достаточно найти дистанционный граф (т.е. граф, вершины которого – точки на плоскости, а ребрами соединены только пары вершин на расстоянии 1) из n вершин, для которого, если выбрать не менее $n/4$ вершин, какая-то пара выбранных вершин обязательно будет соединена ребром. Предлагаю читателям убедиться, что если в качестве зонда выбрать такой граф, то конструкция Райского доказывает утверждение для четырех цветов, а математикам-программистам – заняться увлекательной задачей поиска подходящего графа. Сейчас известно много графов, доказывающих теорему о четырех цветах, но, возможно, не каждый граф, найденный для этой цели, обладает нужным нам свойством.

Литература

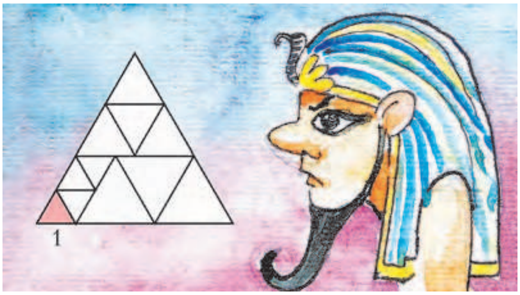
1. *Д.Е.Райский*. Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n+1$ часть. – Математические заметки, т.7, №3, 1970, с.319–323.

2. *Г.Хадвигер, Г.Дебруннер*. Комбинаторная геометрия плоскости. – М., 1965.

3. *А.Райгородский, В.Воронов, А.Савватеев*, Прорыв в задаче о раскраске плоскости. – «Квант», 2018, №11.

Задачи

1. Большой треугольник разделен на маленькие треугольники, как показано на рисунке . В каждом треугольни-



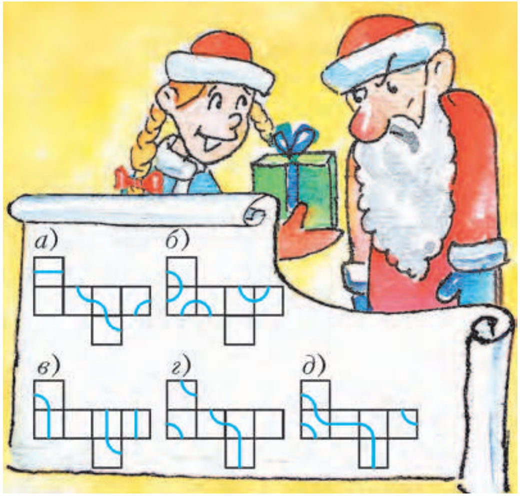
ке все стороны одинаковы. Сторона закрашенного равна 1. Чему равна сторона большого треугольника?

2. Эмиль и 8 его сестер сделали несколько фотографий. Каждый раз Эмиль фотографировался вместе с

пятью сестрами, и каждая сестра оказалась на двух или трех фотографиях. Сколько получилось фотографий?

Эти задачи предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру» в 2019 году.

3. Из какой развертки (*а–д*) получится кубик, на поверхности которого будет замкнутая линия?



4. В клетки квадрата Вася хочет вписать числа от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце все числа были различны. Квадрат разбит на три области, как показано на рисунке . Суммы чисел в областях должны быть равны. В левую нижнюю клетку Вася вписал число 2. Какое число он должен вписать в правую верхнюю клетку?

Иллюстрации Д.Гришуковой

Кофе с экспонентами

А.СТАСЕНКО

Говорят, когда знаменитого итальянского физика Энрико Ферми англичане спрашивали, почему он не добавляет сливки в кофе, он отвечал нечто вроде того: как вы не понимаете – ведь при этом кофе больше!

Но дело не только в количестве, но и в качестве – полноте экстракции, которую удается достичь за ограниченное время заварки t_*. А «экстракция» означает «вытяжка», «извлечение»... Тут само слово указывает, что нужно достать нечто полезное из какой-то потенциальной ямы. Энергетическую глубину этой ямы обозначим Q ($[Q]$ = Дж). Но кто занимается этим извлечением? Конечно, тепловая энергия – энергия хаотического движения микрочастиц, характерное значение которой равно kT.

И вот тут вспоминается одна из величайших идей термодинамики: концентрация частиц, извлеченных из потенциальной ямы их тепловым движением, зависит от отношения упомянутых характерных энергий Q и kT. И зависит не как-нибудь, а экспоненциально:

$$f(T) \sim e^{-\frac{Q}{kT}} \equiv \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right). \qquad (1)$$

Чтобы ярче осветить роль экспоненты, вместо e^x так и будем писать $\exp x$.

Эта идея связана с именами замечательных ученых – Гиббса, Больцмана, Аррениуса... (в частности, $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К называется постоянной Больцмана). Да и каждый школьник знает, что в изотермической атмосфере распределение концентрации молекул по высоте y оценивается формулой (1), где $Q = m_0 g y$ (m_0 – масса молекулы, g – ускорение свободного падения). Ученые различных разделов науки называют величину Q энергией активации химической реакции, теплотой испарения или сублимации... Качественно вид этой зависимости показан на рисунке 1.

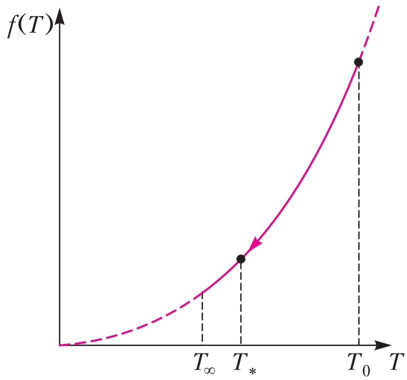


Рис. 1. С уменьшением температуры от начального значения T_0 до заданного T_* резко (экспоненциально) падает интенсивность экстракции; T_∞ – температура окружающей среды

Строго говоря, выражение (1) может быть дополнено еще предэкспоненциальным множителем – степенно́й зависимостью от температуры, которая гораздо «слабее» экспоненциальной, но это дополнение не существенно влияет на качественное описание рассматриваемого процесса.

Ясно, что значение экспоненты (1) тем больше, чем выше температура. Но ведь чашка с завариваемым молотым кофе постепенно остывает. Этот процесс относится к классу релаксационных, его интенсивность характеризуется так называемым временем релаксации τ. Опишем этот процесс подробнее.

Если масса остывающего тела m (кг), удельная теплоемкость c (Дж/(кг · К)), то изменение его температуры со временем за счет теплоотвода записывают в виде

$$d(mcT) = \alpha(T_\infty - T)\,dt,$$

где α – коэффициент теплообмена ($[\alpha]$ = Дж/с · К), T_∞ – температура окружающей среды. Предполагая, что m, c, α и T_∞ постоянны, можно переписать последнее уравнение так:

$$-\frac{d(T_\infty - T)}{dt} = \frac{T_\infty - T}{\tau},$$

где $\tau = \dfrac{mc}{\alpha}$ и есть время релаксации. Решение этого уравнения опять-таки содержит

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190704

экспоненту:

$$1-\frac{T_0-T(t)}{T_0-T_\infty}=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \qquad (2)$$

Качественный вид зависимости температуры от времени дан на рисунке 2.

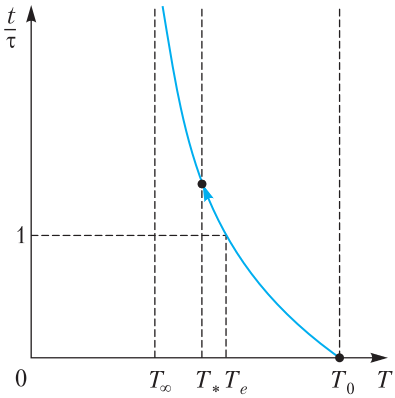


Рис. 2. Со временем экспоненциально уменьшается температура; T_e – значение температуры, достигаемое по истечении характерного времени $t = \tau$ (времени релаксации)

Что же получается: температура T, входящая в показатель экспоненты (1), сама экспоненциально зависит от времени! Подставив (2) в (1), найдем выражение для скорости экстракции кофе, пропорциональное функции

$$\exp\left[-\frac{Q}{kT_0}\frac{1+a}{1+a\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right]. \qquad (3)$$

где $a=\frac{T_0-T_\infty}{T_\infty}=\frac{\Delta T_0}{T_\infty}$ – начальный перегрев, отнесенный к температуре в окружающем пространстве.

Более того, если заваривать кофе «при нормальных условиях» (как говорят настоящие физики) – температуре $0\,^\circ\mathrm{C}$ и давлении в одну атмосферу, то отношение $a=\frac{\Delta T_0}{T_\infty}=\frac{100\text{ K}}{273{,}15\text{ K}}\approx\frac{1}{e}$ и выражение (3) можно назвать трижды экспоненциальным:

$$\exp\left[-\frac{Q}{kT_0}\frac{\exp 1+1}{\exp 1+\exp(-t/\tau)}\right], \qquad (4)$$

а число $e = \exp 1$ – Фундаментальной Кофейной Постоянной. До чего же вездесуще основание натуральных логарифмов!

На рисунке 3 представлена качественная зависимость (4) скорости экстракции кофе от времени – следствие подстановки данных рисунка 2 в рисунок 1. Результат экстракции

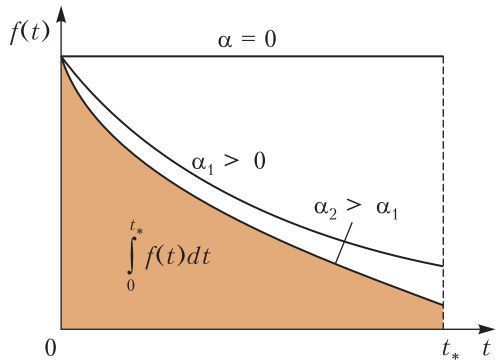


Рис. 3. Зависимость от времени скорости экстракции, учитывающая и ее падение с уменьшающейся температурой (см. рис. 1), и падение самой температуры со временем (см. рис. 2); α – коэффициент теплообмена с окружающей средой. Интеграл по времени от $t = 0$ до заданного $t = t_*$ – количество экстрагированного вещества

– это интеграл за все отведенное для заварки время t_*, т.е. закрашенная площадь под кривой. Конечно, этот результат наиболее впечатляет, если $\alpha = 0$ (нет теплоотдачи в окружающее пространство). Не случайно джезву с кофе ставят на раскаленный песок и даже некоторое время кипятят содержимое («варят»).

Вероятно, вдумчивый читатель уже понял, что не следует оставлять ложку в заварной чашке, класть на горку молотого кофе лепешку меда или сыпать сахар, которые «оттягивают» на себя часть теплоты кипятка, увеличивая теплоотдачу ($\alpha_2 > \alpha_1$), и что сливки нужно добавлять (если, конечно, нужно) при $t \ge t_*$, а не раньше. Может быть, этого не знала одна из героинь А.П.Чехова, которая «...кофий сегодня пила, и без всякого удовольствия». Но Вы-то всё поняли?

Приятного аппетита!

Многократная лемма Холла в задачах про мудрецов

М.ШЕВЦОВА

Введение

Задачи, связанные с кооперативными алгоритмами (проще говоря, задачи о мудрецах) традиционно считаются довольно трудными. Дело в том, что зачастую придумать соответствующую стратегию действий, гарантирующую мудрецам успех (например, при отгадывании цветов колпаков, которые на них надеты), весьма непросто; нет каких-то общих соображений, позволяющих строить нужные стратегии. Конечно, есть стандартные идеи нумерации, кодирования и т.д., но как именно занумеровать, закодировать и передать тем самым нужную информацию, приходится каждый раз придумывать заново.

В этой статье мы расскажем об интересном подходе к подобным задачам, при котором придумывать подобные стратегии действий не нужно. Это кажется невероятным, но есть способ доказать существование стратегии, не предъявляя ее явно! Те же идеи применимы к задачам о фокусниках: можно доказать возможность фокуса, не раскрывая способ его проведения! Как это можно сделать, мы узнаем, познакомившись с классическим комбинаторным результатом: леммой Холла.

Обычная и многократная леммы Холла

Начнем с формулировки классической леммы Холла. Представим себе, что вечером на танцы пришли юноши и девушки. Некоторые из юношей и девушек знакомы друг с другом. Как это часто бывает, каждый юноша хочет потанцевать только со знакомой ему девушкой. Спрашивается, смогут ли все юноши пригласить на танец знакомых им девушек? Оказывается, что существует простое необходимое и достаточное условие, при выполнении которого каждому юноше найдется пара (хотя, возможно, какие-то девушки при этом останутся без пары). В этом и заключается суть леммы Холла.

Теорема 1. Лемма Холла. *Рассмотрим двудольный граф, где вершины первой доли – это юноши, а вершины второй доли – девушки. Соединим ребром юношу и девушку, если они знают друг друга. Предположим, что любые k юношей знают не меньше k девушек, для любого k от 1 до общего количества юношей. Тогда все юноши смогут пригласить на танец знакомых им девушек.*

Есть много разных способов доказать лемму Холла. Мы приведем классическое доказательство, которое еще называется методом чередующихся цепей. Другие доказательства можно найти в статье [1].

Доказательство. Предположим противное: пусть все юноши не смогут танцевать со знакомыми им девушками. Рассмотрим наибольшее количество танцующих пар, которое можно образовать. Далее рассмотрим юношу, не вошедшего в эти пары. Он начинает организовывать свое тайное общество. В первый день в этом обществе только он. Каждый следующий день каждый юноша, входящий в это общество, приглашает туда всех знакомых с ним девушек, а они приводят туда своих партнеров по танцу (если таковые есть).

Упражнения

1. Докажите, что рано или поздно в общество придет девушка, у которой не было пары.

2. Докажите, что в таком случае можно разбить юношей и девушек на пары так, чтобы количество пар увеличилось.

3. Выведите отсюда лемму Холла.

Суть леммы Холла заключается в установлении соответствий между двумя типами объектов (юноши и девушки) при выполнении некоторых условий связи между этими объектами. В комбинаторике существует не так уж много подобных утверждений, и лемма Холла – возможно, наиболее мощное из них. Чтобы потренироваться ее применять, попробуйте решить следующие задачи.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190705

Упражнения

4. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

5. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

Указание. Рассмотрите двудольный граф, вершины которого – это строки (первая доля) и столбцы (вторая доля) данной таблицы.

На практике мы будем использовать лемму Холла в очень конкретной ситуации, соответствующей так называемому регулярному двудольному графу. Сформулируем отдельно соответствующее утверждение, которое и будет ключевым при решении задач с мудрецами.

Теорема 2. Лемма Холла для регулярного графа. *Предположим, что для некоторого* $l > 0$ *каждый юноша знает ровно* l *девушек и каждая девушка знает ровно* l *юношей. Тогда все юноши смогут пригласить на танец знакомых им девушек.*

В терминах графов это утверждение звучит так: если в двудольном графе степени всех вершин одинаковы, то вершинам из одной доли можно сопоставить ровно по одной смежной вершине из другой доли.

Доказательство. Рассмотрим произвольных k юношей и докажем, что они знают не менее k девушек (в таком случае наше утверждение следует из леммы Холла). Предположим, что k юношей знают x девушек. Посчитаем количество ребер, исходящих из этих k юношей, и количество ребер, входящих в знакомых им x девушек. Ясно, что ребер, выходящих из юношей, не больше, чем ребер, входящих в девушек. Тогда $kl \le xl$, откуда $x \ge k$, что и требовалось доказать.

Упражнение 6. В частном охранном предприятии работают n охранников. Ежедневно им нужно распределяться по n объектам. По прошествии k дней оказалось, что никто дважды на одном объекте не дежурил. Докажите, что можно составить расписание на оставшиеся $n - k$ дней так, чтобы все охранники подежурили по одному разу на всех объектах.

В дальнейшем нам будут важны идеи, связанные с применением леммы Холла для решения задач про фокусников. Мы приведем лишь одну задачу на эту тему, отсылая заинтересованного читателя к статье [2].

Задача 1 (Всероссийская олимпиада по математике, 2007). *Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?*

Ответ: 101.

Решение. Перед тем, как переходить к решению, попробуем понять, как можно формализовать отгадывание фокусником начальной расстановки цифр. У нас есть множество начальных наборов из N цифр. Один из этих наборов пишет зритель – его и должен отгадать фокусник. Эти наборы составят первую долю в нашем двудольном графе. Сам фокусник при этом видит лишь часть этого набора с двумя закрытыми помощником цифрами. Эти наборы составят вершины второй доли двудольного графа.

Это простое соображение, позволяющее ввести в нашу задачу двудольный граф, подсказывает оценку для числа N. Рассмотрим все вершины второй доли. Этих вершин в точности $(N-1)\cdot 10^{N-2}$. С другой стороны, вершин в первой доле ровно 10^N. Ясно, что если вершин во второй доле меньше, чем в первой, то фокус не удастся. Действительно, в таком случае найдутся два стартовых набора из N цифр, которые после закрытия цифр дадут один и тот же набор, который увидит фокусник, поэтому угадать нужный набор он не сможет. Отсюда получаем ограничение на N:

$$(N-1)\cdot 10^{N-2} \ge 10^N,$$

откуда $N \ge 101$.

Осталось привести алгоритм действий фокусника, чтобы он мог угадать закрытые цифры в последовательности длины $N_0 = 101$. Вот здесь мы и применим лемму Холла.

Что нам нужно сделать? У нас есть вершины второй доли, которые видит фокусник, и вершины первой доли, которые загадал зритель. Нам нужно установить *биекцию*, т.е.

взаимно-однозначное соответствие, между этими наборами. Более того, как мы установим биекцию, совершенно не важно! Важно лишь наличие такой биекции! Таким образом, можно доказать, что у фокусника получится отгадать цифры, *не раскрывая секрет фокуса*, т.е. не предъявляя явно способ отгадывания! В этом и заключается центральная идея этой статьи: доказывать существование биекций (или других, более сложных отображений), не строя их явно.

Покажем, как это можно сделать. Рассмотрим уже знакомый нам двудольный граф, в котором одна доля – это последовательности, которые может увидеть фокусник, а другая доля – это наборы, которые мог загадать зритель. Соединим две вершины в разных долях, если, закрыв в первой вершине какие-то две соседние цифры, можно получить вершину из второй доли. Заметим, что получившийся граф является регулярным. Действительно, при $N = 101$ каждой последовательности из N цифр соответствует $N - 1 = 100$ способов закрыть в ней две соседние цифры. С другой стороны, для данной последовательности с двумя закрытыми цифрами имеется также $100 = 10 \cdot 10$ способов эти цифры восстановить. Значит, граф удовлетворяет условиям леммы Холла, и мы можем поставить в соответствие каждому набору цифр, загаданному зрителем, ровно один набор цифр, который увидит фокусник.

Таким образом, фокусник и помощник сначала должны выучить все соответствия между вершинами первой и второй долей (а всего этих соответствий ровно 10^{101} – столько, сколько вершин в любой из долей). Когда зритель напишет свою последовательность цифр, помощник вспоминает, какая вершина второй доли соответствует той, которая получилась у зрителя, и закрывает нужные цифры. Затем фокусник, входя в аудиторию, видит вершину второй доли и вспоминает, какой вершине первой доли она соответствует. Это позволяет ему назвать закрытые цифры.

Теперь сформулируем несколько более общее утверждение, которое мы будем называть *многократной леммой Холла*. Именно это утверждение будет для нас ключевым.

Опять рассмотрим юношей и девушек, пришедших на танцы, которые должны разбиться на пары так, чтобы в каждой паре партнеры знали друг друга. Но теперь усложним задачу. Предположим, что юноши должны станцевать ровно m танцев каждый и по-прежнему танцевать они могут только со знакомыми им девушками. Однако девушки при этом не могут танцевать больше одного танца (в том числе и с тем же самым партнером). Оказывается, что гарантировать существование такого разбиения на группы «один юноша и m девушек» можно с помощью условия, очень похожего на условие из обычной леммы Холла.

