

Июль

ISSN 0130-2221

2018 · № 7

КВАНТ

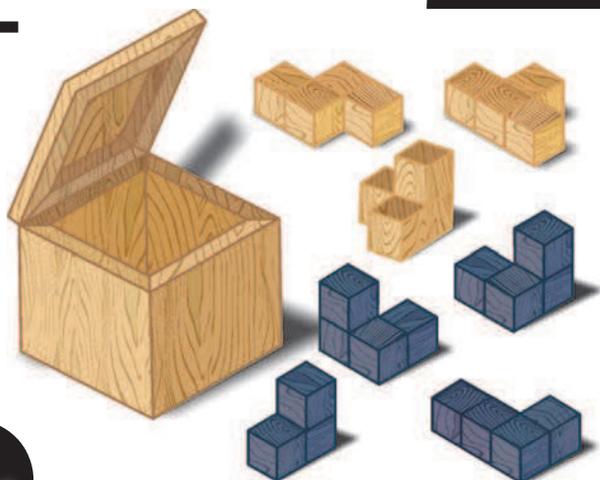
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СВЕТ

и

ТЬМА



Эта головоломка немецкого изобретателя Фолькера Латусека (Volker Latussek) состоит из семи деталей и коробки, в которую их нужно укладывать. Детали сложены из единичных кубиков: одна – из трех, остальные шесть – из четырех. Коробка имеет форму куба со стороной 3 – как раз, чтобы вместить все эти детали. Но укладывать их в коробку нужно не просто так.

Автор предлагает два задания. Первое: сначала уложить в коробку только светлые детали, причем так, чтобы они не сдвигались ни в каком направлении (кроме, естественно, направления «вверх» – из коробки), а затем заполнить оставшееся место темными деталями, чтобы ничего не торчало из коробки. Второе задание аналогичное, только начинать надо с темных деталей.

Утверждается, что в каждом случае есть ровно одно решение (с точностью до поворотов коробки). Желаем успехов в их поиске!

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДАГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Потеря управляемости. *А.Минеев*
7 Квадратичные отображения в картинках.
П.Панов

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 10 Джеймс Джоуль (к 200-летию со дня
рождения). *Л.Белопухов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи М2518–М2521, Ф2525–Ф2528
14 Решения задач М2506–М2509, Ф2513–Ф2516

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 21 Задачи
22 Комбинации квадратов. *Е.Бакаев*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Диффузия в металлах и корона Гиерона II.
А.Стасенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 29 Плюсы-минусы и игра Ним. *И.Копылов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Небесная механика

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 35 О растительных узорах и хороших моделях.
В.Птушенко, А.Базыкина

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 37 Как не быть мазилой. *Т.Мартемьянова*

ИНФОРМАЦИЯ

- 42 Заочная школа СУНЦ НГУ

ОЛИМПИАДЫ

- 47 LXXXI Московская математическая олимпиада

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 49 Московский государственный технический
университет имени Н.Э.Баумана

- 54 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Минеева*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Потеря управляемости

А.МИНЕЕВ

ПРИВЕДЕМ НЕСКОЛЬКО ИЗВЕСТНЫХ житейских примеров, относящихся к *постепенной*, а также к *внезапной* потере управляемости. И расскажем о том, как вести себя в таких случаях, иначе говоря – о том, как при этом меняются алгоритмы управления.

Ахиллес и черепаха

Начнем с хрестоматийного примера, когда быстроногий Ахиллес гонится за черепахой (рис.1). Зеноном выделены реперные точки, относящиеся к положению че-

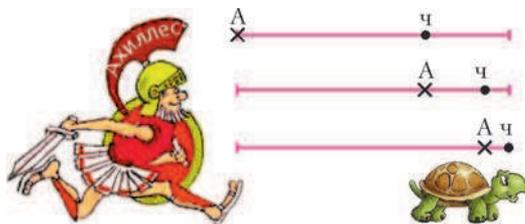


Рис. 1. Бег Ахиллеса за черепахой. Выделены первые реперные точки положения Ахиллеса (А) и черепахи (Ч)

репахи в моменты «сверки часов», в каждый из которых Ахиллес собирался обнаружить черепаху. Но, добежав до нужного места, он обнаруживает, что черепаха уже сместилась вперед... Далее цикл в рамках чистой математики и бесконечно делимых пространства и времени может быть повторен до бесконечности с выводом – черепаху Ахиллесу не догнать.

Если не заморачиваться указанным дроблением дистанции и выделением реперных точек и позволить Ахиллесу бежать свободно, не следя за черепахой, то никаких проблем не возникает и время, через которое Ахиллес и черепаха поравняются, очевидно, составит

$$\Delta t = \frac{L}{v_A - v_ч}$$

Здесь L – первоначальное расстояние между Ахиллесом и черепахой, а v_A и $v_ч$ – их скорости. При этом до встречи черепаха успеет проползти расстояние $Lv_ч/(v_A - v_ч)$, а Ахиллес – пробежать расстояние $Lv_A/(v_A - v_ч)$. Так что если скорость Ахиллеса, например, в 10 раз больше скорости черепахи, то до встречи они преодолеют расстояния $(10/9)L$ и $(1/9)L$ соответственно.

Выделение для Ахиллеса реперных точек пространства, в которых движущаяся черепаха располагалась в предыдущие моменты времени, похоже на построение дискретной схемы решения задачи. А с другой стороны – на работу алгоритмов управления: если поставлена цель достичь некоторой точки, то, когда Ахиллес достигает ее, черепаха уже сместилась, теперь ставится следующая цель и т.д. Если у системы управления при этом конечное время срабатывания на каждом шаге, то процесс может сильно затянуться. Поэтому задачу об Ахиллесе и черепахе можно рассматривать и в качестве намека на постепенную потерю управляемости.

Чуть подробнее постепенную потерю управляемости поясним на втором, не менее известном примере причаливания судов к пристани.

Причаливание

В этом примере, взятом из книги В.И.Арнольда «Математическое понимание природы» (М.: МЦМНО, 2010), в качестве Зенона фигурирует почти столь же легендарный Владимир Игоревич Арнольд, в качестве Ахиллеса – корабль, а в качестве черепахи – пристань.

Смысл проблемы в том, что по мере приближения корабля к берегу его скорость (регулируемая с помощью двигателя и руля) должна снижаться, а в момент касания пристани – уменьшиться до нуля,

чтобы не было удара. Простейшее уравнение, описывающее такой процесс, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

а его решение –

$$x(t) = \exp(-t),$$

где x – расстояние от корабля до пристани. Формально из решения следует, что процесс причаливания занимает бесконечное время: расстояние до пристани хоть и падает по экспоненте, но в любой момент времени не нулевое, а значит, корабль *никогда* не причалит к пристани. Ситуация почти как у Ахиллеса и черепахи.

Если опять рассматривать этот пример в качестве задачи управления, отслеживать изменение расстояния до причала во времени и давать команды кораблю на изменение скорости, то интервал между сигналами управления должен постоянно уменьшаться. Нужно будет все быстрее принимать решения по управлению рулем и двигателем, что непросто при больших размерах и весе корабля... Опять складывается ситуация постепенной потери управляемости. Что делать?

Переход к новому алгоритму управления изложен в упомянутой книге: матрос бросает канат с корабля на пристань, сам прыгает на берег, наматывает канат на кнехт и вручную притягивает судно (рис.2). Корабль, немного «потрепыхавшись», застывает у пирса. Таким образом, окончание процесса причаливания происходит несколько грубовато, неожиданно, но эффективно.

В книге приведен и другой похожий пример – прилунение ракеты. Та же ситуация: в конце прилунения ракета несколько раз подпрыгивает на рессорах, ударяясь о поверхность Луны, пока колебания постепенно не затухнут.

И в этих случаях при потере управляемости необходим переход к новому алгоритму поведения. Так, в примере с причаливанием управляемость теряется постепенно, что дает возможность матросу успеть перебраться на берег и выполнить ряд стандартных операций.



Рис. 2. Причаливание корабля. Внизу изображен кнехт с намотанным на него канатом

Однако бывают ситуации, когда потеря управляемости происходит внезапно и нужно практически мгновенно переключаться на другой алгоритм. Рассмотрим пару примеров такого типа.

Падение при ходьбе

Следующий пример, выведенный в заголовке, знаком большинству пешеходов. Начнем с обычной, нормальной ходьбы

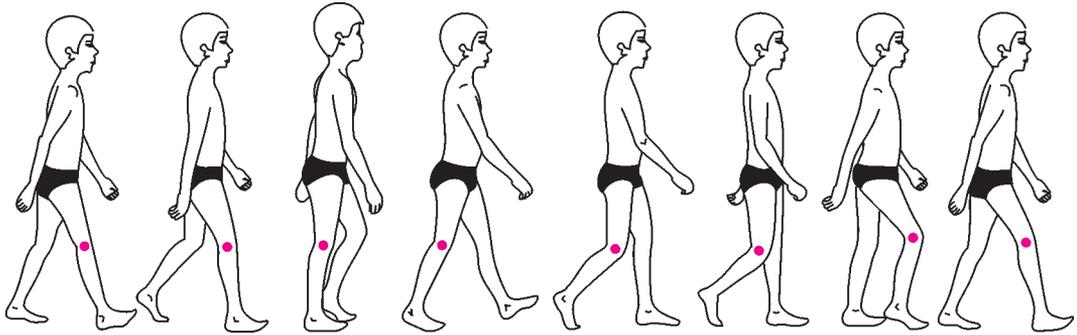


Рис. 3. Последовательность движений при ходьбе

(рис.3). Такая размеренная ходьба уже представляет собой *управляемую последовательность падений*. Ее даже называют иначе чередой рефлекторно контролируемых падений.

В начале шага человек, стоя на одной ноге, наклоняется вперед и начинает падать. В ходе падения вытянутая вперед нога касается земли, и по инерции движения на нее переносится вес тела. Колено, амортизируя падение, подгибается, затем выпрямляется и процесс повторяется. Такая нормальная ходьба в ходе ежедневных упражнений доведена до автоматизма, и работа системы управления положением во время ходьбы происходит рефлекторно. При этом одновременно решается целый комплекс задач: плавность ходьбы, сохранение походки, минимальный расход энергии. Мышцы напрягаются и расслабляются в нужной последовательности.

Но вот неожиданное препятствие – человек споткнулся, внезапно ощутил начало падения и понял, что его рефлекторно уже не остановить. Время падения $\Delta t_{\text{п}}$ легко оценить. Если высота центра тяжести человека равна H , то из известного соотношения $H = g\Delta t_{\text{п}}^2/2$ при $H = 0,6 - 1$ м следует, что $\Delta t_{\text{п}} = 0,35 - 0,45$ с, т.е. на «разруливание ситуации» есть менее полсекунды. Скорость при падении на землю может достигь $v_{\text{п}} = g\Delta t_{\text{п}} \sim 4$ м/с.

Что можно и нужно успеть сделать? Приведем простейшие советы по «управлению» в ходе падения:

- Присесть! Снижение высоты падения уменьшает скорость приземления и соответствующие последствия.

- Группировка! Уподобившись «колобку», вы при падении просто перекатитесь, что менее травматично.

- Наибольшее внимание – «слабым местам»: позвоночнику и голове! Успеть упасть на бок, прижав подбородок к груди. Руки к туловищу, зубы стиснуты, глаза следят за процессом падения.

Реально ли все это успеть сообразить и исполнить за полсекунды? Реально, если у вас накоплен навык и выработан соответствующий рефлекс поведения при падении. Поэтому спортсменов, например, специально учат правильно падать.

Аквапланирование

Наконец, еще один пример, который знаком многим автомобилистам, – аквапланирование (рис.4). Под аквапланированием понимают полную или частичную внезапную потерю сцепления из-за при-

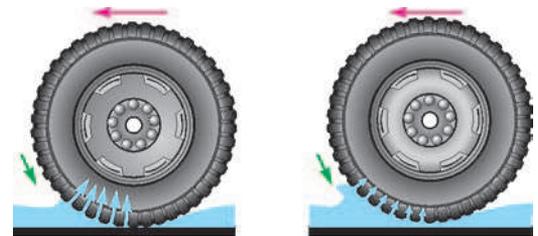


Рис. 4. Слева – скорость меньше критической, колесо контактирует с покрытием дороги; справа – скорость больше критической, колесо «всплыло» над дорогой, начинается аквапланирование

сутствия воды между полотном дороги и колесом. Подобное бывает при движении автомобиля на большой скорости после

ливня, при наличии больших луж на дороге или в колее, при таянии снега и тому подобное.

При достаточно большой скорости движения по мокрой дороге возможна ситуация, когда колесо не успевает отводить воду из пятна контакта с дорогой. Колеса приподнимаются над дорогой, между ними образуется водная подушка, и сцепление колес автомобиля с покрытием дороги резко уменьшается. Чем это опасно?

Уменьшение сцепления с дорогой ведет к росту тормозного пути. При торможении на автомобиль действует сила трения, равная $F_{тр} = \mu mg$. Поэтому из уравнения движения $ma = F_{тр}$ следует, что тормозной путь равен

$$s_{т} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Здесь v_0 – начальная скорость автомобиля, μ – коэффициент трения, или иначе индекс трения, g – ускорение свободного падения. Если к тормозному пути добавить расстояние, пройденное автомобилем до начала торможения, и принять, что время реакции водителя равно Δt_p , то суммарный путь составит

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g} + v_0 \Delta t_p.$$

Приведем оценки, используя рисунок 5, на котором приведена зависимость индекса трения от скорости и состояния дороги. Примем для примера, что начальная скорость автомобиля 72 км/ч, т.е. 20 м/с, а время реакции водителя 0,5–1 с. В этом случае длина торможения составит 30–40 м на сухой дороге ($\mu =$

$= 0,9$), 40–50 м на влажной дороге ($\mu = 0,7$) и 60–70 м на мокрой дороге ($\mu = 0,4$, до перехода в режим аквапланирования).

При вдвое меньшей скорости – 36 км/ч, или 10 м/с – и том же значении времени реакции водителя длина торможения гораздо меньше: 10–15 м на сухой дороге ($\mu = 0,9$), 12–17 м на влажной дороге ($\mu = 0,7$) и 16–21 м на мокрой дороге ($\mu = 0,45$).

Отметим, что при торможении на льду ($\mu \sim 0,2$) мы приходим к длине торможения $s \sim 30\text{--}35$ м при $v_0 = 10$ м/с и $s \sim 110\text{--}120$ м при $v_0 = 20$ м/с. А в режиме аквапланирования индекс трения может быть еще меньше, чем на льду, и тормозной путь катастрофически удлинится.

Но это еще не все неприятности. При аквапланировании резко сужаются возможности управления автомобилем: колесо скользит по водной пленке, машина не слушается руля. Более того, попытка судорожно вывернуть руль может привести к тяжелым последствиям: когда машина выскочит за пределы лужи и вернется к управляемому режиму, ее занесет.

Физика процесса перехода в режим аквапланирования подробно разобрана в «Занимательной физике» С.Д.Варламова (сайт СУНЦ МГУ). В статье «Аквапланирование» приведены простые соотношения, из которых можно понять зависимость скорости перехода к аквапланированию v_a от основных параметров задачи и получить верную оценку этой скорости. Приведем некоторые результаты этой работы.

Если перейти в систему координат, в которой колесо неподвижно, а скорость «набегающей» водной пленки равна v , то давление потока воды составит $\rho v^2/2$ (ρ – плотность воды). Вода, «набегающая» на колесо и отражающаяся от него, создает подъемную силу, равную произведению давления воды на эффективную площадь колеса S . Для оценки этой площади воспользуемся рисунком 6, где приведено изображение колеса в «фас» и «профиль» (направление потока набегающей воды

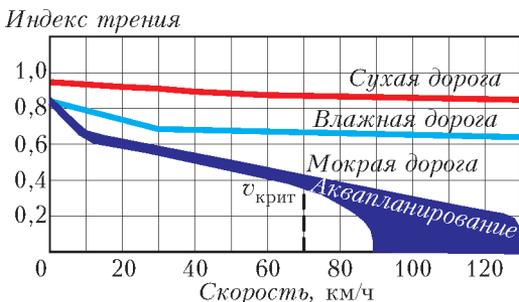


Рис. 5. Зависимость индекса (коэффициента) трения от скорости и состояния дороги

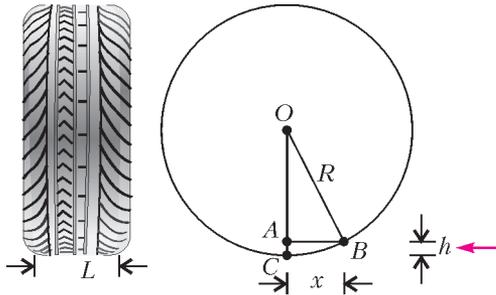


Рис. 6. К расчету эффективной площади колеса при аквапланировании: L – ширина протектора колеса, R – радиус колеса, h – глубина слоя воды между дорогой и колесом

показано в правой части рисунка красной стрелкой). Для эффективной площади имеем $S \sim Lx$. Из прямоугольного треугольника OAB по теореме Пифагора получаем $R^2 - x^2 = (R - h)^2$. Поскольку $h \ll R$, то приближенно можно записать $R^2 - x^2 = R^2 - 2hR$, или $x = \sqrt{2hR}$. Отсюда, опуская коэффициенты порядка единицы, для подъемной силы $F_{\text{п}}$, действующей со стороны воды на колесо автомобиля, получаем

$$F_{\text{п}} = L\sqrt{Rh}\rho v^2.$$

Если приравнять подъемную силу силе тяжести машины, деленной на число колес:

$$L\sqrt{Rh}\rho v^2 = \frac{gM}{4},$$

то можно получить условие отрыва колеса от дороги. Для типичных параметров $L = 15$ см, $R = 30$ см, $h = 1$ см, $\rho = 1$ г/см³, $g = 10$ м/с² и при массе автомобиля $M = 1000$ кг скорость перехода в режим аквапланирования оказывается масштаба $v_a \sim 60 - 70$ км/ч.

Из приведенных оценок следует, что проблема аквапланирования более опасна (и, соответственно, скорость перехода в этот режим меньше) в случае легких (легковых) автомобилей ($v_a \sim M^{1/2}$), широких шин ($v_a \sim L^{-1/2}$), глубоких луж ($v_a \sim h^{-1/4}$). Кажется бы, для уменьшения опасности перехода в режим аквапланирования полезно делать шины как мож-

но уже и с глубокими бороздками. Однако в этом случае становится хуже управляемость машины при обычном движении по дороге, а сами шины быстрее изнашиваются. В результате приходится искать компромисс.

Борьба с аквапланированием ведется по ряду направлений, основные из которых – подготовка дорог и шин. В частности, дорожное покрытие делают шероховатым, что увеличивает сцепление. Большое внимание обращают на конструкцию и рельеф шин – см. бороздки и шипы на протекторе шин на рисунке 7, слева. Это уменьшает эффективную высоту слоя воды. Более



Рис. 7. Слева – бороздки и шипы на протекторе шины автомобиля; справа – истечение воды через бороздки на поверхности шины

того, бороздки помогают воде вытекать вбок (см. рис.7, справа). Наличие бороздок и увеличение давления шин снижает эффективную ширину шин.

Но что делать, если аквапланирование уже началось? Многолетний опыт водителей привел к следующему «алгоритму управления», близкому к «замрите в исходном положении»:

- Руль прямо!
- Никаких резких движений!
- Сохраняйте все, как было до начала аквапланирования!
- Потихоньку сбрасывайте скорость!
- После восстановления сцепления колес с покрытием дороги постепенно выравнивайте автомобиль...

Автор выражает глубокую благодарность А.С.Харину и О.А.Гусеву за полезные обсуждения.

Квадратичные отображения в картинках

П. ПАНОВ

ЕСЛИ В ВАШЕМ КАЛЬКУЛЯТОРЕ ЕСТЬ кнопка $\boxed{\cos}$, настройте его на вычисления в радианах и введите любое число. Теперь начинайте нажимать эту кнопку. Вы увидите, как при последовательных нажатиях стабилизируются первые цифры результата, а после нескольких десятков нажатий на экране высвечивается число, которое дальше вообще не меняется. Что-то вроде 0,739085133215, в зависимости от разрядности вашего калькулятора. Это, конечно, приближенное решение уравнения $\cos x = x$.

Этот метод поиска приближенных решений (как говорят, *численного решения*) уравнений называется *методом простых итераций*.

Вместо косинуса можно взять какую-нибудь другую функцию f , задать начальную точку x_0 , вычислить $x_1 = f(x_0)$, затем $x_2 = f(x_1)$ и так дальше, вычисляя следующие итерации

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

На примере косинуса мы видели, что значения x_n располагаются все ближе и ближе к точному решению уравнения (наглядно это можно видеть на рис.1). Математики говорят, что последовательность x_n *сходится* или *стремится* к решению.

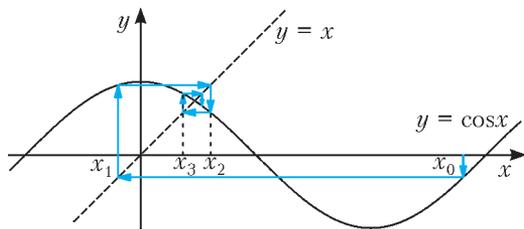


Рис. 1

Всегда ли так будет? К сожалению, нет. Например, для функции $f(x) = x^3$ последовательность x_n будет сходиться к 0 только при $-1 < x < 1$. Если же $|x| > 1$, то последовательность довольно быстро «убегает» на бесконечность (например, для $x = 2$ получаем 2, 8, 512, ...). Значения 1 и -1 сами являются решениями, однако забавно, что получить такое решение можно, только сразу начав с него.

Подробный разбор метода простых итераций, позволяющий понять, в каких случаях он приводит к ответу (и к какому именно, если уравнение $f(x) = x$ имеет несколько решений), можно найти в стандартных учебниках вычислительной математики.¹ Мы же сосредоточимся на более наглядных, геометрических свойствах итерационного процесса.

Итак, задача заключается в описании поведения точек x_n в разных ситуациях.

Стоит начать с линейной функции, а лучше сразу с целого их семейства: $f_\lambda(x) = \lambda x$. Зафиксируем λ , выберем начальную точку x_0 и начнем вычисления, полагая $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$, т.е. $x_{n+1} = \lambda x_n$. Сразу понятно, что в этом случае

$$x_n = \lambda^n x_0.$$

Из этой формулы легко извлекается вся динамика поведения точек x_n . Если $|\lambda| < 1$, то при любом выборе начальной точки x_0 последовательность x_n стремится к 0 (т.е. единственному решению уравнения $\lambda x = x$). Если же $|\lambda| > 1$ и $x_0 \neq 0$, то точки

¹ Например: Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. – М.: Бинум, 2015, §7.1.

x_n уходят на бесконечность. При $\lambda = 1$ последовательность постоянна: $x_n = x_0$, а при $\lambda = -1$ будет $x_{2n} = x_0$ и $x_{2n+1} = -x_0$, т.е. мы имеем периодическую последовательность с периодом 2.

Можно обойтись без картинок и при анализе простейшего семейства квадратичных функций $f_\lambda(x) = \lambda x^2$.

Упражнение 1. Для квадратичной функции $f_\lambda(x) = \lambda x^2$ опишите динамику поведения последовательности $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ в зависимости от значения параметра λ и от выбора начальной точки x_0 .

Но, оказывается, достаточно сделать шаг в сторону, и все значительно усложняется и становится намного интересней.

Логистическое семейство – первые картинки

Классическим примером служит семейство квадратичных функций

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x).$$

Его называют *логистическим семейством*, и о его свойствах написано много книг и статей. Мы будем ссылаться на книгу Катка и Хасселблата.²

Обычно логистическое семейство рассматривается при значениях параметра λ , находящихся в пределах $0 \leq \lambda \leq 4$, и для исследования динамики в качестве начальных точек x_0 берутся точки из интервала $(0; 1)$. Мы пока тоже будем придерживаться этих ограничений. В самом начале книги Катка и Хасселблата для первоначального знакомства с квадратичным семейством рекомендуется проделать несколько упражнений. Вот типичная формулировка.

Упражнение 2. Для заданного значения λ , начиная с некоторого значения x_0 , проведите несколько итераций функции $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, пока не станет ясен характер поведения точек x_n .

А вот решения в картинках для этого упражнения для некоторых значений λ . На каждом графике на рисунке 2 вдоль вертикальной оси откладываются числа x_n из последовательности $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$, а по горизонтали – их номера n . Соседние точки $(n; x_n)$ и $(n+1; x_{n+1})$ соединяются отрезками. На первом графике, построенном для $\lambda = 0,95$, в качестве начального значения взято $x_0 = 0,6$, для всех остальных λ берется $x_0 = 0,01$.

$\lambda = 0,95$ Как видно на первом графике, для $\lambda = 0,95$ значения x_n убывают и стремятся к 0. То же самое будет происходить и для любого фиксированного $\lambda \in [0; 1]$ при любом начальном значении x_0 из отрезка $[0; 1]$.

$\lambda = 1,9$ Для λ из диапазона $(1; 3]$ точки x_n тоже стремятся к некоторому пределу, для каждого λ к своему. Это предельное значение является ненулевым корнем уравнения $\lambda x(1-x) = x$, т.е. $x = (\lambda - 1)/\lambda$. Причем при $\lambda \leq 2$ приближение к пределу одностороннее.

$\lambda = 2,9$ А при $\lambda > 2$ точки x_n совершают колебания вокруг предельного значения.

$\lambda = 3,1$ После перехода значения λ через 3 возникают периодические колебания с периодом 2 – последовательности точек с четными номерами x_{2n} и с нечетными номерами x_{2n+1} , каждая из которых стремится к своему пределу, и так вплоть до $\lambda = 3,45$.

$\lambda = 3,5$ После перехода через $\lambda = 3,45$ возникают колебания с периодом 4. При дальнейшем росте λ (до значения 3,57) в качестве предельного поведения точек x_n наблюдаются колебания с периодом 8, 16, 32 и т.д. Такое изменение предельного поведения последовательности x_n с ростом λ называется *каскадом удвоения периода*.

$\lambda = 3,65$ При переходе λ через 3,57 возникает новое явление – последовательность x_n начинает демонстрировать хаотическое поведение.

$\lambda = 4$ Хаотическое поведение характерно и для $\lambda = 4$. Промежуток 3,57 <

² А.Б.Каток, Б.Хасселблат. Введение в теорию динамических систем. – М.: МЦНМО, 2005.

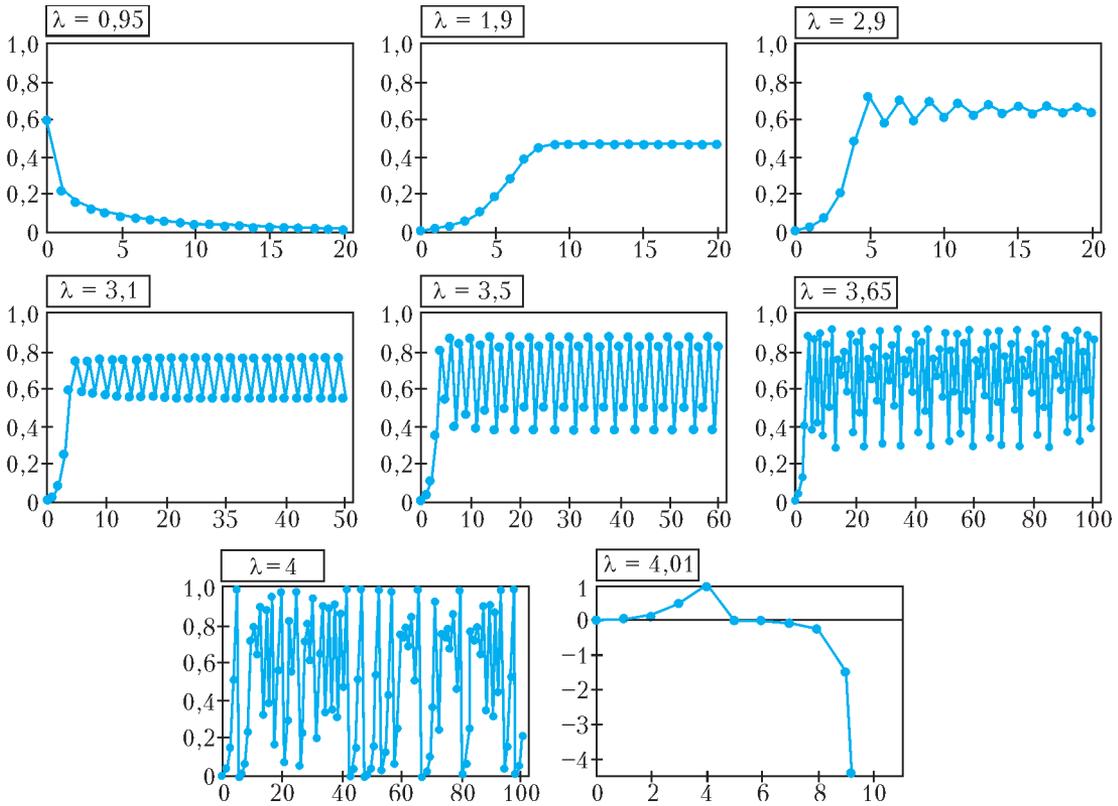


Рис.2. Картинки к упражнению 2

$\lambda < 4$ демонстрирует большое разнообразие. В большинстве случаев поведение последовательности x_n является хаотическим³, но при некоторых значениях λ встречается периодическое предельное поведение.

