

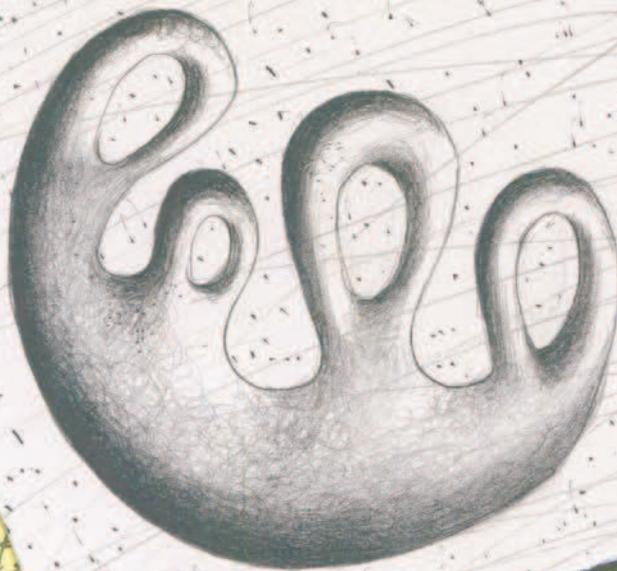
ИЮЛЬ

ISSN 0130-2221

2017 · №7

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Трижды три

В этой головоломке имеется девять деталей трех типов, составленных из единичных кубиков: параллелепипеды $2 \times 2 \times 1$, буквы L и «уголки».

Авторы головоломки Дэвид Гудман (David Goodman) и Абрам Джейкоб (Abraham Jacob) предлагают следующую задачу: из тройки деталей каждого из трех типов нужно сложить по фигуре, причем так, чтобы все три фигуры были одинаковыми.

Какую фигуру собирать – они, естественно, не сообщают. Это вам нужно будет понять в процессе решения.

Желаем успеха!

Е.Епифанов



В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.Л.Семенов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
П.А.Кожевников (заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,
В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер**

- 2 К восьмидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда
- 23 К восьмидесятилетию Игоря Федоровича Шарыгина
- 4 Для чего мы изучаем математику? *В.Арнольд*
- 9 Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи (окончание). *А.Абрикосов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2470–M2473, Ф2477–Ф2480
- 15 Решения задач M2458–M2461, Ф2465–Ф2468

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 20 Задачи
- 21 Какой бывает колея. *С.Дворянинов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 23 Выход в пространство. *И.Шарыгин*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 28 Когда показатель преломления меняется. *В.Гребень*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика человека

ОЛИМПИАДЫ

- 34 Геометрическая олимпиада имени И.Ф.Шарыгина
- 37 Заключительный этап XIII Всероссийской олимпиады школьников по математике
- 40 Заключительный этап LI Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 46 Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана
- 52 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Арнольда*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

К восьмидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда

ВСЯ ЖИЗНЬ ВЛАДИМИРА ИГОРЕВИЧА была восхождением.

Детство его было счастливым. Оно прошло в окружении выдающихся личностей. Он родился в Одессе, где в Новороссийском университете у выдающегося математика С.О.Шатуновского учился его отец, ставший замечательным математиком и педагогом – первым доктором педагогических наук в СССР. Четыре поколения его родных были связаны с математикой. Среди близких родственников по отцу было также множество людей, служивших в Черноморском флоте (двоюродными братьями отца были четыре адмирала).

Мама В.И.Арнольда была по профессии искусствоведом. Она была племянницей одного из самых замечательных физиков нашей страны – Леонида Исааковича Мандельштама, человека необыкновенного нравственного совершенства, основоположника выдающейся школы. Среди его учеников были И.Е.Тамм, М.А.Леонтович, А.А.Андронов и другие. Общение с ними оказало очень большое влияние на мальчика.

В Москве Арнольды жили в одном из арбатских переулков, в самом центре Москвы, которую мальчик знал как никто. С самых ранних лет Арнольд стал проявлять необычайную любознательность, распространявшуюся на самые разные области знания. Во время войны, например, когда ему было шесть лет, вооружившись компасом и взяв себе в помощники младшего брата, Арнольд провел топографическую съемку Садового кольца, измеряя расстояние шагами, и обнаружил при этом многие несоответствия с тем, что изображалось на картах Москвы.

Он учился в знаменитой пятьдесят девятой школе, из которой вышло множество выдающихся людей, в частности математиков, механиков и физиков. Владимир Игоревич с большой любовью вспоминал своих учителей, особенно учителя математики Ивана Васильевича Морозкина. Одну из задач, предложенных ему учителем, двенадцатилетний мальчик обдумывал весь день, «и решение, – писал он спустя многие годы, – снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949) восторг был в точности тем же, который я испытывал при решении гораздо более серьезных проблем».

Большое влияние на юношу оказало и его участие в домашнем кружке А.А.Ляпунова, носившем название ДНО – Детское научное общество. Там обсуждались самые глубокие проблемы науки. Первые научные выступления мальчика с докладами на этом Обществе запомнились глубиной и совершенством изложения трудных научных проблем.