Теорема 3. Многократная лемма Холла. *Рассмотрим двудольный граф, где вершины первой доли – это юноши, а вершины второй доли – девушки. Соединим ребром юношу и девушку, если они знают друг друга. Каждый юноша хочет танцевать с m знакомыми девушками, причем каждая девушка не может танцевать два танца (в том числе с одним юношей). Докажите, что если при любом k для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km, то каждый юноша сможет станцевать m танцев.*

Доказательство. Клонируем каждого юношу m раз, и пусть каждый клон знает тех же девушек, что и изначальный юноша. Теперь рассмотрим двудольный граф, где вершины первой доли – это все клоны всех юношей, а вершины второй доли – это девушки. Покажем, что в полученном графе выполняется условие обычной леммы Холла, т.е. можно всех клонов юношей поставить в пары с различными знакомыми им девушками. Возьмем s клонов. Заметим, что они знают тех же девушек, что и изначальные юноши, клонами которых они являются. А этих юношей было хотя бы $\frac{s}{m}$. По условию многократной леммы Холла, эти юноши знали хотя бы $\frac{s}{m} \cdot m = s$ девушек. Значит, эти s клонов знают хотя бы s девушек, т.е. условие леммы Холла выполняется.

Пусть теперь каждый юноша будет танцевать с теми девушками, которые были в парах с его клонами. Легко видеть, что данное разбиение является искомым.

Как и в случае с обычной леммой Холла, нам будет удобно использовать многократную лемму Холла в следующем частном случае.

Теорема 4. Многократная лемма Холла в регулярном случае. *Рассмотрим двудольный граф, где вершины первой доли – это юноши, а вершины второй доли – девушки. Соединим ребром юношу и девушку, если они знают друг друга. Предположим, что степени всех вершин, соответствующих юношам, одинаковы и равны m и степени всех вершин, соответствующих девушкам, также одинаковы и равны d. Докажите, что каждый юноша может станцевать с $\left[\frac{m}{d}\right]$ знакомыми ему девушками, причем каждая девушка при этом будет танцевать не более одного раза.*

Упражнение 7. Докажите эту теорему.

Мудрецы и многократная лемма Холла

Итак, мы выяснили, как доказывать возможность проведения фокусов с помощью леммы Холла: ключевым является соображение о возможности установления *инъекции* между множеством стартовых состояний, которые видит фокусник, и множеством конечных (загаданных зрителем) состояний, которые нужно отгадать. Инъекция – это такое соответствие, что разным стартовым состояниям сопоставлены разные конечные. Однако в задачах с мудрецами и кооперативными стратегиями ситуация более сложная. Во-первых, в подавляющем большинстве таких задач мудрецы могут (и должны) ошибаться, т.е. безошибочного отгадывания просто не существует. Во-вторых, возможность наличия ошибок делает неоднозначным процесс декодирования. Иначе говоря, конечная ситуация, которую можно получить из стартовой, не однозначна. Но у нас на такой случай как раз есть многократная лемма Холла!

Ключевое соображение, позволяющее заставить многократную лемму Холла работать в задачах с мудрецами, заключается в следующем. Предположим, что мудрецам надели колпаки разных цветов и им нужно угадать цвет своего колпака, видя перед собой только колпаки других мудрецов. Занумеруем мудрецов и будем надевать на них колпаки всеми возможными способами. Вооружимся фотоаппаратом и начнем их фотографировать. Будем делать фотографию каждой ситуации сверху, чтобы были видны все шапки, а затем передадим фотоаппарат каждому из мудрецов, чтобы он сам сделал фотографии всех остальных мудрецов, которых он видит со своего места.

Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины первой доли – это все фотографии, сделанные нами (по факту просто всевозможные начальные расположения колпаков на мудрецах), а вторая доля – это все фотографии, сделанные всеми мудрецами. Далее, соединим вершину v из второй доли с вершиной u из первой, если фотография v сделана одним из мудрецов в ситуации u. Что должны сделать мудрецы? Для каждой сделанной им фотографии мудрец должен постараться восстановить цвет своего колпака. Разумеется, в некоторых случаях мудрецы ошибутся. Нам нужно найти тех мудрецов, которые гарантированно ответят верно. Точнее говоря, следует равномерно распределить ответы всех мудрецов по фотографиям u, чтобы на каждую фотографию приходилось достаточное количество правильных ответов.

Для этого воспользуемся многократной леммой Холла. Мудрецы, чьи точки зрения выбраны в соответствии с данной общей фотографией u, будут отвечать исходя из предположения, что они находятся в этой ситуации, а значит, правильно. Таким образом, если каждой фотографии u поставлено в соответствие хотя бы m фотографий $u_1, \ldots$ $\ldots, u_m$, сделанных мудрецами, то в каждой ситуации правильно ответят хотя бы m мудрецов. Число m мы определим из параметров задачи.

Посмотрим, как эта схема работает на практике.

Задача 2 (Московская математическая олимпиада, 2010). *Команда из n мудрецов участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все мудрецы одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких ее участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наме-*

тив план действий каждого ее члена, может гарантированно получить?

Ответ: $[n/k]$.

Решение. Рассмотрим описанный выше граф, в котором вершины первой доли – это всевозможные начальные позиции команды мудрецов (т.е. всевозможные варианты надеть на них шапки k цветов), а вершины второй доли – это фотографии, сделанные каждым из мудрецов в каждой возможной стартовой ситуации. Ясно, что в первой доле k^n, а во второй nk^{n-1} вершин.

Каждая вершина из первой доли соединена с n вершинами из второй доли, так как такую рассадку может видеть каждый из n мудрецов. С другой стороны, каждая вершина из второй доли соединена с k вершинами из первой доли, так как у каждого мудреца есть k вариантов цвета своего шарфа.

Теперь построим алгоритм действий для мудрецов, при котором они гарантированно наберут $[n/k]$ очков. Для этого достаточно доказать, что можно сопоставить каждой вершине из первой доли $[n/k]$ вершин из второй доли.

Воспользуемся многократной леммой Холла в регулярном случае. Применим эту лемму, сопоставив каждой начальной расстановке u мудрецов из первой доли $m = [n/k]$ вершин из второй доли. Именно эти мудрецы ответят правильно при начальной расстановке u. Таким образом, мудрецы могут гарантированно набрать $[n/k]$ очков.

Осталось доказать, что больше $[n/k]$ очков гарантировать нельзя. На самом деле это также объясняется возможностью применения леммы Холла: если бы можно было сопоставить каждой вершине первой доли больше $[n/k]$ вершин из второй доли, то во второй доле нам просто не хватило бы вершин. Формально это можно доказать так. Предположим, что есть такая стратегия за мудрецов, которая гарантирует хотя бы $[n/k]+1$ очков. Заметим, что ответ каждого мудреца однозначно определяется цветом шапок у остальных мудрецов. Поставим в соответствие каждой фотографии из первой доли точки зрения мудрецов, которые в данной ситуации отвечают правильно. Если для каждой раскраски их больше $[n/k]$, то

$$nk^{n-1} \geq k^n\left([n/k]+1\right) > k^n[n/k] = nk^{n-1}$$

– противоречие. Таким образом, максимальное количество очков, набранных мудрецами, равно $[n/k]$.

Есть класс задач про мудрецов, где требуется найти наибольшую вероятность гарантированно угадать цвет своего колпака. Рассмотрим, например, следующие модификации предыдущей задачи.

Упражнения

8. В условиях предыдущей задачи будем считать, что $n < k$. С какой максимальной вероятностью хотя бы один из мудрецов угадает цвет своей шапки?

9. В этот раз мудрецы пишут предполагаемый цвет своего колпака r раз, при этом они не видят, что написали их соседи. Какую максимальную вероятность того, что хотя бы один из них угадает за эти r попыток, могут гарантировать мудрецы?

Задача 3 (Олимпиада имени Леонарда Эйлера, 2013). *99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным – другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого – 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?*

Ответ: да.

Решение. Понятно, что если мудрец видит 50 колпаков одного цвета, то у него колпак цвета, отличного от того, которого 50, т.е. он знает свой колпак. Значит, 49 мудрецов знают цвет своего колпака и ответят правильно. Оставшихся 50 мудрецов, которые видят 49 колпаков одного цвета и 49 другого, будем называть *невезучими*.

Добьемся того, чтобы из невезучих мудрецов 25 каждый раз угадывали колпак правильно.

Рассмотрим описанный выше граф, в котором вершины первой доли – это всевозможные позиции команды мудрецов, а вершины второй доли – это фотографии, сделанные каждым из невезучих мудрецов в каждой возможной стартовой ситуации. Каждая вершина из первой доли соединена с 50 из

(Продолжение см. на с. 34)

Почти во всех случаях, встречающихся в практической механике, работа, необходимая для воспроизведения движения, пропорциональна... энергии произведенного работою движения...

Томас Юнг

...никакая машина не может извлечь из данного количества введенной в нее теплоты больше работы, чем машина, удовлетворяющая условиям обратимости...

Уильям Томсон (Кельвин)

Трехфазный ток стал современным культурным фактором; благотворное влияние, которое оказывает электротехника на жизнь западных народов, не замедлит обнаружиться и у нас на Руси.

Михаил Доливо-Добровольский

Почти вся энергия Солнца пропадает в настоящее время бесполезно для человечества... Что странного в идее воспользоваться этой энергией?!

Константин Циолковский

...непрерывное излучение энергии от <радио> активных тел... указывает на громадные запасы скрытой энергии, находящейся в самих радиоатомах.

Эрнест Резерфорд

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

Даже поверхностно брошенный на эпиграфы взгляд заметит ключевое понятие, указывающее на тему этого выпуска, – ЭНЕРГЕТИКА. Действительно, как можно обойтись в нашей инженерной серии выпусков без обсуждения возможностей и вклада науки в получение, хранение, трансформацию, передачу и использование различных видов энергии? Физика, несомненно, сыграла в этом решающую роль, и каждый раздел школьного ее курса содержит энергетические вопросы. Важность их освоения подчеркивает такой прогноз: развитие экономики, необходимое для сохранения нынешнего уровня жизни до 2050 года, с учетом роста населения, потребует многократного увеличения глобального производства энергии, поиска новых, нетрадиционных способов ее получения. Это – серьезный вызов, формирующий целый ряд физико-технических проблем.

Что ж, давайте *энергично*, не откладывая, возьмемся за их решение!

Вопросы и задачи

1. Скорость выходящей из гидротурбины воды меньше, чем входящей. С чем это связано?

2. Почему секциям батарей центрального отопления придают ребристую форму, а не круглую, как у обычных труб?

3. Отчего температура выхлопных газов на выходе из глушителя автомобиля в несколько раз ниже, чем в цилиндре двигателя?

4. Чем объяснить, что двигатели внутреннего сгорания имеют более высокий КПД, чем паровые машины?

5. На что расходуется энергия, потребляемая домашним холодильником?

6. К какому типу двигателей следует отнести огнестрельное оружие?

7. Что является нагревателем, рабочим телом и холодильником в ракетном двигателе?

8. Включенный в сеть электрический утюг непрерывно выделяет тепло. Почему его обмотка не перегорает?

9. В момент включения в сеть энергоемких приборов (электрочайника, электроутюга, электрокамина и т.д.) яркость горящих в квартире лампочек заметно падает, но вскоре восстанавливается. Как это объяснить?

10. Две электрические лампы накаливания мощностью 25 и 200 Вт включены в цепь последовательно. Какая из них будет гореть ярче при замыкании цепи?

11. Каким кипятильником можно вскипятить воду в кастрюле с меньшей затратой энергии: мощностью 600 Вт или 1 кВт?

12. Электропроводка внутри квартир покрыта слоем изоляции, а высоковольтные линии электропередачи – нет. Почему?

13. Почему необходимо преобразование напряжения трансформаторами в высоковольтное и обратно при передаче энергии на дальние расстояния?

14. Как изменится сила тока в первичной и вторичной цепях работающего трансформатора, если его железный сердечник разомкнуть?

15. Почему у электродвигателей часто перегорает обмотка, если внезапно остановить ротор?

16. В каком случае легче вращать ротор электрогенератора: когда внешняя цепь разомкнута или когда замкнута?

17. Верно ли утверждение, что в ветряных двигателях используется преобразованная солнечная энергия?

18. Почему в космосе КПД солнечных батарей выше, чем на земле?

19. В какой вид преобразуется максимальная доля высвобождающейся энергии при делении ядер урана?

Микроопыт

Наверняка вы не раз наблюдали за водопроводными насадками, с помощью которых орошают парковые лужайки, а возможно, и сами использовали их на дачных участках. В каких энергетических установках применяется такой же принцип действия?

Любопытно, что…

…стремление поставить на службу силы природы уже за тысячи лет до новой эры привело к постройке водяных и ветряных мельниц – прообразов современных турбин.

…древнегреческий ученый и инженер Герон Александрийский изобрел и построил эолипил – первую действующую паровую машину.

…открытие в 1643 году итальянцем Эванджелиста Торричелли атмосферного давления повлекло за собой изобретение воздушных насосов и пароатмосферных установок. В 1675 году голландец Христиан Гюйгенс продемонстрировал машину, работающую силой взрыва пороха, а сотрудничающий с ним француз Дени Папен в 1690 году первым использовал пар для поднятия поршня и описал замкнутый термодинамический цикл парового двигателя.

…питомцы парижской Политехнической школы Гаспар-Гюстав Кориолис и Жан-Виктор Понселе, стремясь применить теоретические методы к задачам прикладного характера, четко определили понятие работы, а также ввели оценку потерь энергии из-за наличия трения.

…первый в мире электродвигатель был построен Майклом Фарадеем в 1821 году, а десятилетием позднее им же был открыт закон электромагнитной индукции, легший в основу современной электроэнергетики.

…один из самых выдающихся изобретателей в области электротехники Никола Тесла, разработавший ряд конструкций электродвигателей, электрогенераторов и трансформаторов, прославился еще и постройкой Ниагарской гидроэлектростанции.

…недавно японские инженеры пучком микроволнового излучения передали 2 киловатта мощности на 55 метров. Это очередной шаг к реализации геостационарной электростанции, когда на высоте 36 тысяч километров спутники «собирают» и транслируют на Землю солнечную энергию.

…разработана методика напыления на любые гибкие материалы – ткани, пластик и даже туалетную бумагу – солнечных фотоэлементов, вырабатывающих заметное напряжение без утраты КПД.

…студенту из Германии удалось создать «электромагнитный комбайн», улавливающий энергию буквально из воздуха, а именно – фоновых полей мобильной связи, сигналов Wi-Fi и других бытовых источников, затем заряжая ею батарейки определенного типа.

Что читать в «Кванте» об энергетике

(публикации последних лет)

1. «Великая и ужасная ядерная энергия» – 2015, №3, с.11;

2. «Термодинамика и мотоЦИКЛ» – 2017, №2, с.25;

3. «Трансформатор Тесла – что это такое» – 2017, №10, с.31;

4. «Почему ЛЭП гудят на частоте 100 Гц?» – 2018, №2, с.38;

5. «Что трансформирует трансформатор?» – 2018, №3, с.36;

6. «ИТЭР – земная звезда» – 2018, №8, с.2;

7. «ИТЭР – сегодня» – 2018, №10, с.2.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 27)

второй, так как невезучих мудрецов в каждой ситуации 50. С другой стороны, каждая вершина из второй доли соединена с двумя вершинами из первой, так как у невезучего мудреца есть два варианта, какого цвета у него колпак. Теперь достаточно доказать, что можно сопоставить каждой вершине из первой доли 25 вершин из второй доли.

Для этого опять воспользуемся многократной леммой Холла. К каждой начальной расстановке (назовем ее u) мудрецов из первой доли будут сопоставлены 25 вершин из второй доли. Именно эти мудрецы ответят правильно при начальной расстановке u. Таким образом мудрецы гарантированно смогут угадать 25 + 49 = 74 раза.

Задача 4 (Математический праздник, 2011). *Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Смогут ли гномы заранее договориться действовать так, чтобы спастись?*

Решение. Рассмотрим описанный выше граф, где вершины первой доли – это всевозможные позиции команды гномов, а вершины второй доли – это фотографии, сделанные каждым из гномов в каждой возможной стартовой ситуации. Каждая вершина из первой доли соединена с 6 вершинами из второй, так как гномов всего 6. Далее, каждая вершина из второй доли соединена с 2 вершинами из первой, так как всего цветов 7, а один гном видит 5 из них, значит, его колпак одного из двух оставшихся цветов. Теперь составим алгоритм действий гномов, при котором они гарантированно смогут угадать 3 раза. Для этого достаточно доказать, что можно сопоставить каждой вершине из первой доли 3 из второй. Воспользуемся многократной леммой Холла: каждой начальной расстановке гномов u из первой доли сопоставим 3 вершины из второй доли. Именно эти гномы ответят правильно при начальной расстановке u. Таким образом гномы могут гарантированно угадать 3 раза и спастись.

Рассмотрим обобщение двух предыдущих задач.

Задача 5. *Есть колпаки k цветов, каждого по m штук. Один колпак убирают, а остальные $mk - 1$ надевают на мудрецов. После этого мудрецы называют цвет своего колпака. Какое максимальное количество правильных ответов могут гарантировать мудрецы?*

Ответ: $\left[\frac{m(k-1)}{2}\right] + m - 1$.

Решение. Понятно, что если мудрец видит ровно $m - 2$ колпака одного из цветов, то у него колпак этого цвета и он ответит правильно. Значит, $m - 1$ правильный ответ мудрецы дать смогут.

Если же мудрец такого цвета не видит, то на нем колпак одного из цветов, которых по m штук. Такой мудрец видит $k - 2$ группы колпаков одного цвета по m колпаков и 2 группы по $m - 1$ колпаку. Тем самым, у этого мудреца 2 варианта, в каком он колпаке. Рассмотрим двудольный граф, где одна доля – фотографии, сделанные такими сомневающимися мудрецами, а другая – раскраски. Соединим каждую раскраску с сомневающимися в ней мудрецами. Тогда степень каждой раскраски равна $m(k - 1)$. По многократной лемме Холла мы можем сопоставить каждой раскраске по $\left[\frac{m(k-1)}{2}\right]$ мудрецов. Таким образом, угадают в каждой раскраске по $\left[\frac{m(k-1)}{2}\right] + m - 1$ раз.

Упражнение 10. Докажите, что больше $\left[\frac{m(k-1)}{2}\right] + m - 1$ мудрецов не смогут отгадать цвет своего колпака.

Автор благодарит П.В. Бибикова за помощь в подготовке статьи и внимание к работе.

Литература

1. *А.Романов*. Задачи и теоремы о представителях. – «Квант», 2015, №1.

2. *А. Эвнин*. Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера. – «Квант», 2019, №2.

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗФМШ НГУ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗФМШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускника Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам ЗФМШ в форме факультативных занятий с группами учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗФМШ приглашаются в Летнюю школу СУНЦ НГУ, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа. По результатам обучения в Летней школе проводится зачисление в СУНЦ НГУ.

В ЗФМШ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Всю подробную информацию можно найти на сайте ЗФМШ http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул.Пирогова, д.11/1, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-40-66

E-mail: zfmsh@yandex.ru

Первые задания на 2019/20 учебный год

Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором Вы будете учиться в Заочной школе.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

5 класс

1. Найдите наибольшую дробь со знаменателем 17, которая меньше 0,75.

2. Произведение двух чисел на 142 больше их суммы, а сумма этих чисел на 24 больше их разности. Найдите эти числа.

3. Найдите, сколько всего трехзначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра равна нулю.

4. Когда из правого кармана куртки переложили в левый карман 20 руб., то в левом кармане стало в 3 раза больше денег, чем оказалось в правом кармане. Когда после этого из левого кармана переложили в правый карман 30 руб., то в правом кармане стало в 2 раза больше денег, чем оказалось в левом кармане. Сколько всего денег было в карманах куртки?