Наконец, при $\lambda > 4$ практически для любого начального значения x_0 последовательность x_n уходит на бесконечность.

³ Обратим внимание, что такое поведение выглядит будто случайное (и даже обладает некоторыми математическими свойствами, характерными для случайного процесса), однако никакого «настоящего» источника случайности у нас нет (кроме ошибок округления, которые в некоторых случаях способны превратить детерминированный процесс в случайный). Никто не подбрасывает монетку, чтобы определить очередные значения x_n , они вычисляются по точным формулам, однако ведут себя совершенно хаотично.

Закончим этот раздел цитатой из книги Катка и Хасселблата. Вывод, который можно сделать из рассмотренных примеров, заключается в следующем:

Простые системы могут демонстрировать сложное долгосрочное поведение, и, хотя это может показаться неожиданным, такое сложное поведение должно быть весьма распространенным.

Отметим, что резкий переход от одного типа долгосрочного поведения последовательности x_n к другому типу при незначительном изменении параметра (в нашем случае λ) называется *бифуркацией*.

(Продолжение следует)

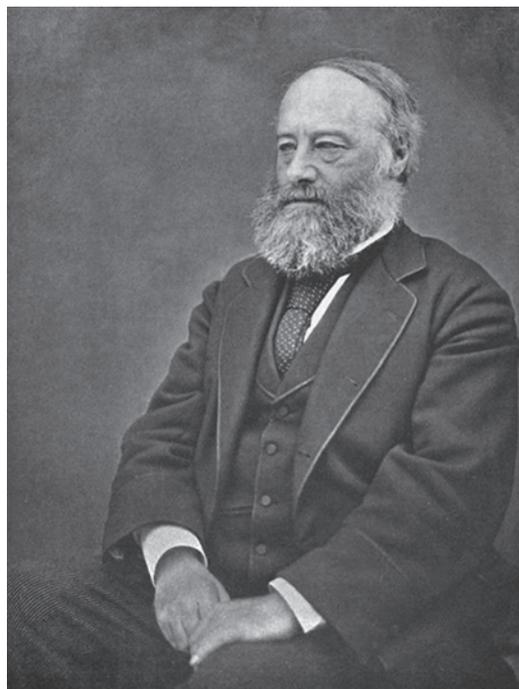
Джеймс Джоуль

(к 200-летию со дня рождения)

Л. БЕЛОПУХОВ

ВЕЛИКИЙ АНГЛИЙСКИЙ УЧЕНЫЙ ДЖЕЙМС Прескотт Джоуль (1818–1889) родился в Солфорде близ Манчестера в семье пивовара. Из-за плохого здоровья он смог начать систематическое школьное образование лишь в 15 лет, причем одновременно ему пришлось трудиться на семейной пивоварне (после смерти отца управлять ею вместе со своим братом) вплоть до 36-летнего возраста, когда семейное предприятие удалось, наконец, продать.

Одним из его домашних учителей был Джон Дальтон (1766–1844), замечательный физик-экспериментатор и химик-теоретик, один из создателей атомистических представлений в химии. Дальтон учил Джоуля математике и физике. Эта учеба была столь успешной, что уже в 19-летнем возрасте Джоуль сделал заявку на получение патента оригинального электрического двигателя, сконструированного им и построенного в своей мастерской.



*Джеймс Джоуль
(1818–1889)*

Член редколлегии нашего журнала Лель Константинович Белопухов недавно отметил свое 90-летие. К этому юбилею он подготовил к изданию новую книгу под названием «Физика и физики», в которой излагает историю развития любимой науки через биографии ее создателей. Книга выпущена издательством «Книжный дом Университет» в серии «Библиотека физико-математической школы» и содержит 75 биографий выдающихся физиков. Их выбор определился исключительно авторскими симпатиями и предпочтениями, основанными на многолетнем опыте преподавания в высшей школе. Мы выбрали в качестве примера биографию Джеймса Джоуля, которому в этом году исполнилось 200 лет.

Редакция нашего журнала поздравляет Леля Константиновича с юбилеем и желает ему новых книг и статей в «Кванте», а также любознательных слушателей и читателей.

Джоуля интересовали электричество и теплота. После тщательных точных экспериментов в 1841 году он установил закон теплового действия электрического тока (зависимость количества теплоты, выделяемого в проводнике при прохождении через него электрического тока, от величины тока и сопротивления проводника). Годом позже, в 1842 году русский физик Эмилий Ленц (1804–1865), декан физико-математического факультета Петербургского университета (впоследствии ставший его ректором), ничего не зная об опытах Джоуля, также экспериментально установил этот закон, который сегодня носит двойное имя: закон Джоуля–Ленца.

Вслед за этим открытием Джоуль осуществил эксперименты, в которых наглядно показал превращение энергии, или «силы», как тогда говорили, из одного вида в другой. Справедливости ради следует заметить, что незадолго до этого в одном из немецких медицинских журналов появилась статья доктора медицины врача Юлиуса Майера (1814–1878) «О количественном и качественном определении сил». В этой статье высказывалась идея о превращении тепла в работу и приводились результаты некоторых экспериментов на эту тему. Но Джоуль, как и все другие физики, медицинских журналов не читал и о размышлениях Майера ничего не знал.

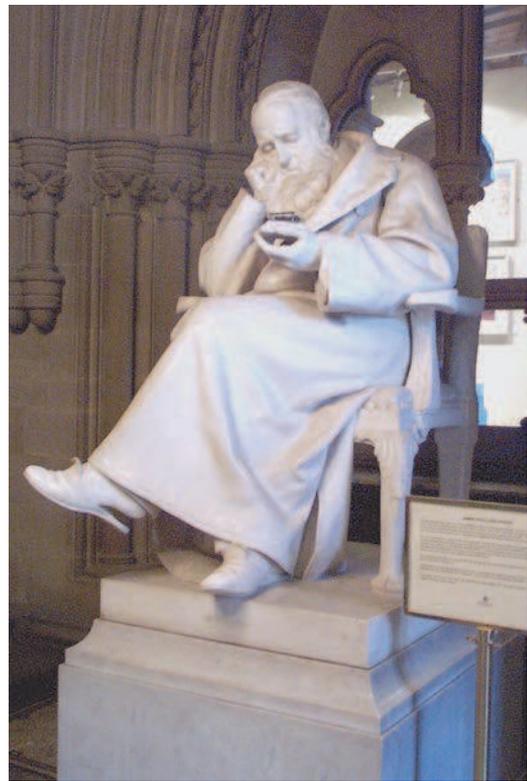
В экспериментах Джоуля падающий груз через передаточный механизм вращал многолопастный пропеллер, помещенный в воду. В результате этого вода немного нагревалась. Легко подсчитать, что при падении груза массой 20 килограммов с высоты 4 метров 10 литров воды нагреются всего лишь на несколько сотых долей градуса. Поэтому измерение температуры должно было быть очень точным.

Многочисленные повторения этого эксперимента позволили Джоулю не только продемонстрировать превращение механической работы в теплоту, но и с большой точностью (много большей, чем у Майера) определить коэффициент пропорциональности между работой и теплотой. Теплоту тогда измеряли в калориях (кал), а работу – в килограммометрах, точнее в килограмм-сила-метрах (кгс · м). Еще не так давно этот коэффициент пропорциональности 427 кгс · м / ккал (или, в современном варианте, 4200 Дж / ккал) заучивали наизусть, изучая физику в средней школе. Но по смыслу открытия Майера и Джоуля этот коэффициент должен быть равен единице, если назвать и механическую работу и теплоту изменениями одной и той же физической величины – энергии. Сегодня применение термина «энергия» в науке стало общепринятым.

Вообще говоря, еще Аристотель (IV век до н.э.) в своей «Физике» использовал греческое слово $\epsilon\nu\rho\upsilon\epsilon\upsilon\chi$ в смысле «деятельность, сила, мощь». В 1745 году французский математик и физик маркиза Эмили дю Шатле

(1706–1749) начала переводить на французский язык основной труд Ньютона «Математические начала натуральной философии». Это был не просто перевод с латыни на французский, а прежде всего «перевод» математической аргументации Ньютона на принятую на континенте лейбницевскую символику математического анализа, используемую и сегодня. Это сразу сделало общепонятной ньютоновскую механику. А в комментариях к своему переводу дю Шаттле предложила заменить лейбницевский термин «живая сила» (для величины $mv^2/2$) греческим словом «энергия».

Не правда ли, этот факт как-то не вяжется с нашим представлением о маркизах эпохи Людовика XV как о жеманницах и модницах стиля рококо. Будучи знатной и по происхождению и по замужеству, Эмили дю Шаттле с 16 лет блистала в свете и, казалось, ее жизнь не отличалась от принятых в тогдешнем обществе стандартов поведения дамы высшего французского общества. Балы, ро-



Памятник Джоулю в Манчестерской ратуше

маны, карточные игры – да, все это было. Но ее интимными друзьями были выдающиеся французские математики Мопертюи, Клеро и великий философ Вольтер. Ее достижения в математике и физике (оптике и акустике) не были значительными, но рассматривались на заседаниях Королевского общества, где она сама, как женщина, не имела права присутствовать. После ее безвременной кончины прусский король Фридрих Великий сказал: «Я потерял друга, которого знал 25 лет, великого человека, единственный недостаток которого заключался в том, что он был женщиной, человека, которого чтит весь Париж». Имя этой выдающейся женщины носит один из кратеров на Луне, а недавно состоялась премьера оперы финского композитора Кайи Саариахо «Эмили».

Постепенно термин «энергия» входил в жизнь. В 1807 году английский физик Томас Юнг стал употреблять его в научных статьях. В 1829 году французский физик Гаспар Кориолис впервые употребил термин «кинетическая энергия». В 1851 году появилось понятие «потенциальная энергия» (английский физик Уильям Ренкин). И, наконец, в 1881 году на лекции Уильяма Томсона (лорда Кельвина) прозвучало:

«Само слово энергия, хотя и было употреблено в современном смысле доктором Томасом Юнгом в начале этого века, только сейчас входит в употребление, после того как теория развилась от простой формулы до принципа, пронзающего всю природу и направляющего исследователя в области науки».

В честь Джоуля на Втором международном конгрессе электриков в 1889 году единица энергии получила его имя. Но, к сожалению, и до нашего времени сохранилось обыкновение тепловую и химическую энергию измерять в старых энергетических единицах – калориях. Особенно держатся за эту единицу химики и химико-технологи. Некоторым оправданием для них может служить то обстоятельство, что удельная теплоемкость воды при этом точно равна единице (1 кал/(г·град)). От химической технологии недалеко и до пищевой промышленности. Поэтому энергетическая ценность продуктов питания обозначалась до недавнего

времени только в калориях. Сейчас идет переходный процесс – при маркировке продуктов питания используются две величины энергетической ценности: килокалории и килоджоули. Гораздо медленнее будет изменяться язык. Слово «калорийность» в обозримом будущем в обыденном языке вряд ли заменится на слово «джоулейность» несмотря на то, что для человеческого организма это одна и та же величина энергетической полезности (или вредности).

Кроме установления закона превращения и сохранения энергии, Джоуль сделал еще очень много в термодинамике и исследовании газовых процессов. Вместе с У.Томсоном он открыл эффект охлаждения при медленном (а не быстром) расширении газа через пористую перегородку от большой плотности к малой. Этот эффект, получивший имя Джоуля–Томсона, и сейчас лежит в основе процесса получения сжиженных газов и многих технологических процессов. Например, при необходимости сконденсировать водяной пар, содержащийся в природном газе, перед его поступлением в трубопровод, чтобы предохранять стальные трубы от окисления (ржавчины).

Джоуль был одним из основателей кинетической теории газов, намного опередив работы Максвелла и Больцмана. Убежденный сторонник атомистической теории, он рассматривал теплоту как энергию частиц газа, передаваемую от одного тела к другому. Давление газа он считал результатом ударов частиц газа о стенки сосуда, а скорость частиц – зависящей от температуры газа. Занимался он и изучением магнитных свойств веществ – открыл явление насыщения при намагничивании железа и явление магнетострикции при перемагничивании.

Благодаря своим точным экспериментальным работам, Джоуль уже в 32 года был избран в Королевское общество и занял прочное место в истории науки как один из создателей закона сохранения и превращения энергии, этого важнейшего закона природы.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2518–М2521 предлагались на III Кавказской математической олимпиаде.

Задачи М2518–М2521, Ф2525–Ф2528

М2518. Графики двух квадратных трехчленов пересекаются в точках A и B (рис. 1).

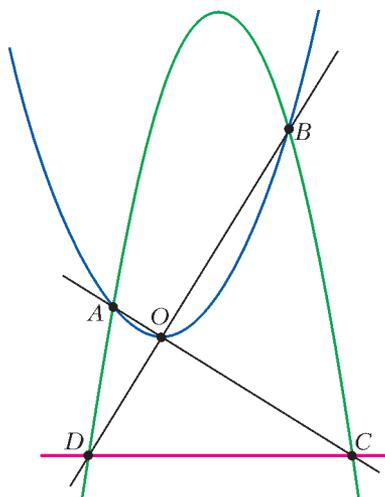


Рис. 1

Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB , они пересекают второй график в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.

А. Антропов

М2519. Назовем способ разбиения множества из $2n$ натуральных чисел на n пар бесквадратным, если ни в одной паре произведение чисел не является квадратом натурального числа. Известно, что для данных $2n$ различных натуральных чисел

существует бесквадратный способ разбиения на пары. Докажите, что в таком случае существует не менее $n!$ бесквадратных способов разбиения этих $2n$ чисел на пары.

П. Кожевников

М2520. На изначально пустую доску 8×8 одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в клетку, которая граничит по стороне хотя бы а) с двумя; б) с тремя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

Д. Белов, В. Брагин

М2521. В каждую клетку таблицы $n \times n$ Мортеза поместил некоторую функцию $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ (т.е. всего n^2 функций, каждая из которых определена на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения из отрезка $[0; 1]$). Павел хочет поместить слева от каждой строки и снизу под каждым столбцом еще по одной функции $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ (т.е. еще $2n$ функций) так, чтобы для любой строки и любого столбца было выполнено следующее условие: если под этим столбцом помещена функция f , слева от строки помещена функция g , а в пересечении этого столбца и этой строки помещена функция h , то для любого $x \in [0; 1]$ верно равенство $h(x) = f(g(x))$. Докажите, что Павел всегда сможет осуществить свой замысел.

М. Сагафьян (Иран)

Ф2525. Школьник Вася наловчился так стрелять из рогатки, что величина скорости «снаряда» сразу после выстрела всегда одна и та же. Если Вася стреляет из своего окна, расположенного на высоте $h = 5$ м от земли, в горизонтальном направлении, то снаряд падает на землю на расстоянии $d = 30$ м по горизонтали от точки выстрела. Сможет ли Вася поразить мишень – небольшое темное пятно на стене дома напротив, стреляя из рогатки из окна своего дома, если пятно находится на том же уровне над землей, что и окно, а расстояние до дома напротив $l = 87$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (Окон на стене дома напротив нет!)

Е.Никулин

Ф2526. В высокий цилиндрический сосуд с поперечным горизонтальным сечением $S = 25$ см² высыпали $N = 50$ ледяных кубиков с ребром $l = 1$ см и налили масло плотностью $\rho_m = 900$ кг/м³. Оказалось, что ровно половина кубиков находится выше уровня масла. На сколько изменится верхний уровень масла, когда весь лед растает? Плотность льда $\rho_l = 917$ кг/м³, воды $\rho_v = 1000$ кг/м³.

Е.Никулин

Ф2527. В электрической схеме, изображенной на рисунке 2, $R = 100$ Ом, $C = 1$ Ф. Когда ключ находится в положении 1, амперметр показывает ток $I_1 = 0,1$ А. Когда ключ перекинули в положение 2, амперметр в первое мгновение зарегистрировал ток $I_2 = 0,15$ А. Какова величина ЭДС батарейки? Какое количество теплоты выделилось в резисторе пос-

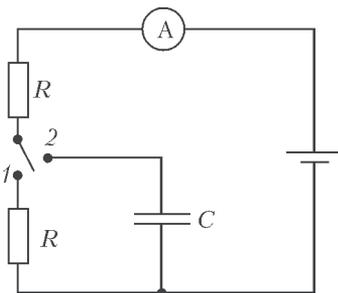


Рис. 2

ле переброски ключа? Какую работу совершили сторонние силы в батарейке за промежуток времени от момента переключения до момента, когда амперметр снова показал ток 0,1 А?

О.Фарадов

Ф2528. По внутреннему одножильному проводу коаксиального кабеля можно пропустить максимальный постоянный ток $I = 30$ А (при большем токе плавится изоляция). А максимальное напряжение, которое выдерживает изоляция провода, равно $U = 1000$ В (при большем напряжении изоляция пробивается). Завод из тех же материалов выпустил опытную партию кабеля, у которого все линейные размеры вдвое больше, чем у стандартного кабеля. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю из опытной партии, если напряжение в электрической сети $U_0 = 220$ В? А какова будет максимальная мощность, если напряжение установить максимально возможным?

А.Вольтов

Решения задач М2506–М2509, Ф2513–Ф2516

М2506. а) Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждой двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

б) Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трех. Наименьшее общее кратное каждой трех из данных чисел делится на оставшееся четвертое. Докажите, что произведение данных чисел – точный квадрат.

а) **Ответ:** обязательно.

Пусть данные числа – это a, b, c . Докажем, что любое простое число p входит в разложение всех трех данных чисел в одной и той же степени. Это равносильно тому, что числа равны.

Пусть p входит в разложение a в степени α (иначе говоря, a делится на p^α , но не

делится на $p^{\alpha+1}$). Аналогично, пусть p входит в разложения b и c в степенях β и γ соответственно. Для определенности считаем, что $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Тогда p входит в разложения НОД(a, b) и НОК(b, c) в степени β . Из делимости $c : \text{НОД}(a, b)$ вытекает, что $\gamma \geq \beta$, а из делимости $\text{НОК}(b, c) : a$ следует, что $\beta \geq \alpha$. Таким образом, $\alpha = \beta = \gamma$, что и требовалось.

б) Пусть данные числа – это a, b, c, d . Достаточно доказать, что фиксированное простое число p входит в разложение числа $abcd$ в четной степени.

Снова обозначим степени вхождения p в разложения: пусть для чисел a, b, c, d они равны $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответственно, при этом для определенности считаем, что $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \delta$. Так как $d : \text{НОД}(a, b, c)$, то $\delta \geq \min\{\alpha, \beta, \gamma\} = \gamma$. Значит, $\gamma = \delta$. Так как $\text{НОК}(b, c, d) : a$, то $\beta = \max\{\beta, \gamma, \delta\} \geq \alpha$. Значит, $\alpha = \beta$.

Следовательно, p входит в разложение числа $abcd$ в четной степени $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2(\alpha + \gamma)$. Это и требовалось установить. Из решения задачи б) нетрудно получить полное описание всех четверок чисел a, b, c, d , удовлетворяющих условию. В отличие от пункта а), легко привести примеры четверок различных чисел, удовлетворяющих условию. Например, $a = pq, b = p, c = q, d = 1$, где p и q – различные простые числа.

Б. Френкин

M2507. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, а точка P лежит на стороне AB (рис.1). Диагональ AC пересекает

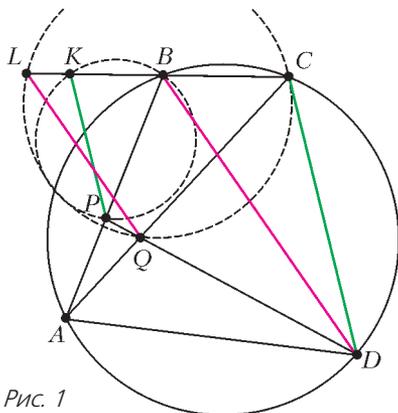


Рис. 1

секает отрезок DP в точке Q . Прямая, проходящая через P параллельно CD , пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке K , а прямая, проходящая через Q параллельно BD , пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке L . Докажите, что описанные окружности треугольников BKP и CLQ касаются.

Мы докажем, что окружности BKP и CLQ касаются в точке T повторного пересечения прямой DP и окружности $ABCD$ (рис.2). Так как четырехугольник $BCDT$

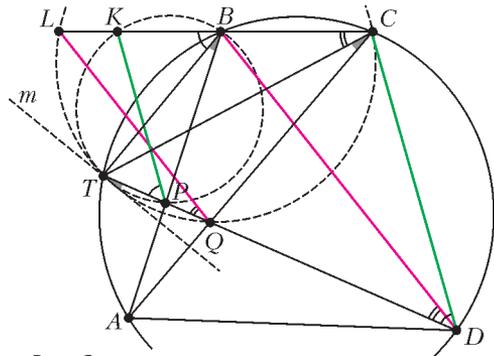


Рис. 2

вписанный, получаем $\angle KBT = \angle CDT$. Поскольку $KP \parallel CD$, имеем $\angle CDT = \angle KPT$. Таким образом, $\angle KBT = \angle CDT = \angle KPT$, откуда следует, что T лежит на окружности BKP . Аналогично, равенства $\angle LCT = \angle BDT = \angle LQT$ показывают, что T также лежит на окружности CLQ .

Остается доказать, что эти окружности в самом деле касаются в точке T . Пусть m – касательная, проведенная в точке T к окружности $BKTP$. По теореме об угле между касательной и хордой, угол α между прямой m и прямой TD равен углу TBP . Но $\angle TBP = \angle TBA = \angle TCA = \angle TCQ$. Из равенства $\alpha = \angle TCQ$ следует касание прямой m и окружности $CLTQ$. Тем самым, m – общая касательная окружностей, и задача решена.

Отметим, что точка T может быть также описана как точка Микеля для любой четверки из пяти прямых AB, BC, AC, KP, LQ . Конечно, утверждение задачи будет верно для аналогичной конструкции, где P – произвольная точка на прямой AB (не

только в том случае, когда P лежит на отрезке AB).

А. Кузнецов

M2508*. Существуют ли два непостоянных многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что $P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}$?

Ответ: не существуют.

Пусть степени многочленов P и Q равны p и q соответственно: $\deg P = p$, $\deg Q = q$. Приравняв степени правой и левой частей в данном равенстве

$$P^9(P+1) = Q^{20}(Q+1), \quad (*)$$

имеем $10p = 21q$, откуда $p = 21n$ и $q = 10n$ для некоторого натурального n . Возьмем производную от обеих частей равенства $(*)$, получим

$$P^8 P' (10P + 9) = Q^{19} Q' (21Q + 20). \quad (**)$$

Заметим, что многочлены $10P + 9$ и $P + 1$ взаимно просты, поскольку

$$\begin{aligned} \text{НОД}(10P + 9, P + 1) &= \\ &= \text{НОД}(10P + 9 - 10(P + 1), P) = \\ &= \text{НОД}(-1, P) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично, многочлены $10P + 9$ и P взаимно просты. Значит, $\text{НОД}(10P + 9, P^9(P + 1)) = 1$, откуда $\text{НОД}(10P + 9, Q) = 1$, согласно $(*)$. Таким образом, из $(**)$ следует, что $Q'(21Q + 20)$ делится на $10P + 9$. Но это невозможно, поскольку

$$\begin{aligned} 0 < \deg(Q'(21Q + 20)) &= 20n - 1 < 21n = \\ &= \deg(10P + 9). \end{aligned}$$

Противоречие.

Замечание. Аналогичные рассуждения показывают, что не существует непостоянных многочленов, удовлетворяющих равенству $P^m + P^{m-1} = Q^k + Q^{k-1}$, где k и m – натуральные числа такие, что $k \geq 2m$. Решение для случая $k = 2m$ требует несколько более сложной техники.

И. Богданов

M2509*. Анна и Боб играют в игру на бесконечной клетчатой сетке (сторона клетки равна 1), делая ходы по очереди.

Анна ходит первой. Ход состоит в том, чтобы ориентировать один из ранее не ориентированных единичных отрезков сетки. Если в какой-то момент некоторые ориентированные отрезки образуют ориентированный цикл, то выигрывает Боб. Верно ли, что у Боба есть стратегия, гарантирующая ему победу?

Ответ: нет.

Предъявим стратегию Анны, которая не позволит Бобу победить.

Скажем, что два единичных отрезка сетки образуют *левый нижний* уголок, или ЛН-уголок, если у них есть общий конец, который является нижним концом для вертикального отрезка и левым концом для горизонтального отрезка. *Правый верхний* уголок, или ПВ-уголок, определяется аналогичным образом.

Зафиксируем (рис.1) некоторую вертикальную линию сетки, назовем ее *средней линией*; единичные отрезки, лежащие на средней линии, назовем *сердинными отрезками*. Единичные отрезки, лежащие

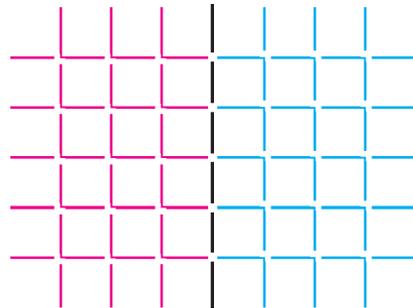


Рис. 1

слева или справа от средней линии, назовем *левыми* и *правыми* отрезками соответственно. Разобьем все левые отрезки на ЛН-уголки, а все правые отрезки – на ПВ-уголки.

Теперь опишем стратегию Анны. Пусть она первым своим ходом ориентирует некоторый отрезок на средней линии. Пусть на каком-то ходу Боб ориентирует отрезок s . Если s – сердинный отрезок, Анна также ориентирует некоторый сердинный отрезок.

Иначе, s образует с некоторым другим отрезком t ЛН-уголок или ПВ-уголок из

нашего разбиения. Тогда Анна ориентирует отрезок t таким образом, чтобы либо обе стрелки на отрезках s и t входили в вершину уголка, либо обе выходили из вершины уголка (примеры показаны на рис.2). Заметим, что после каждого хода Анны лю-

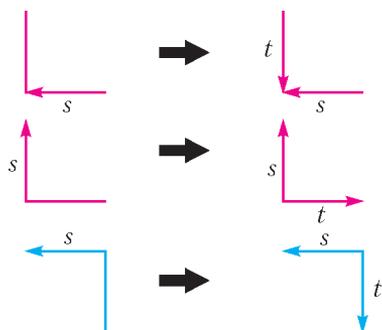


Рис. 2

бой уголок нашего разбиения либо состоит из двух уже ориентированных отрезков, либо из двух еще не ориентированных. Это означает, что Анна всегда сможет сделать свой ход по указанной выше стратегии.