В школьные годы Дима (так звали Арнольда родные и друзья) стал принимать участие в математическом кружке и московских математических олимпиадах. Об этом он как-то написал, что там «обычно получал вторую премию (как в свое время Максвелл или Кельвин)».

В 1954 году Арнольд стал студентом механико-математического факультета Московского университета. Это была пора расцвета механико-математического факультета. «Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде», – пишет В.И.Арнольд, называя при этом

имена А.Н.Колмогорова, И.М.Гельфанда, И.Г.Петровского, Л.С.Понтрягина, П.С.Новикова, А.А.Маркова, А.О.Гельфонда, Л.А.Люстерника, А.Я.Хинчина и П.С.Александрова (порядок в этом перечислении принадлежит Арнольду).

На первом курсе Арнольд принял участие в кружках А.Г.Витушкина и Е.Б.Дынкина для первокурсников, а когда он учился на втором курсе,

А.Н.Колмогоров объявил семинар для младшекурсников. На первом заседании, рассказывая о планах семинара, Андрей Николаевич говорил о различных задачах номографии, в которых процессы, задаваемые сложными функциями, приближенно представлялись более простыми. Говоря о дальних перспективах, А.Н. сказал, что можно пометать и о том, чтобы найти подходы к решению 13-й проблемы Гильберта о невозможности осветить функции многих переменных к суперпозициям функций меньшего числа переменных.

Будучи студентом третьего курса, Арнольд решил 13-ю проблему Гильберта, и это послужило началом его фантастической научной биографии.

Арнольд преобразовал целые математические области. Он служил своей профессии и просвещению на всех возможных поприщах. Он основал выдающуюся математическую научную школу, написал множество замечательных учебников, монографий и обзорных статей, посвященных проблемам математики. Начиная с руководства знаменитым школьным мате-

матическим кружком в пятидесятые годы, В.И.Арнольд очень много внимания уделял непосредственной работе со школьниками. В 1963 году он участвовал в работе первой летней математической школы, а последние десять лет ежегодно бывал на юношеских школах в Дубне. Прочитанный В.И. курс для первых выпускников Колмогоровской ФМШ (ныне СУНЦ

МГУ) стал педагогическим шедевром. По инициативе В.И.Арнольда были созданы Московский центр непрерывного математического образования и Независимый Московский университет. Влияние В.И.Арнольда на весь математический мир было огромно.

В.И.Арнольд был удостоен множества званий, докторских степеней и наград. Среди премий – премия Московского математического общества (1958 г.), которой Владимир Игоревич особенно гордился, Ленинская

премия (1965, вместе с А.Н.Колмогоровым), Крафоордская премия Шведской Академии наук (1982), Харвиевская премия Техниона (1994), премия Вольфа (2001), премия имени Жунь Жуньшоу (2005) (ее называют Нобелевской премией Востока), Государственная премия Российской Федерации (2008).

Жизнь Владимира Игоревича внезапно оборвалась, когда он был преисполнен творческих замыслов. Двенадцатого июня этого года ему исполнилось бы семьдесят лет. Путь Владимира Игоревича Арнольда в бессмертие продолжается.

В.Тихомиров



*Владимир Игоревич Арнольд
(12.06.1937–03.06.2010)*

Для чего мы изучаем математику?

Что об этом думают сами математики

В. АРНОЛЬД

ДЛЯ ЧЕГО НАДО ИЗУЧАТЬ МАТЕМАТИКУ? В 1267 году на этот вопрос уже ответил английский философ Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Собственно, на этом можно было бы и закончить лекцию, но люди думают, что, может быть, что-то изменилось за семь веков...

Послушаем более современное свидетельство – один из создателей квантовой механики, Поль Дирак, утверждает, что при построении физической теории «следует не доверять всем физическим концепциям». А чему же доверять? «Доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой». Действительно, все чисто физические концепции начала века физикой отброшены, а математические модели, взятые физиками на вооружение, постепенно обретают физическое содержание. И в этом проявилась устойчивость математики.

Итак, математическое моделирование – продуктивный метод познания в естествознании. Мы подойдем к математическим моделям с другой стороны, рассматривая проблемы математического образования.

С лекцией на эту тему академик Владимир Игоревич Арнольд выступил 16 апреля 1992 года в Республиканском институте повышения квалификации работников образования (Москва). Запись лекции нам предоставил доцент Ю. Фоминых (Пермь).

Впервые эта статья была опубликована в «Кванте» №1/2 за 1993 год.

В нашем математическом образовании (и среднем, и высшем) мы идем в фарватере европейской системы, основанной на «бурбакизации» математики. Группа молодых французских математиков, выступавшая под псевдонимом Никола Бурбаки, начиная с 1939 года опубликовала несколько книг, в которых формально (т.е. с помощью аксиоматического метода) излагались основные разделы современной математики на основе теории множеств.