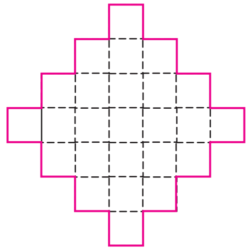


Рис. 1

5. Найдите, из какого количества клеточек состоит фигура, которая похожа на фигуру, изображенную на рисунке 1, но в самом длинном горизонтальном ряду содержит не 7, а 21 клеточку.

6. Двум школьникам дали задание вычислить сумму квадратов трех подряд идущих натуральных чисел. У одного из них получилось 434, а у другого 508, но один из них допустил ошибку в вычислениях. Определите, какой из результатов неверный.

6 класс

1. Обычно сотрудник банка едет от дома до работы 30 мин с некоторой постоянной скоростью. Однажды первую половину пути он проехал со скоростью на 20% меньше первоначальной скорости движения. Во сколько раз он должен увеличить новую скорость движения, чтобы добраться до работы также за 30 мин?

2. Найдите наименьшую дробь со знаменателем 53, которая больше числа $\frac{4}{7}$.

3. Найдите, сколько всего трехзначных чисел, в записи которых не встречается цифра 3.

4. Когда из правого кармана куртки переложили в левый карман 40 руб., то в левом кармане стало в 1,5 раза больше денег, чем оказалось в левом кармане. Когда после этого из левого кармана переложили в правый карман 60 руб., то в правом кармане стало в 2 раза больше денег, чем оказалось в левом кармане. Сколько всего денег было в карманах этой куртки?

5. Найдите, из какого количества клеточек состоит фигура, которая похожа на фигуру, изображенную на рисунке 1, но в самом длинном горизонтальном ряду содержит не 7, а 63 клеточки.

6. Двум школьникам дали задание вычислить сумму квадратов трех подряд идущих натуральных чисел. У одного из них получилось 1085, а у другого 1453. Определите, какой из результатов неверный.

7 класс

1. Определите, какое число нужно одновременно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{379}{652}$, чтобы получившаяся дробь стала равной дроби $\frac{5}{8}$.

2. Обычно сотрудник банка едет от дома до работы 40 мин с некоторой постоянной скоростью. Однажды первую половину пути он проехал с меньшей скоростью, а вторую половину пути проехал со скоростью на 20% больше первоначальной скорости движения. Определите, во сколько раз скорость движения на второй половине пути больше скорости движения на первой половине пути.

3. К заданному прямоугольнику с целыми сторонами можно добавить прямоугольник площади 12 $см^2$ и получить квадрат, а также от заданного прямоугольника можно отрезать прямоугольник площади 11 $см^2$ и тоже получить квадрат. Найдите стороны заданного прямоугольника.

4. Определите количество нулей, стоящих в конце записи числа, которое получится при выполнении всех действий в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$.

5. Две окружности S_1 и S_2 одинакового радиуса касаются в точке A. Третья окружность S_3 такого же радиуса проходит через точку A и вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках B и C. Докажите, что BC – диаметр окружности S_3.

6. Двум школьникам дали задание вычислить сумму квадратов трех подряд идущих натуральных чисел. У одного из них получилось 3073, а у другого 2525, но один из них допустил ошибку в вычислениях. Определите, какой из результатов верный.

8 класс

1. Найдите наибольшую дробь со знаменателем 2019, которая меньше числа $\frac{5}{17}$.

2. Проехав три четверти пути от пункта A до пункта B с некоторой постоянной скоростью, водитель увеличил скорость на 10 км/ч и проехал весь путь за 1,3 ч. Если бы водитель на последней четверти пути уменьшил скорость на 10 км/ч, то весь путь он проехал бы за $1\frac{3}{8}$ ч. Найдите длину пути от пункта A до пункта B.

3. К заданному прямоугольнику с целыми сторонами можно добавить прямоугольник площади 30 $см^2$ и получить квадрат, а также от заданного прямоугольника можно отрезать прямоугольник площади 26 $см^2$ и тоже получить квадрат. Найдите стороны заданного прямоугольника.

4. При каждом n найдите сумму

$$4n\cdot(4n-1)-(4n-2)\cdot(4n-3)+ (4n-4)\cdot(4n-5)-\ldots+4\cdot 3-2\cdot 1.$$

5. В квадрате $ABCD$ окружность, проходящая через вершину D и точку пересечения диагоналей, пересекает сторону AD в точке L и сторону DC в точке K. Докажите, что $DL = CK$.

6. Двум школьникам дали задание вычислить сумму квадратов трех подряд идущих натуральных чисел. У одного из них получилось 1016173, а у другого 1124309. Определите, какой из результатов верный.

9 класс

1. Решите задачу 2 для 8 класса.

2. Найдите все положительные десятичные дроби, при вычеркивании у которых цифры разряда десятых получается дробь, в два раза большая исходной дроби.

3. При каждом n найдите сумму

$$2n\cdot(4n-1)-(2n-1)\cdot(4n-3)+(2n-2)\cdot(4n-5)-\ldots+2\cdot 3-1\cdot 1.$$

4. На плоскости задан правильный 60-угольник. Сколько еще можно указать правильных многоугольников, выбирая вершины из числа вершин заданного многоугольника?

5. В квадрате $ABCD$ точки K на стороне BC и L на стороне CD выбраны так, что угол KAL равен $45°$. Докажите, что два из трех оснований высот треугольника AKL расположены на диагонали BD.

6. Лист бумаги разрезают либо на 4, либо на 7 частей. Затем некоторые из частей также разрезают либо на 4, либо на 7 частей и так проделывают несколько раз. В некоторый момент подсчитали все части и получили число 2019. Докажите, что при подсчете была допущена ошибка.

10 класс

1. Найдите значение выражения

$$999 \cdot 997 - 995 \cdot 993 + 991 \cdot 989 - \ldots$$
$$\ldots + 7 \cdot 5 - 3 \cdot 1 .$$

2. На плоскости задан правильный 120-угольник. Сколько еще можно указать правильных многоугольников, выбирая вершины из числа вершин заданного многоугольника?

3. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)x^2 - 2ax + a - 1 = 0$$

имеет более одного целого корня.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{7-2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+1} + \frac{3}{\sqrt{x+1}} .$$

5. В квадрате $ABCD$ точки K на стороне BC и L на стороне CD выбраны так, что угол KAL равен $45°$, отрезки AK и AL пересекают диагональ BD в точках M и N. Докажите, что треугольники AKL и AMN подобны.

6. Докажите, что число $\cos\frac{\pi}{24}$ иррационально.

11 класс

1. Представьте многочлен $x^4 - 2x^3 - 5x - 2$ в виде произведения двух многочленов второй степени.

2. У правильной четырехугольной пирамиды центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите отношение радиусов этих сфер.

3. Решите задачу 4 для 10 класса.

4. Рассматриваются последовательности длины 8, составленные из чисел 1, 0, −1. Найдите из них количество таких последовательностей, сумма членов которых равна 0.

5. В квадрате $ABCD$ точки K на стороне AB и L на стороне CD выбраны так, что $AK = \frac{1}{5}AB$, $CL = \frac{2}{3}CD$. Отрезки DK и BL пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно. Докажите, что треугольники AKM и CNL подобны.

6. Решите задачу 6 для 10 класса.

ФИЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФИЗИКА

7 класс

1. Определите толщину пятикопеечной монеты с помощью обычной линейки. Придумайте, как можно уменьшить ошибку измерения.

2. Измерьте линейкой внутренний объем ящика письменного стола. Оцените ошибку измерения.

3. Оцените высоту дерева. Способ придумайте сами. На дерево лезть не надо!

4. Определите скорость течения реки, если катер проходит за час по течению расстояние x = 10 км, а против течения y = 6 км.

5. Из пункта A в 9 ч 00 мин выходит автобус и движется по прямому шоссе с постоянной скоростью v = 40 км/ч. Из этого же пункта в момент времени 9 ч 30 мин выходит второй автобус и движется со скоростью u = 80 км/ч. На каком расстоянии от пункта A и через какое время после отправления первого автобуса второй автобус с ним поравняется?

8 класс

1. С какой силой вода в квадратном аквариуме со сторонами дна x = 20 см и высотой воды H = 30 см действует на его дно и стенки? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Атмосферное давление не учитывать, так как оно действует с обеих сторон.

2. Тело в воде весит в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

3. Расстояние между пристанями A и B на реке равно s = 144 км. Сколько времени потребуется катеру для совершения рейса между пристанями туда и обратно $A \to B \to A$, если скорость катера в стоячей воде v = 18 км/ч, скорость течения воды u = 3 м/с, а время его стоянки у пристани B незначительно? Русло реки прямое.

4. Под действием силы $f = 500$ Н пружина сжалась на $x = 10$ мм. На сколько миллиметров сожмется пружина при нагрузке F = = 2 кН?

5. В шахту глубиной H = 100 м каждую минуту поступает определенный объем грунтовой воды. Эта вода с помощью насоса и трубы определенного сечения удаляется из шахты. Откачивая объем $V = 1$ м^3 воды, насос совершает работу A = 2 МДж. Во сколько раз увеличится эта работа, если количество ежеминутно поступающей воды возрастет вдвое? Силой трения при движении воды по трубе пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

9 класс

1. Два отдаленных участка аэропорта A и B связаны движущимся тротуаром. Пассажир дважды перемещался по этому маршруту. В первый раз работала только дорожка из A в B, и пассажир затратил время $t_1 \approx$ 4 мин 50 с на замкнутый маршрут $A \to B \to A$. Во втором случае обе дорожки не двигались, и пассажир на этот же маршрут затратил время $t_2 \approx 6$ мин 40 с . Какое время потратил бы пассажир на маршрут $A \to B \to A$, если бы обе дорожки двигались? Пассажир во всех случаях идет с одной и той же относительной скоростью.

2. Имеется несколько одинаковых медных кубиков и электроплитка. Первоначально все кубики имели комнатную температуру. Конфорка электроплитки была нагрета и находилась при постоянной температуре. Первый кубик длительное время нагревали на конфорке, а затем, сняв с нее, положили на второй, холодный кубик и измерили установившуюся температуру образовавшейся стопки – она оказалась равной T_1 . Во втором опыте аналогично нагретый на плитке третий кубик положили на стопку из холодных кубиков 4 и 5 – установилась температура T_2 . Какая установится температура, если теплый кубик 1 из первой стопки положить на холодный кубик 6? Потерей кубиками тепла во внешнюю среду пренебречь.

3. Перевернутый цилиндрический стакан закрыт легким подвижным поршнем. В дно стакана встроена длинная трубка сечением S (рис.2). Поршень удерживает некоторое количество жидкости. Его медленно перемещают вверх. График прикладываемой к поршню силы в зависимости от высоты его подъема приведен на рисунке 3. Определите по графику и приведенным данным плотность жидкости. Трение отсутствует.

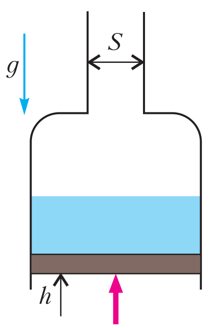


Рис. 2

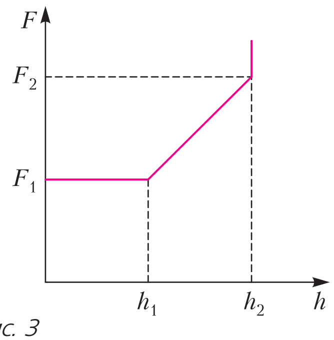


Рис. 3

4. Изолирующая кювета длиной L до высоты H заполнена проводящей жидкостью (рис.4). Сопротивление между левым и правым краем объема жидкости R. Каким станет это сопротивление, если в кювету параллельно ее дну поместить выполненный из изолятора брусок длиной l и шириной, равной ширине кюветы? Расстояние между нижней гранью бруска и дном кюветы h, $h < H$. Жидкость не переливается через край и брусок не утопает в жидкости целиком, $l \gg H$.

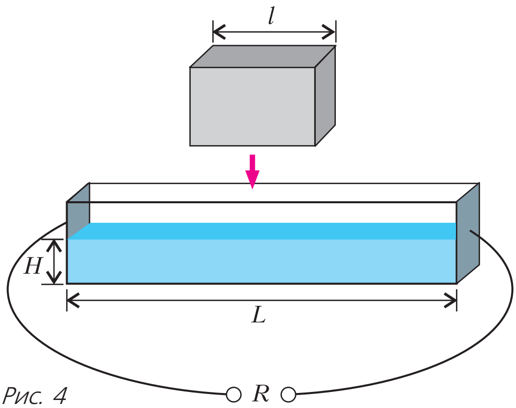


Рис. 4

5. Стрела автомобильного крана длиной l опирается на шарнир и удерживается в наклонном положении тросом, прикрепленным к вертикальной стойке точно над шарниром на высоте h относительно него (рис.

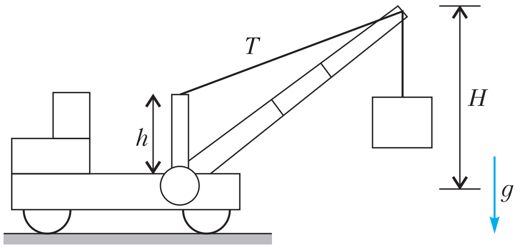


Рис. 5

5). Определите максимальный вес груза, который можно поднять с помощью такого крана при высоте верхнего конца стрелы относительно шарнира H, если трос выдерживает максимальное усилие T.

10 класс

1. Два поезда движутся с постоянными скоростями по встречным путям. Пассажир первого купе первого вагона первого поезда увидел стоящего на железнодорожной насыпи медведя на $t_1 = 4$ с раньше, чем пассажир первого купе последнего, пятого вагона этого же поезда. Пассажир первого купе первого вагона второго поезда увидел этого же медведя на $t_2 = 4$ с раньше пассажира первого купе последнего, шестого вагона этого же поезда. За какое время второй поезд пройдет перед глазами пассажира первого поезда?

2. Решите задачу 3 для 9 класса.

3. Через время $t = 200$ с после отправления голова поезда поравнялась с железнодорожным переездом, и за время $\tau_1 = 23{,}6$ с поезд прошел мимо этого переезда целиком. Мимо следующего переезда, расположенного на расстоянии $L = 2500$ м от первого, он прошел за время $\tau_2 = 16{,}23$ с. С каким постоянным ускорением двигался поезд?

4. Решите задачу 5 для 9 класса.

5. На плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, лежат два одинаковых бруска, удерживаемых силой трения с коэффициентом μ, $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. К верхнему бруску прикреплена нить, переброшенная через блок, закрепленный на нижнем бруске (рис.6). При каком коэффициенте трения можно, натягивая нить с некоторым усилием вдоль склона, поднимать нижний брусок, оставляя верхний неподвижным?

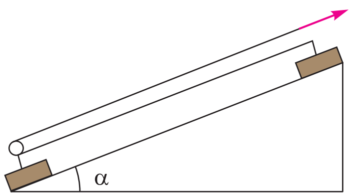


Рис. 6

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной L и массой M (рис.7). На ее левый край положили маленький брусок массой m. Толчком доске сообщили некоторую начальную скорость, и оба тела пришли в движение. При какой начальной скорости доски брусок приобретет наибольшую скорость? Коэффициент трения между бруском и доской μ, а трение между доской и горизонтальной поверхностью отсутствует.

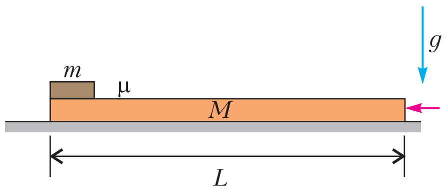


Рис. 7

3. На гладком горизонтальном столе лежат шарик и подвижный трамплин, поверхность которого вначале горизонтальна, а в конце вертикальна (рис.8). Трамплин толчком приводят в движение навстречу шарику со скоростью v. На какое расстояние по горизонтали пролетит шарик после того, как подскочит на трамплине? Трения нет. Массы шарика и трамплина равны. Размером трамплина пренебречь.

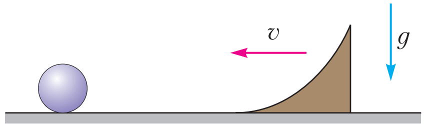


Рис. 8

4. Шприц закрыли со стороны иголки, вставили в него поршень; постепенно увеличивая усилие, вдвинули поршень до $1/2$ длины шприца и, постепенно ослабляя усилие, его отпустили – в результате он остановился на расстоянии $3/4$ длины шприца от его конца (рис.9). Определите усилие при

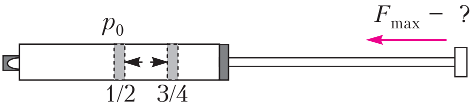


Рис. 9

поршне, вдвинутом до длины шприца, если атмосферное давление p_0, а площадь сечения поршня S. Изменением температуры пренебречь.

5. На пружине висит гиря массой m. К находящейся в равновесии гире при помощи нити присоединили вторую гирю той же массы m и, не растягивая пружину, отпустили (рис.10). Какую минимальную силу натяжения должна выдерживать нить, чтобы она не порвалась?

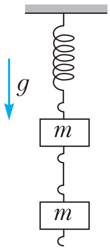


Рис. 10

ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников прошел в Пермском крае с 21 по 27 апреля 2019 года. Все участники олимпиады проживали в корпусах расположенного на живописном берегу Камы курорта Усть-Качка, а туры олимпиады проходили в находящемся неподалеку современном здании Кадетского корпуса. В экскурсионную программу олимпиады были включены поездки в Кунгурскую пещеру, осмотр достопримечательностей Перми. Интересной и насыщенной была научно-познавательная программа олимпиады: перед участниками выступали с лекциями представители ведущих университетов страны.

В олимпиаде приняли участие 378 юных математиков из 65 регионов России. Кроме того, традиционными участниками олимпиады

9 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 130), решивших задачу	114	38	66	3	93	101	30	3

10 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 119), решивших задачу	115	102	46	13	92	90	85	2

11 класс

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество участников (из 129), решивших задачу	126	84	36	7	111	91	7	2

были гости – команды Китая и Болгарии. О сложности задач можно судить из таблиц, в которых указано количество школьников, решивших задачу (т.е. набравших по данной задаче не менее 5 баллов из 7 возможных).

Интересно, что в каждой из параллелей лучшие участники набрали одинаковое число баллов – 50 из 56 возможных.

После туров олимпиады было проведено голосование (своеобразный конкурс красоты среди задач), в котором участники указали наиболее понравившиеся им задачи. В 9 классе тройка лучших задач оказалась такой: 8 (I место), 3 (II место), 7 (III место); в 10 классе – 2 (I место), 7 (II место), 6 (III место), в 11 классе – 3 (I место), 6 (II место), 1 и 4 (поделили III место).

Ниже приводятся условия задач и список победителей заключительного этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

9 класс

1. На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещенными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой.

С.Волчёнков

2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трехчлен

$$x^2 - 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?

П.Козлов

3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

А.Кузнецов

4. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребенок носит футболку одного из семи цветов радуги, причем у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей все же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

А.Магазинов

5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребенок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков – простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

С.Берлов

6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M – середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

А.Кузнецов

7. Среди 16 монет есть 8 *тяжелых* – массой по 11 г, и 8 *легких* – массой по 10 г, но неизвестно, какие из монет какой массы. Одна из монет юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжелой или легкой?

К.Кноп

8. Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

К.Тыщук

10 класс

1. См. задачу М2562 «Задачника «Кванта».

2. См. задачу М2563 «Задачника «Кванта».

3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью 101, 102, ..., 200 человек. В этих комнатах суммарно живет n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех ее жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

Д.Белов, А.Сафиуллина

4. См. задачу М2564 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E – середины меньших дуг AB и BC окружности Ω, описанной около треугольника ABC, соответственно. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E – точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90^\circ$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ.

А.Кузнецов

7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *несыгранной*. Для турнира математических боев руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными будут либо ровно три команды, либо ровно одна, причем и тот и другой варианты присутствуют?

И.Богданов

8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, ... есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ – линейный.