Предположим, что на некотором шаге Боб все-таки выиграл, т.е. появился ориентированный цикл C . Найдем самую левую из вертикальных линий сетки, на которой есть узлы цикла C , и среди этих узлов выберем самый нижний. Обозначим этот узел через X , т.е. X – «самый нижний из самых левых». Аналогично определим «самый верхний среди самых правых» узлов цикла C . Если X лежит строго левее средней линии, то X – вершина некоторого ЛН-уголка, у которого оба отрезка ориентированы. По определению узла X , оба эти отрезка входят в цикл C . Но, согласно стратегии Анны, эти отрезки ориентированы таким образом, что они не могут быть в ориентированном цикле.

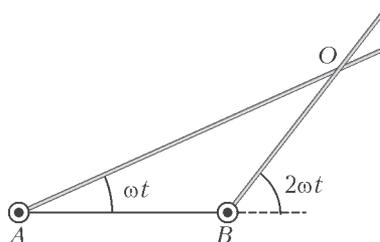
Иначе, узел Y лежит строго правее средней линии, и аналогичные рассуждения для узла Y приводят к противоречию. Таким образом, Боб никогда не выиграет. Задача решена.

Более простой вариант этой задачи получится, если Боб ходит первым. В этом случае достаточно использовать парную

стратегию для разбиения решетки только на ЛН-уголки.

И.Богданов, М.Дидин

Ф2513.¹ Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы A и B (см. рисунок). Расстояние между осями l , в



начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней O ? Найдите скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi/(6\omega)$ после начала движения. Ответ обоснуйте.

Пусть после начала движения (когда стержни были направлены направо) прошло некоторое время t , которое меньше времени половины оборота правого стержня, т.е. $t < \pi/(2\omega)$. Рассмотрим треугольник ABO , где A и B – концы стержней, вокруг которых они вращаются, O – точка пересечения стержней в этот момент. Очевидно, этот треугольник равнобедренный, в котором $AB = BO$. Действительно, поскольку угол ABO равен $\pi - 2\omega t$ и угол OAB равен ωt , то угол AOB равен $\pi - \omega t - (\pi - 2\omega t) = \omega t$. Таким образом, в треугольнике OAB равны углы AOB и OAB , а следовательно, этот треугольник равнобедренный, в котором $AB = BO$ в любой момент времени. Так что расстояние от точки B до точки пересечения стержней O остается одинаковым в процессе движения и равным l . Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω по окружности с центром в точке B и радиу-

¹ Автор решений задач Ф2513–Ф2516 – С.Муравьев.

сом l . Поэтому величина скорости этой точки не меняется в процессе движения и равна

$$v = 2\omega l,$$

а ее ускорение является центростремительным и равным

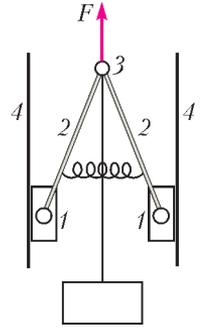
$$a = 4\omega^2 l.$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t > \pi/(2\omega)$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершит еще один оборот, т.е. через время $t > 3\pi/(2\omega)$ после начала движения стержней, стержни снова начнут пересекаться, причем точка их пересечения будет находиться ниже отрезка AB . Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половинка окружности, а ее скорость и ускорение по величине будут такими же. Затем, через время $t > 2\pi/\omega$ после начала движения стержней, оба стержня станут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершит два полных оборота (а левый – один), стержни будут пересекаться, а в течение второй половины времени – нет. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала по верхней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l ; потом стержни не будут пересекаться; затем – по нижней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l . Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются приведенными выше формулами. Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

Ф2514. При проектировании подъемных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рисунке показана одна из возможных конструкций такого механизма. Этот механизм состоит из

двух ползунков 1, совершающих скользкое движение по направляющим 4 и соединенных шарнирно с двумя стержнями 2, которые между собой соединены шарниром 3. Стержни подпружинены легкой пружиной, обеспечивающей прижатие ползунков к направляющим. Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы \vec{F} . При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим? Длина стержней l , расстояние между направляющими $3l/2$.



При «выключении» силы \vec{F} на стержни механизма будут действовать сила натяжения троса, держащего груз, равная силе тяжести груза, силы реакции стенок и силы трения (силой тяжести стержней и силой упругости пружины пренебрегаем). Поэтому шарнир 3 начнет двигаться вниз, стержни будут «вставать в распор», будет увеличиваться сила реакции, а за ней и сила трения, и возникнет эффект заклинивания стержней – когда сила трения сильно возрастет и не даст грузу падать. Найдем необходимый для заклинивания коэффициент трения. Для этого рассмотрим равновесное положение одного из стержней. Условие равенства моментов относительно ползуна дает (напоминаем, что силой тяжести стержней и силой упругости пружины пренебрегаем)

$$\frac{1}{2} mgl \sin \alpha = Nl \cos \alpha,$$

где N – сила реакции шарнира, которая может быть только горизонтальной (из-за симметрии), α – угол между стержнями и направляющими (или стержнем и вертикальным тросом). Отсюда находим

$$N = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны, из условия равенства нулю суммы сил, действующих на стержень, заключаем, что такой же будет и сила реакции стенки механизма, действу-

ющая на ползун. С третьей стороны, для покоя стержня сила трения, которая равна половине силе тяжести груза, не должна превосходить своего максимального значения μN , где μ – коэффициент трения. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2} \mu mg \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2} mg, \text{ и } \mu \geq \operatorname{ctg} \alpha.$$

Определив котангенс угла между стержнем и направляющей через заданные размеры системы, найдем

$$\mu \geq \frac{\sqrt{7}}{3} = 0,88.$$

Ф2515. По круглому стержню длиной l и радиусом r распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением $T(x) = T_1 + T_2(x-l)^2/l^2$, где x – координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата $x = 0$, второму – координата $x = l$ (см. рисунок), параметры T_1 и T_2 – положи-



тельны. Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками $x = l/2$ и $x = 3l/4$? Указание. Количество теплоты q , переносимое в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx , одна поверхность которого имеет температуру t_1 , вторая t_2 , определяется законом $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ – коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

Очевидно, поток тепла по стержню распространяется в положительном направлении оси x . Действительно, температура левого конца стержня ($x = 0$) равна $T_1 + T_2$, температура правого ($x = l$) равна T_1 . Поскольку температура левого конца больше температуры правого, поток тепла идет слева направо.

Далее. Из закона Фурье легко найти поток тепла, проходящего через каждое сечение стержня. Количество теплоты, проходя-

щее через сечение стержня в единицу времени, определяется соотношением

$$Q(x) = q(x)S = \lambda \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} S = \lambda ST'(x),$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, $T'(x)$ – производная температуры стержня как функции координаты x рассматриваемого сечения.

Найдем теперь количество теплоты, уходящее через боковую поверхность стержня. Для этого рассмотрим узкий слой стержня толщиной Δx . Очевидно, поток тепла через боковую поверхность слоя равен разности потоков тепла, входящего через левое основание слоя и выходящего через правое. Поэтому количество теплоты, проходящее через боковую поверхность рассматриваемого слоя, равно

$$\begin{aligned} \Delta W &= Q(x + \Delta x) - Q(x) = \\ &= \lambda ST'(x + \Delta x) - \lambda ST'(x) = \\ &= \lambda S \Delta x \frac{T'(x + \Delta x) - T'(x)}{\Delta x} = \lambda S \Delta x T''(x), \end{aligned}$$

где $T''(x)$ – вторая производная температуры по координате. Учитывая, что $S = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности рассматриваемого элемента $\Delta S = 2\pi r \Delta x$, найдем количество теплоты, уходящее через единицу площади боковой поверхности стержня:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\lambda r T''(x)}{2}.$$

Находя вторую производную температуры по координате, получим, что поток через боковую поверхность не зависит от x и равен

$$w = \frac{\lambda r T_2}{l^2}.$$

Поэтому полное количество теплоты, уходящее через боковую поверхность между точками с координатами $x = l/2$ и $x = 3l/4$, равно произведению величины w на площадь боковой поверхности стержня между этими точками:

$$W = wS_1 = w \cdot 2\pi r \frac{l}{4} = \frac{\lambda \pi r^2 T_2}{2l}.$$

Искомое количество теплоты можно было получить и другим способом – как разность потоков тепла через сечения стержня при $x = l/2$ и $x = 3l/4$: $W = Q(x = 3l/4) - Q(x = l/2)$. Естественно, при этом способе решения получается тот же ответ, что и выше.

Ф2516. На рисунке 1,а показана вольт-амперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую элект-

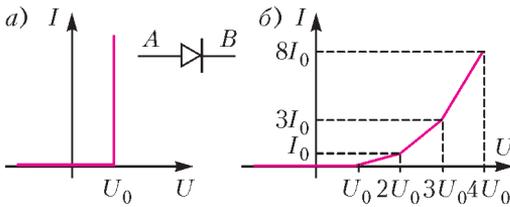


Рис. 1

рическую цепь, вольт-амперная характеристика которой показана на рисунке 1,б.

Искомая цепь изображена на рисунке 2. Убедимся, что ее вольт-амперная характе-

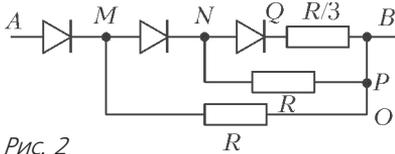


Рис. 2

ристика, будет именно такой, как задано в условии.

Если к цепи приложено напряжение меньше U_0 , все три диода закрыты, ток в цепи не течет. Пусть к цепи приложено напряжение U , которое превосходит U_0 , но не превосходит $2U_0$. Тогда, очевидно, открывается диод AM , а остальные диоды будут по-прежнему закрыты. Ток течет через диод AM и резистор MO , причем, согласно вольт-амперной характеристике диода, напряжение на диоде равно U_0 , а ток может быть любым. Поэтому напряжение на резисторе равно $U - U_0$, а ток, согласно закону Ома, равен

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}},$$

где R_{MO} – сопротивление резистора MO .

Значит, сопротивление этого резистора нужно взять равным

$$R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $2U_0$, но не превосходит $3U_0$, то открывается второй диод MN и ток течет через диоды AM , MN и резисторы MO , NP . При этом, согласно вольт-амперной характеристике, напряжение на диодах равно U_0 , токи определяются токами через резисторы, которые, согласно закону Ома, равны

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}}.$$

Отсюда находим, что суммарный ток в цепи при $U = 2U_0$ равен

$$I = I_{MO} + I_{NP} = \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{NP}}.$$

А поскольку, согласно вольт-амперной характеристике, этот ток втрое превышает ток $I_0 = U_0/R_{MO}$, заключаем, что сопротивление резистора NP равно сопротивлению резистора MO :

$$R_{NP} = R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $3U_0$, открывается последний диод и ток течет через все резисторы. А поскольку напряжения на диодах равны U_0 , легко найти напряжение на каждом резисторе, а потом – и токи:

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}},$$

$$I_{QB} = \frac{U - 3U_0}{R_{QB}}.$$

Теперь из вольт-амперной характеристики цепи получаем

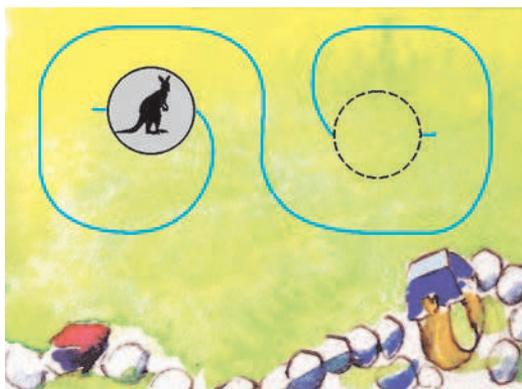
$$8I_0 = \frac{3U_0}{R_{MO}} + \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{QB}} = 5I_0 + \frac{U_0}{R_{QB}},$$

откуда находим

$$R_{QB} = \frac{U_0}{3I_0} = \frac{R_{MO}}{3}.$$

Задачи

1. Бусинку продвинули от начала проволоки до ее конца. Как будет повернуто изображение на бусинке?



2. В деревне (см. рисунок) во всех домах живут мыши. Как только в доме заводят кошку, все мыши убегают из этого дома и из всех домов,



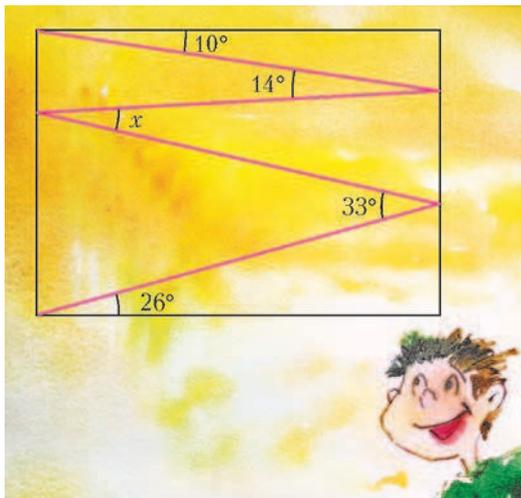
соединенных с ним дорожкой. В каком наименьшем числе домов надо

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

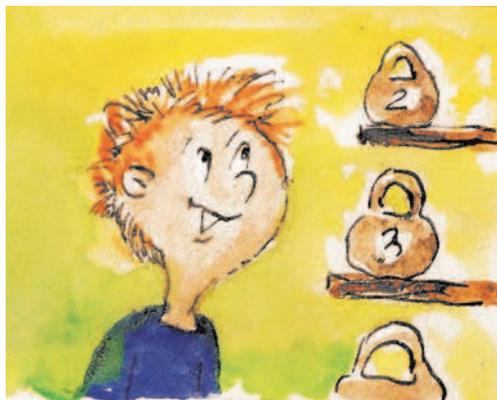
Эти задачи предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру» в 2018 году.

завести кошек, чтобы мыши покинули деревню?

3. Валера нарисовал внутри прямоугольника ломаную линию. Градусные меры некоторых углов указаны на рисунке. Чему равен угол x ?



4. У Ника есть пять гирь массой 2 кг, 3 кг, 4 кг, 5 кг, 6 кг. Он хочет добавить к ним еще одну гирю так, чтобы эти шесть гирь можно было разбить на три группы равной массы. Сколькими способами это можно сделать?



Комбинации квадратов

Е. БАКАЕВ

ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ ЭТОЙ СТАТЬИ достаточно знать программу 7 класса школьного курса геометрии: признаки равенства треугольников, сумму углов треугольника, а также что собой представляет квадрат. С этим «набором юного геометра» мы предлагаем пройти путь до некоторых непростых и, надемся, красивых задач.

Эти задачи, как часто бывает в геометрии, можно решать по-разному. Например, многие коротко решаются с помощью векторов или комплексных координат. Но наша цель не показать наиболее короткие решения, а дать читателю (и решателю) увидеть связь в цепочке задач, общую для них геометрическую конструкцию.

Решения задач записаны кратко. Мы подразумеваем, что некоторые логические переходы неочевидны и требуют от читателя самостоятельного обдумывания.

Также предлагаем в этих задачах не обращать внимания на другие возможные случаи взаимного расположения объектов, а опираться на рисунок, который задает условие. Но внимательному читателю будет полезно самостоятельно поразмыслить, что собой представляют эти дру-

гие случаи и как следует формулировать доказательство, чтобы оно охватывало и их тоже.

Автор признателен В.Н. Дубровскому за предложение дополнить статью решениями с помощью поворота и за ценные указания по их написанию.

Задача 1. На рисунке 1,а даны два квадрата с общей вершиной. Докажите, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.

Указание. Найдите два равных треугольника или воспользуйтесь поворотом.

Решение. Первый способ. На рисунке 1,б закрашены два равных треугольника. Они равны по первому признаку: есть две пары равных сторон, а углы между ними в треугольниках одинаковые, потому что они образуются добавлением прямого угла к одному и тому же углу. Значит, пунктирные отрезки равны как соответствующие элементы равных треугольников. Теперь докажем их перпендикулярность. Рассмотрим треугольники, закрашенные на рисунке 1,в. Докажем, что в них одинаковые наборы углов (иначе говоря, треугольники подобны). Два угла равны как вертикальные. Еще два угла равны как соответ-

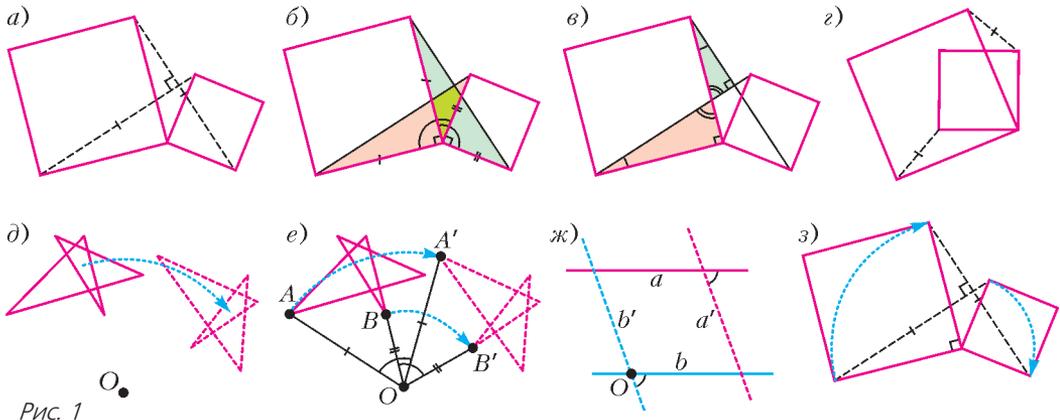


Рис. 1

ствующие элементы треугольников, равенство которых мы доказали выше. Сумма углов треугольника равна 180° , значит, и третьи углы треугольников равны. Так что угол между пунктирными отрезками прямой.

Упражнение 1. Докажите то же утверждение для квадратов, расположенных, как на рисунке 1,з.

Указание. Продлите пунктирные отрезки до пересечения. Далее – аналогично решению для рисунка 1,а.

Второй способ. Это решение использует поворот. Поясним, что это такое. Сделаем копию чертежа на прозрачной пленке и наложим ее на чертеж так, чтобы оригинал и копия совпадали. Воткнем в стол иголку, проколов чертеж и копию. Если теперь подвинуть пленку, то копия чертежа на ней повернется вокруг точки O , в которую воткнута иголка (рис.1,д).

Перечислим основные свойства поворота. Пусть поворот был совершен вокруг точки O , точка A перешла в точку A' , точка B – в B' . Тогда:

1) Углы AOA' и BOB' равны, иными словами, все точки поворачиваются на один и тот же угол. Он называется *углом поворота* (рис.1,е).

2) Фигуры переходят в равные им фигуры. В частности, $OA = OA'$, $AB = A'B'$, $\triangle OAB = \triangle OA'B'$.

3) Угол между прямыми (точнее, лучами) AB и $A'B'$ равен углу поворота.

Упражнение 2. Докажите свойство 3.

Указание. Обозначим прямые AB и $A'B'$ как a и a' соответственно (рис.1,ж). Через точку O проведем прямую b параллельно прямой a . Пусть при повороте b переходит в b' . Тогда $a' \parallel b'$. Получаем два угла с параллельными сторонами.

Вооруженные свойствами поворота, вернемся к нашей задаче. Повернем конструкцию на 90° вокруг общей вершины квадратов (рис.1,з). Тогда в каждом квадрате одна вершина перейдет в другую (потому что соседние стороны квадрата равны и перпендикулярны). Соответственно, один пунктирный отрезок перейдет в другой. По свойству 2 эти отрезки равны, а по свойству 3 они перпендикулярны.

Подробнее о поворотах и других движениях плоскости можно прочитать, например, в статье В.Бугаенко «Движения плоскости и теорема Шаля» в «Кванте» №4 за 2009 год или в статье В.Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований» в «Кванте» №7 за 1975 год.

Задача 2. Рассмотрим теперь комбинацию трех квадратов, изображенную на рисунке 2,а. Докажите, что центр синего квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины двух красных квадратов.

Указание. Найдите три равных треугольника.

Решение. В предыдущей задаче рассматривались два квадрата с общей вершиной и возникали два равных треугольника с этой же общей вершиной. В нашей конструкции есть такие же пары квадратов, значит, есть и соответствующие им пары равных треугольников. Объединив две такие пары, получим, что три треугольника равны (рис.2,б). Задача свелась к такой: на противоположных сторонах квадрата построены равные треугольники (рис.2,в), требуется доказать, что их вершины лежат на одной прямой с центром квадрата.

Рассмотрим симметрию относительно центра квадрата. (Центральная симмет-

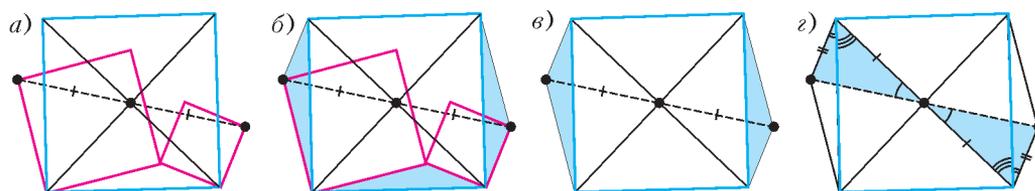


Рис. 2

рия – это поворот на 180° .) Квадрат симметричен самому себе, а треугольники – друг другу. Значит, вершины треугольников не только лежат на одной прямой с центром квадрата, но и равноудалены от него.

Можно доказать это, и не прибегая к симметрии. Закрашенные на рисунке 2,г треугольники равны по первому признаку: две стороны равны как стороны равных треугольников, еще две стороны равны, потому что это отрезки, соединяющие вершины квадрата с его центром, а углы равны, потому что они состоят из углов в 45° и углов равных треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов, а раз две их стороны образуют одну прямую, значит, эти углы вертикальны.

Задача 3. На рисунке 3,а даны три квадрата. Докажите, что вершина зеленого квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины красных квадратов.

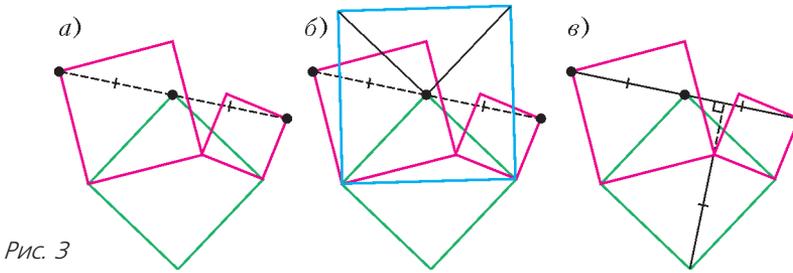


Рис. 3

Указание. Воспользуйтесь предыдущими задачами.

Решение. Первый способ. Добавим синий квадрат, как на рисунке 3,б. Получим конструкцию из задачи 2, в которой мы уже доказали требуемое.

Второй способ. Применим задачу 1 для зеленого и одного из красных квадратов. Получим, что два отрезка, отмеченных одной черточкой, равны и перпендикулярны (рис.3,в). Потом рассмотрим зеленый квадрат в паре с другим красным квадратом. Получим еще пару равных и перпендикулярных отрезков. Значит, рассматриваемые в условии задачи пунктирные отрезки равны и лежат на одной прямой.

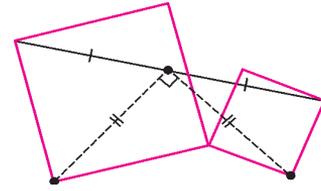


Рис. 4

Задача 4. Даны два квадрата и отрезок, соединяющий их вершины (рис. 4). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Указание. Используйте предыдущую задачу.

Решение. Эта задача обратна предыдущей. В ней мы доказали, что вершина зеленого квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины красных квадратов. Но у отрезка только одна середина, значит, пунктирные отрезки равны и перпендикулярны, так как это стороны зеленого квадрата из предыдущей задачи.

Задача 5. Три квадрата расположены, как на рисунке 5,а. Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Указание. Воспользуйтесь предыдущими задачами.

Решение. Заметим, что комбинация квадратов здесь такая же, как в задаче 3. Значит, мы можем ее использовать и по-

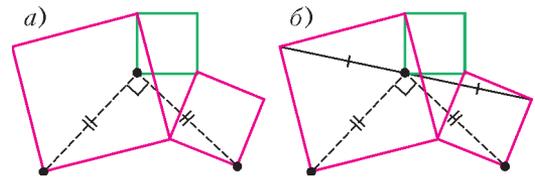


Рис. 5

лучить, что вершина зеленого квадрата лежит на середине отрезка, соединяющего две вершины красных квадратов (рис. 5,б). Теперь, зная, что это середина отрезка, воспользуемся задачей 4.

Задача 6. Противоположные вершины синего квадрата расположены в центрах красных квадратов (рис.6,а). Докажите,

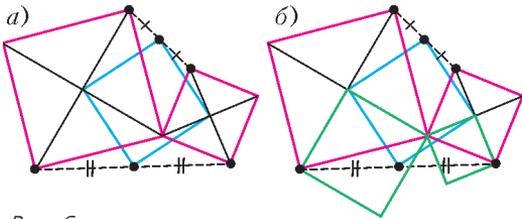


Рис. 6

что другие две вершины синего квадрата являются серединами отрезков, соединяющих вершины красных квадратов.

Указание. Придумайте, к каким двум квадратам следует применить утверждение задачи 3.

Решение. Рассмотрим два зеленых квадрата (рис.6,б). Применим к ним и к синему квадрату утверждение задачи 3. Для другой вершины синего квадрата утверж-

дение доказывается аналогично, рассмотреть надо такие же зеленые квадраты, но построенные «с другой стороны».

Задача 7. На сторонах четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты (рис.7,а). Докажите, что пунктирные отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

Указание. Нужно больше квадратов!

Решение. Рассмотрим красные квадраты, противоположные вершины которых лежат в центрах синих квадратов (рис.7,б). По задаче 6 вершины каждого из них попадают в середину диагонали четырехугольника, таким образом, у красных квадратов есть общая вершина. Применяя к ним задачу 1, получим, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.

Задача 8. На сторонах четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты (рис.8,а). Докажите, что середины диагоналей четырехугольника и середины отрезков, соединяющих центры противоположных квадратов, образуют квадрат.

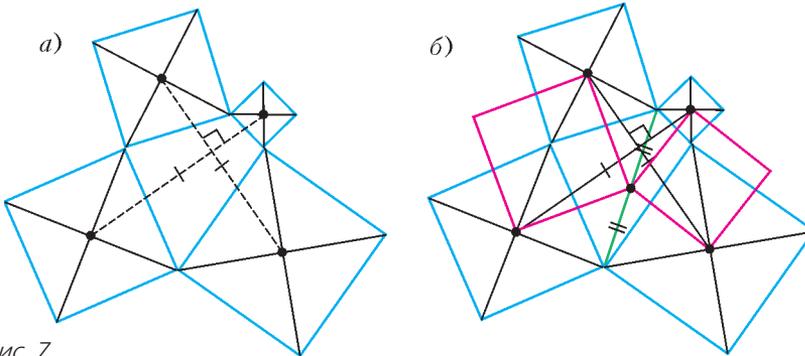


Рис. 7

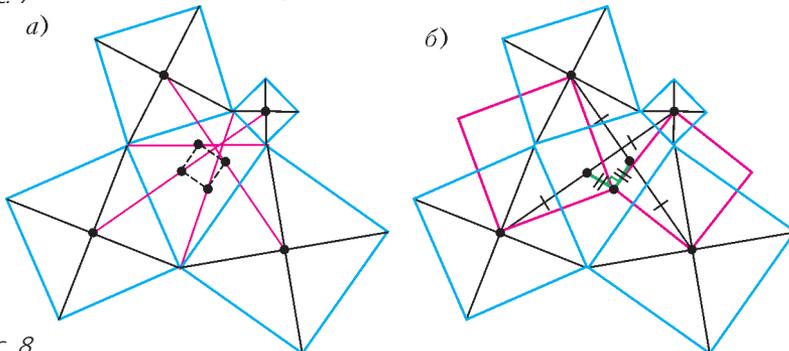


Рис. 8

Указание. Воспользуйтесь тем, что получено в решении предыдущей задачи.