М.Антипов

11 класс

1. См. задачу М2562 «Задачника «Кванта».

2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 13x \operatorname{tg} ay = 1, \\ \operatorname{tg} 21x \operatorname{tg} by = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

М.Антипов

3. См. задачу М2565,а «Задачника «Кванта».

4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K – точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L – точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

Ф.Бахарев

5. Радиусы пяти концентрических окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырех отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

И.Богданов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. См. задачу 8 для 10 класса.

8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного черного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что черный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным?

И.Богданов

Победители олимпиады

9 класс

Садовничий Антон – Москва, лицей «Вторая школа»,
Аникин Сергей – Москва, лицей «Вторая школа»;

10 класс

Андреев Аркадий – Казань, лицей 131,
Захаров Георгий – Курган, гимназия 47,
Писцов Георгий – Москва, школа 1329,
Храмов Владислав – Казань, гимназия 7 имени Героя России А.В.Козина,
Васильев Иван – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Ефремов Андрей – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239;

11 класс

Ковалев Тимофей – Москва, СУНЦ МГУ,
Львов Алексей – Новосибирск, гимназия 6 «Горностай»,
Кулишов Валерий – Москва, ГБОУ «Пятьдесят седьмая школа»,
Петров Владимир – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Белов, И.Богданов, А.Гайфуллин, М.Григорьев, П.Кожевников, О.Подлипский

Заключительный этап LIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Навигация

Движущийся равномерно и прямолинейно корабль прошел точку A, находящуюся на расстоянии $L = 5$ км от пристани B (рис. 1). Через некоторое время τ после этого от корабля и от пристани навстречу друг другу отправились два катера. Перерисуйте рисунок в бланк решений и построениями с

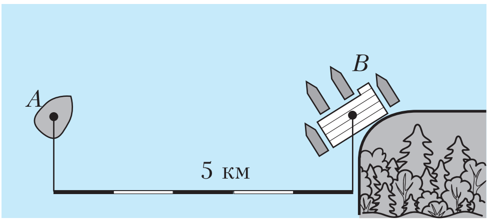


Рис. 1

помощью циркуля и линейки без делений определите точку, в которой находился корабль в момент встречи катеров, если известно, что:

- катера двигались по прямой с одинаковыми скоростями, составляющими $3/8$ от скорости корабля;
- время движения катеров от их старта до встречи также равно τ;
- при встрече катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани.

Опишите последовательность построений и найдите расстояние (в километрах), которое проходит катер за время τ. Ветра и течения нет.

Примечание. На рисунке расстояние AB разделено на 5 равных интервалов.

Е.Подоляко

Задача 2. Безопасная дистанция

По прямому участку дороги с одинаковой скоростью v друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении замедляется с ускорением a_1, а другая с ускорением a_2. Если начнет тормозить водитель передней машины, то водитель задней среагирует и нажмет на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau = 1{,}0$ с. В зависимости от того, какая из машин будет ехать впереди, минимальная безопасная дистанция, позволяющая избежать столкновения между ними, окажется равной либо $L_1 = 5$ м, либо $L_2 = 40$ м. Определите, с какой скоростью едут машины.

М.Замятнин

Задача 3. Стремянка

На рисунке 2 изображена упрощенная модель лестницы-стремянки, состоящей из соединенных шарнирно легкой опоры и массивной части, наклоненных под углами $\beta = 20^\circ$ и γ к вертикали ($\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$). Масса лестницы $m = 20$ кг. Определите, с какой силой взаимодействуют между собой части лестницы. Трения в шарнире нет. Коэффициент трения μ между полом и касающимися его частями стремянки одинаков. При каком минимальном значении коэффициента μ части лестницы не будут разъезжаться? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

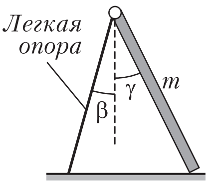


Рис. 2

М.Замятнин

Задача 4. Четырехцилиндровый нагрев

В цилиндрический стакан калориметра налито $m_0 = 200$ г жидкости плотностью ρ_0 при температуре $t_0 = 0$ °C. В термостате при неизвестной температуре T находится набор однородных цилиндров из одного и того же металла плотностью $\rho = 6\rho_0$. Диаметр всех цилиндров одинаков и практически совпадает (чуть меньше) с диаметром стакана. При погружении в калориметр цилиндра массой m тепловое равновесие устанавливается при температуре $t_1 = 10$ °C. Если вместо первого цилиндра в калориметр был бы погружен цилиндр массой $1{,}6m$, то установилась бы температура $t_2 = 15$ °C. При погружении цилиндра массой $3m$ установилась бы температура $t_3 = 30$ °C, а для цилиндра массой $4m$ — температура $t_4 = 45$ °C. Ось каждого цилиндра при погружении вертикальна. Определите:

1) температуру T цилиндров;

2) долю γ объема стакана калориметра, заполненного жидкостью;

3) массу m первого цилиндра;

4) отношение удельных теплоемкостей c_0 жидкости и c металла.

А.Аполонский

Задача 5. Треугольная призма

Электрическая цепь, представляющая собой треугольную призму с диагоналями в боковых гранях (рис. 3), состоит из проводников с одинаковым сопротивлением $R = 12$ Ом независимо от их длины. Определите сопротивление цепи между узлами: 1) A и A_1; 2) C и A_1.

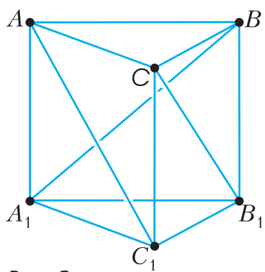


Рис. 3

В.Слободянин

10 класс

Задача 1. Гантель

На гладком горизонтальном столе лежит гантель, состоящая из двух маленьких по размеру шайб, имеющих массы m_1 и m_2, соединенных легким жестким (деформации стержня малы по сравнению с его размерами) стержнем длиной L. В момент времени $t = 0$ на шайбу массой m_1 начинает действовать постоянная по величине горизонтальная сила F (рис. 4). Направление действия силы всегда составляет один и тот же острый угол α со стержнем. Считайте известным, что при таком движении угловое ускорение стержня является постоянным. В некоторый момент времени τ после начала действия силы стержень на мгновение оказался не напряженным (т.е. ни сжатым, ни растянутым). Найдите:

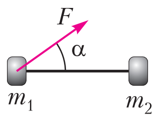


Рис. 4

1) угловую скорость ω вращения стержня в момент времени τ;

2) угловое ускорение стержня $d\omega/dt$;

3) промежуток времени τ;

4) угол поворота стержня к моменту времени τ.

С.Варламов

Задача 2. Поканальное движение

Небольшие частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ движутся без трения по пересекающимся под прямым углом узким прямым каналам, расположенным в

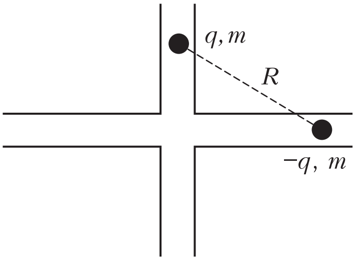


Рис. 5

горизонтальной плоскости (рис.5). При этом оказалось, что в процессе дальнейшего движения расстояние R между частицами остается неизменным. Найдите суммарную кинетическую энергию частиц.

И.Воробьев

Задача 3. Архив лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершенного над фиксированым количеством одноатомного идеального газа (рис. 6). От времени чернила выцвели, и информация про направления некоторых процессов была утрачена. Также была утрачена и информация про то, что отложено по оси абсцисс. Известно лишь, что на оси абсцисс отложена одна из следующих величин: объем, давление, температура или плотность, а шкала выполнена в условных единицах. По оси ординат отложена молярная теплоемкость газа C. Найдите максимально возможный КПД цикла.

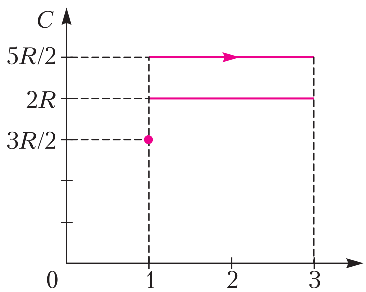


Рис. 6

Л.Колдунов, А.Жигар

Задача 4. Заряженная пластинка

Тонкая плоская пластинка из диэлектрика в форме ромба со стороной a и острым углом 60° заряжена однородно с поверхностной плотностью заряда σ. Потенциал в вершине острого угла ромба равен φ_1, в вершине тупого равен φ_2 (рис. 7). Из такого же

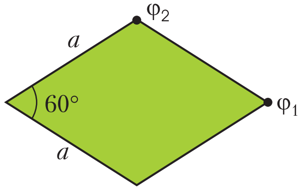


Рис. 7

диэлектрика вырезают тонкую пластинку в форме равностороннего треугольника ABC со стороной $2a$ (рис. 8) и заряжают ее с такой

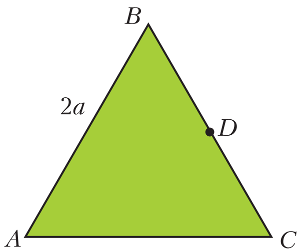


Рис. 8

же поверхностной плотностью заряда. Определите:

1) потенциал в точке C треугольной пластинки;

2) потенциал в точке D, лежащей на середине стороны треугольной пластинки.

Теперь из треугольной пластинки ABC удаляют правильный треугольник со стороной a (рис. 9). Определите:

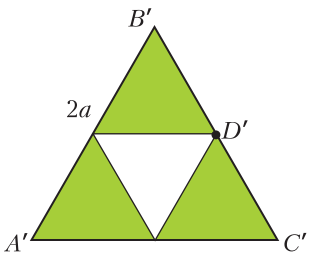


Рис. 9

3) потенциал в точке D' «дырявой» пластинки;

4) потенциал в точке C' «дырявой» пластинки.

Примечание. Все пластинки удалены друг от друга и от других тел.

А.Аполонский

Задача 5. Оцени и докажи

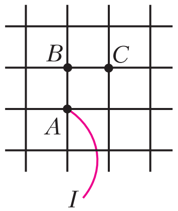


Рис. 10

Бесконечная сетка с квадратными ячейками собрана из одинаковых резисторов (рис. 10). В узел A извне втекает ток I. Оцените силу тока в звене BC с погрешностью не более 10%. Докажите, что погрешность вашей оценки не превышает 10%.

Р.Компанеец

11 класс

Задача 1. Два цилиндра

Внутрь закрепленного цилиндра радиусом R, ось O которого горизонтальна, помещают легкий цилиндр вдвое меньшего радиуса (рис. 11). Ось C меньшего цилиндра также горизонтальна. На поверхности меньшего цилиндра закреплено маленькое тело массой m. Меньший цилиндр удерживают так, что тело находится на оси большего цилиндра, а плоскость OC (в которой лежат оси обоих цилиндров) составляет угол α с вертикалью. Меньший цилиндр отпускают, и он начинает катиться по внутренней поверхности большего без проскальзывания. Определите:

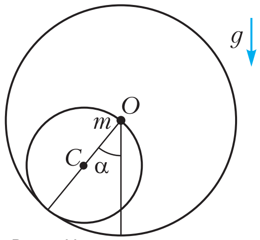


Рис. 11

1) ускорение тела сразу после начала движения;

2) ускорение и скорость тела в момент времени, когда плоскость OC вертикальна; считайте, что до этого момента движение шло без проскальзывания;

3) минимальное значение коэффициента трения между цилиндрами μ, при котором возможно движение без проскальзывания до момента, когда плоскость OC займет положение, симметричное начальному по отношению к вертикали;

4) скорость тела в момент начала проскальзывания, если коэффициент трения между цилиндрами задан и равен μ.

А.Уймин

Задача 2. Вещества X и Y

В двух одинаковых сосудах с поршнями при одинаковых давлении p_A и температуре T_A находятся одинаковые смеси равных масс m жидкой и твердой фаз вещества X. При этом плотность твердой фазы на 20% больше плотности жидкой фазы ρ_X. Не изменяя внешнего давления, к первому сосуду медленно подводят известное количество теплоты Q_1. В этом процессе масса твердой фазы уменьшается вдвое. Затем, обеспечив надежную теплоизоляцию сосуда, немного увеличивают внешнее давление. Обозначим это состояние «B». Внешние воздействия на второй сосуд проводят в обратном порядке: сначала увеличивают давление, а затем, поддерживая его постоянным, подводят необходимое для перевода в то же состояние B количество теплоты Q_2.

1) Какое количество теплоты больше: Q_1 или Q_2?

2) Определите давление p_B в состоянии B.

3) Определите температуру T_B в состоянии B.

Этот же эксперимент с двумя сосудами был проведен со смесями равных масс m жидкой и твердой фаз другого вещества Y, у которого в начальном состоянии C плотность твердой фазы на 20% *меньше* плотности жидкой фазы ρ_Y. Оказалось, что для изобарического плавления половины твердой фазы Y при переходе из состояния p_C, T_C потребовалось подвести количество теплоты Q_3, а для перехода в конечное состояние D во втором сосуде – количество теплоты Q_4.

4) Какое количество теплоты больше: Q_3 или Q_4 ?

5) Определите давление p_D в состоянии D.

6) Определите температуру T_D в состоянии D.

А.Аполонский

Задача 3. Зачем нужны диоды

Электрическая схема состоит из трех конденсаторов C_1, C_2, C_3 одинаковой емкости C, катушки индуктивностью L, двух идеальных диодов, источника постоянного напряжения U_0, ключа K (рис. 12). Первоначально перед замыканием ключа конденсаторы

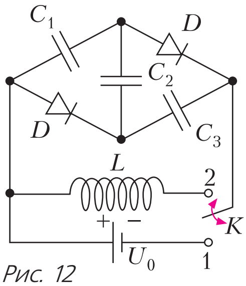


Рис. 12

не заряжены. Затем ключ переводят в положение 1 и после установления равновесия переключают в положение 2.

1) Чему равны напряжения на конденсаторах U_1, U_2 и U_3 перед переключением ключа в положение 2?

2) Чему равно максимальное значение I_D тока через диоды после переключения ключа в положение 2?

3) В каких пределах ($\left[U_1^{\min}, U_1^{\max}\right]$, $\left[U_2^{\min}, U_2^{\max}\right]$ и $\left[U_3^{\min}, U_3^{\max}\right]$) изменяются напряжения на конденсаторах после переключения ключа в положение 2?

4) Качественно изобразите график зависимости сила тока I, протекающего через катушку индуктивности, от времени.

5) Чему равен период колебаний T тока I?

Активным сопротивлением катушки индуктивности и проводов можно пренебречь.

А.Аполонский

Задача 4. Магнитный шнур

Тонкий, однородный нерастяжимый гибкий шнур длиной l изготовлен из ферромагнетика, причем магнитный момент каждого его маленького элемента направлен вдоль шнура. Один конец шнура удерживают на расстоянии $l_1 \left(l_1 > l\right)$ от бесконечного прямого провода, по которому течет электрический ток I (рис. 13). Пренебрегая силой тяжести и собственным магнитным полем шнура, найдите:

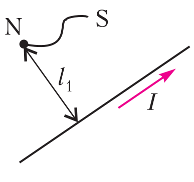


Рис. 13

1) расстояние между концами шнура в состоянии равновесия;

2) на каком расстоянии от провода окажется свободный конец шнура.

Указание. Энергия маленького элемента шнура длиной Δl во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ определяется выражением $\Delta W = -kB\Delta l \cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{B}$ и направлением шнура, а k — постоянный коэффициент.

В.Маринюк, С.Муравьев, А.Чернов

Задача 5. Русалочка

«В открытом море вода совсем синяя, как лепестки самых красивых васильков, и прозрачная, как чистое стекло, — но зато и глубоко там! Ни один якорь не достанет до дна; на дно моря пришлось бы поставить одну на другую много-много колоколен, только тогда бы они могли высунуться из воды. На самом дне живут русалки» (Г.Х. Андерсен).

Ясной ночью Принц, ростом H = 1,8 м, мечтал на берегу спокойного Тихого океана и смотрел на лунную дорожку, которая начиналась от него на расстоянии $D_П = 5$ м по горизонтали и имела длину $L_П = 50$ м (рис.14). В это же самое время у берега под

Рис. 14

водой на глубине H лежала Русалочка, тоже о чем-то мечтая.

1) На каком расстоянии $D_Р$ от себя (тоже по горизонтали) лунную дорожку будет видеть Русалочка?

2) Какой длины $L_Р$ будет эта дорожка?

Считайте, что легкий бриз создает мелкую одинаковую рябь по всей поверхности океана. Показатель преломления морской воды n = 1,35. Угловым размером Луны можно пренебречь.

Указание. Бриз – слабый береговой ветер, дующий днем с моря на сушу, а ночью с суши на море. Рябь, – мелкое волнение водной поверхности.

Л.Мельниковский

Победители олимпиады

9 класс

Дмитрий Сорокин – Москва, «Пятьдесят седьмая школа»,
Даниил Житов – Москва, Школа «Летово»,
Тихон Евтеев – Москва, школа 179,
Антон Руденко – Москва, школа 1329,
Кирилл Аржаных – Москва, Лицей «Вторая школа»,
Матвей Князев – Березники Пермского края, школа 3,
Тимур Прядилин – Москва, Школа «Летово»;

10 класс

Татьяна Емельянова – Москва, ФМШ 2007,
Иван Харичкин – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Сергей Савельев – Москва, школа 1568 имени Пабло Неруды,
Александр Головастенко – Санкт-Петербург, Академический лицей «Физико-техническая школа»,
Алексей Кадыков – Республика Мордовия, Республиканский лицей для одаренных детей,
Никита Москалев – Кировская область, Кировский физико-математический лицей,
Федор Оксаниченко – Санкт-Петербург, школа имени А.М.Горчакова,
Антоний Белышев – Санкт-Петербург, Академический лицей «Физико-техническая школа»,
Константин Ведерников – Москва, Школа «Летово»;

11 класс

Григорий Бобков – Москва, школа 1589,
Алексей Шишкин – Москва, школа 1589,
Владимир Малиновский – Москва, школа 1589,
Дмитрий Царёв – Москва, Лицей «Вторая школа»,
Никита Чуйкин – Череповец Вологодской области, школа 17,
Юрий Бруякин – Москва, Школа «Воробьевы горы»,
Владислав Поляков – Санкт-Петербург, Президентский физико-математический лицей 239,
Терентий Кузнецов – Новосибирск, СУНЦ НГУ.

Публикацию подготовил В.Слободянин

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

ФИЗИКА

Олимпиада–2019

Первый тур

Вариант 1

1. Из пункта A, находящегося на берегу реки, выезжает велосипедист и, двигаясь со скоростью $v = 5$ м/с вдоль реки, прибывает в пункт B, находящийся ниже по течению, через 80 с (рис.1). Одновременно с велосипедистом с противоположного берега из точки C отплывает катер, который должен попасть в пункт B одновременно с велосипедистом. С какой минимальной скоростью (в км/ч) относительно воды должен плыть катер, если скорость течения реки $v_0 = 5$ км/ч, а ширина реки $b = 300$ м?

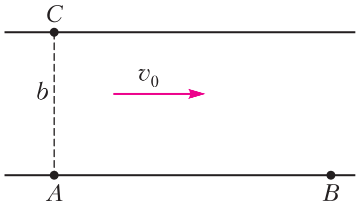


Рис. 1

2. Тело, двигаясь из состояния покоя под действием постоянной силы, равной 20 Н, за время $\Delta t = 0{,}1$ с приобретает кинетическую энергию W_0 = 10 Дж. Найдите энергию, которую сообщит эта сила тому же телу за следующий промежуток времени $\Delta t = 0{,}1$ с.

3. После падения на горизонтальную поверхность шарик, отскочив от нее, двигался по параболической траектории. В течение 1 секунды направление вектора скорости шарика изменилось на $90°$. Найдите модуль перемещения шарика за это время. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

4. В планетарной зубчатой передаче шестерни 1 и 2 (рис.2) приводятся в движение кривошипом 3, ось вращения которого со-

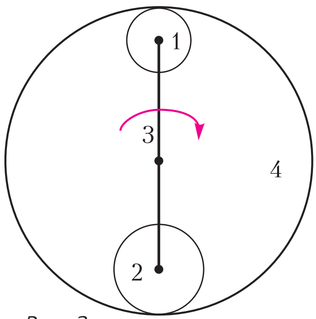


Рис. 2

впадает с осью неподвижного колеса 4. Число зубьев шестерен $Z_1 = 15$ и $Z_2 = 25$, а число зубьев колеса Z_4 = 75. Найдите отношение числа оборотов шестерни 1 к числу оборотов шестерни 2 за два оборота кривошипа.

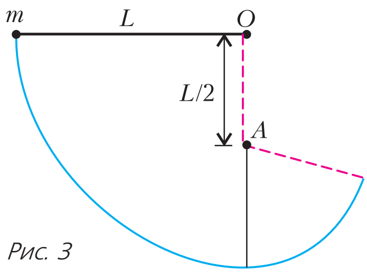


Рис. 3

5. На нити длиной L = 5,4 м подвешен шарик массой m. На расстоянии $L/2$ от точки подвеса O вбит гвоздь A (рис.3). Нить отведена на угол $90°$ от вертикали и отпущена без начальной скорости. На какую максимальную высоту от нижнего положения поднимется шарик?

6. Альфа-частица (ядро ${}^4_2\mathrm{He}$) движется прямолинейно вдоль оси x под действием электрического поля с напряженностью $E_x = E_0 - bx$, где E_0 и b – известные постоянные. В начальный момент времени альфа-частица покоилась в точке $x = 0$. Чему равна максимальная кинетическая энергия альфа-частицы в таком движении? Через какое время от начала движения она достигается?

7. В теплоизолированном сосуде находится азот при температуре T_1 = 300 К. Через некоторое время, под действием излучения, все молекулы азота распадаются. Определите температуру газа в сосуде после распада всех молекул, если при распаде одной молекулы азота на атомы выделяется количество теплоты q = 0,6 эВ.

8. С какой силой человек должен тянуть веревку (рис.4), чтобы удержать себя и платформу, на которой он стоит, в равновесии? Масса человека m_1 = 70 кг, масса платформы m_2 = 30 кг. Массой блоков и веревок пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

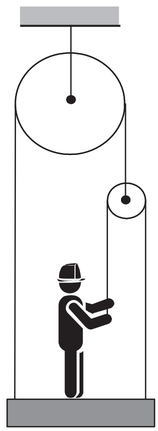


Рис. 4

9. На горизонтальной непроводящей поверхности в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны, находится жесткое тонкое однородное проводящее кольцо радиусом R и массой m. Найдите величину индукции магнитного поля такую, чтобы при пропускании по кольцу тока силой I оно начало подниматься.

Вариант 2

1. Человек в лодке переплывает реку шириной 1 км. Скорость течения реки в 2 раза больше скорости лодки относительно воды. Найдите минимальное расстояние, на которое снесет лодку вниз по течению реки за время переправы.

2. Муравей сидит в нижней точке внутренней поверхности тонкостенного обруча радиусом $R = 0{,}5$ м, который катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Определите радиус кривизны траектории муравья в тот момент, когда муравей окажется в верхней точке обруча.

3. Два однородных свинцовых стержня длиной L = 1,3 м каждый могут свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг общей горизонтальной оси, проходящей через края этих стержней. Стержни отклонили в разные стороны на $90°$ от вертикали и отпустили без начальной скорости. Определите, на сколько градусов нагреются стержни после столкновении, считая его абсолютно неупругим. Принять, что все тепло, выделившееся при столкновении стержней, идет на их нагревание. Сопротивление воздуха не учитывать. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · град). Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

4. По наклонной плоскости, расположенной под углом $45°$ к горизонту, одновременно начинают скатываться без проскальзывания обруч и соскальзывать брусок. Найдите коэффициент трения между бруском и плоскостью, при котором оба тела будут двигаться, не обгоняя друг друга.

5. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится моль гелия. На поршне лежит груз. При этом объем газа V_1 = 10 л, а давление $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Па. В некоторый момент времени груз с поршня убрали. В результате газ под поршнем адиабатически изменил свой объем, а давление газа уменьшилось в два раза. Определите температуру газа после установления термодинамического равновесия. Силами трения при перемещении поршня в цилиндре пренебречь.

6. На гвозде, вбитом в стену, висит гибкий трос длиной 20 м так, что его концы находятся на одном уровне. В начальный момент трос покоится. В некоторый момент в результате небольшого толчка трос начинает скользить по гвоздю. Определите скорость троса в момент времени, когда отношение длин троса по разные стороны гвоздя будет равно 3:1. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

7. Бетонная однородная свая массой m и длиной L лежит на дне водоема. Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно поднимают в вертикальное положение, в котором свая, опираясь на дно, выступает над поверхностью воды на одну третью часть своей длины. Найдите работу, которую необходимо совершить при таком подъеме сваи. Плотность бетона в n = 4 раза больше плотности воды. Силами сопротивления и массой троса пренебречь.

8. Батарея конденсаторов, состоящая из четырех одинаковых металлических пластин, расположенных в воздухе на равных расстояниях d друг от друга, подключена к источнику постоянного тока с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, как показано на рисунке 5. Площадь

Рис. 5

каждой из пластин равна S. Пластина 1 соединена проводником с пластиной 3. Определите величину заряда, который пройдет через источник тока, если пространство между пластинами 2 и 3 заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами.

9. Металлический шар радиусом R_1 = = 4 см окружен концентрической проводящей оболочкой радиусом R_2 = 10 см. Пространство между шаром и оболочкой заполнено однородным диэлектриком. Определите величину максимального напряжения, которое можно подвести к такому сферическому конденсатору, если пробой диэлектрика происходит при напряженности электрического поля в нем $E = 100$ кВ/см.

Второй тур

Вариант 1

1. Однородный стержень массой m и длиной L лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. Ударом стержню сообщают скорость v, направленную вдоль его продольной оси. Определите максимальное расстояние, на которое сместится стержень, если известно, что для поворота стержня на той же плоскости вокруг одного из его концов на угол α нужно совершить работу, равную A.

2. На шероховатую горизонтальную поверхность вертикально поставили гантель, состоящую из двух маленьких шариков массами $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$, соединенных невесомым жестким стержнем (рис.6). Гантель

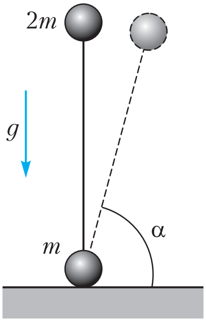


Рис. 6

отпускают без начальной скорости, и она начинает падать. Определите величину коэффициента трения между гантелью и плоскостью, если нижний шарик начинает скользить по плоскости, когда угол наклона стержня с плоскостью достигнет $\alpha = 75°$ ($\sin 75° = 0{,}97$).

3. Моль одноатомного идеального газа из начального состояния *1* расширяется в процессе *1–2* (рис.7) с постоянной теплоемкостью, совершая в нем работу $A_{12} = 200$ Дж. Затем к газу подводится количество теплоты $Q_{23} = 200$ Дж в процессе *2–3*, в котором давление газа прямо пропорционально его объему. Температуры в состояниях *1* и *3* одинаковые. Найдите количество теплоты, подведенное к газу в процессе *1–2*.

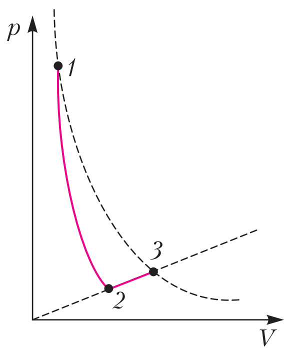


Рис. 7

4. В схеме, изображенной на рисунке 8, при разомкнутом ключе K конденсатор ем-

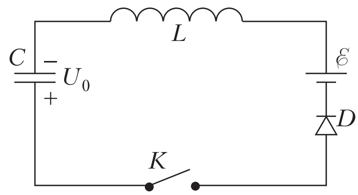


Рис. 8

костью $C = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 2$ В. Индуктивность катушки $L = 0{,}1$ Гн, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 5$ В, диод D – идеальный. Определите максимальный ток в цепи после замыкания ключа. Найдите напряжение, которое установится на конденсаторе после замыкания ключа.

5. На гладкой горизонтальной поверхности расположена треугольная призма массой $2m$ с углом $\alpha = 30°$, соединенная невесомой недеформированной пружиной жесткостью k с бруском массой m (рис.9). Шар массой m

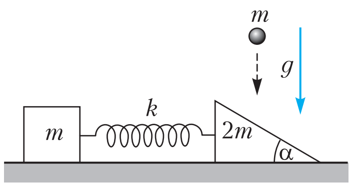


Рис. 9

падает вертикально вниз и ударяется в призму со скоростью v. Определите величину максимальной деформации пружины при дальнейшем движении тел. Силами трения пренебречь.

6. Какое максимальное число электронно-позитронных пар может образоваться при взаимодействии с веществом двух одинаковых гамма-квантов, на которые распалась движущаяся нейтральная релятивистская частица с массой покоя m_0, если угол между направлениями разлета гамма-квантов $\theta = 60°$? Считать, что вся энергия гамма-квантов идет на образование электронно-позитронных пар.

Вариант 2

1. На шероховатой поверхности стола лежит цепочка длиной L так, что один ее конец свешивается с края стола. Когда свешивающаяся часть цепочки составляет $1/4$ часть ее полной длины, цепочка начинает соскальзывать. Найдите скорость цепочки в момент полного соскальзывания ее со стола. При соскальзывании цепочка не касается поверхности пола, на котором стоит стол.

2. На дне водоема выделился пузырек газа диаметром d. При подъеме этого пузырька к поверхности воды его диаметр увеличился в n раз. Найдите глубину водоема в этом месте. Атмосферное давление p_0, коэффициент поверхностного натяжения воды σ и ее плотность ρ известны. При расширении газа его температура не изменялась.

3. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат (рис.10). Изменение объема идеального газа

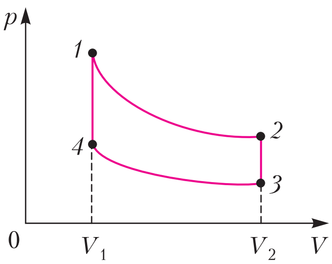


Рис. 10

в пределах цикла $\frac{V_2}{V_1} = 4$. Уравнение адиабаты может быть записано в виде $TV^{\alpha} = \text{const}$, где α – известный показатель степени. Определите массовый расход топлива с удельной теплотой сгорания q при совершении двигателем работы A. Потерями тепла пренебречь.

4. Три тонкостенные металлические сферы, радиусы которых R, $2R$ и $3R$, расположены так, что их центры совпадают (рис.11). На внешней сфере находится заряд $-2q$, на средней – заряд $+q$, на внутренней – заряд $-q$. Внутренняя сфера может быть соединена с землей, потенциал которой равен нулю. Определите заряд Q, который протечет через гальванометр Г, если замкнуть ключ K.

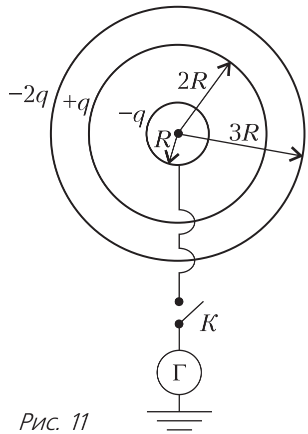


Рис. 11

5. В ионном двигателе, используемом для изменения ориентации космической станции, поток ионов атомов водорода, ускоренный напряжением $U = 10^4$ В, вылетает из двигателя, создавая реактивную тягу. Определите секундный расход водорода в двигателе, при котором реактивная сила будет равна силе светового давления на поверхность солнечной батареи космической станции, выполненной в виде круга радиусом $R = 100$ м и имеющей коэффициент отражения солнечных лучей $\rho = 0{,}2$. Суммарная мощность светового излучения Солнца $W = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. Солнечные лучи падают перпендикулярно поверхности солнечной батареи. Расстояние от космической станции до Солнца $r = 150 \cdot 10^6$ км.

6. Шарик массой $m = 2$ г, имеющий положительный заряд q, начинает скользить с начальной скоростью, равной нулю, по сферической поверхности радиусом $R = 10$ см из точки A (рис.12). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в точке A равна $W_A = -2 \cdot 10^{-3}$ Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд q находится в точке B, если результирующая сил давления и кулоновского взаимодействия в точке B равна $F = 0{,}1$ Н.

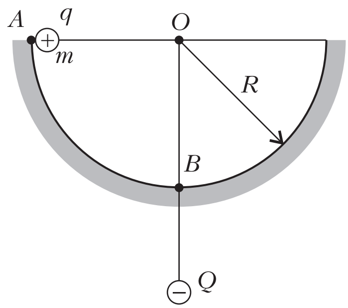


Рис. 12

Публикацию подготовил Ю.Струков

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №6)

1. В субботу.
Разобьем эти 9 дней на первые 2 и последние 7. Если прийти в субботу, то получится кататься в оба первых дня, а в других случаях не получится. А среди последних семи дней в любом случае будет ровно одна суббота, одно воскресенье и один вторник.

2. На правом верхнем (рис.1).

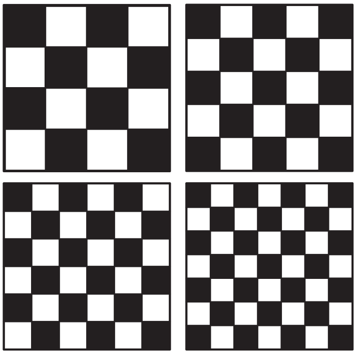


Рис. 1

На двух левых рисунках условия поровну черных и белых клеток, так что закрашена половина квадрата. На каждом из правых рисунков черных квадратиков на один больше, чем белых, но на верхнем площадь одного квадратика больше, чем на нижнем. Значит, и суммарная площадь черных квадратиков больше на правом верхнем рисунке.

3. Рисунок *б*) из условия.

4. 22, 24, 28, 30.
Рассмотрим последнее разворачивание. В нем сгиб проходил по одной из средних линий прямоугольника 4×8. Тогда все отрезки этой средней линии выгнуты одинаково. До последнего разворачивания две половины прямоугольника складывались как единое целое, значит, любые два отрезка, симметричные относительно этой средней линии, выгнуты разным образом. Тогда они бьются на пары, в каждой из которых ровно один выгнут вверх.

Всего отрезков $3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 52$. Получаем 4 варианта, сколько отрезков могло быть выгнуто вверх. Если последний сгиб был длины 4 и его отрезки выгнуты вверх, то всего вверх выгнуто $4 + \frac{52-4}{2} = 28$ отрезков, если же его отрезки выгнуты вниз — то $0 + \frac{52-4}{2} = 24$. Аналогично получаем два варианта, когда сгиб был длины $8 : 8 + \frac{52-8}{2} = 30$ и $0 + \frac{52-8}{2} = 22$.
Очевидно, что как примеры с последним сгибом длины 4, так и примеры с последним сгибом длины 8 существуют, так что все эти варианты реализуются.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Гидротурбина совершает механическую работу за счет убыли кинетической энергии потока воды.

2. Батареи ребристой формы имеют большую поверхность, благодаря чему обладают большей теплоотдачей.

3. Выхлопные газы совершают работу за счет убыли их внутренней энергии и, следовательно, понижения температуры.

4. У двигателей внутреннего сгорания достигается более высокая температура рабочего тела.

5. Если длительное время не открывать дверцу работающего холодильника, то температура внутри него, а значит, и внутренняя энергия практически не изменяются. Следовательно, потребляемая холодильником электроэнергия расходуется на нагревание комнаты.

6. К двигателям внутреннего сгорания одноразового (при каждом выстреле) использования.

7. Нагреватель – камера сгорания топлива, рабочее тело – продукты его сгорания, холодильник – внешняя среда.

8. Устанавливается энергетический баланс: выделяемое джоулево тепло рассеивается в окружающую среду, при этом температура материала обмотки не достигает точки его плавления.

9. Мощность, потребляемая включенным прибором, вначале во много раз больше номинальной, так как сопротивление его холодной спирали мало, что приводит к росту напряжения на подводящих проводах. По мере нагревания спирали потребляемая прибором мощность падает, приближаясь к номинальной, что приводит к увеличению накала лампочек.

10. Более мощная лампа имеет меньшее сопротивление. При последовательном включении сила тока в лампах будет одинакова, а напряжение на более мощной лампе будет меньше. Поэтому менее мощная лампа будет гореть ярче.

11. Лучше воспользоваться кипятильником большей мощности, поскольку при этом вода нагреется быстрее и, значит, меньше тепла за это время будет отдано окружающей среде.

12. Слой воздуха между высоко расположенными проводами и землей служит изолятором.

13. Дальняя передача электроэнергии без трансформации вызывает большую тепловую потерю мощности в проводах.

14. Ток в первичной цепи возрастет, во вторичной – уменьшится.

15. Вся энергия магнитного поля, сосредоточенного в обмотке, преобразуется в тепло, что приводит к плавлению материала обмотки.

16. Механическая работа по вращению ротора генератора преобразуется в электрическую энергию, а также расходуется на преодоление сил сопротивления. В разомкнутой цепи тока нет, и механической работы требуется меньше.

17. Да. Своим происхождением ветры обязаны неравномерному распределению солнечной энергии в атмосфере и по поверхности земли.

18. За пределами атмосферы интенсивность солнечного излучения выше.

19. В кинетическую энергию образующихся осколков.

Микроопыт

Действие реакции струи жидкости или газа используется в различных типах *турбин* – от гидростанций до ветродвигателей.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Обозначим данные точки через A, B, C, D и E. Выберем из них две самые удаленные друг от друга, пусть это A и B. Покажем, что можно переместить их требуемым образом. Проведем серединный перпендикуляр α к отрезку CD. Если E лежит на α, то достаточно переместить точки A и B на прямую α. Иначе пусть E' – точка, симметричная E относительно α. Заметим, что расстояние от E до α меньше длины одного из отрезков EC и ED, т.е. меньше AB.

Таким образом, можно переместить точку A в точку E', а точку B – в точку, лежащую на α и удаленную от E' на расстояние AB. Легко видеть, что α – ось симметрии нового множества точек, что и требовалось.

2. При $n = 6$.

При $n = 6$ можно положить $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и $a_5 = a_6 = -1$; тогда трехчлен из условия принимает вид $x^2 - 8x + 7$ и имеет два целых корня: 1 и 7. Осталось показать, что это – наименьшее возможное значение n.

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию задачи; тогда деленный на 4 дискриминант квадратного трехчлена из условия должен быть полным квадратом. Он равен

$$d = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 - \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right).$$

Тогда число d нечетно и является квадратом, поэтому оно дает остаток 1 при делении на 8. Перепишем равенство выше в виде

$$d + 1 + a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4$$

и рассмотрим его по модулю 8. Нетрудно проверить, что четвертые степени целых чисел дают лишь остатки 0 и 1 при делении на 8, т.е. правая часть равенства дает остаток 0 или 1. Левая же часть сравнима с $1 + 1 + k$, где k – количество нечетных чисел среди a_i. Значит, $n \ge k \ge 6$.

3. Пусть P – вторая точка пересечения BO с окружностью Ω (рис.2). Тогда BP – диаметр

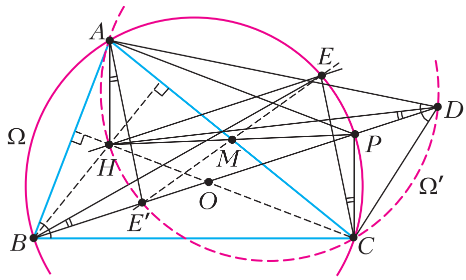


Рис. 2

Ω, и $\angle BCP = 90^\circ = \angle BAP$. Значит, $CP \parallel AH$ и $AP \parallel CH$. Следовательно, четырехугольник $AHCP$ – параллелограмм. Обозначим через M точку пересечения его диагоналей. Она является серединой отрезков PH и AC.