Решение. Рассмотрим те же красные квадраты, что в доказательстве предыдущей задачи (рис.8,б).

В решении задачи 1 мы показали, что отрезки переходят друг в друга при повороте вокруг общей вершины красных квадратов на 90° . При этом повороте середина одного отрезка переходит в середину другого. Значит, отрезки, соединяющие эти середины с центром поворота, равны и перпендикулярны (по свойствам 2 и 3 поворота).

Таким образом, три точки, являющиеся концами зеленых отрезков, образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассмотрим другую пару красных квад-

ратов (общая вершина которых лежит в середине другой диагонали исходного четырехугольника), аналогичным образом получим, что другие три точки тоже образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, причем у них общая гипотенуза. Значит, четыре точки образуют квадрат.

Задачи для самостоятельного решения

Указания к этим задачам есть в конце номера. Условия задач задаются рисунками 9–16. Для каждой комбинации квадратов надо либо доказать, что пунктирные отрезки перпендикулярны, либо доказать, что три точки лежат на одной (пунктирной) прямой.

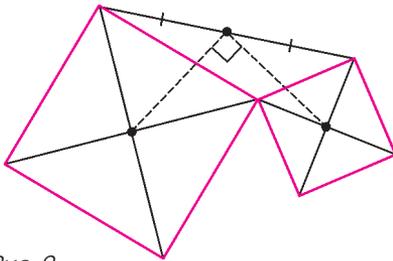


Рис. 9

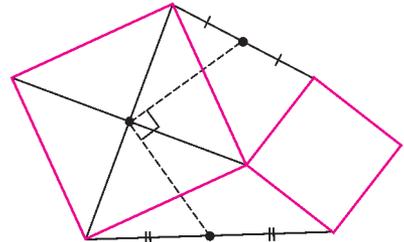


Рис. 10

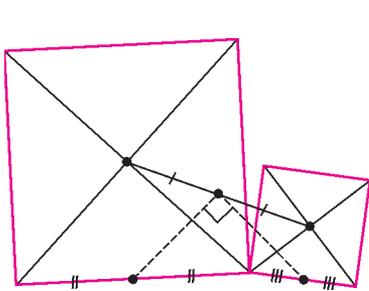


Рис. 11

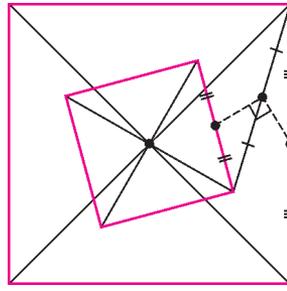


Рис. 12

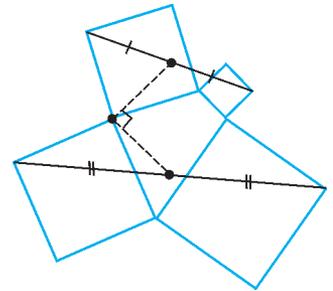


Рис. 13

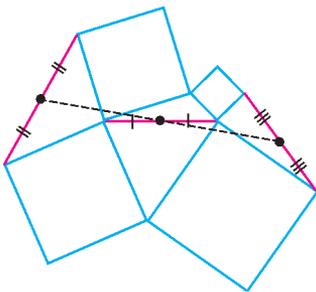


Рис. 14

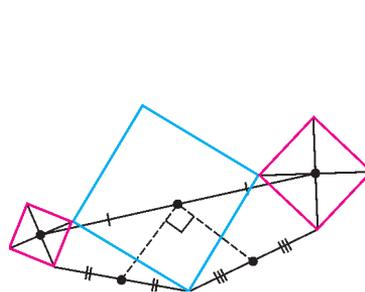


Рис. 15

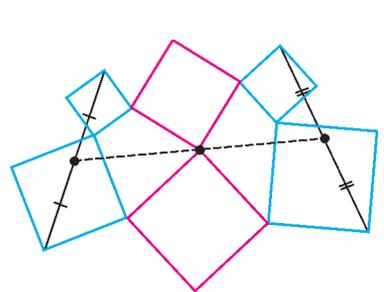


Рис. 16

Диффузия в металлах и корона Гиерона II

А. СТАСЕНКО

ВСЕМ ИЗВЕСТНА ЛЕГЕНДА ОБ ОТКРЫТИИ Архимедом закона плавучести тел (около 2250 лет тому назад), связанная со золотосеребряной короной. Но здесь нас будет интересовать не этот закон, а сама корона сиракузского царя.



Что происходит, когда два вещества соприкасаются друг с другом? Например, почему капля чернил, осторожно введенная в банку с водой, в конце концов распространяется по всему объему воды? Если измерить распределение концентрации чернил, например, вдоль оси x в последовательные моменты времени, то получим картину, качественно изображенную на рисунке 1. То же происходит и с парой металлов – особенно если их сильно прижать друг к другу (сварка под давлением) да еще и нагреть.

Что же заставляет частицы (атомы, молекулы) одного вещества внедряться в другое, стремясь туда, где их нет? Конечно, тепловое хаотическое движение. Можно сказать, что частицы просто «дрожат от жары» – и тем сильнее, чем выше температура.

Но как описать количественно скорость, или темп, или интенсивность этого процесса выравнивания концентрации? Интуитивно ясно, что он должен идти тем быстрее, чем

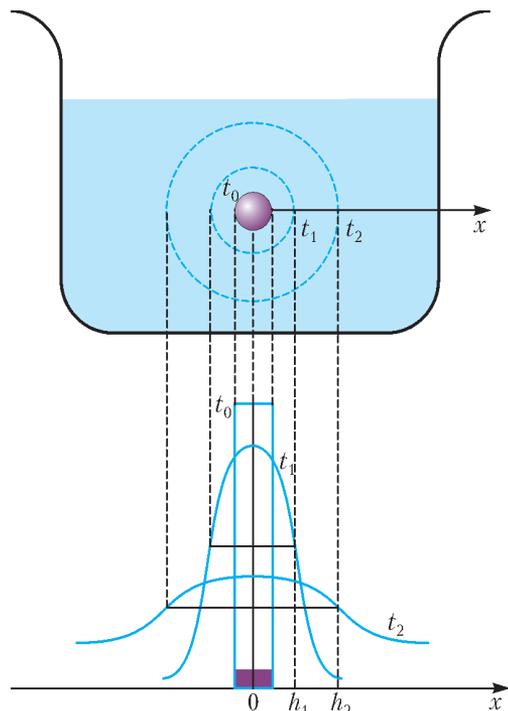


Рис. 1. Диффузия чернил в воде

«круче» пространственная зависимость $n(x)$ концентрации одного вещества в другом, т.е. чем больше отношение $\Delta n/\Delta x$, где Δn – изменение концентрации на отрезке Δx . Эта величина $\Delta n/\Delta x$ называется градиентом концентрации. Далее, поскольку частицы перемещаются в сторону уменьшения концентрации, то при определении плотности их потока q ($[q] = 1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$) нужно не забыть знак «минус». В результате формулу для плотности потока частиц физики пишут так:

$$q = -\frac{\Delta n}{\Delta x} D. \quad (1)$$

А множитель D , который превращает интуитивно ожидаемую зависимость в равенство, называют коэффициентом диффузии.

Этот коэффициент очень сильно зависит от температуры. Но как? Тут определенный намек можно усмотреть в хорошо известной зависимости концентрации молекул атмосферы от высоты (барометрическая формула):

$$n = n_0 e^{-\frac{mgy}{kT}}.$$

Конечно, это установившееся равновесное

распределение, а нам хотелось бы найти эволюцию во времени. Но уже оно подсказывает, что тут очень важно отношение двух характерных энергий: потенциальной энергии mgy , численно равной работе подъема молекулы на высоту y , и средней кинетической энергии хаотического теплового движения молекул kT . Мы здесь вспомнили барометрическую формулу только для того, чтобы подчеркнуть, что отношение двух характерных энергий – потенциального барьера и кинетики «дрожащих от жары» частиц – встречается всюду, где важную роль играет тепловое движение частиц. Оказывается, и температурная зависимость коэффициента диффузии имеет похожий вид:

$$D = D_0 e^{-\frac{Q}{kT}}. \quad (2)$$

Здесь Q – это работа, необходимая для отрыва частицы от своих родных соседей, необходимая для того, чтобы «вынуть» частицу из потенциальной ямы. Она называется энергией активации.

Из формулы (1) легко видеть, что коэффициент диффузии D имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}$. А из соображений размерности можно заключить, что характерная глубина проникновения одного вещества в другое выражается зависимостью от времени:

$$h \sim \sqrt{Dt}.$$

Более точное выражение для характерной глубины диффузии имеет вид

$$h = \sqrt{2Dt}. \quad (3)$$

А теперь распилим царскую корону и измерим на шлифе распределение концентрации золота в серебре и серебра в золоте. Получим картину, качественно изображенную на рисунке 2. Надо сказать, что эти два металла очень похожи друг на друга, несмотря, например, на то, что их плотности

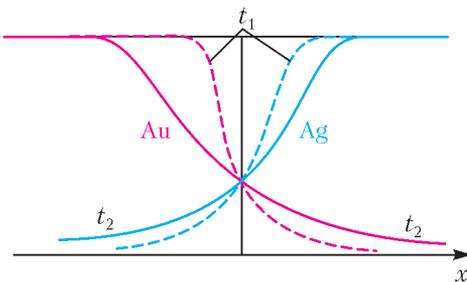


Рис. 2. Взаимная диффузия металлов

отличаются почти в два раза (чем и воспользовался Архимед): природа их кубических решеток одинакова (величина ребра решетки $a = 0,144$ нм); атомарные радиусы почти одинаковы (0,408 и 0,409 нм). А вот скорости теплового движения их атомов отличаются в $\sqrt{2} \approx 1,4$ раза (золото тяжелее, поэтому скорость его атомов меньше).

Но пора приступить к численным оценкам. Значения нужных нам величин D_0 и Q для двух рассматриваемых веществ, приведенные в справочной литературе, сильно различаются между собой. Поэтому выберем некоторые характерные значения коэффициента диффузии для двух температур: $D_1 = 10^{-30} \text{ м}^2/\text{с}$ при $T_1 = 300$ К и $D_2 = 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ при $T_2 = 1200$ К. Такое чудовищное различие (температуры отличаются в четыре раза, а значения D – на много порядков) не удивительно, ведь температурная зависимость (2) сильно нелинейная.

Будем считать, что T_1 – «средняя температура на Сицилии». Прежде всего оценим, на какую глубину продиффундируют атомы золота в серебро за 2250 лет, т.е. за время $t_1 = 2,25 \cdot 10^3 \text{ лет} \times 3,15 \cdot 10^7 \text{ с/год} = 7,09 \cdot 10^{10} \text{ с} \approx 10^{11} \text{ с}$.

Из выражения (3) получим

$$h_1 = \sqrt{2 \cdot 10^{-30} \text{ м}^2/\text{с} \cdot 7,09 \cdot 10^{10} \text{ с}} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

что совпадает с постоянной решетки d (шириной «слоя» атома) этих рассматриваемых металлов. Конечно, это средняя глубина; часть атомов пробирается и дальше.

Но что произойдет, если корона хотя бы один час, т.е. время

$$t_2 = 1 \text{ ч} = 3600 \text{ с},$$

пробудет в пожаре (дворцы иногда горят)? Тогда

$$h_2 = \sqrt{2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с} \cdot 3600 \text{ с}} \approx 0,1 \text{ мм}$$

– на порядки больше, чем h_1 . При этом, измерив на срезе значение h_2 , археолог поймет: что-то произошло с короной в течение этих более двух тысяч лет – конечно, если он немного знает физику и может оценить h_1 или если у него под рукой есть контрольный вариант короны из серии того же ремесленника, не побывавший в пожаре.

Эта ситуация относится к классу так называемых обратных задач. Такие задачи постоянно решают археологи, историки, исследователи... Фантастически талантливый Шерлок Холмс по одному окурку или волоску с головы устанавливал рост, вес, цвет глаз... преступника. Но мог и ошибаться – так же, как и наш предполагаемый исследова-

тель короны: причиной сильного отличия глубины диффузии во втором случае по сравнению с первым могло быть не только одночасовое пребывание в огне на грани плавления. Поэтому такие задачи называют еще некорректно поставленными. И физика не раз помогала решать подобные задачи.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Плюсы-минусы и игра Ним

И. КОПЫЛОВ

ИГРА, О КОТОРОЙ ПОЙДЕТ РЕЧЬ, ПОЯВИЛАСЬ несколько веков назад. Она сыграла заметную роль как в занимательной математике, так и на ранних этапах развития одной из математических дисциплин – теории игр. Игра имеет свое собственное название – Ним. Происхождение игры неизвестно. В Европе говорят, что она заимствована из Китая в средние века, хотя в Китае считают, что игра была завезена из Европы. Существует несколько версий происхождения названия игры. Согласно одной из них, название игры, записанное латинскими буквами, получается переворачиванием слова WIN (победить). Определенно можно сказать, что впервые стратегию игры Ним описал американский математик Чарльз Бутон в 1901 году.

Формулировка игры Ним

Игра Ним формулируется следующим образом.

Имеется m кучек, количество камней в них равно числам a_1, a_2, \dots, a_m . Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе выбирает одну из кучек и берет из нее любое ненулевое количество камней. Игрок, забравший последний камень, считается победителем.

Игрока всегда интересует, как играть, что-

бы выиграть. Для этого необходимо разработать стратегию, т.е. для каждого состояния игры определить ход, ведущий игрока к победе. Стратегия игры Ним хорошо известна. Но в большинстве источников, как и в первоначальной статье Чарльза Бутона, она появляется совершенно неожиданно, буквально «выпрыгивая», как чертик из табакерки. Мы же расскажем, как эту стратегию можно найти.

Правила расстановки знаков плюс и минус

В «Кванте» уже рассказывалось, например в статье А. Орлова «Ставь на минус!» («Квант» №4 за 1977 г.), как с помощью присваивания знаков «+» и «-» каждому состоянию игры по определенным правилам разрабатывать стратегию игры. Напомним эти правила.

1. *Правило конца.* Знаки начинаем расставлять с конечного состояния игры.

2. *Правило минуса.* Состоянию игры приписываем знак «-», если с него некуда ходить или любой ход переводит на состояние, отмеченное знаком «+».

3. *Правило плюса.* Состоянию игры приписываем знак «+», если хотя бы один ход ведет из него на состояние со знаком «-».

Последовательно, начиная с конца, правила 2 и 3 применяют ко всем возможным состояниям игры. Когда знаки приписаны всем состояниям, то играем и выигрываем, придерживаясь правила: «Ставь на минус!»: находясь в «плюсовом» состоянии, всегда ходим на «минусовое».

Попробуем с помощью сформулированных правил построить стратегию для игры Ним.

Случай двух кучек

Если $m = 1$, то кучка всего одна и начинающий выигрывает, забрав первым ходом из нее все камни.

Если кучек две ($m = 2$), то стратегию можно получить с помощью расстановки знаков «+» и «-». Состояние игры определяют два числа – количество камней в первой и второй кучках, поэтому каждому состоянию можно поставить в соответствие клетку двумерной таблицы. Координата клетки по горизонтали соответствует количеству камней в первой кучке, по вертикали – во второй. После хода игрока уменьшается либо первая, либо вторая координата клетки, т.е. клетка, отвечающая новому состоянию, расположена либо ниже, либо левее исходной. Расставляя знаки «+» и «-» по сформулированным выше правилам, получим таблицу, приведенную на рисунке 1.

Количество камней во второй кучке	10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
	9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+
	8	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+
	7	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+
	6	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+
	5	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+
	4	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+
	3	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
	2	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+
	1	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	Количество камней в первой кучке											

Рис. 1. Разработка стратегии в игре Ним с двумя кучками камней

Видно, что минусы располагаются по главной диагонали, т.е. в клетках, у которых первая координата совпадает со второй. Следовательно, правило «Ставь на минус!» приводит к следующей стратегии. Если кучки разные, победу себе может обеспечить первый игрок. Первым ходом он должен уравнивать количества камней в обеих кучках, а далее следует повторять ход соперника, но на другой кучке, оставляя после своего хода кучки с равным числом камней в них. Если изначально кучки одинаковые, выигрывает

второй. Эта стратегия носит название *симметричной*, и мы получили ее при помощи расстановки знаков «+» и «-» в таблице.

Ним с тремя кучками

Теперь рассмотрим случай $m = 3$. Тогда состояние игры определяют три числа, и для разработки стратегии следует заполнить знаками «+» и «-» клетки трехмерной таблицы. Клетка таблицы с координатами (a, b, c) , где a, b, c – неотрицательные целые числа, соответствует состоянию игры Ним, в котором в первой кучке находится a , во второй – b , а в третьей – c камней. Конечно, потратив определенное время, можно по сформулированным выше правилам осуществить расстановку знаков по слоям таблицы и тем самым разработать стратегию игры Ним с тремя кучками (при данных фиксированных a, b, c в начальной позиции).

Поступим по-другому. Предположим, что знаки «+» и «-» в клетках трехмерной таблицы в соответствии с приведенными выше правилами уже расставлены. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *В любом столбце таблицы, в котором две координаты фиксированы, а третья принимает все неотрицательные значения, встречается ровно одна клетка со знаком «-».*

Доказательство. Пусть первые две координаты a и b фиксированы. Сначала покажем от противного, что в столбце не может быть двух или более клеток со знаком «-». Пусть в каждой из двух клеток с координатами (a, b, c_1) и (a, b, c_2) стоит знак «-» и $c_1 < c_2$. Тогда, взяв из третьей кучки $c_2 - c_1$ камней, за один ход игру можно перевести из состояния, соответствующего клетке (a, b, c_2) , в состояние, задаваемое клеткой (a, b, c_1) , т.е. с минуса на минус. Получили противоречие: все ходы с клетки со знаком «-» должны приводить на клетки со знаком «+». Следовательно, в столбце не может быть более одного минуса.

Теперь докажем, что один «-» в любом столбце обязательно есть. Предположим противное и рассмотрим клетки одного столбца с координатами $(a, b, 0), (a, b, 1), \dots, (a, b, a + b)$. Их количество равно $a + b + 1$. По нашему предположению, все они содержат знак «+». Тогда с каждой из них есть ход на клетку с минусом. Однако умень-

шением третьей координаты можно перейти только на клетку с плюсом, поэтому на минус можно попасть, взяв камни либо из первой кучки, либо из второй. В первой кучке a камней, поэтому вариантов хода всего a : взять можно либо 1, либо 2, ..., либо a камней. Число различных ходов со взятием камней из второй кучки равно b . Получаем, что число вариантов хода со взятием камней из первой или второй кучек равно $a + b$. Так как количество рассматриваемых клеток $a + b + 1$, то по принципу Дирихле, по крайней мере, из двух клеток столбца для попадания на клетку со знаком «-» необходимо сделать одинаковый ход. Не уменьшая общности, можно считать, что из состояний, соответствующих клеткам (a, b, c_1) и (a, b, c_2) , $c_1 < c_2$, на минус можно попасть, взяв из первой кучки k камней, где $1 \leq k \leq a$. Но тогда в двух клетках одного столбца, а именно в клетках $(a - k, b, c_1)$ и $(a - k, b, c_2)$, стоят минусы, а выше было показано, что такое невозможно. Получили противоречие. Следовательно, среди указанных выше клеток одного столбца обязательно найдется клетка со знаком «-». Доказательство леммы 1 завершено.

Для данных a и b обозначим через $F(a, b)$ то единственное (по лемме) значение третьей координаты c , для которой в клетке (a, b, c) стоит знак «-». Попробуем разобраться, как устроена функция F .

Если в одной из трех кучек камней нет, то в игре Ним остается 2 кучки. В этом случае, как мы видели выше, для получения состояния со знаком «-» необходимо уравнивать количество камней в двух оставшихся кучках. Поэтому $F(a, 0) = a$; $F(0, b) = b$; $F(a, a) = 0$. Кроме того, из доказательства леммы 1 следует, что величина $F(a, b)$ не превышает суммы $a + b$.

Так как из одного минусового состояния игры нельзя за один ход попасть на другое минусовое состояние, то $F(a, b_1) \neq F(a, b_2)$, если $b_1 \neq b_2$, и $F(a_1, b) \neq F(a_2, b)$, если $a_1 \neq a_2$. Следовательно, число $F(a, b)$ равно минимальному целому неотрицательному числу c , не встречающемуся в наборе значений $\{F(a - 1, b), F(a - 2, b), \dots, F(0, b), F(a, b - 1), F(a, b - 2), \dots, F(a, 0)\}$.

Действительно, при таком значении c уменьшение любой координаты состояния (a, b, c)

приведет к «плюсовому» состоянию. Значит, само (a, b, c) – «минусовое».

Наконец, в силу равноправия всех трех кучек, в игре Ним выполняются соотношения $F(a, b) = F(b, a)$, а если $c = F(a, b)$, то $F(a, c) = b$ и $F(c, b) = a$.

Таблица значений $F(a, b)$ заполняется последовательно, начиная с малых чисел a и b . Например, значение $F(1, 2)$ определяется по набору чисел $\{2, 0, 1\}$: клетки, на которые можно попасть с клетки $(1, 2)$ ходом ладьи, перемещаясь в сторону уменьшения первой или второй координаты, содержат числа 2, 0 и 1. Наименьшее целое неотрицательное число, отсутствующее в наборе, равно 3.

Количество камней во второй кучке (b)	10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0
	9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
	6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
	5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
	4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
	3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
	2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
	1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Количество камней в первой кучке (a)

Рис. 2. Количество камней в третьей кучке, соответствующее состоянию со знаком «-»

Поэтому $F(1, 2) = 3$, т.е. состояние игры, когда в кучках находится 1, 2 и 3 камня, отмечено знаком «-». На рисунке 2 показана таблица значений $F(a, b)$ при $a, b \leq 10$.

Для победы в Ним с тремя кучками игрок должен оставлять после каждого своего хода в кучках количества камней a, b и c , связанные соотношением $c = F(a, b)$. Именно таким состояниям игры соответствует знак «-».

Находить значения $F(a, b)$ последовательно указанным выше способом с ростом чисел a и b становится все сложнее. Во второй части статьи (она будет опубликована позже) мы укажем правило нахождения значений функции $F(a, b)$ по значениям чисел a

(Продолжение см. на с. 34)

Кажущиеся прямые и попятные движения планет принадлежат не им, но Земле.

Николай Коперник

... в этом труде я соединяю небесную физику с астрономией.

Иоганн Кеплер

... Кеплер нашел истинную форму орбиты Земли и характер движения Земли по этой орбите. Все мы, кто родились позже, должны ему поклоняться и воздавать хвалу.

Альберт Эйнштейн

... я сравнил силу, требуемую для того, чтобы удерживать Луну на ее орбите, с силой тяготения на поверхности Земли и нашел, что они весьма близки.

Исаак Ньютон

Конечная цель небесной механики состоит в разрешении великого вопроса: может ли закон Ньютона, и только он один, объяснить все астрономические явления?..

Анри Пуанкаре

*По яйцевидному пути
Летит могучая комета.*

Константин Бальмонт

Во времена Кеплера некоторые считали, что планеты движутся вокруг Солнца, потому что невидимые ангелы толкают их вдоль орбиты. Это не так уж далеко от истины: ангелы толкают планеты, но не вдоль, а поперек орбиты, в направлении к ее центру.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам небесная механика?

Итак, в нашем астрономическом путешествии мы, наконец, вышли за пределы Земли. И прежде всего натолкнулись на проблемы описания космических траекторий, по которым следуют небесные тела. До поры до времени единственным источником информации о них были лишь наблюдения невооруженным глазом, что зачастую приводило к необоснованным домыслам либо к весьма сложным теоретическим концепциям. Да еще эти материалистические построения необходимо было согласовывать с религиозными канонами!

Несмотря ни на что, картина окружающего нас мира пополнилась за многие столетия новыми деталями, а с изобретением оптических приборов был совершен форменный прорыв в познании космоса. Вглядываясь в окуляр телескопа, астрономы изрядно расширили наши представления о Солнечной системе. Оказалось, что движения входящих в ее состав планет, комет и астероидов подчиняются открытым учеными законам, теперь позволяющим не только объяснить, но и предсказать их дальнейшую судьбу.

Сегодня же поразительным подтверждением всеобщности этих законов служит обнаружение все новых экзопланет, входящих в

состав невероятно далеких от нас подобий Солнечной системы. Созданная человеческим гением небесная механика работает и там!

Попробуем убедиться в ее достоверности пока на более близких нам примерах.

Вопросы и задачи

1. В каком направлении будет происходить суточное движение звезд, Солнца и Луны для наблюдателя в Северном полушарии, если он повернется лицом к южной стороне горизонта?
2. Как можно надежно отличить на небосводе планету от звезды?
3. В какое время года Солнце быстрее движется относительно звезд (по эклиптике)?
4. Допустим, что Солнце неожиданно сколлапсировало в черную дыру. Как при этом изменится орбитальный период Земли?
5. Если бы масса Луны была вдвое больше, но она продолжала бы обращаться по той же орбите, то каким бы стал период ее обращения?
6. О каком периоде обращения Луны шла речь в предыдущей задаче?
7. На географическом полюсе Земли Сол-

нце полгода находится над горизонтом и полгода – под ним. А Луна?

8. Если бы орбита Луны лежала строго в плоскости эклиптики, то солнечные и лунные затмения происходили бы реже или чаще, чем сейчас?

9. По результатам каких измерений можно установить, что орбита Земли не является окружностью?

10. Является ли орбита Земли эллипсом?

11. Марс лучше всего виден с Земли, когда она расположена между ним и Солнцем. Каковы в это время условия видимости Земли с Марса?

12. Может ли на какой-либо планете день быть длиннее года?

13. Почему кольца Сатурна иногда «исчезают»?

14. Существует ли планета, находящаяся к Солнцу ближе, чем Меркурий?

15. Почему орбиты комет при их движении через планетную систему часто испытывают заметное изменение?

Микроопыт

Понаблюдайте за звездным небом в ясную безоблачную ночь. Сможете ли вы отличить звезду от планеты за несколько минут наблюдения невооруженным глазом?

Любопытно, что...

... первым, кто пытался аргументировать, что в центре Вселенной не Земля, а Солнце, был древнегреческий астроном Аристарх Самосский в 3 веке до н.э. – за 18 веков до Коперника! Гелиоцентрическая доктрина Аристарха навлекла на него обвинение в богоотступничестве, и он вынужден был покинуть Афины.

... чтобы выяснить истинное движение планет среди звезд, Архимед сочетал наблюдения с расчетами, проводимыми с созданной им механической моделью Солнечной системы. Однако в решении столь трудной задачи небесной механики он, как и его предшественники, потерпел неудачу.

... полную победу гелиоцентрическая модель одержала лишь в XVII веке с появлением теории Кеплера об эллиптических траекториях планет, подкрепленной расчетами с применением интегралов и проверенной прямыми измерениями с помощью телескопа.

... и Кеплер, и Галилей профессионально занимались астрологией, составляя гороскопы и для заказчиков, и для своих близких. В то время это было обычным делом астрономов и врачей и астрология считалась не лженаукой, а скорее искусством.

... в 1577 году 30-летний Тихо Браге, наблюдая очередную комету, впервые сумел вычислить расстояние до нее. В это время мать шестилетнего Кеплера, обладавшая необыкновенно острым зрением, показала сыну эту комету как величайшее чудо природы.

... Аристотель полагал, что кометы возникают из «земных паров», а их хвосты – пламя, которое гонит ветер; долгое время астрономы считали, что кометы пролетают через Солнечную систему только один раз. Наконец, Ньютон установил, что эти небесные тела движутся по замкнутым, но сильно вытянутым эллиптическим орбитам.