При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку C, а точка P – в точку H. Пусть при этой симметрии точка E переходит в E', а окружность Ω – в Ω'. Тогда точки A, H, E' и C лежат на Ω'. Поскольку $\angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - \angle AHC$, точка D также лежит на Ω'.

В силу симметрии, $\angle ECP = \angle E'AH$, а также $PE' \parallel HE$ – поэтому точка E' лежит на прямой PB. Из вписанности четырехугольников $AHE'D$ и $BEPC$ получаем, что $\angle EBP = \angle ECP = \angle E'AH = \angle E'DH$. Таким образом, $\angle EBD = \angle BDH$. Это означает, что трапеция $BHED$ – равнобокая, поэтому $BH = DE$.

4. Перейдем к графу, вершины которого соответствуют детям, а ребра – дружбам. Напомним, что раскраска вершин называется *правильной*, если цвета любых двух вершин, соединенных ребром, различны. Таким образом, граф правильно раскрашен в 7 цветов, в нем выделено 100 *стабильных* вершин, и требуется перекрасить часть остальных вершин так, чтобы раскраска осталась правильной.

Предположим, что это невозможно. Пронумеруем цвета числами 1, 2,…,7. Рассмотрим любые два цвета $i < j$. Оставим в графе только вершины этих цветов и ребра между ними; обозначим полученный граф через G_{ij}. Этот граф может распасться на несколько компонент связности; обозначим через c_{ij} их количество. Если $c_{ij} > 100$, то в одной из компонент нет стабильных вершин; тогда можно изменить цвет каждой вершины в этой компоненте, заменив i на j и наоборот, и добиться требуемой альтернативной раскраски.

Значит, $c_{ij} \le 100$ при всех i и j. Заметим, что каждая компонента связности, содержащая x вершин, содержит не менее $x - 1$ ребер; значит, если в G_{ij} есть v_{ij} вершин, то количество ребер в нем e_{ij} не меньше чем $v_{ij} - c_{ij}$, т.е.

$$e_{ij} \ge v_{ij} - 100. \qquad (*)$$

С другой стороны, нетрудно найти сумму V всех чисел v_{ij} и сумму E всех чисел e_{ij}. Действительно, в исходном графе 10000 вершин и каждая из них участвует в 6 графах вида G_{ij}; поэтому $V = 6 \cdot 10000 = 60000$. С другой стороны, в исходном графе $11 \cdot 10000/2 = 55000$ ребер и каждое участвует ровно в одном графе G_{ij}; поэтому $E = 55000$.

Поскольку пар цветов всего $C_7^2 = 21$, неравенство $(*)$ влечет $E \ge V - 21 \cdot 100$, что не так для найденных значений. Значит, наше предположение неверно, и требуемая перекраска возможна.

5. Предположим противное: пусть прямоугольники имели размеры $k \times l$, где $l < k$. Пусть a_i – длина стороны квадрата у i-го ребенка. Тогда каждая сторона прямоугольника составлена из нескольких отрезков длиной a_i, т.е. $l = b_i a_i$ и $k = c_i a_i$, где b_i и c_i – натуральные числа. При этом у ребенка получилось $b_i c_i$ квадратиков.

Заметим, что $1 < k/l = c_i/b_i$, т.е. число k/l рационально. Пусть s/t – его несократимая запись; тогда $s > 1$, и c_i делится на s при всех i. Значит, и число квадратиков у i-го ребенка делится на s. Тогда общее число квадратиков Q также делится на $s > 1$, и притом $Q > s$ (поскольку количество детей больше 1). Значит, Q – составное число; противоречие.

6. Продлим отрезок AM на его длину за точку M, получим точку N такую, что $ADNT$ – параллелограмм. Поскольку $\angle ANT = \angle CAM$, для решения задачи достаточно показать, что $\angle AKT = \angle ANT$, или что точки A, T, N, K лежат на одной окружности (рис.3).

Пусть ND пересекает AB в точке S; тогда $DS \parallel BC$, и $BSDC$ – равнобокая трапеция. Мы докажем, что точки K и N лежат на окружности ω, описанной около треугольника AST. Имеем $\angle ATN = \angle ADN = 180^\circ - \angle SDA = 180^\circ - \angle ASD$, значит, N лежит на окружности ω. Из окружности, описанной около трапеции $BSDC$, имеем $\angle SKT = \angle SBC = 180^\circ - \angle SAT$, поэтому K ле-

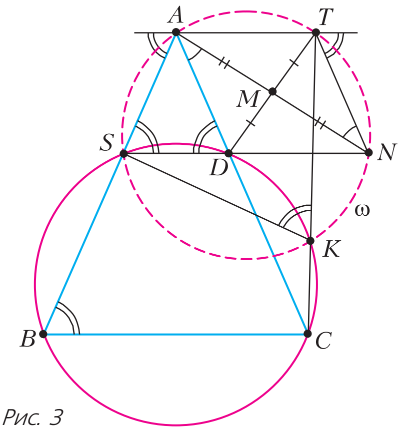


Рис. 3

жит на окружности ω, что и требовалось доказать.

7. Обозначим юбилейную монету через *Ю*. Отложим две неюбилейные монеты A и B и разложим оставшиеся 14 монет по 7 на каждую чашу так, чтобы *Ю* попала на левую. Назовем монету *левой* или *правой*, если при взвешивании она попала на левую или правую чашу соответственно.

Случай (=). Пусть чаши оказались в равновесии.

В этом случае либо на каждой чаше по 3 тяжелых монеты (и тогда A и B обе тяжелые), либо по 4 (тогда A и B легкие). В любом случае обе отложенные монеты одинаковы. В этом случае возьмем с левой чаши *Ю* и еще одну монету C и сравним эту пару с парой A и B.

Подслучай (=,=). Пусть снова получено равновесие.

Тогда все 4 монеты A, B, C, *Ю* весят одинаково. Сравним их с любыми другими четырьмя левыми монетами. Если весы окажутся в равновесии, то все 8 монет во взвешивании – одного веса. Тогда среди левых монет было 6 монет такого веса; это невозможно. Значит. какая-то чаша перевесит, и мы узнаем, являлись A, B, C и *Ю* тяжелыми или легкими.

Подслучай (=,<). Чаша, содержащая *Ю* во втором взвешивании, легче.

Тогда на этой чаше не может быть двух тяжелых монет. Сравнив эти две монеты друг с другом, мы в случае неравенства сразу узнаем вес *Ю*, а в случае равенства сможем сделать вывод о том, что обе монеты на этой чаше – легкие.

Подслучай (=,>), когда чаша с *Ю* тяжелее, аналогичен.

Случай (<). Пусть левая чаша в первом взвешивании оказалась легче.

Тогда среди левых монет не более трех тяжелых. Сравнив *Ю* с какой-нибудь левой монетой C, мы либо узнаем вес *Ю* (в случае неравенства), либо найдем две одинаковые монеты (*Ю* и *С*). Сравнив эту пару с другой парой левых монет, мы опять же узнаем вес *Ю* в случае неравенства. В случае же равенства мы найдем 4 левые монеты одного веса, одна из которых – *Ю*. Как уже отмечалось, они могут быть только легкими.

Случай (>), когда в первом взвешивании чаша с *Ю* тяжелее, аналогичен предыдущему.

8. По неравенству о средних имеем $b + c \ge 2\sqrt{bc}$, откуда

$$4\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \le 2\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = 2\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}} \le \left(a-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c},$$

где в последнем переходе опять применено неравенство о средних. Аналогично выводятся неравенства

$$4\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \le \left(b-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a}, \quad 4\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \left(c-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}.$$

Складывая три полученных неравенства, получаем требуемое.

Замечание. Равенство достигается при $a = b = c = \sqrt{2}$.

10 класс

3. 8824.

Предположим, что при 8824 постояльцах директор не может осуществить переселение. Разобьем комнаты на пары по вместимости: 101–200, 102–199,..., 150–151. Отметим, что для каждой пары комнат суммарное количество человек, живущих в двух комнатах, больше, чем вместимость большей комнаты из пары, иначе всех человек из этой пары можно было бы собрать в комнате с большей вместимостью. Таким образом, общее количество людей не меньше $201 + 200 + 199 + \ldots + 152 = 353 \cdot 25 = 8825$. Поэтому при 8824 постояльцах директор может освободить комнату.

Теперь приведем пример, доказывающий, что при 8825 и более постояльцах существует расселение, в котором освободить комнату указанным образом не удастся.

Упорядочим комнаты по возрастанию вместимости. Пусть в первых пятидесяти комнатах живет по 76, а в комнате вместимости k при $151 \le k \le 200$ живет $k - 75$ человек. Посчитаем количество постояльцев в гостинице:

$$76 \cdot 50 + (76 + 77 + 78 + \ldots + 125) = 3800 + 201 \cdot 25 = 3800 + 5025 = 8825.$$

Рассмотрим две произвольные комнаты вместимости $a < b$. Заметим, что в комнате вместимости b живет не меньше $b - 75$ человек, а в комнате a – не меньше 76 человек. Таким образом, переселить людей из одной комнаты в другую ни для какой пары комнат не удастся, поэтому пример подходит. Если $n > 8825$, то достаточно селить оставшихся людей поочередно в любые комнаты, где еще остаются свободные места.

6. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ACB = 2\gamma$. Не умаляя общности, считаем, что $\alpha \ge \gamma$. Поскольку точки D и E – середины дуг AB и AC окружности ω, имеем $\angle ABD = \frac{\angle ACB}{2} = \gamma$ и $\angle CBE = \alpha$. Обозначим через M и N середины сторон AB и BC соответственно (рис.4). Тогда MN – средняя

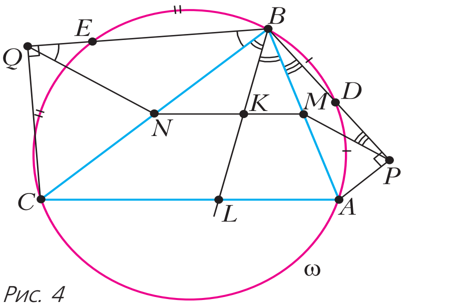


Рис. 4

линия треугольника ABC, она параллельна стороне AC и проходит через середину K отрезка BL. Также $\angle AMK = 180^\circ - \angle MAC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BNK = \angle BCA = 2\gamma$.

Пусть $BM = MA = c$, $BN = NC = a$. Отрезок MP является медианой в прямоугольном треугольнике APB, поэтому $MP = c$ и $\angle MPB = \angle MBP = \gamma$; аналогично, $NQ = a$ и $\angle NQB = \alpha$. Следовательно, $\angle QNK = \angle BNK + \angle BNQ = 2\gamma + 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle PMK = \angle AMK + \angle PMA = 180^\circ - 2\alpha + 2\gamma$. Так как $\alpha \ge \gamma$, то либо точки P и Q лежат на прямой MN, и в таком случае задача уже решена, либо точка P лежит в той же полуплоскости, что и точка A относительно прямой MN, а точка Q – в другой полуплоскости.

Заметим, что BK – биссектриса треугольника BMN, поэтому $MK/KN = c/a = MP/QN$. Вместе с равенством $\angle PMK = \angle QNK$ это означает, что треугольники PMK и QNK подобны. Значит, $\angle MKP = \angle NKQ$. Поскольку точки P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MN, точки P, M и K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

7. Да, может.

Приведем один из возможных примеров. Выделим трех школьников. Будем называть сыгранными команды, в которых содержится 1 или 3 выделенных школьника, а остальные – несыгранными.

Выделенные школьники могут либо оказаться в трех разных командах, и тогда мы получим три сыгранные команды и одну несыгранную, либо оказаться все в одной команде, и мы получим одну сыгранную и три несыгранные, либо двое могут оказаться в одной команде и один в другой, в этом случае мы также получаем одну сыгранную и три несыгранные команды. Таким образом, все условия соблюдаются.

Замечание. Также подходят все примеры, когда выделено нечетное количество школьников, большее 1 и меньшее 23, и все команды, в которых присутствует нечетное количество выделенных школьников, объявляются сыгранными, а все остальные – несыгранными.

8. Заметим сразу, что при каждом натуральном b в последовательности a_0, a_1, a_2,... встретится бесконечно много b-х степеней натуральных чисел, больших единицы. Действительно, если их количество конечно и наибольшая из них – это $N = x^b$, то в последовательности не встретится ни одной (Nb)-й степени, что невозможно.

Положим $d_k = a_{k+1} - a_k$; тогда $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Поскольку все коэффициенты многочлена целые, из $a \equiv a' \pmod{d_k}$ следует $P(a) \equiv \equiv P(a') \pmod{d_k}$. Отсюда непосредственной индукцией по s получаем, что $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, т.е. $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ при всех $s \ge 0$.

Лемма. $a_k(a_k - 1)$ *делится на* d_k.

Доказательство. Пусть p^l – максимальная степень простого числа p, делящая d_k; достаточно показать, что $a_k(a_k - 1)$ делится на p^l. Положим $b = p^{l-1}(p-1)l$; согласно замечанию выше, найдется такой индекс $s > k$, что $a_s = m^b$ при натуральном m; при этом $a_s \equiv a_k \left(\mathrm{mod}\, p^l\right)$.

Если m не делится на p, то по теореме Эйлера $a_s = \left(m^{p^{l-1}(p-1)}\right)^l \equiv 1^l \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p^l\right)$, откуда $a_k \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p^l\right)$. Если же m делится на p, то a_s делится на p^l, а значит, и a_k тоже. В любом случае $a_k(a_k - 1)$ делится на p^l, что и требовалось.

Согласно лемме, для любого k число $a_k(a_k - 1)$ делится на $d_k = P(a_k) - a_k$; при этом по условию среди целых чисел a_k бесконечно много различных. В частности, $|x(x-1)| \ge |Q(x)|$ при бесконечном количестве целых значений x (где $Q(x) = P(x) - x$).

Предположим теперь, что степень многочлена $P(x)$ (и, как следствие, многочлена $Q(x)$) больше 1. Тогда неравенство выше может выполняться для бесконечно многих целых x лишь тогда, когда $Q(x)$ – квадратный трехчлен со старшим коэффициентом ± 1, т.е. $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$. В этом последнем случае значения многочлена $Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$ делятся на $Q(x)$ для бесконечного количества целых x; это может быть лишь если $Q(x) = \pm x(x-1)$, т.е. $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В первом случае $a_k = n^{2^k}$, т.е. a_k не может быть нечетной степенью натурального числа, если n не является таковой степенью. Во втором случае $P(x) \le 1$ при всех x, т.е. $P(x)$ не может быть степенью натурального числа, большего 1. В обоих случаях условие задачи не выполнено; значит, $P(x)$ линеен.

11 класс

2. Нет.

Покажем, что система не будет иметь решений при $a = 8$, $b = 13$. Действительно, из уравнений системы вытекает, что

$$13x + ay = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 21x + by = \frac{\pi}{2} + \pi l$$

при целых k и l. Отсюда следует

$$(21a - 13b)y = 21(13x + ay) - 13(21x + by) = \\ = \pi(4 + 21k - 13l).$$

При $a = 8$, $b = 13$ получаем $y = (13l - 21k - 4)\pi$, а значит, $\mathrm{tg}(ay) = 0$. Поэтому первое уравнение системы не может выполняться.

4. Отметим точки K_1 и L_1 касания вписанной сферы ω тетраэдра с гранями ACD и BCD соответственно, а также точки K_2 и L_2 касания сфер ω_B и ω_A с этими гранями. Сферы ω и ω_A гомотетичны с центром в точке A, поэтому точка K_1 лежит на отрезке AK. Аналогично, точка L_1 лежит на отрезке BL.

Покажем, что точки L_1 и L_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD, т.е. $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$, $\angle DBL_1 = \angle CBL_2$ и $\angle CDL_1 = = \angle BDL_2$. Докажем первое из этих равенств; остальные два доказываются аналогично. Обозначим через M_1 и M точки касания плоскости ABC со сферами ω и ω_A соответственно (рис.5). Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, следует, что такие пары треугольников равны по трем сторонам: $\Delta CK_1D = \Delta CL_1D$, $\Delta AK_1C = \Delta AM_1C$, $\Delta BL_1C = = \Delta BM_1C$, $\Delta CL_2D = \Delta CKD$, $\Delta BL_2C = \Delta BMC$, $\Delta AKC = \Delta AMC$. Значит, $\angle BCL_1 + \angle BCL_2 =$

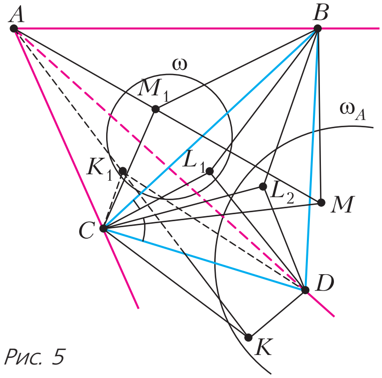


Рис. 5

$= \angle BCM_1 + \angle BCM = \angle ACM - \angle ACM_1 = \angle ACK - \angle ACK_1 = \angle DCK_1 + \angle DCK = \angle DCL_1 + \angle DCL_2$, откуда следует требуемое равенство $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$.

Используя условие задачи и доказанную изогональную сопряженность точек L_1 и L_2, получаем, что

$$\angle CXD = \angle CKD - \angle CBD =$$
$$= \angle CL_2D - \angle CBD = \angle BCL_2 + \angle BDL_2 =$$
$$= \angle DCL_1 + \angle CDL_1 = 180^\circ - \angle CL_1D =$$
$$= 180^\circ - \angle CK_1D .$$

Следовательно, четырехугольник CK_1DX вписанный. Аналогично устанавливается вписанность четырехугольника CL_1DY.

Обозначим через N_1 точку касания сферы ω и грани ABD. Из равенства треугольников $\Delta AK_1C = \Delta AM_1C$ и равенства аналогичных пар треугольников, примыкающих к пяти остальным

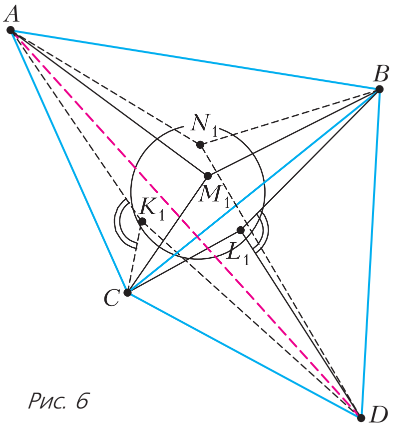


Рис. 6

ребрам тетраэдра $ABCD$, получаем (рис.6), что

$$2\angle AK_1C = \angle AK_1C + \angle AM_1C =$$
$$= \left(360^\circ - \angle AK_1D - \angle CK_1D\right) +$$
$$+ \left(360^\circ - \angle AM_1B - \angle BM_1C\right) =$$
$$= 360^\circ - \angle AN_1D - \angle CL_1D + 360^\circ - \angle AN_1B -$$
$$- \angle BL_1C = \angle BL_1D + \angle BN_1D = 2\angle BL_1D .$$

Так как точки K_1 и L_1 лежат на отрезках AX и BY соответственно, отсюда следует, что $\angle CK_1X = \angle DL_1Y$.

Повернем плоскость BCD вокруг прямой CD так, чтобы она совместилась с плоскостью ACD и при этом треугольник CL_1D совместился с равным ему треугольником CK_1D (рис.7). При этом повороте окружность, описанная около четырехугольника CL_1DY, перейдет в окружность γ, описанную около четырехугольника CK_1DX. В частности, точка Y перейдет в некоторую точку Y' на окружности γ. Из равенства углов

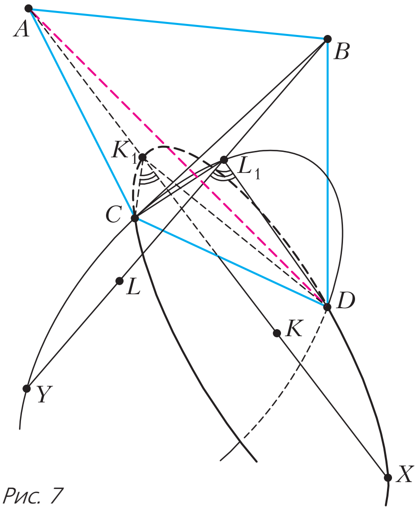


Рис. 7

$\angle CK_1X = \angle DL_1Y = \angle DK_1Y'$ следует, что точки X и Y' симметричны относительно диаметра окружности γ, перпендикулярного хорде CD. Следовательно, точки X и Y', а значит, и точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

5. При $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Можно считать, что $q \ge 1$. Пусть радиус ω_i равен $R_i = Rq^i$.

Выберем некоторое положительное l и попытаемся построить требуемую ломаную с отрезками длины l, стартуя с произвольной точки $A_0 \in \omega_0$. Пусть точка $A_i \in \omega_i$ уже построена. Расстояния от нее до точек окружности ω_{i+1} пробегают отрезок $[R_{i+1} - R_i; R_{i+1} + R_i]$, т.е. $\left[Rq^i(q-1); Rq^i(q+1)\right]$. Точку A_{i+1} можно построить тогда и только тогда, когда l принадлежит этому отрезку. Значит, ломаную удастся построить тогда и только тогда, когда $Rq^i(q-1) \le l \le Rq^i(q+1)$ при всех $i = 0, 1, 2, 3$.

Поскольку $q \ge 1$, эта система неравенств равносильна неравенствам $Rq^3(q-1) \le l \le Rq^3(q+1)$. Длина l, удовлетворяющая им, существует тогда и только тогда, когда $q^3(q-1) \le q+1$, т.е. $q^4 - q^3 - q - 1 \le 0$, или $\left(q^2 - q - 1\right)\left(q^2+1\right) \le 0$. Наибольшее значение q, удовлетворяющее этому неравенству, есть $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

8. $(n+1)n^2$.

Введем систему координат так, чтобы центры кубиков имели координаты от 1 до $3n$ по каждой оси. Каждому кубику присвоим координаты его центра. Таким образом, кубик черный тогда и только тогда, когда все его координаты дают остаток 2 при делении на 3.

Окрасим красным все белые кубики с координатами (a,b,c), где a делится на 3, а $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$, а также все кубики с координатами $(1,b,c)$, где $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$. Нетрудно видеть, что получилось $(n+1)n^2$ красных кубиков, и требования задачи выполнены. Осталось показать, что добиться требуемого нельзя, окрасив менее $(n+1)n^2$ кубиков.

При i =1, 2,..., n положим $w_{3i} = i$, $w_{3i-1} = 0$, $w_{3i-2} = n+1-i$; последовательность (w_i) выглядит так: n, 0, 1, $n-1$, 0, 2, $n-2$,..., 1, 0, n. Запишем в каждый кубик с координатами (a,b,c) число $w_a w_b w_c$ (в частности, в черных кубиках записаны нули). Тогда общая сумма всех чисел, записанных в белых кубиках, окажется равной

$$\Sigma = (w_1 + \ldots + w_{3n})^3 = n^3 (n+1)^3 .$$

Назовем *ценой* $S(X)$ кубика X сумму чисел во всех кубиках, имеющих с ним общую вершину (включая сам X). Тогда в любой окраске, удовлетворяющей требованиям, сумма цен красных кубиков не меньше чем Σ. Докажем теперь, что $S(X) \le (n+1)^2 n$ для любого белого кубика X. Из этого будет следовать, что в красный цвет надо окрасить не менее $\dfrac{\Sigma}{(n+1)^2 n} = (n+1)n^2$ кубиков, что и требовалось.

Пусть (a,b,c) – координаты кубика X. Абсциссы всех кубиков, имеющих с ним общую вершину, равны a или $a \pm 1$; такое же утверждение верно для остальных координат. Поэтому

$$S(X) = (w_{a-1} + w_a + w_{a+1}) \times (w_{b-1} + w_b + w_{b+1})(w_{c-1} + w_c + w_{c+1}),$$

где мы полагаем $w_0 = w_{3n+1} = 0$. Осталось заметить, что $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n$, если $t \not\equiv 2 \pmod 3$, иначе $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n+1$. Поскольку не все координаты X дают остаток 2, отсюда следует, что $S(X) \le (n+1)^2 n$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП LIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

1. Построения видны на рисунке 8. За время τ катер проходит расстояние 1,5 км.

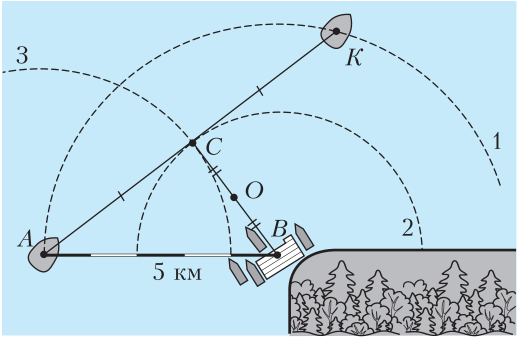


Рис. 8

2. $v = \dfrac{2L_1}{\tau}\left(\sqrt{1+\dfrac{L_2}{L_1}} - 1\right) = 20$ м/с .

3. $\mu = \operatorname{tg}\beta = 0{,}36$ (первой проскользнет легкая опора, так как на нее действует меньшая сила нормальной реакции).

4. Пусть M – масса цилиндра. В случае, когда после погружения цилиндра в калориметр жидкость не вытекает, из уравнения теплового баланса находим установившуюся в калориметре температуру и обратную ей величину:

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{T} + \frac{c_0}{c}\frac{m_0}{T}\frac{1}{M} .$$

Зависимость $y = \dfrac{1}{t}$ от $x = \dfrac{1}{M}$ будет линейной с угловым коэффициентом $k_1 = \dfrac{c_0 m_0}{cT}$ и свободным членом $b_1 = \dfrac{1}{T}$. Если при погружении часть жидкости вытекает, т.е. объем цилиндра больше объема части калориметра ΔV, не занятого жидкостью, то получим

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0 + c_0 \rho_0 \Delta V - \dfrac{M}{\rho}\rho_0 c_0},$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{c_0 \rho_0}{c\rho}\right) + \frac{c_0}{c}\frac{m_0 + \Delta m}{T}\frac{1}{M},$$

где $\Delta m = \rho_0 \Delta V$.

Нанесем на координатную плоскость (y,x), где $y = \dfrac{1}{t}$, $x = \dfrac{m}{M}$, данные условия задачи. Из рисунка 9 видно, что точки 1 и 2 соответствуют первому случаю, а точки 3 и 4 – второму. Отсюда получим: 1) $T = 90\,^\circ\text{C}$; 2) $\gamma = \dfrac{2}{3}$; 3) m = = 300 г; 4) $\dfrac{c_0}{c} = 12$.

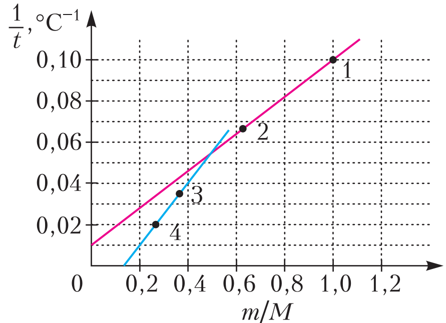


Рис. 9

5. 1) Эквивалентная схема изображена на рисунке 10. Разорвав узлы A и B_1, получим систему параллельных и последовательных соединений

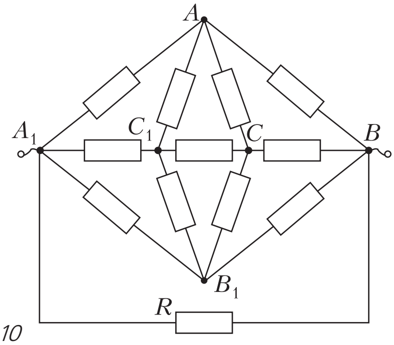


Рис. 10

резисторов, откуда найдем

$$R_{AA_1} = \frac{5}{12}R = 5\text{ Ом}.$$

2) В этом случае эквивалентная схема (рис.11)

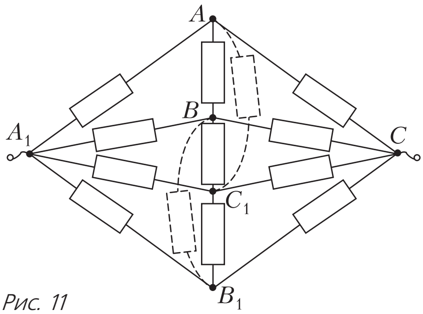


Рис. 11

представляет собой сбалансированный мост и

$$R_{CA_1} = \frac{1}{2}R = 6\text{ Ом}.$$

10 класс

1. 1) Рассмотрим момент времени τ. Так как стержень не напряжен, то ускорение шайбы массой m_2 равно нулю. Если выбрать инерциальную систему отсчета, в которой эта шайба в данный момент времени имеет нулевую скорость, то шайба массой m_1 в этот момент движется по траектории, радиус кривизны которой равен L. Проекция ускорения этой шайбы на стержень равна $\dfrac{F\cos\alpha}{m_1}$, и она же равна $\omega^2 L$. Значит,

$$\omega = \sqrt{\frac{F\cos\alpha}{Lm_1}}.$$

2) За небольшой промежуток времени после начала действия силы шайба, к которой приложена сила, сместится в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению расположения стержня, на малое расстояние

$$dL_{\text{попер}} = \frac{F\sin\alpha}{m_1}\frac{t^2}{2}$$

и стержень повернется на малый угол

$$d\varphi = \frac{dL_{\text{попер}}}{L} = \frac{F\sin\alpha}{m_1 L}\frac{t^2}{2}.$$

Так как угловое ускорение постоянно, то

$$d\varphi = \beta\frac{t^2}{2}, \text{ откуда } \beta = \frac{F\sin\alpha}{Lm_1}.$$

3) Поскольку угловое ускорение постоянно, то

$$\omega = \beta\tau, \text{ и } \tau = \sqrt{\frac{Lm_1\cos\alpha}{F\sin^2\alpha}}.$$

4) Угол поворота к моменту времени τ равен

$$\varphi = \frac{\beta\tau^2}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}.$$

2. Введем оси координат x и y с началом в точке пересечения каналов, направленные вдоль них. Если x и y – координаты частиц, то $x^2 + y^2 = R^2$. При неизменности расстояния, а значит, и потенциальной энергии из закона сохранения энергии следует, что сумма квадратов скоростей шариков неизменна: $v_x^2 + v_y^2 = \text{const}$. Для ускорений шариков из второго закона Ньютона и закона Кулона имеем

$$a_x = -\frac{kq^2x}{mR^3} \text{ и } a_y = -\frac{kq^2y}{mR^3},$$

поскольку поперечные каналам проекции кулоновской силы уравновешиваются силами нормальной реакции опоры, а сил трения нет.

Рассмотрим воображаемую «квазичастицу» массой m, движущуюся в плоскости xy. Пусть координаты частицы равны координатам x и y наших частиц. Пусть на нее действует сила, равная kq^2/R^2 и направленная к началу координат. Заметим, что проекции ускорения квазичастицы на оси x и y в точности равны ускорениям исходных частиц a_x и a_y. Учитывая, что и координаты квазичастицы равны координатам исходных частиц, получим, что движение квазичастицы по окружности радиусом R эквивалентно движению исходных частиц. При этом скорость v движения квазичастицы по окружности постоянна, так как $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Для центростремительного ускорения квазичастицы из выражений для проекций ускорения получим

$$\frac{v^2}{R} = \frac{kq^2}{mR^2}, \text{ откуда}$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{kq^2}{2R}.$$

3. Заметим, что цикл состоит из трех процессов с теплоемкостями $\frac{5}{2}R$, $\frac{3}{2}R$ и $2R$, значит, первые два процесса это изохорический и изобарический. Выясним, какой процесс имеет теплоемкость $2R$:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{(3/2)(pdV + Vdp) + pdV}{(1/R)(pdV + Vdp)} = 2R,$$

откуда $pdV = Vdp$, или $\frac{p}{V} = \frac{dp}{dV}$, что соответствует процессу, в котором давление пропорционально объему.

Поскольку изохорический процесс на графике в условии представлен в виде точки, то это означает, что по оси абсцисс отложены объем или плотность. Рассмотрим вариант, где по оси абсцисс отложен объем. Тогда получаем цикл, изображенный на рисунке 12. Найдем его КПД, обозначив минимальные давления и объем p_0 и V_0:

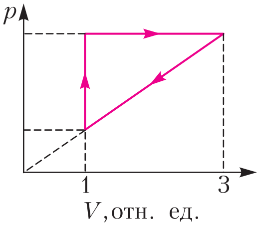


Рис. 12

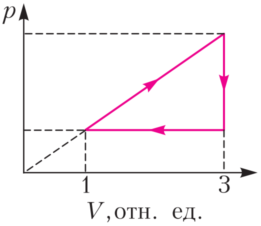


Рис. 13

$$\eta = \frac{A}{Q_{пол}} = \frac{(1/2)\cdot 2p_0 \cdot 2V_0}{(3/2)(3p_0 \cdot 3V_0 - p_0V_0) + 3p_0 \cdot 2V_0} = \frac{2p_0V_0}{18p_0V_0} = \frac{1}{9}.$$

Если по оси абсцисс графика из условия отложено ρ или $\frac{1}{V}$, то соответствующий цикл представлен на рисунке 13. КПД этого цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{пол}} = \frac{(1/2)\cdot 2p_0 \cdot 2V_0}{(3/2)(3p_0 \cdot 3V_0 - p_0V_0) + ((p_0 + 3p_0)/2)\cdot 2V_0} = \frac{2p_0V_0}{16p_0V_0} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, максимальный КПД цикла равен $1/8$.

4. 1) По принципу суперпозиции, потенциал φ_2 равен удвоенному потенциалу вершины равносторонней треугольной пластинки со стороной a и поверхностной плотностью заряда σ. Если размеры пластинки увеличить в 2 раза, сохранив поверхностную плотность заряда, то потенциал каждой точки тоже увеличится в 2 раза. (Докажите это.) Значит, потенциал точки C в 2 раза больше потенциала вершины пластинки со стороной a, т.е. $\varphi_C = \varphi_2$.

2) Мысленно разобьем треугольник на 4 треугольника со сторонами a (рис.14). Заметим, что $AEDF$ – это исходный ромб, который создает в точке D потенциал φ_1. К нему нужно добавить потенциалы, создаваемые треугольниками BDE и DFC. Потенциал каждого из них в вершине D равен $\varphi_2/2$. Отсюда $\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2$.

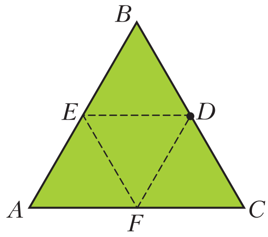


Рис. 14

3) После удаления центрального треугольника потенциал в точке D уменьшился на $\varphi_2/2$ и стал равен $\varphi_{D'} = \varphi_1 + \varphi_2/2$.

4) Для нахождения потенциала точки C «дырявой» пластинки нужно узнать, какой потенциал создавал в ней треугольник DEF. Рассмотрим ромб $CFED$. Его потенциал в точке C равен φ_1 и складывается из потенциала, создаваемого треугольником DEF, и потенциала, создаваемого треугольником FDC и равного $\varphi_2/2$. Тогда треугольник DEF создает в точке C потенциал $\varphi_1 - \varphi_2/2$. Значит, после удаления центрального треугольника потенциал точки C станет равным

$$\varphi_{C'} = \varphi_2 - \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2}\right) = \frac{3}{2}\varphi_2 - \varphi_1.$$

5. Из соображений симметрии очевидно, что из узла A ток разбежится поровну по 4 возможным направлениям (рис.15). Значит, $I_1 = I/4$. В узле B ток делится на 3 части, причем ток, бегущий вправо, будет равен току, бегущему влево. Обозначим эти токи I_2, а оставшийся ток – I_3. Из соображений симметрии относительно прямой AC следует, что по звену FC тоже течет ток I_2. Также из симметрии следует, что токи, вытекающие из узла C вверх и вправо, равны друг другу. Учитывая, что в узел C втекает ток $2I_2$, получаем, что вытекающие из него токи тоже равны I_2.

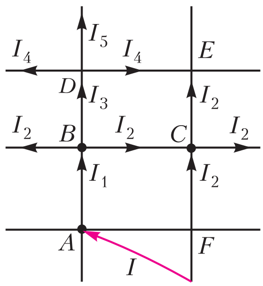


Рис. 15

Для узла B: $I_1 = \frac{I}{4} = 2I_2 + I_3$, или $I_3 = \frac{I}{4} - 2I_2$.

Напряжение между узлами B и E можно посчитать двумя способами: $I_3R + I_4R = I_2R + I_2R$, откуда $I_4 = 2I_2 - I_3$.

Для узла D: $I_3 = 2I_4 - I_5$. Так как $I_5 > 0$, то $I_3 > 2I_4$. Преобразуем: $I_3 > 2(2I_2 - I_3)$, или

$3I_3 > 4I_2$, $\quad 3\left(\dfrac{I}{4} - 2I_2\right) > 4I_2$, $\quad 3I - 24I_2 > 16I_2$, $\quad I_2 < \dfrac{3}{40}I$.

С другой стороны, $I_4 > 0$, $2I_2 - I_3 > 0$, $2I_2 - \dfrac{I}{4} + 2I_2 > 0$, $I_2 > \dfrac{I}{16}$.

Значит, $\dfrac{1}{16}I < I_2 < \dfrac{3}{40}I$, или $\dfrac{10}{160}I < I_2 < \dfrac{12}{160}I$. Окончательно получим

$$I_2 = \left(\frac{11}{160} \pm \frac{1}{160}\right)I .$$

Погрешность оценки составляет $1/11 = 9\%$.

11 класс

1. Если проскальзывания нет, то длина дуги AB (рис. 16) равна длине дуги BD (и OE). Так как радиусы цилиндров различаются в два раза, то $\angle OCE = 2\angle AOB$. Треугольник OCE – равнобедренный, значит, $\angle COE = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle OCE = 90^\circ - \angle AOB$, и $\angle AOE = 90^\circ$. Таким образом, тело всегда находится на перпендикуляре к OA, т.е. движется по прямой, составляющей угол α с горизонтом.

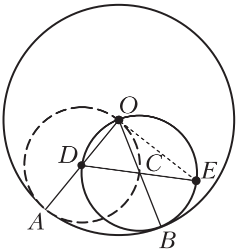


Рис. 16

1) Запишем закон сохранения энергии для тела, которое движется по прямой линии. Пусть оно сместилось на расстояние l вдоль прямой OE. Тогда изменение высоты равно $\Delta h = -l\sin\alpha$, ускорение постоянно и равно $a = g\sin\alpha$.

2) Изменение высоты тела, когда плоскость OC вертикальна, равно $\Delta h = -R(1 - \cos 2\alpha)/2$. Тогда, по закону сохранения энергии, $v = \sqrt{2gR}\sin\alpha$.

3) На систему «тело–меньший цилиндр» действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Сумма векторов сил реакции и трения (рис. 17) направлена перпендикулярно OE (прямо на тело в точке E, так как на меньший цилиндр не может действовать ненулевой момент сил, потому что массой цилиндра и размером тела мы пренебрегаем) и равна по модулю $mg\cos\alpha$. Тогда $N = mg\cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$, $F_{тр} = mg\cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$, где β – угол отклонения плоскости OC от вертикали, отсчитываемый в направлении качения.