... теория движения Луны оказалась одной из самых сложных задач небесной механики, на решение которой ушло, считая только от Ньютона, два с половиной века и потребовало участия таких выдающихся ученых, как Эйлер.

... наличие экваториального «вздутия» Земли необходимо учитывать при расчете траектории космических кораблей и даже орбиты Луны.

... согласно общей теории относительности, любая планета описывает в своем движении медленно поворачивающийся эллипс. Впервые этот эффект был обнаружен у Меркурия, а с развитием радиолокации – и у других планет, что с огромной точностью экспериментально подтвердило теорию.

Что читать в «Кванте» о небесной механике

(публикации последних лет)

1. «Для чего мы изучаем математику?» – 2017, №7, с.4;
2. «Астрономия вернулась в школу» – 2017, №12, с.2; 2018, №1, с.2;
3. «Астрофизика в ЕГЭ по физике» – 2018, №1, с.42;
4. «Почему Луна не падает на Землю» – 2018, №4, с.25;
5. «Законы механики и параметры эллипса» – 2018, №5, с.32.

Материал подготовил А.Леонovich

(Начало см. на с. 29)

и b явным образом, не используя значения функции F при меньших значениях ее аргументов.

Пока же обсудим стратегию для игры Ним, когда кучек больше 3. Для этого нам понадобится сначала поговорить о *суммировании* игр.

Суммирование игр

Определим понятие суммы двух или нескольких *независимых* игр. Два игрока одновременно играют в несколько игр – «на нескольких досках». На каждом ходу игрок имеет право выбрать одну из игр и сделать в ней ход в соответствии с правилами. (При этом другой игрок не обязан немедленно отвечать в той же игре, а может сделать ход в другой.) Состояния остальных игр при этом не меняются. Если ни в одной из игр хода сделать нельзя (как в Ниме, когда все кучки пусты), то игрок, который должен ходить, проигрывает.

Если все игры одновременно находятся в состояниях со знаком « $-$ », то в минусовом же состоянии находится и сумма игр, т.е. победу себе может обеспечить второй игрок. Действительно, первый игрок делает ход в одной из игр и обязательно переводит игру в состояние, которому отвечает знак « $+$ ». Второму игроку следует в ответ в той же игре получить минусовое состояние: по правилам расстановки знаков « $+$ » и « $-$ » это всегда можно сделать. В конце концов каждая из игр завершится ходом второго игрока. Значит, и последний победный ход в общей игре сделает второй игрок.

Важно, однако, отметить, что обратное неверно: если в одной из игр состояние отмечено знаком « $+$ », то не обязательно состояние суммы игр также плюсовое. Примером служит сам Ним, который можно рассматривать как сумму «тривиальных нимов» с одной кучкой. Для непустой кучки каждая из игр находится в состоянии « $+$ » (первый выигрывает за один ход), при этом сумма может быть и в минусовом состоянии.

Однако если ровно в одной игре состояние плюсовое, а в остальных минусовое, то вся игра-сумма будет в состоянии « $+$ »: пер-

вый игрок пользуется правилом «Ставь на минус!» и выигрывает.

Так, если к игре Ним с m кучками добавить новые k кучек камней и состояние игры Ним на добавленных k кучках соответствует знаку « $-$ », то состояние новой игры с $m + k$ кучками соответствует тому же знаку, что и состояние исходной игры с m кучками.

Действительно, новая игра есть сумма двух игр, в одной из которых состояние заведомо «минусовое». Если состояние другой игры также отмечено знаком « $-$ », то состояние суммы игр «минусовое», если « $+$ » – «плюсовое».

Кучки можно не только добавлять, но и удалять. Если из m кучек удалить k кучек, причем состояние игры Ним на этих k кучках соответствовало знаку « $-$ », то состояние исходной игры Ним с m кучками соответствует тому же знаку, что и состояние новой игры Ним с $m - k$ кучками.

Указанное свойство позволяет при оценке состояния игры Ним заменить ее игрой с меньшим количеством кучек, но с сохранением приписываемых состояниям знаков. Действительно, выделим в игре Ним с m кучками произвольные 2 кучки. Пусть в них находится a и b камней. Добавим к имеющимся m кучкам еще 3 кучки, состоящих из a , b и $c = F(a, b)$ камней. Добавленные 3 кучки образуют игру с минусовым состоянием. В полученной игре с $m + 3$ кучками появились две пары кучек с одинаковым количеством камней: пара a и a и пара b и b . Пара кучек с одинаковым количеством камней образует минусовое состояние в игре Ним с 2 кучками. Такую пару можно удалить, не изменив знак состояния игры. В результате две кучки с a и b камнями мы заменили одной кучкой, в которой $c = F(a, b)$ камней. Количество кучек уменьшилось на единицу, а приписываемый состоянию игры знак при этом не изменился.

Когда кучек больше трех...

Теперь все подготовлено к построению стратегии игры Ним в случае, когда кучек больше трех. Выбираем произвольные 2 кучки камней и заменяем их по описанному выше алгоритму на 1 кучку. Количество кучек камней сократилось на 1. Аналогич-

ную операцию по уменьшению количества кучек можно проводить и дальше до тех пор, пока не останутся 3 кучки. Если количества камней в них a , b и c связаны соотношением $c = F(a, b)$, то исходному состоянию в игре Ним с m кучками следует поставить в соответствие знак « \rightarrow », иначе состоянию приписываем знак « $+$ ».

Описанная процедура при большом количестве m кучек становится громоздкой. Ана-

лизировать состояния игры и определять ход, переводящий игру в минусовое состояние, с помощью изложенного алгоритма возможно, но весьма затруднительно.

Во второй части статьи мы более внимательно изучим функцию F и получим стратегию для игры Ним с произвольным количеством кучек, которой удобно пользоваться.

(Продолжение следует)

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

О растительных узорах и хороших моделях

В. ПТУШЕНКО, А. БАЗЫКИНА

НА 4-Й СТРАНИЦЕ ОБЛОЖКИ ВОСЬМОГО номера «Кванта» за прошлый год была помещена фотография незамысловатого узора, образованного мхом под дощатой скамейкой. В сопроводительном тексте было упомянуто, что причиной его появления могут быть разные факторы: доступность света, влаги и эффект вытаптывания. Эта «игрушечная» ситуация на самом деле является хорошей моделью для гораздо более «масштабных» и сложных задач экологии и биогеографии – задач о распространении разных видов растений и животных по регионам Земли. Для каких-то растений область их распространения оказывается ограничена количеством доступной влаги в виде осадков в течение вегетационного периода. Другие приспособились к засушливым условиям за счет глубокой корневой системы или очень короткого периода развития, но требуют определенного температурного режима в течение года. Третьи «привязаны» к распространению своих опылителей или распространителей семян (классический при-

мер – кокосовые пальмы, растущие преимущественно в прибрежных районах и обладающие плодами, которые свободно держатся на воде и далеко разносятся океаническими течениями). Кроме того, большую роль играет конкуренция с другими видами: вспомните, как растения из «теплых краев» прекрасно растут в более высоких широтах в открытом грунте в ботанических садах, где фактор конкуренции исключен.

Однако во всех этих случаях область распространения определяется игрой целого ряда причин. И выделить из них главную – так называемый лимитирующий фактор – не всегда возможно. Снова обратимся к примеру, с которого мы начали: к неравномерному росту мха под скамейкой (рис. 1). Как можно было бы определить, что здесь является лимитирующим фактором для роста мха: свет или влага?



Рис. 1. Распределение мха под дощатой скамейкой может определяться игрой разных факторов. Фото В.Птушенко

Можно было бы в течение лета наблюдать за этим участком земли, систематически измерять световой поток, попадающий в разные его части, и определять влажность почвы. Потом усреднить все данные, получить «карты» распределения освещенности и влажности и сопоставить их с «картой» роста мха. Это будет наблюдательное исследование – наиболее осторожное, т.е. минимально влияющее на исследуемую систему, но в то же время трудоемкое и не всегда дающее возможность однозначной интерпретации.

Можно выполнить экспериментальное исследование: поставить около скамейки осветители, создающие в течение дня равномерное освещение всего пространства под ней, но не мешающие попаданию на землю воды через щели между досками во время дождя. Или, наоборот, равномерно увлажнять землю под скамейкой, не меняя условия света и тени, и наблюдать, как при этом изменится рисунок, образуемый мхом.

Но даже тщательно выполнив подобные исследования, вы можете не получить однозначного ответа. Представьте, например, что принципиальным для роста растительности является определенный диапазон влажности почвы. Причем эта влажность определяется не проникновением влаги под скамейку через щели в ней во время дождя, а проникновением через те же щели солнечного света, который высушивает почву (а в тени она остается более влажной). И тогда распределение влаги под скамейкой будет определяться... рисунком света и тени!

Подобные проблемы в реальных исследованиях встречаются довольно часто. Они не обязательно делают задачу неразрешимой, но могут сильно затруднить ее решение. И потому всегда особенно ценны те экспериментальные модели, которые позволяют увидеть ясное, недвусмысленное решение. Фотография, приведенная здесь на рисунке 2 и на 4-й странице обложки этого номера журнала, дает пример именно такой удачной модели растительного сообщества, находящегося в диапазоне меняющихся условий роста. Ступеньки венецианской набережной, спускающиеся к воде, заросли плотным зеленым «ковром». Очевидно, что освещенность всех ступенек практически



Рис. 2. Ступеньки набережной, спускающиеся к воде и заросшие плотным ковром водорослей, не только прекрасная картина, но и хорошая модель. Фото А.Базыкиной

одинакова, но от ступеньки к ступеньке меняется количество попадающей на нее влаги: более нижние регулярно окатываются волнами, а до более верхних могут долетать лишь брызги. На фотографии хорошо видно, как постепенно убывает плотность растительности по мере продвижения вверх по ступенькам. При желании даже можно определить оптимальное для роста увлажнение. Правда, и здесь можно заподозрить игру разных факторов – например (наряду с увлажнением), ударов волн, смывающих водоросли со ступеней. Таким образом, наблюдаемая нами картина все же несколько сложнее, чем может показаться на первый взгляд, и определяется не одним, а, как минимум, двумя факторами. Однако у каждого фактора есть своя «зона ответственности»: один из них (увлажнение) определяет верхнюю границу распространения, а второй (волнение) – нижнюю. Совсем как в настоящей биогеографии! Поистине хорошая модель.

Однако, перефразируя известное выражение о верной и красивой теории, можно сказать, что хорошая модель всегда еще и красива! И, глядя на ступеньки венецианской набережной, с этим трудно не согласиться.

Как не быть мазилой

Т.МАРТЕМЬЯНОВА

ВБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА ОПТИМИЗАЦИЮ движения требуется найти либо минимальную скорость, при которой данная цель может быть достигнута, либо максимальную дальность полета при заданных условиях полета (узкая стена, широкая стена, покатая крыша и т.п.). Покажем, как можно решать такие задачи двумя способами: алгебраическим и геометрическим.

Алгебраический метод решения баллистических задач

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием силы тяжести в однородном гравитационном поле вблизи поверхности Земли, и найдем уравнение ее траектории. Сопротивлением воздуха здесь и далее пренебрегаем.

Радиус-вектор положения материальной точки в момент времени t задается уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы ее начало совпадало с исходной точкой траектории (рис.1), то $x_0 = y_0 = 0$ и уравнение движения в проекциях на оси координат принимает вид

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Чтобы получить уравнение траектории $y = y(x)$, нужно исключить время из этих

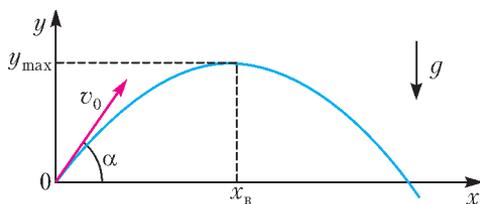


Рис. 1

уравнений. Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, найдем

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Преобразуем уравнение траектории таким образом, чтобы оно содержало только какую-нибудь одну тригонометрическую функцию угла α . Для этого воспользуемся соотношением

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

и получим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Таким образом, решение кинематических задач об оптимизации движения при свободном падении сводится к исследованию семейства параболических траекторий, зависящих от двух параметров: величины начальной скорости v_0 и угла α .

Вот несколько конкретных задач.

Задача 1. Какова минимальная начальная скорость v_0 , при которой можно попасть в цель, находящуюся на расстоянии s по горизонтали и на высоте h по вертикали?

Решение. Потребуем, чтобы траектория, описываемая уравнением $y = y(x)$, проходила через цель, т.е. через точку с координатами $x = s$, $y = h$ (рис.2):

$$h = s \operatorname{tg} \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

Это – квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gs} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2v_0^2 h}{gs^2} + 1 = 0.$$

При дискриминанте $D = \frac{v_0^4}{g^2 s^2} - \frac{2v_0^2 h}{gs^2} - 1$, равном нулю, т.е. когда

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 s^2 = 0,$$

корни совпадают и в цель при данном значе-

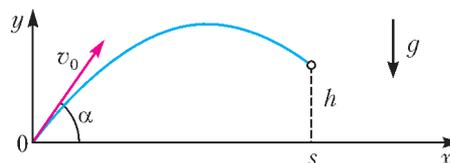


Рис. 2

нии начальной скорости можно попасть единственным образом. Поэтому равенство нулю дискриминанта определяет ту минимальную начальную скорость $v_{0\min}$, при которой еще можно попасть в данную цель:

$$v_{0\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + s^2})}.$$

Задача 2. Найдите границу области, простреливаемой из данной пушки, т.е. координаты наиболее удаленных целей, в которые еще можно попасть при заданном значении начальной скорости v_0 .

Решение. Выразим h из условия равенства нулю дискриминанта D (см. задачу 1):

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

Эта формула определяет наибольшую высоту цели, находящейся на расстоянии s от орудия по горизонтали, в которую еще можно попасть при данном значении v_0 . Теперь можно легко получить уравнение простреливаемой области. Если заменить координаты наиболее удаленной цели s и h на переменные x и y , получим уравнение границы достижимых целей:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Это – уравнение параболы с вершиной в точке с координатами $x = 0$, $y = \frac{v_0^2}{2g}$. Ее ветви направлены вниз и пересекают ось абсцисс в точках $x = \pm \frac{v_0^2}{g}$. Все траектории с данной величиной v_0 при разных значениях α , т.е. семейство парабол, целиком лежат под этой границей и каждая из траекторий касается границы в одной точке. Другими словами, граница является огибающей для семейства таких траекторий (рис.3). Через каждую цель, расположенную ниже границы, проходят две траектории, причем навесная касается границы до попадания в цель, а настильная – после попадания. Граница простреливаемой области представляет собой параболоид вращения, а парабола есть сечение этой поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат.

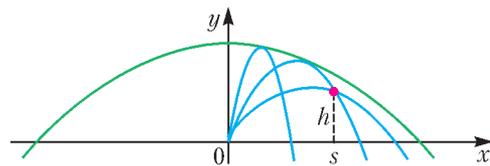


Рис. 3

ная – после попадания. Граница простреливаемой области представляет собой параболоид вращения, а парабола есть сечение этой поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат.

Задача 3. С башни высотой h по всевозможным направлениям с одинаковой начальной скоростью v_0 брошены камни. Определите наибольшую дальность полета камня по горизонтали. При какой наименьшей скорости бросания он сможет упасть на расстоянии L от подножия башни?

Решение. Совместим начало координат с точкой броска. Искомая точка с координатами $(L; -h)$ принадлежит границе достижимых целей:

$$-h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2v_0^2}.$$

Решая это уравнение относительно L , находим

$$L_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

а решая относительно v_0 , получаем

$$v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{h^2 + L^2} - h)}.$$

Задача 4. С какой минимальной скоростью v_0 и под каким углом α к горизонту необходимо бросить камень с поверхности земли, чтобы он смог перелететь через тонкую стену высотой h , если: а) точка бросания камня находится на расстоянии L от стены; б) место броска можно выбрать произвольно?

Решение. а) Выберем начало координат в точке броска. Нужная нам точка с координатами $(L; h)$ находится на границе достижимых целей:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2v_0^2}.$$

Решая это уравнение относительно v_0 , находим

$$v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{h^2 + L^2} + h)}.$$

Угол α найдем из уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gL} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2v_0^2 h}{gL^2} + 1 = 0,$$

полагая дискриминант равным нулю:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gL} = \frac{h}{L} + \sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1}, \text{ и}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{h}{L} + \sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1} \right).$$

б) Заметим, что минимальное значение подкоренного выражения для $v_{0\min}$ достигается при $L = 0$, и получим

$$v_{0\min} = \sqrt{2gh}.$$

Итак, решение задач на экстремальные параметры полета алгебраическим методом сводится к составлению уравнения для границы достижимых целей.

Применение векторов для решения баллистических задач

Кинематические уравнения скорости \vec{v} , радиуса-вектора \vec{r} положения тела, движущегося в однородном поле тяжести Земли, и его перемещения $\vec{\Delta r}$ имеют вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{v}_0t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Векторы начальной и конечной скоростей тела и вектор ускорения свободного падения, увеличенный в t раз, образуют треугольник скоростей, а перемещение является медианой треугольника, подобного треугольнику скоростей с коэффициентом подобия t (рис.4). В дальнейшем будем называть его треугольником перемещений.

Приведем некоторые полезные свойства этих треугольников. Но сначала получим несколько вспомогательных результатов.

1) Найдем скорость тела на высоте $\pm h$. Применив закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

получим

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$

если точка приземления находится выше точки броска, и

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

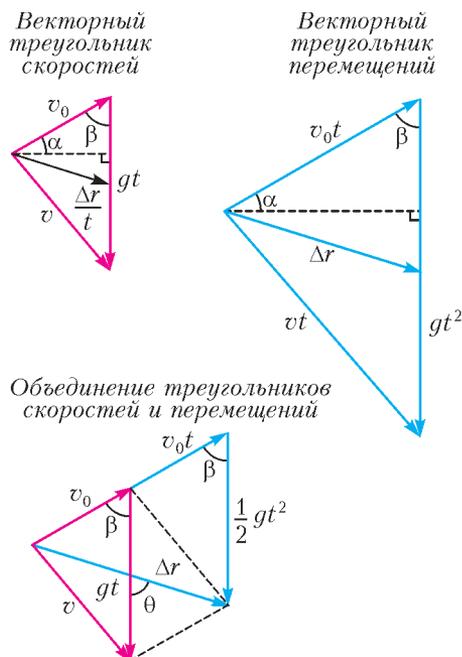


Рис. 4

если точка приземления лежит ниже точки броска.

2) Покажем, что наибольшая дальность полета достигается, когда векторы начальной и конечной скоростей перпендикулярны. Рассмотрим множество целей, находящихся на высоте h по вертикали, в которые можно попасть при данной величине v_0 . Определим расстояние L по горизонтали для наиболее удаленной от места выстрела цели. Вычислим площадь треугольника скоростей двумя способами (рис.5):

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}gt \cdot v_0 \cos \alpha = \frac{1}{2}v \cdot v_0 \sin \varphi.$$

Заметим, что дальность полета по горизонтали равна

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{v v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Наибольшая дальность достигается при $\varphi = 90^\circ$ и равна

$$L_{\max} = \frac{v v_0}{g} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 \mp 2gh}}{g}.$$

Из того, что треугольник скоростей в этом случае прямоугольный, следует, что время полета при наибольшей дальности

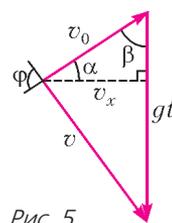


Рис. 5

составляет

$$t = \frac{\sqrt{2(v_0^2 \mp gh)}}{g}$$

3) Докажем, что в треугольнике перемещений при наибольшей дальности полета точка приземления является центром описанной окружности, радиусом $R = \frac{gt^2}{2} = |\overline{\Delta r}|$. Действительно, в случае наибольшей дальности полета треугольник перемещений (как и треугольник скоростей) – прямоугольный, центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, а перемещение $|\overline{\Delta r}|$ является медианой, причем гипотенуза этого треугольника равна gt^2 (рис.6). Значит,

$$R = \frac{gt^2}{2} = |\overline{\Delta r}|.$$

Достроив наш треугольник перемещений до прямоугольника, можно заметить, что одна из диагоналей его вертикальна и равна gt^2 , а другая диагональ по направлению совпадает с перемещением тела и равна $2|\overline{\Delta r}|$. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому треугольник со сторонами $|\overline{\Delta r}|$, $|\vec{v}_0 t|$ и $\left|\frac{\vec{g}t^2}{2}\right|$ – равнобедренный. При этом

$$|\overline{\Delta r}| = \frac{gt^2}{2} = \frac{(gt)^2}{2g} = \frac{v_0^2 + v^2}{2g} = \frac{2v_0^2 \mp 2gh}{2g} = \frac{v_0^2}{g} \mp h.$$

Посмотрим, как эти вспомогательные результаты можно применить для решения конкретных задач на экстремальные параметры полета.

Задача 5. Найдите наибольшую дальность полета при броске с высоты h с начальной скоростью v_0 . Под каким углом к горизонту следует осуществлять бросок?

Решение. Из вспомогательного результата 2) непосредственно следует

$$L_{\max} = \frac{vv_0}{g} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 \mp 2gh}}{g}.$$

Если построить окружность с центром в точке броска и радиусом $R = |\overline{\Delta r}| = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} + h$, то местом приземления будет точка пересечения окружности с горизонтальной плоскостью, на которую упало тело. Из прямо-

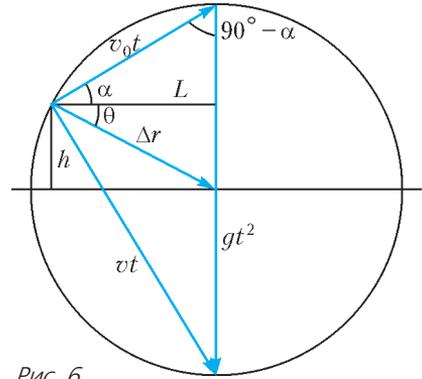


Рис. 6

угольного треугольника скоростей получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Задача 6. Какова наибольшая дальность броска вдоль склона с углом наклона к горизонту θ ? Бросок производится под уклон. Под каким углом к горизонту надо произвести бросок?

Решение. Заметим, что в этом случае $|\overline{\Delta r}| = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} + h$, где разность высот точек броска и приземления равна $h = |\overline{\Delta r}| \sin \theta$. Составим уравнение и решим его:

$$|\overline{\Delta r}| = \frac{v_0^2}{g} + |\overline{\Delta r}| \sin \theta, \quad |\overline{\Delta r}| = \frac{v_0^2}{g(1 - \sin \theta)}.$$

Если построить окружность с центром в точке броска и радиусом $R = |\overline{\Delta r}|$, то точка пересечения с наклонной плоскостью будет местом приземления. Поскольку верхний треугольник на рисунке 6 равнобедренный (две стороны в нем равны R), немедленно получаем

$$\theta + \alpha = 90^\circ - \alpha, \text{ и } \alpha = 45^\circ - \frac{\theta}{2}.$$

В силу обратимости движения, эти рассуждения справедливы и при броске снизу (вверх на склон). Тогда бросать надо по биссектрисе острого угла, и $\alpha = 45^\circ + \frac{\theta}{2}$.

Задача 7. С какой минимальной скоростью v_0 надо бросить тело, чтобы перебраться его через стенку высотой h ?

Решение. Если построить окружность радиусом $R = |\overline{\Delta r}| = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h$ с центром в вершине стенки на высоте h , то точки пере-

сечения с горизонтом будут возможными точками броска. Минимальный радиус достигается у основания стенки при $|\Delta r| = h$, тогда получим уравнение

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h,$$

откуда найдем

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Задача 8. Какова наибольшая длина L простреливаемой области при стрельбе из-за вертикальной стенки высотой h с начальной скоростью v_0 ? Под каким углом к горизонту следует осуществить выстрел?

Решение. Построим окружность радиусом $R = |\Delta r| = \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h$ с центром в вершине стенки. Точка пересечения с горизонтом – место выстрела:

$$L = \sqrt{|\Delta r|^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g} - h\right)^2 - h^2} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}.$$

Из прямоугольного треугольника скоростей найдем искомый угол:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Задача 9. Какова наименьшая скорость броска v_0 , с которой можно перекинуть тело через прямоугольную преграду длиной L и высотой h ?

Решение. Заметим, что если скорость при касании первого угла преграды v_1 минимальна, то она будет минимальна и при броске с земли. Найдем минимальную скорость при броске на дальность L по горизонтали. Построим окружность с центром в точке приземления и радиусом $R = |\Delta r| = \frac{v_1^2}{g} - h$, причем $h = 0$. Точка пересечения с горизонтом – точка броска. Поскольку точка броска и точка приземления лежат на одной горизонтали, то радиус этой окружности равен дальности полета:

$$L = |\Delta r| = \frac{v_1^2}{g}, \text{ откуда } v_1 = \sqrt{gL}.$$

При броске с земли скорость больше и равна

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{g(L + 2h)}.$$

Итак, решение задач на экстремальные параметры полета геометрическим способом сводится к построению описанной окружности известного радиуса с центром в точке броска и нахождению точек ее пересечения с поверхностью приземления.

Упражнения

Решите каждую из следующих задач двумя способами: алгебраическим и геометрическим.

1. Из точки A , находящейся на вершине крутого обрыва на высоте H над горизонтом, бросают небольшой предмет в точку B горизонтальной поверхности, находящуюся от обрыва на расстоянии l (рис.7). Чему равна минимальная скорость броска? Под каким углом к горизонту должен при

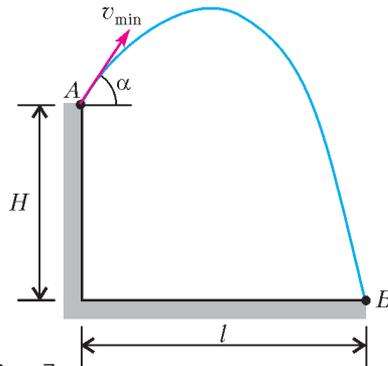


Рис. 7

этом быть совершен бросок? С какой скоростью предмет упадет на горизонтальную поверхность? Чему будет равен угол падения на горизонтальную поверхность?

2. С какой минимальной скоростью надо бросить камешек, чтобы перебросить его через сарай высотой H и шириной L ?

3. При какой минимальной начальной скорости v_0 можно перебросить камень через дом с покатой крышей, если ближайшая к месту броска стена имеет высоту H , задняя стена имеет высоту h , а ширина дома равна L (рис.8)?

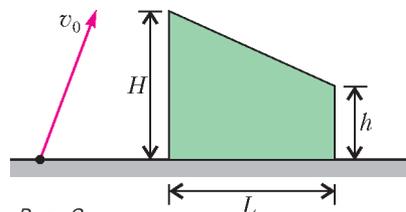


Рис. 8

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА СУНЦ НГУ

В Новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам ЗШ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Лучшие ученики 8–10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учащимся ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых Вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью. Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором Вы будете учиться в Заочной школе.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде, необходимые документы и подробную информацию о ЗШ можно найти на сайте заочной школы <http://zfmsh.nsu.ru>

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-40-66

E-mail: zfmsh@yandex.ru

Первые задания на 2018/19 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

5 класс

1. На клетчатой бумаге из прямоугольника со сторонами 7 и 8 удалили одну угловую

клетку. Разделите полученную фигуру на 11 одинаковых частей.

2. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу и ехали с постоянными скоростями. Через 25 минут первый велосипедист проехал половину всего пути, второй – одну треть всего пути. Через какое время после этого велосипедисты поравняются?

3. На плоскости проведены 5 прямых так, что только две из них не пересекаются и никакие три прямые не проходят через одну точку. Чему равно количество попарных пересечений этих прямых?

4. Найдите наименьшее четное натуральное число n , при котором сумма $1 + 2 + 3 + \dots + n$ делится на 64.

5. Даны 2018 чисел. Известно, что сумма любых семи из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна? Ответ нужно обосновать.

6. У пятизначного числа K , которое не оканчивается цифрой 0, записали все цифры в обратном порядке и получили число L . Докажите, что разность чисел K и L делится на 11.