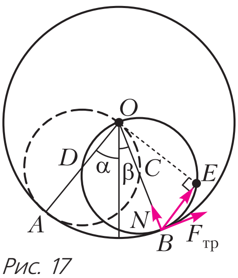


Рис. 17

Неравенство $F_{тр} \le \mu N$ дает условие для отсутствия проскальзывания: $\mu \ge \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Для того чтобы плоскость OC заняла симметричное начальному положение, должно быть выполнено $\beta = \alpha$, значит, $\mu_{\min} = \operatorname{tg}2\alpha$.

4) Проскальзывание начнется при $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \mu$. А к этому моменту тело вдоль прямой OE пройдет расстояние $l = R\sin(\alpha + \beta) = R\dfrac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$. Из закона сохранения энергии получаем

$$v = \sqrt{\frac{2gR\mu\sin\alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}} .$$

2. При изобарическом плавлении температура определяется условием равновесия фаз и не меняется. Изменение давления в теплоизолированном сосуде является адиабатическим процессом. Следовательно, если процесс, проведенный в первом сосуде, объединить с обращенным процессом, проведенном во втором сосуде, мы получим цикл Карно. В этом цикле Q_1 – это количество теплоты, подведенное от нагревателя, $Q_1 - Q_2 = -(p_B - p_A)\Delta V_X < 0$ – совершенная работа, T_A – температура нагревателя, а T_B – температура холодильника, а ΔV_X – увеличение объема при плавлении. Поскольку

$$\Delta V_X = m\left(\frac{3}{2\rho_X} + \frac{5}{12\rho_X}\right) - m\left(\frac{1}{\rho_X} + \frac{5}{6\rho_X}\right) = \frac{m}{12\rho_X} ,$$

то

$$p_B = p_A + \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta V_X} = p_A + \frac{12\rho_X(Q_2 - Q_1)}{m} .$$

Коэффициент полезного действия цикла Карно равен

$$\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ откуда } T_B = T_A\frac{Q_2}{Q_1} > T_A .$$

Аналогично, для вещества Y получаем

$$Q_3 - Q_4 = -(p_D - p_C)\Delta V_Y > 0 ,$$

$$\Delta V_Y = m\left(\frac{3}{2\rho_Y} + \frac{5}{8\rho_Y}\right) - m\left(\frac{1}{\rho_Y} + \frac{5}{4\rho_Y}\right) = -\frac{m}{8\rho_Y} ,$$

$$p_D = p_C + \frac{8\rho_Y(Q_3 - Q_4)}{m} ,$$

$$T_D = T_C\frac{Q_4}{Q_3} < T_C .$$

3. При замыкании ключа в положение 1 конденсаторы подключены к источнику параллельно и заряжаются до напряжения U_0 каждый зарядом $q_0 = CU_0$. После переключения ключа в положение 2 начинаются колебания. Ток при этом течет в направлениях, указанных на рисунке 18, напряжения на конденсаторах C_1 и C_3 уменьшаются, на C_2 – увеличивается. Потенциал φ_d

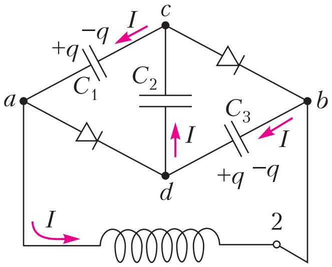


Рис. 18

точки d больше потенциала φ_a точки a, φ_b больше φ_c, ток через диоды не течет.

Пусть в момент времени t заряд конденсаторов C_1 и C_3 равен $q(t)$ ($t = 0$ при переключении ключа в положение 2), $q(0) = q_0$. Тогда протекший через катушку индуктивности заряд равен $\Delta q = q_0 - q$, а на конденсаторе C_2 заряд равен $q_2 = 2q_0 - q$. Для контура $abdca$ получаем

$$LI' = \frac{q}{C} - \frac{2q_0 - q}{C} + \frac{q}{C}.$$

Учитывая, что $I = -q'$, запишем

$$-Lq'' = \frac{3q}{C} - \frac{2q_0}{C}, \text{ или } Lq'' + \frac{3}{C}\left(q - \frac{2}{3}q_0\right) = 0.$$

Заменив $q - \frac{2}{3}q_0 = q_1$ и учитывая, что $q'' = q_1''$, получим

$$Lq_1'' = \frac{3}{C}q_1 = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, причем при $t = 0$ $q_1(0) = q_0/3$. Решение этого уравнения:

$$q_1(t) = q_1(0)\cos\omega t = \frac{q_0}{3}\cos\omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{3/(LC)}.$$

Для заряда $q(t)$ имеем

$$q(t) = q_1(t) + \frac{2}{3}q_0 = q_0\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\omega t\right).$$

Качественно график $I(t)$ представляет собой синусоиду, симметричную относительно оси времени и выходящую из начала координат. Ток через катушку индуктивности при этом меняется по гармоническому закону

$$I(t) = -q' = \frac{\omega q_0}{3}\sin\omega t.$$

Для заряда $q_2(t)$ конденсатора C_2 имеем

$$q_2(t) = 2q_0 - q(t) = q_0\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos\omega t\right).$$

При $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$ ток через катушку индуктивности становится равен нулю, затем течет в обратном направлении. Однако диоды по-прежнему закрыты, так как $\varphi_d > \varphi_a$ и $\varphi_b > \varphi_c$, поэтому в колебаниях участвует все та же последовательная цепочка и все ранее выписанные уравнения для колебаний остаются справедливыми. По истечении полного периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$ ток прекращается, конденсаторы возвращаются в исходное состояние и процесс повторяется вновь.

Таким образом, в процессе колебаний ток через диоды не течет и колебания тока являются гармоническими с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}$. Напряжение на конденсаторах C_1 и C_3 меняется в пределах от $\frac{U_0}{3}$ до U_0, на конденсаторе C_2 – в пределах от U_0 до $\frac{5U_0}{3}$, знаки зарядов на пластинах всех трех конденсаторов не меняются.

4. Шнур расположится в магнитном поле провода так, чтобы энергия его взаимодействия с полем была минимальна. Энергия малого элемента шнура в магнитном поле описывается в точности такой же формулой, что и энергия электрического диполя, т.е. системы двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на малом расстоянии Δl друг от друга, в электрическом поле $\vec{E}$. Поэтому при определении равновесного положения шнура во внешнем поле $\vec{B}$ можно заменить его на «цепочку» из диполей в поле $\vec{E}$ такой же конфигурации, что и $\vec{B}$. В этой цепочке диполи ориентированы вдоль нее и противоположные заряды соседних диполей компенсируются. Поэтому цепочка из диполей эквивалентна гибкой цепочке с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Если пренебречь электрическим взаимодействием этих зарядов и силой тяжести, то очевидно, что вектор $\vec{E}$ в точке расположения свободного конца цепочки должен быть направлен вдоль цепочки (сила $q\vec{E}$ уравновешивается силой натяжения цепочки). Также ясно, что в состоянии равновесия цепочка, растягиваемая за свободный конец, будет отрезком, проходящим через закрепленный конец и $\vec{E}$. Значит, расстояние между его концами равно длине шнура l. Возвращаясь к шнуру в поле провода, приходим к выводу: шнур будет растянут по прямой в плоскости, перпендикулярной проводу с током, и перпендикулярен радиусу, проведенному от оси провода к свободному концу шнура (рис.19). Следовательно, $x = \sqrt{l_1^2 - l^2}$.

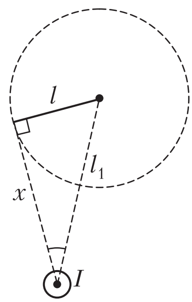


Рис. 19

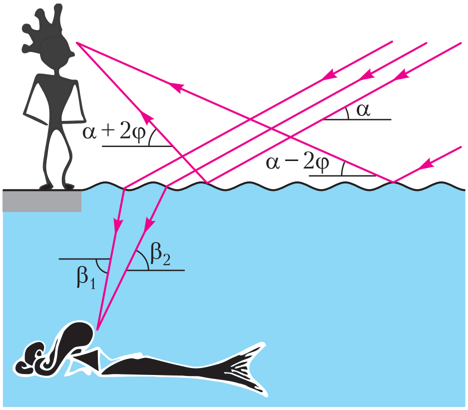


Рис. 20

5. Обозначим высоту Луны над горизонтом α, а амплитуду наклона поверхности воды φ. Направление лучей, ограничивающих видимую Принцем лунную дорожку, определяется углами $\alpha + 2\varphi$ и $\alpha - 2\varphi$ (рис.20):

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi) = \frac{H}{D_{\Pi}}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = \frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_{\Pi}} + \operatorname{arctg}\frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}}\right) \approx 0{,}189,$$

$$\varphi = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_{\Pi}} - \operatorname{arctg}\frac{H}{D_{\Pi} + L_{\Pi}}\right) \approx 0{,}078.$$

Из закона преломления, $n\cos(\beta_1 - \varphi) = \cos(\alpha - \varphi)$ и $n\cos(\beta_2 + \varphi) = \cos(\alpha + \varphi)$. Тогда

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{\alpha - \varphi}{n}\right) + \varphi, \quad \beta_2 = \arccos\left(\frac{\alpha - \varphi}{n}\right) - \varphi.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{H}{D_{\text{Р}}}$ и $\operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{H}{D_{\text{Р}} + L_{\text{Р}}}$, получим

$$D_{\text{Р}} = H\operatorname{ctg}\beta_1 = 1{,}67\ \text{м}, \quad L_{\text{Р}} = H\operatorname{ctg}\beta_2 - D_{\text{Р}} = 0{,}48\ \text{м}.$$

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

Гран-прИ в Москве

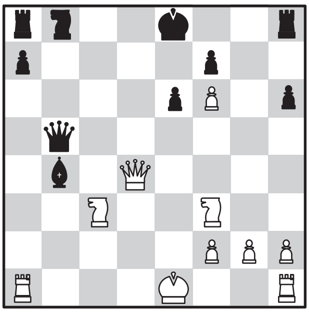
В мае 2019 года в Москве прошел этап Гран-при ФИДЕ, вызвавший настоящий ажиотаж среди любителей шахмат. В соревновании приняли участие многие ведущие шахматисты мира, а победителем стал российский гроссмейстер Ян Непомнящий, переигравший в финале своего соотечественника Александра Грищука.

Сегодня мы разберем две яркие партии из этого турнира, выигранные в принципиально разном стиле.

Д.Дубов – А.Гири

Москва, 2019

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♗g5 dc 5. e4 b5 6. a4 c6 7. ♘c3 b4 8. ♘b1 ♝a6 9. e5 h6 10. ♗f6 gf 11. ef c5 12. ♘bd2 c3?! (12…♞c6 13. bc bc 14. ♘c4 ♛f6 15. dc ♜d8 с упрощениями выглядит надежнее) **13. bc bc 14. ♘e4 cd 15. ♗b5+!** (сильнее, чем размен на а6, теперь черные испытывают трудности с завершением развития) **15…♝b5 16. ab ♛d5 17. ♕d4 ♛b5 18. ♘c3?!** (после более точного 18. ♘e5! ♞d7 19. ♖a5! ♛b1+ 20. ♔e2 ♛b2 21. ♔f3 разница в положении королей дает белым значительные шансы на успех) **18…♝b4**.

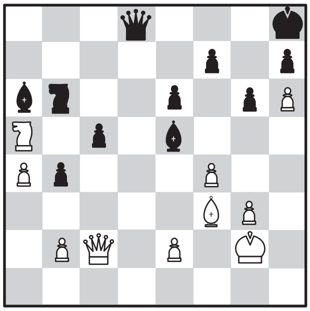


19. 0-0-0!? Смелое и красивое решение действующего чемпиона мира по быстрым шахматам: грозит и выигрыш ферзя, и мат. **19…♛a5?** Ошибка. Черные рассчитывают наказать белых за рокировку без пешечного прикрытия. После правильного 19…♛b6! 20. ♘b5 ♛c6+! 21. ♔b1 ♞a6 шансы на победу выше уже у них. **20. ♘b5! ♞a6 21. ♕d7+ ♚f8 22. ♔b1!** Неожиданный профилактический ход в острой позиции. Белые угрожают поставить мат после ♘e5. **22…♝a3 23. ♖d3!** Еще один точнейший защитный ход. Теперь белый монарх готов к побегу на королевский фланг. **23…♛b4+ 24. ♔c2 ♛a4+ 25. ♔d2 ♝b4+ 26. ♔e2 ♚g8 27. ♘e5 ♛c2+ 28. ♔f3 ♜f8 29. ♖hd1 h5!** Белый король в безопасности, и теперь игра идет «в одни ворота». Последний шанс черных заключается в активизации ладьи h8, однако белые находят точный ответ: **30. ♕d4! ♜h7 31. ♕f4 ♝c5 32. ♘d4 ♛a2 33. ♖1d2 ♛d5+ 34. ♔e2 ♝b4 35. ♘dc6 ♛c5 36. ♘e7+ ♚h8. Черные сдались** ввиду неизбежного мата в 3 хода: 37. ♘f7+ ♜ff7 (37…♜hf7 38. ♕h6+ ♜h7 39. ♕f8×) 38. ♖d8+ ♜f8 39. ♖f8×. Очередное яркое творческое достижение молодого московского гроссмейстера!

А.Грищук – Х.Накамура

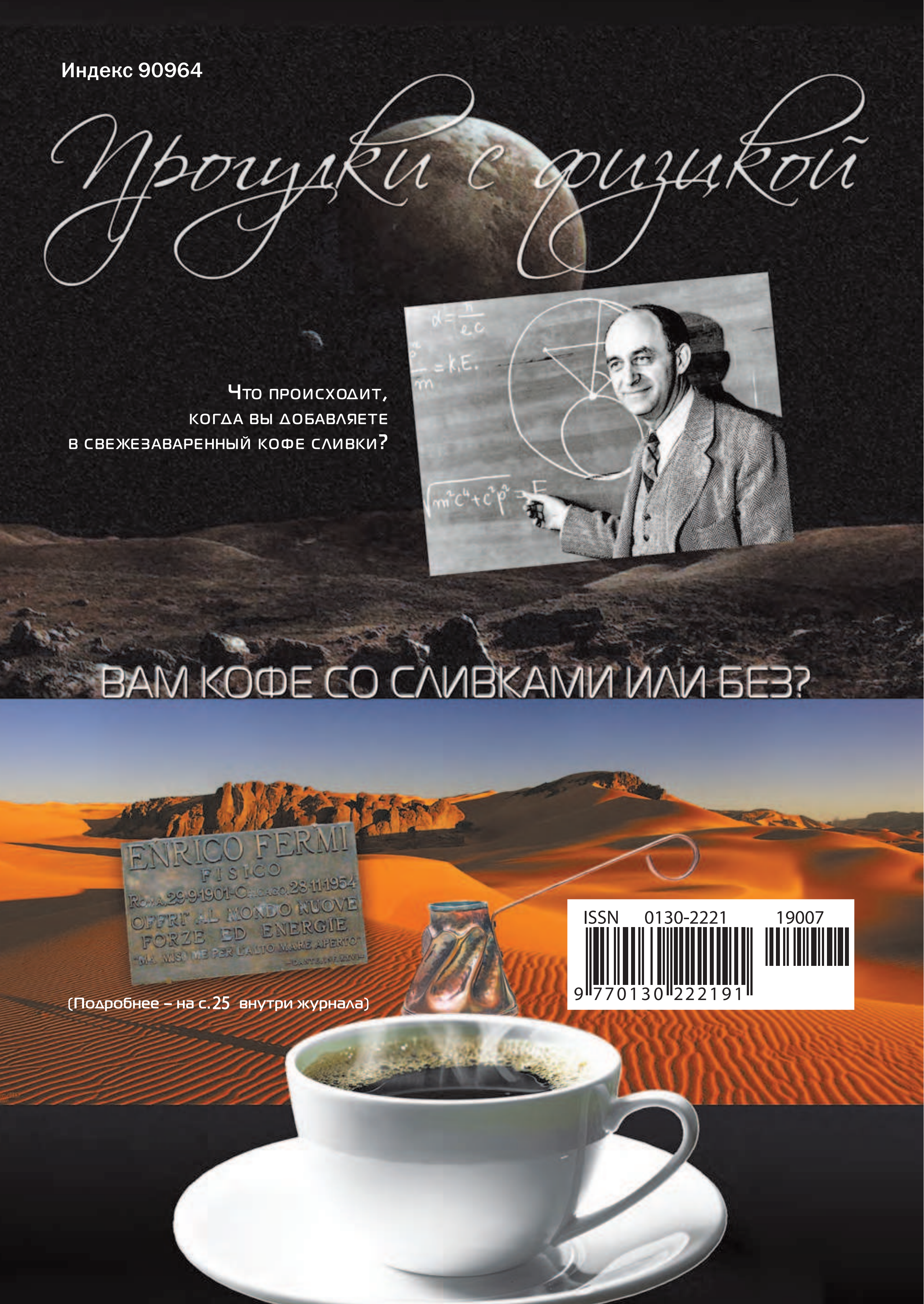
Москва, 2019

1. d4 ♞f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. g3 ♝e7 5. ♗g2 0-0 6. 0-0 dc 7. ♕c2 b5 8. a4 b4 9. ♘fd2 Принципиальный ответ, белые жертвуют пешку за долгосрочную инициативу. **9…c6 10. ♘c4 ♛d4 11. ♖d1 ♛c5 12. ♗e3 ♛h5 13. ♘bd2 ♞g4 14. ♘f3 ♞e3 15. ♘e3 a5 16. ♘d4 ♝a6 17. ♖ac1 ♜c8 18. ♗f3 ♛g6 19. ♗e4 ♛h5 20. ♗f3 ♛g6 21. ♗e4 ♛h5 22. ♔g2 ♜a7 23. h4 g6 24. f4 ♛h6 25. ♘b3?! ♚h8?** Черные могли воспользоваться неточностью белых и развить коня на ферзевом фланге, сыграв 25…c5! **26. ♗d3! ♝b7 27. ♘c4 c5+ 28. ♗e4** с выигрышем пешки. Черные должны уклоняться от размена слонов, иначе разница в активности фигур станет решающей. **28…♝a6 29. ♘ba5.** Белые отыгрывают пешку, сохраняя давление. **29…♛f8 30. ♗f3 ♜d8 31. h5!** Следуя принципам позиционной игры, белые стремятся создать слабость черным на обоих флангах. **31…♝f6 32. ♖d8 ♛d8 33. ♖d1 ♜d7 34. ♖d7 ♞d7 35. h6 ♞b6 36. ♘e5 ♝e5?** Черные стремятся усложнить игру, однако белые должны выиграть и при более упорном 36…♛c7 37. ♘ac6 ♝e5 38. ♘e5 ♚g8.



37. ♘c6! ♞c4? Тактический просчет. **38. ♘d8 ♞e3+ 39. ♔f2 ♞c2 40. ♘f7+ ♚g8 41. ♘e5.** У белых лишняя пешка и подавляющая позиция, выиграть которую для гроссмейстера экстра-класса не составляет труда. **41…c4 42. ♗g4 ♞d4 43. ♔e1 ♚f8 44. ♔d1 ♚e7 45. e3 ♞b3 46. ♘c6+ ♚f6 47. ♘b4 ♝b7 48. ♗e2 ♞a5 49. ♔d2 ♞b3+ 50. ♔c3 ♞c5 51. a5 ♞e4+ 52. ♔c4 ♞g3 53. ♗d3 g5 54. fg+. Черные сдались.** Блестящий пример партии, выигранной в позиционном стиле, характерном для каталонского начала.

А.Русанов


Индекс 90964
Прогулки с физикой
Что происходит,
когда вы добавляете
в свежезаваренный кофе сливки?
ВАМ КОФЕ СО СЛИВКАМИ ИЛИ БЕЗ?
ENRICO FERMI
FISICO
ROMA 29-9-1901 - CHICAGO 28-11-1954
OFFRI AL MONDO NUOVE
FORZE ED ENERGIE
"MA MISI ME PER L'ALTO MARE APERTO"
(Подробнее – на с. 25 внутри журнала)
ISSN 0130-2221 19007
9 770130 222191