6 класс

1. На плоскости проведены 7 прямых так, что только две из них не пересекаются и никакие три прямые не проходят через одну точку. Чему равно количество попарных пересечений этих прямых?

2. Вычислите и представьте в виде несократимой дроби сумму

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17}.$$

3. Найдите наименьшее нечетное натуральное число n , при котором сумма $1 + 2 + 3 + \dots + n$ делится на 81.

4. Хозяин обещал работнику за год 17 рублей и сапоги, но работник ушел, проработав 5 месяцев. При расчете работник получил 3 рубля и сапоги. Сколько стоят сапоги?

5. У пятизначного числа K , которое не оканчивается цифрой 0, записали все цифры в обратном порядке и получили число L . Докажите, что числа K и L при делении на 33 дают одинаковые остатки.

6. Определите, можно ли в квадратной таблице $n \times n$ расставить числа 1, 2, 3 так, чтобы при делении на 3 каждая из сумм по

строке давала остаток 1, а каждая из сумм по столбцу давала остаток 2, если: а) $n = 5$; б) $n = 6$.

7 класс

1. Решите уравнение

$$(x - 1)(x - 5)(x - 7) = (x - 3)(x - 4)(x - 6).$$

2. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 2 часа 20 минут?

3. Найдите наименьшее четное натуральное число n , при котором сумма $1 + 2 + 3 + \dots + n$ делится на 243.

4. Хозяин обещал работнику за год 7 баранов и 11 гусей, но работник ушел, проработав 7 месяцев. При расчете работник получил 4 барана и 7 гусей. Во сколько гусей оценивает хозяин барана, если известно, что расчет за месяц можно выполнить только гусями, а хозяин оценивает барана целым числом гусей, не большим 10?

5. Вычислите и представьте в виде несократимой дроби сумму

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{3}{6 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \frac{5}{13 \cdot 18} + \frac{6}{18 \cdot 24} + \frac{7}{24 \cdot 31}.$$

6. Определите, можно ли в квадратной таблице $n \times n$ расставить числа 1, 2, 3 так, чтобы при делении на 3 каждая из сумм по строке давала остаток 1, а каждая из сумм по столбцу давала остаток 2, если: а) $n = 6$; б) $n = 7$.

8 класс

1. Решите уравнение

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 4) = (x^2 - 7)(x^2 - 8).$$

2. Два путника вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и шли с постоянными скоростями. Через 10 минут первый был на расстоянии 1,4 км от середины пути, а второй – на расстоянии 1,6 км от середины пути. Еще через 20 минут путники встретились. Найдите, на каком расстоянии от середины пути они встретились.

3. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 4 часа 12 минут?

4. Найдите наименьшее трехзначное натуральное число n , при котором произведение $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ делится на 900.

5. Докажите, что при каждом натуральном

n сумма

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$$

меньше 2 и больше $\frac{2}{3}$.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Известно, что $AB + CD = AD + BC$. Докажите, что тогда $AO = OC$ или $BO = OD$.

9 класс

1. Найдите сумму

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + 2017^2 - 2018^2 + 2019^2.$$

2. В четырехугольнике все углы различны и при некотором перечислении величин углов в порядке следования вершин образуется арифметическая прогрессия. Докажите, что этот четырехугольник – трапеция.

3. Решите уравнение

$$(x - 2)\sqrt{x - 2} = 2x + 5.$$

4. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, при которых $x^2 - 4xy + 3y^2 = 30$.

5. Дан треугольник ABC , площадь которого равна P . Точка K – середина стороны BC , точки L на луче AB и M на луче AC расположены так, что $AL = \frac{4}{3}AB$, $AM = \frac{5}{4}AC$. Найдите площадь треугольника KLM .

6. Докажите, что на клетчатой бумаге, составленной из квадратов со стороной 1, площадь любого треугольника с вершинами в узлах сетки не меньше 0,5.

10 класс

1. Найдите все натуральные числа n , при каждом из которых сумма $1 + 2 + 3 + \dots + n$ делится на 36.

2. Решите уравнение

$$x + 2\sqrt[3]{x - 2} = \frac{3}{\sqrt[3]{x - 2}} + 2.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC точки K, L на стороне AB , M на стороне BC и N на стороне AC расположены так, что $KLMN$ – прямоугольник. Докажите, что середина диагонали KM принадлежит отрезку с концами в серединах высоты CH и стороны AB .

4. Для каждого натурального числа n найдите количество всех пар $(x; y)$ целых

чисел, для которых выполняется неравенство $|x| + |y| < n$.

5. Дан треугольник ABC , площадь которого равна P . Точка K – середина стороны BC , точки L на луче AB и M на луче AC расположены так, что $AL = \frac{5}{3}AB$, $AM = \frac{7}{4}AC$.

Найдите площадь треугольника KLM .

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 3xy - 4, \\ y^3 = 3xy - 5. \end{cases}$$

11 класс

1. Найдите количество нечетных трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 7.

2. Решите уравнение

$$(x + 2)\sqrt{x + 2} = 4x - 1.$$

3. Определите, сколько корней в действительных числах имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 49, \\ |x + 1| + |y - 2| = 6. \end{cases}$$

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отрезок KL грани SAB и отрезок MN грани SCD параллельны, но не параллельны плоскости $ABCD$. Докажите, что тогда прямые AB и CD не параллельны.

5. Докажите, что при $\alpha \neq \pi k$, где k – целое, и при любом натуральном n выполняется равенство

$$1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 2\alpha + \dots + 2 \cos 2\alpha = \frac{\sin(2n + 1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

6. В окружности S проведена хорда AB . Рассматриваются окружности, которые расположены по одну сторону от прямой AB и касаются окружности S в точке K и прямой AB в точке L . Докажите, что все прямые KL имеют общую точку.

ФИЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Ф И З И К А

7 класс

1. Определите цену деления циферблата стенных стрелочных часов.

2. Измерьте рулеткой размеры классной доски: ширину, высоту. Определите площадь доски и величины ошибок измерения.

3. Первую треть пути велосипедист проехал со скоростью $v_1 = 10$ м/с, а оставшиеся две трети – со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

4. Из пунктов A и B по шоссе навстречу друг другу движутся два автобуса. Один выехал в $t_1 = 9$ ч из пункта A , а другой – из пункта B в момент $t_2 = 9$ ч 30 мин. Первый движется со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а второй – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Расстояние между пунктами $s = 120$ км. В какое время и на каком расстоянии от пункта A автобусы встретятся?

5. Определите скорость течения реки, если теплоход проходит за сутки по течению путь $s_1 = 600$ км и против течения путь $s_2 = 336$ км за то же самое время.

8 класс

1. На дне сосуда с водой лежат одинаковой массы шары: свинцовый и железный. Одинаковое ли давление на дно сосуда производят эти шары?

2. Площадь льдины $S = 8$ м², толщина $h = 25$ см. Погрузится ли она целиком в пресную воду, если на нее встанет человек весом $P = 600$ Н?

3. Давление воды в цилиндре нагнетательного насоса $p = 1200$ кПа. Чему равна работа при перемещении поршня площадью $S = 400$ см² на расстояние $H = 50$ см?

4. Определите среднюю мощность насоса, который подает воду объемом $V = 4,5$ м³ на высоту $H = 5$ м за время $t = 5$ мин.

5. Определите длину поезда, движущегося равномерно по мосту длиной $L = 630$ м со скоростью $v = 18$ км/ч, если поезд проходит мост за время $t = 2,5$ мин.

9 класс

1. Ваня едет вдоль дороги на велосипеде со скоростью $u = 10$ км/ч. По дороге во встречном направлении с интервалом $\tau = 5$ мин ходят маршрутные такси. Какое их максимальное количество может встретить Ваня на пути длиной $s = 3$ км, если скорость маршрутных такси $v = 60$ км/ч?

2. Некоторое вещество находится в жидком состоянии и имеет известную удельную теплоемкость $c = 2,5$ кДж/(кг · К). Для того чтобы оценить его удельную теплоту плавления, тонкостенную колбу с веществом осту-

дили до отрицательной температуры, вынули из холодильника и наблюдали процесс ее нагревания, периодически добавляя в нее одинаковые порции твердofазного вещества, находящегося при температуре плавления $T_{п} = -110\text{ }^{\circ}\text{C}$. График изменения температуры со временем и их характерные значения приведены на рисунке 1. Определите удельную теплоту плавления вещества, считая мощность нагревания постоянной и пренебрегая теплоемкостью колбы.

t_1	100 с	T_1	$-80\text{ }^{\circ}\text{C}$
t_2	400 с	T_2	$-50\text{ }^{\circ}\text{C}$
t_3	420 с	T_3	$-57,7\text{ }^{\circ}\text{C}$
t_4	720 с	T_4	$-30,5\text{ }^{\circ}\text{C}$

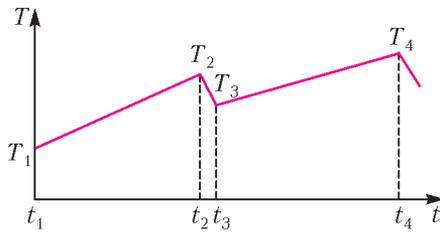


Рис. 1

3. В цилиндрическом сосуде находится вода. Когда в сосуд положили пластмассовый кубик, уровень воды поднялся на $h = 1\text{ см}$. Как изменится этот уровень, если сверху налить керосин? Плотность воды ρ_0 , кубика $\rho = 0,9\rho_0$, керосина $\rho_1 = 0,8\rho_0$, слой керосина выше кубика.

4. Студент собрал схему, состоящую из трех резисторов, амперметра и батарейки с напряжением 10 В (рис.2), забыв предвари-

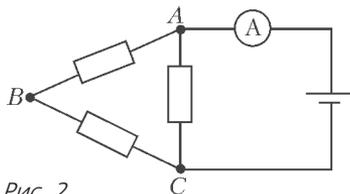


Рис. 2

тельно измерить сопротивления резисторов. Последнее его не очень озадачило: записав показания амперметра $I_1 = 12,5\text{ мА}$ в исходном состоянии и получив одинаковые показания амперметра $I_2 = 15\text{ мА}$ при поочередно замкнутых проводом точках A и B или B и C (A и B при этом разомкнуты), он быстро решил проблему. Определите сопротивления резисторов. Напряжение на выводах

батарейки не зависит от тока.

5. На крюке башенного крана висит груз массой $m = 5000\text{ кг}$ (рис. 3). Кран снабжен двумя тросами: один переброшен через блок на конце стрелы и служит для подъема груза, второй прикреплен к оси этого блока и удерживает шарнирно прикрепленную к башне стрелу в положении под углом 30° к горизонту. Определите силу натяжения троса, удерживающего стрелу, при условии, что он натянут горизонтально. Массой стрелы пренебречь.

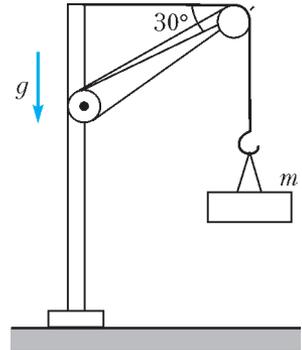


Рис. 3

10 класс

- Решите задачу 1 для 9 класса.
- Студент спаял изображенную на рисунке 4 схему. В спешке он забыл проконтролировать сопротивления резисторов. Для исправления ошибки он измерил сопротивления в собранной схеме. Оказалось, что сопротивление между точками A и B равно $R_{AB} = 0,8\text{ кОм}$, между B и C , а также A и C оно равно $R_{BC} = R_{AC} = 1,2\text{ кОм}$. Определите сопротивления резисторов.

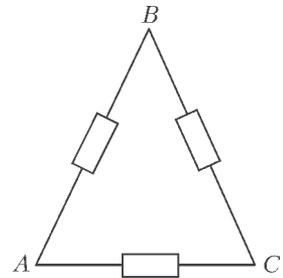


Рис. 4

3. Полет ракеты проходил в аварийном режиме. Предполагалось, что после старта ее двигатели отработают $\tau = 100\text{ с}$ и отключатся на высоте $H = 60\text{ км}$, но через время $\tau/2$ ракета потеряла ориентацию в пространстве, так что двигатели начали работать на торможение. На какой высоте находилась ракета, когда двигатели, отработав положенное время τ , выключились? Изменением массы ракеты пренебречь, сила тяги двигателей постоянна, ускорение свободного падения $g = 10\text{ м/с}^2$.

4. Катер затрачивает на путь из пункта A в пункт B , расположенный на противопо-

ложном берегу реки точно напротив пункта A , время t_1 , если плывет по прямой, и время t_2 , если сначала движется, держа корпус точно поперек реки, а затем идет против течения вдоль берега. Определите скорость катера на неподвижной воде и скорость течения реки, если ее ширина $h = 1$ км.

5. Трубка без трения скользит по горизонтальной спице (рис.5). На концах трубки

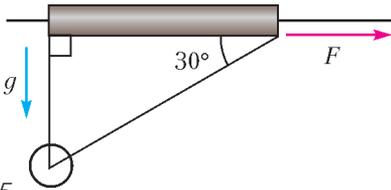


Рис. 5

закреплена нить, на которой висит кольцо. Масса кольца и трубки одинакова и равна m . С некоторой силой трубку тянут вправо так, что кольцо находится точно под ее левым концом, а угол нити у ее правого конца равен 30° . Найдите эту силу.

11 класс

1. Два одинаковых бруска массой m каждый лежат на горизонтальной поверхности. На левом бруске закреплен блок, а на правом бруске закреплена нить, переброшенная через этот блок (рис.6). За конец нити A тянут

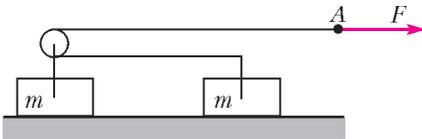


Рис. 6

вправо с силой F . Определите ускорение конца нити. Трения нет, нить нерастяжима.

2. Мальчик решил эффектно пролететь на тарзанке над поверхностью реки. Тарзанку (канат, привязанный к ветке дерева, заканчивающийся деревянной перекладиной, за которую нужно держаться руками) он привязал к свисающей над серединой реки ветке дерева. Сделал это он таким образом, чтобы можно было, держа канат горизонтально, прыгнуть с обрывистого берега реки высотой 6 м, пролететь, слегка коснувшись воды, и оказаться на другом ее берегу. С какой высоты мальчик упал в воду, если он мог удержать руками вес, в два раза превышающий собственный? Ширина реки 12 м. Начальной скоростью прыжка и ростом мальчика пренебречь.

3. Замкнутый сосуд разделен герметичной перегородкой на два отсека высотой H каждый, верхний отсек частично заполнен водой, нижний пуст (рис.7). Отсеки соединяются тонкой трубкой с вентиляем. При каком уровне воды в верхнем отсеке вся она вытечет в нижний отсек, если открыть вентиль? Плотность воды ρ , свободные объемы заполнены воздухом при атмосферном давлении p_0 .

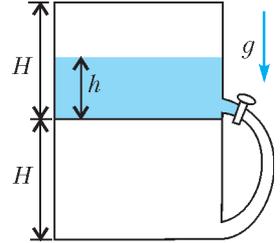


Рис. 7

4. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая в схеме, изображенной на рисунке 8, если между точками A и B включить диод?

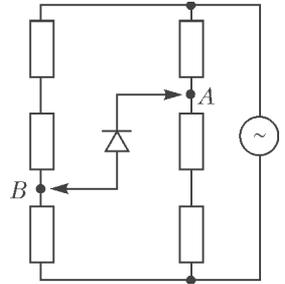


Рис. 8

5. Пружинная пушка стреляет шариками под углом 45° к горизонту. Шарик падает на расстоянии L от пушки. Какое расстояние он пролетит, если точно под вершиной его траектории выстрелить вертикально другим шариком из такой же пушки и шарики упруго столкнутся на одной вертикальной оси (рис.9)? Стрельба производится с горизонтальной поверхности, трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

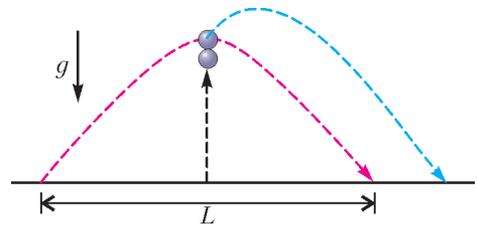


Рис. 9

LXXXI Московская математическая олимпиада

8 класс

1. Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a , b и c , что числа $a + b + c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

Л. Попов

2. См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов XXXIX Турнира городов.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K . Точка M – середина BC , точка P – середина KM . Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, то $AK = DK$.

Е. Бакаев

4. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни он валерьянку не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будут пасмурными, а другая половина – солнечными, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

Е. Бакаев

5. См. задачу M2513 «Задачника «Кванта»».

6. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1 , BCD_1 , CDE_1 , DEF_1 , EFA_1 и FAB_1 . Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ – равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

О. Косухин

9 класс

1. В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?

Б. Френкин

2. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трех из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырех треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?

А. Шаповалов

3. Докажите, что для любых натуральных a_1, a_2, \dots, a_k таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} > 1$, у уравнения

$$\left[\frac{n}{a_1} \right] + \left[\frac{n}{a_2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{a_k} \right] = n$$

не больше чем $a_1 a_2 \dots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ – целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

М. Григорьев

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P , отличная от A и D . Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P .

А. Доledenok

5. Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние ноль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n , m существует хорошая расстановка?

М. Берштейн, П. Гавриленко

6. На олимпиаду пришли 2018 участников, некоторые из них знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют «кружок», если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой

аудитории не будут сидеть все представители какого-либо кружка.

А. Райгородский

10 класс

1. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»?

А. Канель-Белов

2. В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные – в черный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10 , все клетки которого белые, и квадрат 10×10 , все клетки которого черные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10 , в котором количество черных и белых клеток отличается не больше чем на d ?

Е. Бакаев

3. См. задачу M2510 «Задачника «Кванта»».

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Карлсон ест треугольный торт. Он режет торт по биссектрисе одного из углов, съедает одну из частей, а с другой повторяет ту же операцию. Если Карлсон съест больше половины торта, он станет не в меру упитанным мужчиной в самом расцвете сил. Докажите, что рано или поздно это произойдет.

П. Рябов

6. Докажите, что количество способов разрезать квадрат 999×999 на уголки из трех клеток делится на 2^7 .

Ю. Чеканов

11 класс

Первый день

1. Графики квадратного трехчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трехчлен?

П. Бородин

2. Имеются одна треугольная и одна четырехугольная пирамиды, все ребра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

М. Евдокимов

3. Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n , имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство:

$$а) P(x)P(x+1) = P(x^2);$$

$$б) P(x)P(x+1) = P(x^2+1)?$$

П. Бородин, Д. Горяшин

4. Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

В. Гичев

5. См. задачу 6 для 8 класса.

6. В доме из 2^n комнат сделали евроремонт. При этом выключатели света оказались перепутанными, так что при включении выключателя в одной комнате загорается лампочка, вообще говоря, в какой-то другой комнате. Чтобы узнать, какой выключатель к какой комнате подсоединен, прораб посылает несколько человек в какие-то комнаты, чтобы те, одновременно включив там выключатели, вернулись и сообщили ему, горела лампочка в их комнате или нет.

а) Докажите, что за $2n$ таких посылок прораб может установить соответствие между выключателями и комнатами.

б) А может ли он обойтись $2n - 1$ такими посылками?

П. Бородин, А. Канунников

Второй день

1. Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1.$$

П. Бородин

2. На доску 2018×2018 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т.е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2 , ни прямоугольник 4×1 . Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски?

М. Евдокимов

3. Пусть x и y – пятизначные числа, в десятичной записи которых использованы все десять цифр ровно по одному разу. Найдите наибольшее возможное значение x ,

если $\operatorname{tg} x^\circ - \operatorname{tg} y^\circ = 1 + \operatorname{tg} x^\circ \operatorname{tg} y^\circ$ (a° обозначает угол в a градусов).

И.Шейтак

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Окружность, описанная вокруг ΔA_1BC_1 , проходит через точку M пересечения медиан. Найдите все возможные значения величины угла B .

М.Евдокимов

5. Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его

в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, т.е. если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала яйцо так же, то оно все равно окрасилось бы полностью.

П.Бородин

Публикацию подготовил Е.Епифанов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Ф И З И К А

Олимпиада-2018

Первый тур

ВАРИАНТ 1

1. Снаряд вылетает из ствола с угловой скоростью вращения $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, сделав внутри ствола $n = 2$ оборота. Длина ствола $l = 2,0$ м. Считая движение снаряда в стволе равноускоренным, найдите скорость снаряда в момент вылета.

2. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности радиусом $R = 4$ км на одной и той же высоте. Определите, с какой постоянной скоростью движется самолет, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом $\alpha = 30^\circ$.

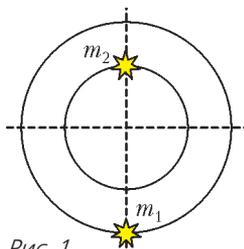


Рис. 1

3. Массы двух звезд равны $m_1 = 1,5m$ и $m_2 = 2,5m$, расстояние между ними l (рис.1). Найдите период обращения этих

звезд по круговым орбитам вокруг их общего центра.

4. В системе, изображенной на рисунке 2, груз массой m висит на подвижном блоке,

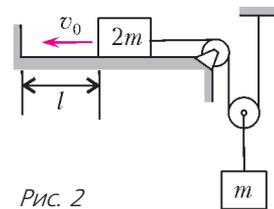


Рис. 2

а груз массой $2m$ лежит на горизонтальной плоскости. В начальный момент груз массой $2m$ находится на расстоянии l от вертикальной стенки, движется к ней со скоростью v_0 и затем ударяется о нее. Считая удар груза о стенку абсолютно неупругим, определите максимальную высоту, на которую поднимется груз массой m от начального положения. Нить считать нерастяжимой. Трением и массой нити и блоков пренебречь.

5. Две свинцовые пули, массы которых $2m$ и m , летящие со скоростями v и $2v$ во взаимно перпендикулярных направлениях, испытали абсолютно неупругий удар. Найдите количество теплоты, которое выделилось в результате этого удара.

6. Рабочим веществом идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, являются два моля идеального одноатомного газа. КПД цикла известен и равен η . Определите

температуру холодильника, если работа, которую совершает газ при адиабатическом расширении, равна A .

7. Внутри незаряженного металлического шара радиусом R имеются две сферические полости радиусами $r < 0,5R$, расположенные таким образом, что их поверхности почти соприкасаются в центре O шара (рис.3). В центре одной полости поместили отрицательный заряд $-q$, а затем в центре другой

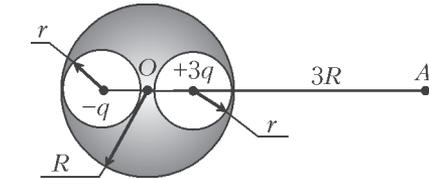


Рис. 3

поместили положительный заряд $+3q$. Найдите модуль и направление вектора напряженности электростатического поля в точке A , находящейся на расстоянии $3R$ от центра шара на линии, соединяющей центры полостей.

8. Отрицательно заряженная частица движется с постоянной скоростью \vec{v} вдоль оси y в стационарном однородном электро-

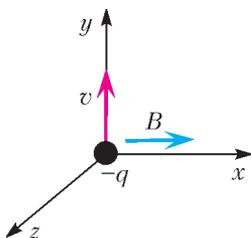


Рис. 4

магнитном поле (рис.4). Определите модуль и направление вектора напряженности электрического поля \vec{E} , если вектор магнитной индукции \vec{B} направлен вдоль оси x .

9. Сопротивление $R_1 = 10$ Ом и изменяемое сопротивление R_x подключены к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В (рис.5). Найдите значение сопротивления

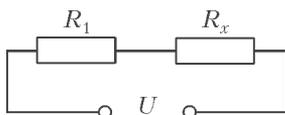


Рис. 5

R_x , при котором на нем выделяется максимальная тепловая мощность, и значение этой мощности.

10. Из тонкого провода сделано кольцо радиусом R . По кольцу течет ток с известной плотностью тока j , а перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле. Определите индукцию магнитного поля, разрывающего кольцо, если раз-

рыв провода происходит, когда механическое напряжение в любом его сечении достигает значения σ_m . Магнитным полем тока пренебречь.

Второй тур

ВАРИАНТ 1

1. Найдите время, за которое затонет баржа прямоугольной формы длиной $a = 80$ м, шириной $b = 10$ м и высотой $c = 5$ м, если в центре ее днища образовалась пробоина диаметром $d = 10$ см, а воду не откачивают. Баржа открыта сверху, начальная высота бортов над уровнем воды $h = 3,75$ м, груза на барже нет. Вязкостью воды пренебречь.

2. При буксировке водометного катера по озеру с постоянной скоростью v сила натяжения буксировочного троса пропорциональна квадрату скорости: $F = kv^2$, где $k = 7,5 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$. После того как трос отцепили и включили двигатель, катер движется с постоянной скоростью, забирая забортную воду и выбрасывая назад струю со скоростью $u = 20$ м/с относительно катера. Площадь поперечного сечения струи $S = 0,01$ м². Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Найдите скорость катера.

3. В сосуде с подвижным поршнем находится мыльный пузырь радиусом r . Медленным вдвиганием поршня воздух в сосуде сжимают так, что радиус пузыря уменьшается вдвое. Найдите давление воздуха в сосуде вне пузыря в этот момент, если давление воздуха в сосуде вне пузыря в исходном состоянии было равно p_0 . Процесс считать изотермическим. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ .

4. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно (рис.6) между изотермами T и T_1 ($T_1 > T$). Холодильником является резервуар, температура которого

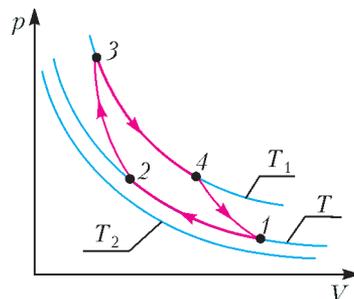


Рис. 6

постоянна и равна $T_2 = 200 \text{ К}$ ($T_2 < T$). Теплообмен между рабочим веществом и холодильником осуществляется посредством теплопроводности. Количество теплоты, отдаваемое в единицу времени холодильнику, равно $q = \alpha(T - T_2)$, где $\alpha = 1 \text{ кВт/К}$. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем происходит непосредственно при температуре $T_1 = 800 \text{ К}$. Полагая, что продолжительность изотермических процессов одинакова, а адиабатических очень мала, найдите температуру «холодной» изотермы T , при которой мощность тепловой машины наибольшая. Определите наибольшую мощность тепловой машины.

5. Длинная сверхпроводящая цилиндрическая катушка индуктивностью L и радиусом R , по которой течет ток I , замкнута накоротко. Витки катушки намотаны плотно, поэтому можно считать, что поле внутри катушки однородно. Какую работу нужно совершить, чтобы из бесконечности внести в катушку сверхпроводящий цилиндрический стержень, радиус которого $R/2$, а длина равна длине катушки? Оси катушки и стержня параллельны.

6. Шарик одинакового размера массами $3m$ и $2m$ соединены невесомой пружиной жесткостью k и длиной L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе (рис. 7). Шарик массой $2m$ разрезан горизонтальной плоскостью на две части. По прямой, соеди-

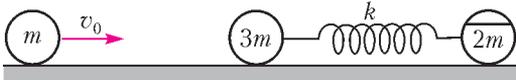


Рис. 7

няющей центры шариков, со скоростью v_0 движется третий шарик такого же размера, масса которого равна m , и упруго соударяется с шариком массой $3m$. Пренебрегая временем соударения шариков по сравнению с временем деформации пружины, определите минимальное значение коэффициента трения между частями разрезанного шарика, при котором эти части не будут проскальзывать относительно друг друга при дальнейшем движении шариков.

ВАРИАНТ 2

1. Упругий шарик бросают со скоростью $v = 5 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 15^\circ$ к горизонту.

Коэффициент восстановления вертикальной составляющей скорости шарика после удара о горизонтальную плоскость, с которой производился бросок, $R = 0,95$. Найдите расстояние от точки бросания, на котором шарик перестанет подпрыгивать, если горизонтальная составляющая его скорости не изменяется. (Коэффициентом восстановления $R = v_2/v_1$ называется отношение скорости после удара v_2 к скорости до удара v_1 .)

2. На горизонтальной плоскости на расстоянии L_0 друг от друга поместили два небольших тела массой m каждое, заряженных зарядами $2q$ и q . В результате электрического взаимодействия тела начинают двигаться по плоскости. Найдите максимальное расстояние между телами, если коэффициент трения тел о плоскость равен μ .

3. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M , находится идеальный одноатомный газ. При нагревании газа первоначально покоящийся поршень начинает двигаться равноускоренно. Найдите количество теплоты, подведенное к газу за промежуток времени τ , в течение которого поршень сместился в сосуде на расстояние L . Теплоемкостью сосуда и поршня, внешним давлением, а также трением пренебречь.

4. Определите заряд, протекающий через ключ K при его замыкании в схеме, изображенной на рисунке 8. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

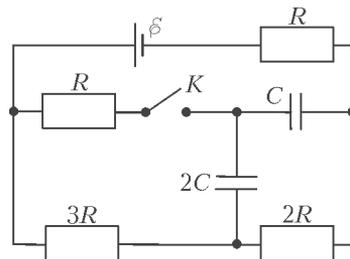


Рис. 8

5. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным. Напряженность результирующего электрического поля слева от пластины $E_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м}$, а справа $E_2 = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ (рис. 9). Определите заряд пластины, если

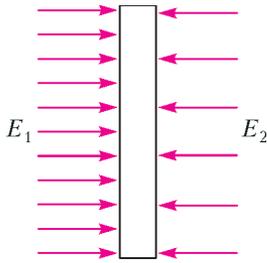


Рис. 9

сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, равна $F = 0,7$ Н.

6. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в 3

раза больше радиуса Земли. Какую минимальную дополнительную скорость в направлении от центра Земли по радиусу необходимо кратковременно сообщить кораблю, чтобы он смог покинуть поле тяготения Земли? Значение первой космической скорости $v_1 = 7,9$ км/с на Земле считать известным. Сопротивление атмосферы не учитывать.

ВАРИАНТ 3

1. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости вниз, скользит по ней, ударяется об упор, отскакивает от него и возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени представлен на рисунке 10. Найдите угол наклона плоскости к горизонту.

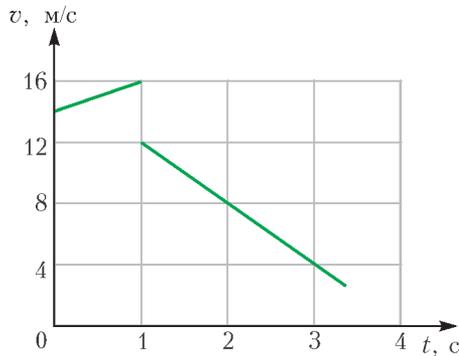


Рис. 10

2. Считая, что воздух состоит из азота и кислорода и что концентрация молекул азота в $\beta = 4$ раза больше концентрации молекул кислорода, найдите массу азота, который содержится в воздухе комнаты объемом $V = 75$ м³. Средняя квадратичная скорость молекул азота $v = 500$ м/с. Атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

3. Небольшая шайба массой $m = 10,0$ г начинает скользить, если ее положить на

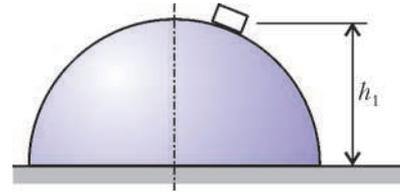


Рис. 11

шероховатую поверхность полусферы на высоте $h_1 = 70$ см от горизонтального основания полусферы (рис.11). Продолжая соскальзывать, шайба отрывается от полусферы на высоте $h_2 = 30$ см. Найдите работу сил трения, действующих на шайбу при ее соскальзывании.

4. Две частицы равных масс обладают одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами $+q$ и $-q$. Под действием электрических сил частицы движутся по круговой орбите радиусом r . Определите полную энергию этой системы. Гравитационным взаимодействием и излучением пренебречь.

5. Тонкая сферическая поверхность радиусом R равномерно заряжена электрическим зарядом Q . Определите напряженность электрического поля в центре сферы, если у нее удалить достаточно малый участок площадью ΔS , значительно меньшей площади всей сферы. Влиянием среды пренебречь.

6. Три одинаковых шарика массой m каждый, соединенные одинаковыми пружинами жесткостью $2k$, образуют равносторонний треугольник (рис.12). Одновременно все три шарика толкнули, сообщив им одинаковые по модулю скорости, направленные к центру треугольника.

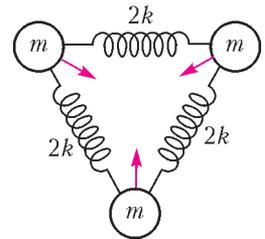


Рис. 12

Через какое минимальное время после этого пружины будут сильнее всего растянуты? Массами пружин пренебречь.

ВАРИАНТ 4

1. В стенке открытого бака с водой просверлены одно под другим два небольших отверстия. Одно отверстие расположено на глубине h от поверхности воды, второе – на глубине $3h$. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. Найдите расстояние

от стенки бака до точки пересечения струй, вытекающих из отверстий.

2. Между брусками с массами m и $2m$, связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью k , сжатая на некоторую величину (рис.13). Система движется со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через

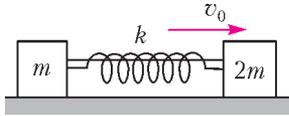


Рис. 13

центры брусков. Нить пережигают, и в момент, когда деформация пружины становится равной нулю, один из брусков останавливается. Найдите начальную величину сжатия пружины. Силами трения пренебречь.

3. В цепи, схема которой показана на рисунке 14, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R = 10$ Ом. Ключ K

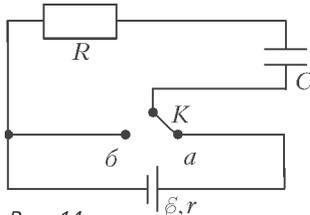


Рис. 14

переключается между контактами a и b 10 раз в секунду. Когда ключ находится в положении a , конденсатор полностью заряжается, а при переброске его в положение b конденсатор полностью разряжается. Найдите среднюю мощность электрического тока в нагревателе. Чему равен коэффициент полезного действия цепи?

4. В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде, высота которого $h = 2$ м, а площадь основания $S = 300$ см², имеется тяжелый поршень массой $M = 100$ кг. Первоначально поршень, делящий объем сосуда пополам, уравновешен силами давления газов в сосуде. Над поршнем находится гелий массой $m = 1$ г, под поршнем – кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время, в результате диффузии гелия, поршень занимает новое равновесное положение, смеща-

ясь вверх. Найдите величину Δh , на которую сместится поршень. Процесс протекает при постоянной температуре $T = 300$ К. Трением пренебречь.

5. Из начала координат со скоростью v_0 , направленной вдоль оси x , в область, где созданы однородные параллельные оси y электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B , влетает положительно заряженная частица массой m с зарядом q (рис.15). Определите, на каком расстоянии от начала координат частица во второй раз (не считая начального) пересечет ось y .

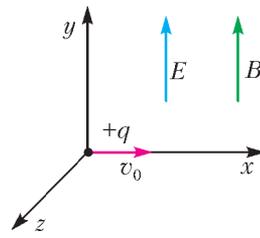


Рис. 15

6. Два параллельных провода, расположенных в горизонтальной плоскости на расстоянии h друг от друга и имеющих каждый сопротивление r на единицу длины, замкнуты с одного конца накоротко (рис.16). По

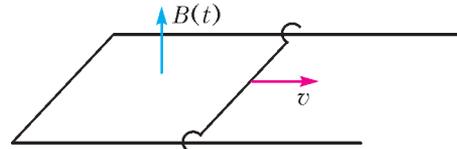


Рис. 16

проводам с момента времени $t = 0$ от замкнутого конца начинает с постоянной скоростью v двигаться перемычка, сопротивлением которой можно пренебречь. Вертикальное однородное магнитное поле при этом изменяется со временем по закону $B(t) = \frac{B_0}{\tau} t$, где B_0 и τ – известные постоянные. Определите количество теплоты, выделившееся в цепи за время, когда индукция поля стала равной B_0 .

Публикацию подготовил Ю.Струков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №6)

1. На правом верхнем.

2. 12.

Условие того, что число ближе к 15, чем к 20, равносильно тому, что оно меньше их полусуммы, равной $\frac{15+20}{2} = 17,5$.

Аналогично, раз оно ближе к 8, чем к 3, то оно больше их полусуммы, равной $\frac{8+3}{2} = 5,5$.

Подходят все целые числа от 6 до 17. Их количество равно $17 - 6 + 1 = 12$.

3. В.

Посмотрим на правый рисунок условия задачи: для равновесия на каждой чаше должна лежать половина общей массы мячей, т.е. $\frac{30+50+50+50+80}{2} = 130$ г.

Двумя мячами получить 130 граммов можно, только взяв самые тяжелые мячи: 50 и 80 граммов. Значит, среди мячей А и Г один имеет массу 50, а другой – 80 граммов, а среди Б, В и Д один имеет массу 30, а два других – по 50 граммов. Значит, мячи Б и Д это либо мячи в 30 и 50 граммов, либо оба по 50 граммов.

На левом рисунке в условии изображено, как мячи Б и Д перевесили какие-то два других мяча, а два самых легких мяча (30 и 50 граммов) не могут перевесить другие два. Значит, возможен только случай,

когда Б и Д оба имеют массу по 50 граммов. Тогда масса В – 30 граммов.

4. Ответ представлен на рисунке 1.

Для начала заметим, что такое сечение куба является правильным шестиугольником.

Посмотрим, как пересекаются с плоскостью маленькие кубики. Если плоскость проходит через середину ребра кубика и перпендикулярна его диагонали, то она пересе-

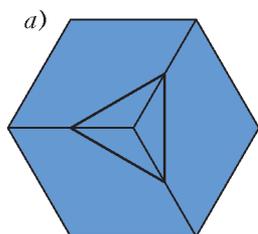


Рис. 1

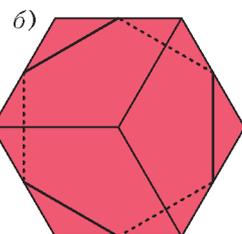


Рис. 2

кает и другие его ребра в серединах, а сечение является либо правильным треугольником (рис. 2,а), либо правильным шестиугольником (рис.2,б). Соответственно, если плоскость проходит через середины ребер кубика, то она проходит и через середины ребер соседнего с ним кубика. Значит, каждый кубик пересекается с этой плоскостью либо по правильному треугольнику, либо по правильному шестиугольнику.

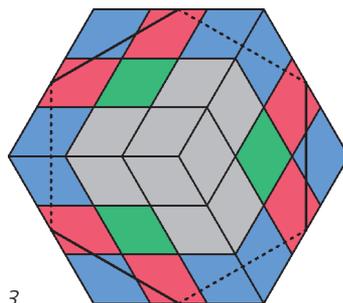


Рис. 3

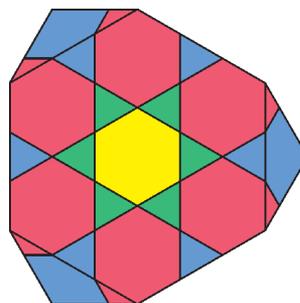


Рис. 4

На рисунке 3 изображен куб до разрезания, а на рисунке 4 – после. Шесть красных кубиков плоскость пересекает по шестиугольнику. Соседние с ними кубики плоскость пересекает по треугольнику (это шесть синих угловых кубиков и шесть зеленых – по одному в центре каждой грани большого куба).

Желтый центральный кубик плоскость пересекает по шестиугольнику.

Так как желтый и зеленые кубики удалены, то сечение получается таким, как на рисунке 1.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Слева направо, по часовой стрелке.
2. Надежно отличить планету от звезды можно только по ее перемещению среди других звезд.
3. Зимой, поскольку в начале января Земля находится ближе всего к Солнцу и, следовательно, движется быстрее.
4. Если в процессе коллапса Солнце не потеряло

свою массу, то ни орбита Земли, ни ее орбитальный период не изменятся.

5. Остался бы тем же, так как период обращения тела по орбите не зависит от его массы (если масса спутника намного меньше массы центрального тела, в данном случае – Земли).

6. Период обращения Луны вокруг Земли относительно звезд, называемый сидерическим, равен 27,3 суток. Период обращения Луны вокруг Земли относительно Солнца, равный промежутку времени между двумя последовательными одинаковыми фазами Луны и называемый синодическим, составляет 29,53 суток. Ответ к задаче 5 относится к обоим периодам.

7. Орбита Луны лежит почти в плоскости эклиптики, поэтому видимый путь Луны на небе почти совпадает с траекторией Солнца, однако она совершает свой оборот не за год, а за лунный месяц – 27,3 суток. Поэтому с географического полюса Земли она будет 2 недели видна над горизонтом и на 2 недели скроется под ним.

8. Затмения происходили бы чаще – ежемесячно.

9. На основе измерений в течение года угловых размеров Солнца, а также – измерений угловой скорости Солнца относительно звезд.

10. По эллиптической орбите движется центр масс системы Земля-Луна. Орбита Земли близка к эллипсу, но искажена воздействием Луны.

11. Земля в это время недоступна для наблюдений, за исключением очень редкой возможности прохождения Земли по диску Солнца, но и тогда виден лишь ее силуэт.

12. Может, если суточное обращение планеты и ее обращение вокруг Солнца происходят в одном направлении и с близкими периодами. Например, на Меркурии, где продолжительность суточного периода (т.е. звездные сутки) составляет $2/3$ орбитального периода (т.е. года), солнечные сутки длятся 2 меркурианских года, а световой день – 1 год. Если бы суточный и орбитальный периоды совпадали, то смена дня и ночи вообще бы прекратилась.

13. Когда кольца Сатурна становятся к Солнцу ребром, их поверхности не освещаются и кольца становятся невидимыми. То же самое происходит, когда они становятся ребром к земному наблюдателю.

14. Малая планета Икар в перигелии подходит к Солнцу ближе, чем Меркурий. Его среднее расстояние от Солнца 0,387 астрономической единицы, а у Икара оно составляет 0,19 а.е.

15. Силы притяжения со стороны планет искажают первоначальную эллиптическую орбиту кометы. Эти изменения в орбитах накапливаются от оборота к обороту вокруг Солнца.

МИКРООПЫТ

Яркую планету можно быстро отличить от яркой звезды по отсутствию мерцаний. Видимый диск звезды меньше вихрей неоднородностей в атмосфере Земли. Угловые же размеры дисков планет достаточно велики, чтобы исключить мерцания.

КОМБИНАЦИИ КВАДРАТОВ

- 9.** Примените утверждение задачи 6.
- 10.** Снова примените утверждение задачи 6.
- 11.** Примените утверждение задачи 4 к синим квадратам (рис.5).

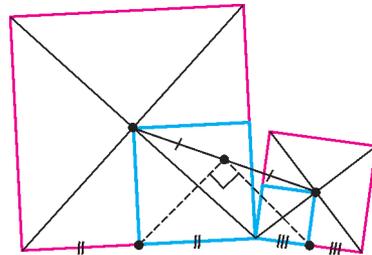


Рис. 5

- 12.** Примените утверждение задачи 4 к синим квадратам (рис.6).

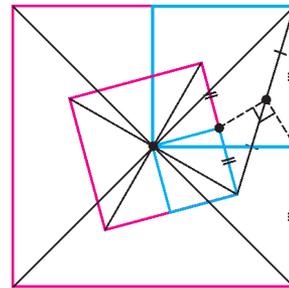


Рис. 6

- 13.** Применив утверждение задачи 4 к одной паре квадратов и к другой, получим два равнобедренных прямоугольных треугольника с общей гипотенузой (рис.7).

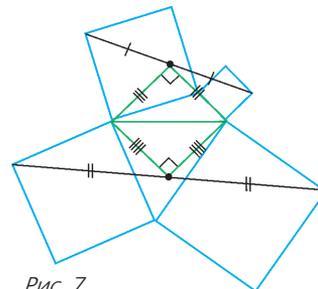


Рис. 7

- 14.** Рассмотрите зеленые квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис.8).

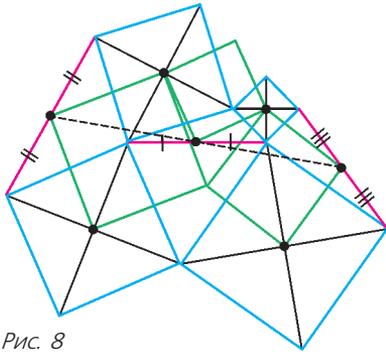


Рис. 8

15. Рассмотрите зеленые квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис.9).

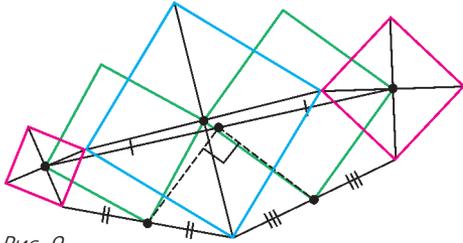


Рис. 9

16. Рассмотрите зеленые квадраты (рис.10).

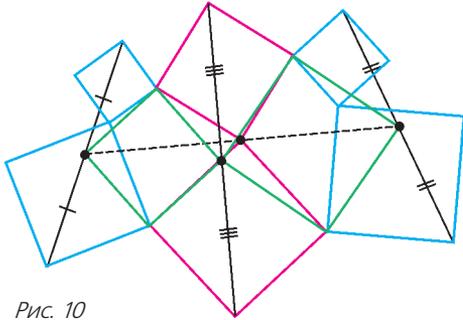


Рис. 10

КАК НЕ БЫТЬ МАЗИЛОЙ

1. $v_{\min} = \sqrt{g(\sqrt{H^2 + l^2} - H)}$,
 $v = \sqrt{g(\sqrt{H^2 + l^2} + H)}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\min}}{v}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{v_{\min}}$.
2. $v_{\min} = \sqrt{g(2H + L)}$.
3. $v_0 = \sqrt{g(\sqrt{(H - h)^2 + L^2} + H + h)}$.

LXXXI МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

8 класс

1. Да.
 Например, $a = 1, b = 3, c = 12: 1 + 3 + 12 = 4^2, 1 \cdot 3 \cdot 12 = 6^2$.

3. Удвоим отрезки BP и CP за точку P , т.е. отметим точки B' и C' такие, что P является серединой отрезков BB' и CC' (рис.11). Ясно, что K – середина $B'C'$. Кроме того, $B'C' = BC$,

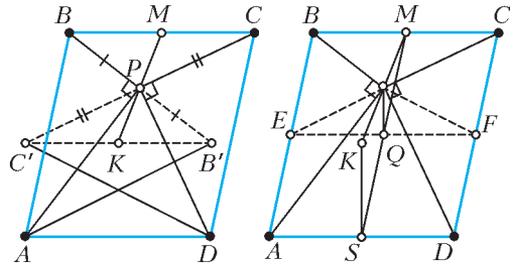


Рис. 11

а потому $AC'B'D$ – параллелограмм. Достаточно доказать, что $AC'B'D$ – прямоугольник, тогда утверждение задачи будет следовать из равенства прямоугольных треугольников ACK и DBK . Заметим, что в треугольнике ABB' отрезок AP является медианой и высотой. Это означает, что треугольник равнобедренный и $AB' = AB$. Аналогично, рассматривая треугольник DCC' , получаем $DC' = DC$.

Но $AB = DC$, так как это противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $AB' = DC'$. Получается, что в параллелограмме $AC'B'D$ диагонали равны между собой. Тогда это прямоугольник, откуда следует искомое утверждение.

4. Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_{15} числа месяца, в которые были солнечные дни. Тогда Андрей Степанович за дни с 1-го числа по a_1 -е не выпьет ни одной капли, за дни с a_1 -го числа до a_2 -го (a_1 -е включительно, a_2 -е не включительно) будет пить по одной капле и т.д. Итого он выпьет $1 \cdot (a_2 - a_1) + 2 \cdot (a_3 - a_2) + \dots + 14 \cdot (a_{15} - a_{14}) + 15 \cdot (30 - a_{15} + 1) = 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{15})$.

Иван Петрович же выпьет количество капель, равное сумме номеров всех дней, кроме a_i : $(1 + 2 + \dots + 30) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{15}) = 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{15})$.

6. Обозначим точку пересечения FF_1 и A_1D через X , а точку пересечения CC_1 и AD_1 – через Y (рис.12).

Лемма 1. Отрезки FF_1 и A_1D равны и $\angle A_1XF = 60^\circ$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники F_1EF и DEA_1 . Они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = A_1D$. Далее,

$$\begin{aligned} \angle A_1XF &= 180^\circ - \angle XA_1F - \angle XFA_1 = \\ &= 180^\circ - \angle XA_1E - \angle EA_1F - \angle XFA_1 = \\ &= 180^\circ - \angle EA_1F - \angle EFA_1 = 60^\circ. \end{aligned}$$

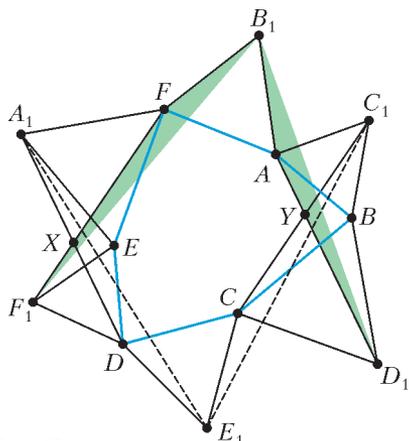


Рис. 12

Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Рассмотрим треугольники B_1FA и $B_1F_1D_1$. Это два правильных треугольника с общей вершиной, поэтому углы B_1FA и $B_1F_1D_1$ равны 60° . Вычтя у этих углов общую часть, получим равенство углов FB_1F_1 и AB_1D_1 . Треугольники FB_1F_1 и AB_1D_1 равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = AD_1$ и $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1$.

Лемма 2. Углы A_1DE_1 и C_1CE_1 равны.

Доказательство. Обозначим $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1 = \alpha$. Тогда $\angle XFA = \alpha - 60^\circ$ и

$$\angle FAU = 360^\circ - \angle B_1AF - \angle B_1AD_1 = 300^\circ - \alpha,$$

откуда $\angle XFA + \angle FAU = 240^\circ$. По лемме 1, $\angle FXD = \angle AYC = 120^\circ$, поэтому, записав сумму углов шестиугольника $AUCDXF$, получим, что сумма углов XDC и DCY равна 240° . Тогда

$$\begin{aligned} \angle E_1CC_1 &= 360^\circ - \angle DCE_1 - \angle DCY = \\ &= 300^\circ - (240^\circ - \angle XDC) = 60^\circ + \angle XDC = \\ &= \angle CDE_1 + \angle XDC = \angle XDE_1 = \angle A_1DE_1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Воспользовавшись леммой 1, получим $A_1D = FF_1 = AD_1 = CC_1$.

Рассмотрим треугольники A_1DE_1 и C_1CE_1 . Воспользовавшись предыдущим равенством и леммой 2, получим, что они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $A_1E_1 = E_1C_1$.

Аналогично доказывается, что $A_1E_1 = A_1C_1$, откуда треугольник $A_1C_1E_1$ — равнобедренный.

Замечание. Приведенное решение, вообще говоря, зависит от взаимного расположения точек. При другом расположении точек решение аналогично.

9 класс

1. Решение аналогично решению задачи 1 сложного варианта для 8–9 классов XXXIX Турнира городов.

2. Нет, не обязательно.

Рассмотрим 3 палочки длины 1 и палочку длины a . Тогда из палочек можно сложить либо правильный треугольник со стороной 1, либо треугольник со сторонами 1, 1, a . Подберем a , чтобы эти треугольники имели равную площадь. Для этого достаточно, чтобы высоты к сторонам длины 1 в этих треугольниках совпали, а это равносильно тому, что углы между единичными сторонами либо равны, либо в сумме дают 180° . Значит, нужно подобрать a таким, чтобы искомый угол был равен 120° ; очевидно, такое a существует ($a = \sqrt{3}$).

Замечание. На самом деле несложно доказать, что единственный пример, когда на все палочки одинаковой длины, это $(x, x, x, \sqrt{3}x)$.

3. Обозначим $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$. Предположим, что натуральное число n является решением уравнения из условия задачи. Пусть r_i — это остаток от деления n на a_i , иными словами,

$$n = a_i \left[\frac{n}{a_i} \right] + r_i. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{n}{a_1} \right] + \dots + \left[\frac{n}{a_k} \right] = \frac{n - r_1}{a_1} + \dots + \frac{n - r_k}{a_k} = \\ &= n \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) - \left(\frac{r_1}{a_1} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \right) = \\ &= nS - \left(\frac{r_1}{a_1} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$n = \frac{1}{S - 1} \left(\frac{r_1}{a_1} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \right).$$

Таким образом, при заданном наборе чисел (r_1, \dots, r_k) , удовлетворяющих условиям $0 \leq r_i < a_i$, может быть не более одного натурального решения n с таким набором остатков. Всего таких наборов ровно $a_1 a_2 \dots a_k$, поэтому и количество решений уравнения

$$n = \left[\frac{n}{a_1} \right] + \dots + \left[\frac{n}{a_k} \right]$$

не больше $a_1 a_2 \dots a_k$.

4. Обозначим через E пересечение прямых AB и CD (рис.13). Рассмотрим случай, в котором точка E лежит на луче CD за точкой D . Четырехугольники $CQPD$ и $BQPA$ — вписанные, значит, $\angle CQP = \angle EDP$, а $\angle PQB = \angle PAE$. Сумма углов треугольника EDA равна

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle DEA + \angle EDP + \angle PAE = \\ &= \angle DEA + \angle CQP + \angle PQB = \angle CEB + \angle CQB. \end{aligned}$$

Следовательно, четырехугольник $CQBE$ вписан в окружность ω — описанную окружность тре-

в котором от 45 до 55 черных клеток. Для такого квадрата количество черных и белых клеток отличается не более чем на 10.

Построим квадрат 2018×2018 , в котором во всех квадратах 10×10 количество черных и белых клеток отличается не меньше чем на 10. Для этого в квадрате 2018×2018 проведем диагональ из нижнего левого угла в верхний правый. Все клетки над диагональю покрасим белым, а диагональ и клетки под диагональю – черным. В любом квадрате 10×10 все клетки диагонали из нижнего левого угла в верхний правый покрашены одним цветом, причем если этот цвет черный, то и все клетки над диагональю черные, значит, их хотя бы 55 и количество черных и белых клеток отличается хотя бы на 10. Аналогично, если диагональ белая, то все клетки под диагональю белые и их не менее 55.

5. Обозначим через D наибольшую из длин сторон торта. Тогда длины всех сторон всех треугольников, которые будут получаться у Карлсона в процессе поедания торта, не будут превосходить D .

Предположим, что Карлсон может сделать сколько угодно описанных операций так, чтобы площадь съеденного торта не превосходила $1/2$ от площади всего торта.

Возьмем треугольник, который получается на $(k-1)$ -м шаге, и обозначим его площадь через S_k , а стороны, между которыми проходит k -й разрез, через a_k и b_k . Будем считать, что Карлсон съедает кусок, примыкающий к стороне a_k . Тогда по теореме о биссектрисе площадь съеденного на k -м шаге куска равна $S_k - S_{k+1} = \frac{S_k a_k}{a_k + b_k}$.

Рассмотрим длины всех сторон a_k . Возможны два случая: либо они все больше некоторого положительного числа $l > 0$, либо такого числа l не существует.

В первом случае получается, что на k -м шаге Карлсон съедает кусок торта площадью не меньше

$$\frac{a_k S_k}{a_k + b_k} > \frac{a_k S_k}{2D} > \frac{l S_k}{2D}.$$

Можно оценить площадь оставшегося куска:

$$S_{k+1} < S_k \left(1 - \frac{l}{2D}\right).$$

Поэтому $S_{k+1} < S_1 \left(1 - l/(2D)\right)^k$. Но выражение в скобках строго меньше 1, т.е. при достаточно больших k его k -я степень будет меньше $1/2$.

Допустим теперь, что a_k могут быть сколь угодно близки к нулю. Возьмем такое a_k , для которого $a_k < S_1/D$. Оценим площадь треугольника S_k сверху как половину произведения сторон:

$S_k \leq a_k D/2$. Но, поскольку $a_k < S_1/D$, отсюда следует, что $S_k < S_1/2$, т.е. к k -му шагу больше половины торта уже окажется съедено.

6. Для каждого разрезания квадрата на уголки определим соответствующее ему разрезание квадрата на уголки и прямоугольники 2×3 следующим образом. Посмотрим на разрезание R . Если в нем найдется уголок, примыкающий к сторонам квадрата и образующий вместе с еще каким-то уголком прямоугольник 2×3 , заменим эти два уголка на прямоугольник. Проведем все возможные такие замены. Будем говорить, что мы получили *предразрезание* \mathfrak{R} , *соответствующее разрезанию* R . Заметим, что по каждому разрезанию мы строим единственное предразрезание: в самом деле, один уголок может входить только в один прямоугольник 2×3 . В частности, отсюда следует, что если взять разрезание R и заменить в нем два уголка, образующих прямоугольник 2×3 , на два других уголка, дающих



Рис. 14

тот же прямоугольник (рис. 14), мы получим разрезание R' , имеющее то же самое предразрезание, что и R . Это означает, что предразрезанию \mathfrak{R} соответствуют ровно 2^k разрезаний, где k – число прямоугольников в предразрезании.

Докажем, что в каждом предразрезании хотя бы 4 прямоугольника. В самом деле, длина стороны нечетна, значит, к каждой стороне хотя бы один из уголков примыкает одной клеткой, причем один уголок не может одной клеткой примыкать к двум сторонам. Каждый из четырех таких уголков образует вместе с еще одним уголком прямоугольник 2×3 .

Теперь докажем, что количество предразрезаний с фиксированным k делится на 8. У квадрата есть 8 движений: четыре поворота на 0° , 90° , 180° и 270° и четыре осевых симметрии – две относительно диагоналей, две относительно средних линий. Для каждого предразрезания рассмотрим его образы при этих движениях; если все 8 образов разные, то мы разбили множество предразрезаний с фиксированным k на группы по 8. Предположим, что какие-то два образа совпали. Посмотрим на центральную клетку. Она покрыта уголком (здесь нам важно, что прямоугольники примыкали к границам, значит, до центра не дотягиваются). При движении центральная клетка переходит в себя, значит, и покрывающий ее уголок – тоже. Это возможно в единственном случае: если движение является симметрией относительно диагонали, а уголок

лежит центром на центральной клетке симметрично относительно этой диагонали. Но тогда посмотрим на клетку, дополняющую этот уголок до квадрата 2×2 , эта клетка снова на диагонали, значит, переходит в себя, значит, покрывающая ее фигура – тоже. Тогда это снова уголок (прямоугольники 2×3 не переходят в себя при симметрии относительно диагонали квадрата), он снова лежит симметрично относительно диагонали, у него снова есть такая клетка и так далее. Строя такую последовательность уголков, мы упрямся в угол квадрата и получим непокрытую клетку: противоречие.

Итак, мы доказали, что число предразрезов с фиксированным $k > 4$ ратно 8, значит, число соответствующих им разрезов делится на 2^{3+k} , т.е. хотя бы на 2^7 . Складывая по всем возможным k , получаем утверждение задачи.

11 класс

Первый день

1. Ни одного.

Прямая, являющаяся графиком производной $y = 2ax + b$ квадратного трехчлена, касается параболы $y = ax^2 + bx + c$: если они не пересекаются, то разбивают координатную плоскость на три части, а если пересекаются в двух точках, то разбивают плоскость на пять частей.

Из условия касания графиков получаем, что дискриминант уравнения

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

равен нулю, т.е.

$$(b - 2a)^2 - 4a(c - b) = b^2 + 4a^2 - 4ac = 0,$$

откуда дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен

$$D = b^2 - 4ac = -4a^2 < 0,$$

поэтому трехчлен не имеет корней.

2. Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды (рис. 15,а). Достаточно заметить, что тетраэдр $ACB_1 D_1$ – правильный с ребром $\sqrt{2}a$, а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырехугольную, все ребра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = 1/\sqrt{2}$. Поэтому нужно в исходной правильной четырехугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной O провести высоту OH и разрезать пирамиду плоскостями OHA и OHB на 4 одинаковые части (рис. 15,б). Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $1/\sqrt{2}$.

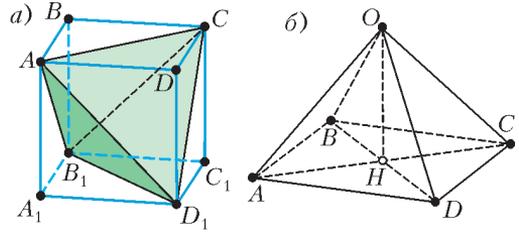


Рис. 15

3. а) Да; б) нет.

а) Для многочлена $P(x) = x^2 - x$ имеем

$$P(x)P(x+1) = (x^2 - x)((x+1)^2 - x - 1) = x^2(x+1)(x-1) = x^4 - x^2 = P(x^2).$$

б) Если такой многочлен $P(x)$ существует, то он имеет хотя бы один действительный корень. Пусть x_0 – наибольший из его корней. Тогда из условия получаем, что $P(x_0^2 + 1) = P(x_0)P(x_0 + 1) = 0$, т.е. число $x_0^2 + 1$ также является корнем многочлена $P(x)$. Но $x_0^2 + 1 > x_0$, что противоречит максимальности корня x_0 . Следовательно, такого многочлена не существует.

4. Нельзя.

Первое решение. Пусть, от противного,

$$11^{2018} = m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2).$$

Тогда $m+n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где k, l – целые неотрицательные. Поскольку

$$\frac{(m+n)^2}{4} < m^2 - mn + n^2 < (m+n)^2$$

для всех натуральных m и n , то

$$11^{2k-1} < \frac{11^{2k}}{4} < 11^l < 11^{2k},$$

откуда $2k - 1 < l < 2k$, что невозможно для целых чисел.

Второе решение. С одной стороны, поскольку $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$ и $2018 \equiv 2 \pmod{6}$, имеем

$$11^{2018} \equiv 2^{2018} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{9},$$

т.е. число 11^{2018} дает остаток 4 при делении на 9. С другой стороны, кубы натуральных чисел дают только остатки 0, 1 и 8 при делении на 9, так как $(9k + 3l + a)^3 \equiv a^3 \pmod{9}$ при $a = 0, 1, 2$ и $k, l \in \mathbb{N}$. Значит, сумма кубов двух натуральных чисел может дать лишь остатки 0, 1, 2, 7 или 8 при делении на 9, но не может дать 4.

6. а) Занумеруем все комнаты наборами длины n из нулей и единиц (числами от 0 до $2^n - 1$ в двоичной системе). Обозначим через A_k и B_k множества наборов, у которых на k -м месте

стоит 1 или 0 соответственно. Для каждого $k = 1, \dots, n$ множества A_k и B_k не пересекаются и вместе составляют все множество наборов.

Рассмотрим следующий алгоритм посылок: в $(2k - 1)$ -й раз прораб посылает людей в комнаты с номерами из множества A_k , в $(2k)$ -й раз он посылает людей в комнаты с номерами из множества B_k , k меняется от 1 до n . Всего получается $2n$ посылок.

Пусть лампочка в комнате с номером i включается выключателем в комнате с номером $f(i)$. Если $i \in A_k$ и во время $(2k - 1)$ -й посылки лампочка в i -й комнате включилась, то $f(i) \in A_k$, а если не включилась, то $f(i) \in B_k$. Аналогично, если $i \in B_k$ и во время $(2k)$ -й посылки лампочка в i -й комнате включилась, то $f(i) \in B_k$, а если не включилась, то $f(i) \in A_k$. Таким образом, за $(2k - 1)$ -ю и $(2k)$ -ю посылки прораб точно устанавливает k -й разряд номера $f(i)$ для каждого i . Следовательно, после $2n$ указанных посылок он полностью установит соответствие f .

б) Покажем, что за $2n - 1$ посылку прораб также может установить соответствие f .

Пусть первые $2n - 2$ посылки те же, что в предыдущем пункте. После них прораб для каждого i знает номер $f(i)$ с точностью до последнего знака. Построим специальный граф, соответствующий этому знанию. Вершины графа располагаются в два горизонтальных ряда, каждый из которых соответствует парам $P_1, P_2, \dots, P_{2^{n-1}}$ наборов (номеров комнат), различающихся только в последнем знаке (например, $P_1 = \{0 \dots 0, 0 \dots 01\}$). Ребра графа проходят только от вершин верхнего ряда к вершинам нижнего ряда по следующему правилу: вершина в верхнем ряду, соответствующая паре P_s , соединена с вершиной в нижнем ряду, соответствующей паре P_t , в точности тогда, когда для некоторого $i \in P_s$ прорабу известно, что $f(i) \in P_t$.

В таком графе все вершины имеют степень 2. Следовательно, он разбивается на непересекающиеся циклы, в которых все вершины и ребра проходятся ровно по одному разу. Зафиксируем для каждого из этих циклов обход, начинающийся в вершине верхнего ряда, и рассмотрим все нечетные ребра во всех этих обходах. Каждое из этих ребер порождено соответствием $i \rightarrow f(i)$ в указанном выше смысле. Прораб отбирает множество A всех номеров i , соответствующих выбранным нечетным ребрам, и в $(2n - 1)$ -й раз посылает людей в комнаты с этими номерами (их 2^{n-1} штук).

Покажем, что в результате он полностью установит соответствие f .

Пусть $i \in A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть ровно один номер m из пары P_j .

Если во время $(2n - 1)$ -й посылки лампочка в i -й комнате загорелась (выключатель в m -й комнате включается), то $f(i) = m$, в противном случае $f(i)$ есть номер, дополнительный к m в паре P_j . Пусть $i \notin A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть такой номер q , что $f(q)$ тоже лежит в P_j . Во время $(2n - 1)$ -й посылки, как уже было сказано, номер $f(q)$ устанавливается, и тогда $f(i)$ есть номер, дополнительный к $f(q)$ в паре P_j .

Второй день

1. $\log_2 3, \log_3 5, \log_5 2$.

В обозначениях $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_5 2$ исходное уравнение принимает вид

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0,$$

что равносильно уравнению

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0.$$

2. Да, может.

Построим «паркет», в котором чередуются ряды вертикальных 2×1 и горизонтальных 1×2 до-

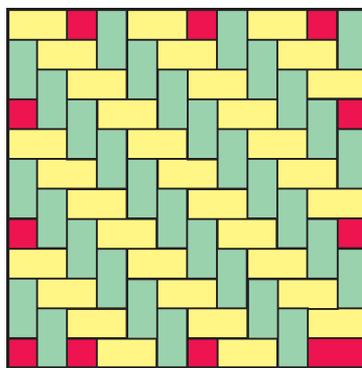


Рис. 16

миношек. На рисунке 16 эти ряды показаны зеленым и желтым цветом для доски 12×12 (непокрытые клетки доски закрашены красным). Похожий пример можно построить и для доски размером 2018×2018 . Непокрытыми могут остаться лишь некоторые клетки первых строки и столбца, а также последних строки и столбца. Поэтому доля непокрытых клеток от их общего числа будет не более чем $\frac{4 \cdot 2017}{2018 \cdot 2018} < \frac{4}{2018} < 1\%$. Значит, будет покрыто более 99% всех клеток доски.

3. 98721.

Данное равенство при условии, что $\operatorname{tg} x^\circ$ и $\operatorname{tg} y^\circ$ определены, эквивалентно равенству $\operatorname{tg}(x - y)^\circ = 1$, откуда $x - y = 45 + 180n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, разность $x - y$ делится нацело на 45, а значит, на 5 и на 9. Поскольку

сумма всех цифр делится на 9, то каждое из чисел x и y делится на 9.

Наибольшее пятизначное число, все цифры которого различны, равно 98765. Ближайшее к нему меньшее число, делящееся на 9, равно 98757 и содержит повторяющиеся цифры. Последовательно уменьшая это число на 9, получаем числа 98748, 98739, 98730, 98721. Первые два из них также содержат повторяющиеся цифры. Третье состоит из различных цифр, но поскольку $98730 = 90 + 180 \cdot 548$, то его тангенс не определен. Число $x = 98721$ также состоит из различных цифр. Если взять, например, $y = 54036$, то получим $x - y = 44685 + 180 \cdot 248$, поэтому число 98721 искомое.

4. $(\arctg \sqrt{2}; 60^\circ)$.

Пусть K – середина стороны AC , $AC = b$ и $BK = m$. Тогда прямые KC_1 и KA_1 касаются окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1 , так как углы, отмеченные на рисунке 17 одина-

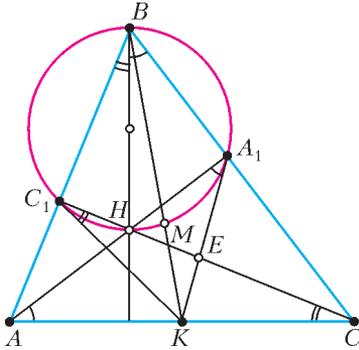


Рис. 17

ковым образом, равны. По условию точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1 . Поэтому $(b/2)^2 = KC_1^2 = KM \cdot KB = m/3 \cdot m$, так как точка M делит медиану BK в отношении 2 : 1. Отсюда $m = \sqrt{3}b/2$, и при фиксированном b точка B лежит на окружности с центром K и радиусом $\sqrt{3}b/2$. В одном из положений получается точка B' – вершина правильного треугольника $AB'C$. Получаем картинку, изображенную на рисунке 18.

Точка B лежит на дуге B_1B_2 большей окружности, так как треугольник ABC остроугольный. При этом угол B меняется в достаточно малом диапазоне: от $\arctg \sqrt{2}$, не включая его (это наименьшее значение соответствует точкам B_1 и B_2 и прямоугольному треугольнику ABC с катетами b и $b/\sqrt{2}$), до 60° (это наибольшее значение угла B , поскольку две окружности на рисунке 18 касаются внутренним образом, и поэтому $\angle ABC < \angle AB'C$ при $B \neq B'$). В силу непре-

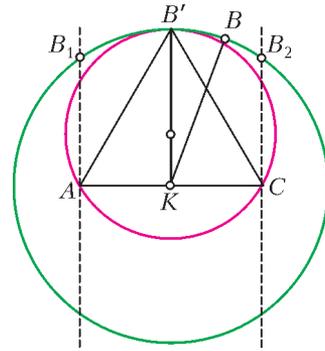


Рис. 18

равности угла ABC при движении точки B по дуге $B'B_2$ любое промежуточное значение из интервала $(\arctg \sqrt{2}; 60^\circ)$ соответствует некоторому положению B'' точки B . Для построенного треугольника $AB''C$ точка M будет лежать на окружности, описанной около треугольника A_1BC_1 , так как будет выполнено соотношение $KC_1^2 = KM \cdot KB$.

5. Пусть окрашенная сфера S имеет центр O и пусть S_i – полусферы, окрашенные в i -й цвет, $i = 1, \dots, 5$. Пусть A_i – срединная точка полусферы S_i : $A_i \in S_i$ и плоскость, проходящая через граничную окружность полусферы S_i , перпендикулярна вектору $\overline{OA_i}$. Выпуклая оболочка точек A_1, \dots, A_5 есть выпуклый многогранник M с вершинами A_1, \dots, A_5 . Покажем, что этот многогранник содержит точку O . Действительно, если $O \notin M$, то найдется такая плоскость α , проходящая через O , что M лежит строго внутри одного из полупространств, на которые α делит все пространство. Тогда для точки $P \in S$, лежащей в другом полупространстве и такой, что $\overline{OP} \perp \alpha$, все скалярные произведения $\overline{OP} \cdot \overline{OA_i}$ отрицательны, откуда точка P не принадлежит никакой полусфере S_i , а значит, не покрашена.

Принадлежность $O \in M$ в свою очередь означает, что O принадлежит одному из тетраэдров, образованных какими-то четырьмя точками из A_1, \dots, A_5 (M есть объединение таких тетраэдров). Пусть, без ограничения общности, точка O принадлежит тетраэдру с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 . Это означает, что сфера S покрашена первыми четырьмя красками: если $A \in S$ и $A \notin S_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то $\overline{OA} \cdot \overline{OA_i} < 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, т.е. весь тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ лежит строго в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через O перпендикулярно вектору \overline{OA} , и не может содержать точку O .

Замечания. Доказывать, что точка O внутри многогранника M действительно лежит в одном

из указанных тетраэдров, можно следующим образом. Пусть луч, выходящий из точки A_1 и проходящий через точку O , пересекает дальше границу многогранника в точке Q . Поскольку точка Q лежит на одной из граней многогранника, она принадлежит треугольнику с вершинами в каких-то трех из исходных точек, A_i, A_j, A_k . А значит, O принадлежит тетраэдру $A_1A_iA_jA_k$. (Само это утверждение является частным случаем теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке: любая точка n -мерного пространства, принадлежащая выпуклой оболочке нескольких точек, принадлежит и выпуклой оболочке не более чем $n + 1$ из этих точек.)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА**

Ф И З И К А

ОЛИМПИАДА-2018

Первый тур

Вариант 1

- $v = \frac{l\omega}{2\pi n} \approx 318 \text{ м/с}$.
- $v = \sqrt{Rg \operatorname{tg} \alpha} \approx 152 \text{ м/с} \approx 547 \text{ км/ч}$.
- $T = \pi l \sqrt{\frac{l}{Gm}}$.
- $H = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{5}{18}l$ (запишите закон сохранения энергии для системы двух грузов).
- $Q = \frac{5}{3}mv^2$ (выделившееся количество теплоты равно разности суммарной кинетической энергии пуля до удара и после удара).
- $T_x = \frac{2(1-\eta)A}{3vR\eta}$, где $v = 2$ моль.
- Электрическое поле направлено вдоль линии, соединяющей центры полостей, от центра шара и равно $E = \frac{q}{18\pi\epsilon_0 R^2}$ (поле в точке A создается зарядом $-q+3q$, наведенным на поверхности шара).
- Напряженность электрического поля направлена по оси z и равна $E = vB$.
- $R_x = R_1 = 10 \text{ Ом}$, $P_{\max} = \frac{U^2}{4R_1} = 2,5 \text{ Вт}$.
- $B_m = \frac{\sigma_m}{jR}$.

Второй тур

Вариант 1

- $t = \frac{4abh}{\pi d^2 \sqrt{2g(c-h)}} \approx 7,6 \cdot 10^4 \text{ с}$ (вода будет по-

ступать в баржу с постоянной скоростью $v = \sqrt{2g(c-h)}$).

2. $v = 13,4 \text{ м/с}$ (скорость находится из квадратного уравнения $-\rho Suv + \rho Su^2 = kv^2$).

3. $p = 8p_0 + \frac{24\sigma}{r}$ (избыточное давление под мыльной пленкой равно $\frac{4\sigma}{r}$).

4. $T = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ К}$;

$N_{\max} = \frac{\alpha}{2}(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_2) = 100 \text{ кВт}$.

5. $A = \frac{LI^2}{6}$ (искомая работа равна разности энергий магнитного поля катушки до и после внесения в нее стержня).

6. $\mu = \frac{3v_0}{2g} \sqrt{\frac{k}{30m}}$ (после удара система шариков,

соединенных пружиной, равномерно движется поступательно и колеблется относительно ее центра масс; условие начала проскальзывания частей разрезанного шарика имеет вид $a_{2m}^{\max} = \mu g$).

Вариант 2

1. $l = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{(1-R)g} = 25 \text{ м}$.

2. $L_{\max} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 \mu mg L_0}$ (воспользуйтесь законом сохранения энергии).

3. $Q = \frac{5ML^2}{\tau^2}$ (давление газа остается постоянным).

4. $q = \frac{11}{6}C\mathcal{E}$ (после замыкания ключа ток в цепи не изменится, а заряды на конденсаторах изменятся).

5. $q = \frac{2F}{E_1 - E_2} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$.

6. $v_{\text{доп min}} = \frac{v_1}{\sqrt{3}} = 4,5 \text{ км/с}$ (воспользуйтесь законом сохранения энергии).

Вариант 3

1. $\alpha = \arcsin \frac{a_1 + a_2}{2g} = \arcsin 0,3 = 18^\circ$ (здесь $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ и $a_2 = 4 \text{ м/с}^2$ – ускорения шайбы при спуске и при подъеме).

2. $m_a = \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{3pV}{v^2} = 72 \text{ кг}$.

3. $A_{\text{тр}} = mg \left(\frac{3}{2} h_2 - h_1 \right) = -2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$ (воспользуйтесь вторым законом Ньютона и законом сохранения энергии).

4. $W = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 r}$ (здесь $W_{\text{пот}} -$

это энергия электрического взаимодействия частиц).

5. $E = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\epsilon_0 R^4}$ (результатирующее поле создается суперпозицией поля положительно заряженной полной сферы и поля отрицательного точечного заряда на участке площадью ΔS).

6. $t = \frac{3}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{2k}}$ (здесь $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6k}}$ – период колебаний системы).

Вариант 4

1. $l = 2\sqrt{3}h$.

2. $\Delta x = v_0\sqrt{\frac{3m}{2k}}$ (остановиться может только левый брусок; воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии).

3. $P = 5C\mathcal{E}^2\left(1 + \frac{R}{R+r}\right) \approx 11 \text{ Вт}$,

$\eta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{R+r}\right) \approx 0,55$ (при зарядке конденсатора работа источника идет на увеличение энергии конденсатора и на нагревание резистора и источника, а при разрядке конденсатора его энергия дополнительно выделяется в резисторе в виде тепла).

4. $\Delta h = \frac{mRT}{M_r Mg} = 0,64 \text{ м}$ (запишите условия равновесия поршня до и после перетекания гелия и газовые законы).

5. $h = \frac{8\pi^2 m E}{q B^2}$ (частица движется по винтовой линии вдоль оси y).

6. $Q = \frac{B_0^2 h^2 v}{r}$.

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 2018 году наш журнал выходит в том же формате, что и в 2017 году. И мы по-прежнему будем выпускать 12 номеров в год. В остальном «Квант» остается тем же, что и был раньше, – научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и для всех тех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте: <http://kvant.ras.ru>

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Посылая в редакцию журнала «Квант» статью, просим вас сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес (e-mail).

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

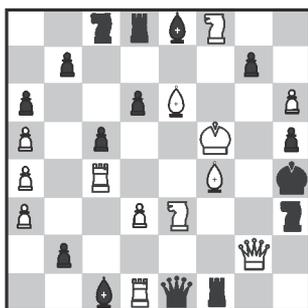
Телефон: +7 495 363-48-86,

<http://capitalpress.ru>

Шахматно-футбольная КОМПОЗИЦИЯ

На протяжении последнего месяца основной темой новостей является чемпионат мира по футболу, проходящий в России, поэтому сегодняшний выпуск шахматной странички будет посвящен футбольным мотивам в шахматной композиции.

С.Лойд, 1878



Первая из известных шахматных задач на футбольную тематику была создана еще в XIX веке С.Лойдом. Позиция на доске напоминает старинный футбольный мяч. Автор предусмотрел целый ряд заданий:

1) Белые начинают и ставят мат в 2 хода: 1. ♖h3+ ♜h3 2. ♙g5×

2) Черные начинают и ставят мат в 2 хода: 1... ♜e7+ 2. ♚e4 ♜f4×

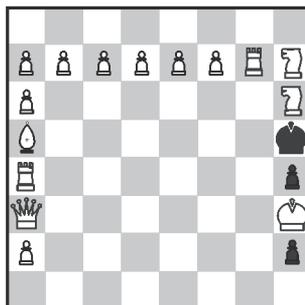
3) Белые начинают и вынуждают черных поставить мат в 2 хода: 1. ♖g3+ ♜g3 2. ♘g6+ ♜(♙)g6×

4) Черные начинают и вынуждают белых поставить мат в 2 хода: 1... ♜e7+ 2. ♚e4 ♜g5+ 3. ♖g5×

Правда, позиция на диаграмме не может возникнуть в реальной игре из-за строенных белых пешек по линии а.

Футбольный экспресс, 1993, мат в 1 ход

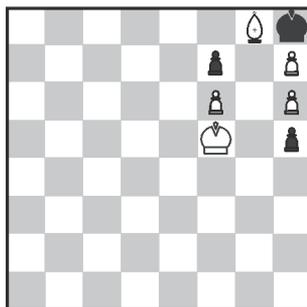
Данную задачу, впервые напечатанную в спортивной газете, можно отнести одновремен-



но к изобразительным шахматам (перед нами футбольные ворота) и ретроспективной композиции.

Очевидное решение 1. ♜h4× не годится, поскольку у черных нет легального предыдущего хода: ♜g5-h5 невозможен, так как на g5 король находился бы под двойным шахом, который не мог возникнуть за один ход; ♜g6-h5 также не мог быть сделан, так как все отсутствующие черные фигуры должны были быть съедены пешками, а без взятия белая ладья не могла попасть на g7 с g8 из-за шаха. Ходы черными пешками тоже исключаются: у белых не хватает только белопольного слона, который не мог быть съеден на черной клетке. Следовательно, сейчас ход черных, и они ставят мат: 1...h2-h1 ♜×!

Э. Погосянц, 1982, мат в 7 ходов

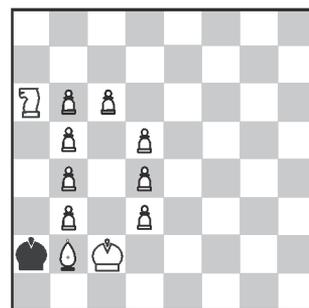


Эта задача посвящена легендарному советскому вратарю Льву Яшину. Ретроспективный анализ показывает, что в данной позиции ходят черные: пешка f7 стоит на первоначальной позиции, король не мог ходить

из-за того, что был бы атакован на g7 сразу двумя белыми пешками, а взятие g6:h5 невозможно из-за положения белого короля (он оказался бы под шахом при ходе черных). Таким образом, ход 1...h4 вынужден, после чего черные получают форсированный мат: 2. ♙f7 ♜h7 (2...h3 3. ♙g6 h2 4. f7 h1 ♜ 5. f8 ♜×) 3. ♚g5 h3 4. ♙g6+ ♜g8 5. h7+ ♜h8 6. f7 ♜g7 7. h8 ♜+ ♜h8 8. f8+×

Изящности задаче добавляет наличие близнеца: если в позиции на диаграмме переместить пешку с f6 на g6, то из буквы Л получится буква Я, а мат будет ставиться в один ход: 1. g7×, поскольку перед этим неизбежно ходили черные (♜g7-h8). Таким образом автору удалось изобразить инициалы великого футболиста: Л.Я.

«Динамо», 1968, мат в 0 ходов



Поскольку имя Л. Яшина у большинства футбольных болельщиков ассоциируется с футбольным клубом, в котором он провел всю футбольную карьеру, то завершим мы сегодняшнюю шуточную изобразительную задачей с буквой Д, символизирующей московское «Динамо». Чтобы решить ее, нужно просто перевернуть доску на 180 градусов: тогда все пешки окажутся по одну сторону от диагонали a2-g8, что, в отличие от позиции на диаграмме, является легальным положением, в котором пешка g6 уже ставит мат.

А. Русанов

Индекс 90964

РАСТИТЕЛЬНЫЕ УЗОРЫ



Уроки с физикой

Ступеньки венецианской набережной, спускающиеся к воде, заросли плотным зеленым "ковром". Но почему они выглядят такими разноцветными?

(Подробнее – на с. 35 внутри журнала)