Формализация математики приводит к определенной формализации ее преподавания. В этом и проявляются издержки «бурбакизации» математического образования. Характерный пример. Ученикам второго класса во французской школе задают вопрос:

– Сколько будет два плюс три?

Ответ:

– Так как сложение коммутативно, то будет три плюс два.

Замечательный ответ! Он совершенно правильный, но ученику и в голову не приходит сложить эти два числа, потому что при обучении упор делается на свойства операций.

В Европе уже осознали недостатки такого подхода к образованию, и начался откат от «бурбакизации».

В нашей стране в последние годы происходит американизация математического образования. В ее основе лежит принцип: учить тому, что нужно для практики. А если кто-то считает, что ему математика не нужна, то он может не изучать ее совсем. В старших классах американских коллед-

жей курс математики факультативен: третья часть старшеклассников, например, не изучает алгебру. К чему это приводит, показывает следующий пример. В тесте для 14-летних американских школьников предлагалось оценить (не вычислить, а лишь оценить), что произойдет с числом 120, если от него взять 80%. И предлагалось три варианта ответа: увеличилось; осталось прежним; уменьшилось. Крестики напротив правильного ответа поставили примерно 30% опрошенных. Иными словами, школьники ставили крестики наудачу. Вывод: никто ничего не знает.

Вторая особенность американского подхода к преподаванию математики – его компьютеризация. Само по себе увлечение компьютерами не способствует развитию мышления. Вот еще пример из американского теста: в классе 26 учеников. С ними нужно провести экскурсию на автомобилях. В одной машине могут ехать один родитель и 4 школьника. Сколько родителей нужно попросить помочь? Типичный ответ: 65 родителей. Компьютер выдает: $26 : 4 = 6,5$. Ну а школьник уже знает, что если в решении должны быть целые числа, то с десятичной запятой надо что-то сделать, например отбросить.

А вот пример из официального американского экзамена 1992 года для студентов:

«Что из нижеследующего больше всего походит на соотношение между углом и градусом:

- а) время и час,
- б) молоко и кварта,
- в) площадь и квадратный дюйм (и т.д.)».

Ответ: площадь и квадратный дюйм, так как градус – минимальная единица угла, а квадратный дюйм – площади, в то время как час делится еще и на минуты.

Составители этой задачи явно обучены по американской системе.¹ Боюсь, что и мы придем к этому уровню.

¹ Нью-Йоркский профессор Джо Бирман объяснил мне, что для него как американца «правильное» решение этой задачи совершенно очевидно. «Дело в том, – сказал он, – что я точно представляю себе степень идиотизма составителей этих задач».

Можно только удивляться, что в США так много замечательных математиков и физиков (правда, многие из них иммигранты; лучшие студенты в американских университетах сегодня – китайцы).

Сейчас наше математическое образование медленно поворачивается от европейской системы к американской. Как всегда, мы опаздываем, отстаем от Европы лет на 30, и надо быть готовыми к тому, чтобы через 30 лет спасти ситуацию и выходить из этого тупика, в который нас приведет американизация образования с ее прагматичностью, факультативностью, повальной компьютеризацией.

Наше традиционное отечественное преподавание математики имело более высокий уровень и базировалось на культуре арифметических задач. Еще два десятка лет назад в семьях сохранялись старинные «купеческие» задачи. Теперь это утрачено. Алгебраизация последней реформы преподавания математики превращает школьников в автоматы. А именно арифметический подход демонстрирует содержательность математики, которой мы учим.

Рассмотрим, например, задачи:

1. Имеется 3 яблока, 1 взяли. Сколько осталось?
2. Сколько нужно сделать распилов, чтобы бревно распалось на 3 части?
3. У меня сестер на 3 больше, чем братьев. На сколько в нашей семье сестер больше, чем братьев?

С точки зрения арифметики это все разные задачи – у них разное содержание. Интеллектуальные усилия, нужные для решения этих задач, совершенно разные, хотя алгебраическая модель одна: $3 - 1 = 2$.

В математике прежде всего поражает удивительная универсальность ее моделей и их непостижимая эффективность в приложениях.

Вспомним В.В.Маяковского: «Человек, впервые сформулировавший, что «два и два четыре», – великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например паровоз с паровозом, – не математики».

Считать паровозы – это и есть американский путь математического образования. Это гибель. Пример с развитием физики показывает, что «паровозная» математика в начале нашего века оказалась хуже «окурочной»: прикладная математика не успевала за физикой, а в теоретической нашлось все, что необходимо было для дальнейшего развития физики. «Паровозная» математика не может успеть за практикой: пока мы учим считать на счетах, появляются компьютеры. Надо учить думать, а не тому, как нажимать на кнопки.

Правда, математическая модель не всегда дает немедленную практическую отдачу. Бывает, что она окажется полезной только через две тысячи лет.

Примером тому – конические сечения, они были открыты в Древней Греции и описаны Аполлонием Пергским (ок. 260 – ок. 170 до н.э.) в 8-томном трактате. А понадобилась эта теория Иоганну Кеплеру в XVI веке, когда он выводил законы движения планет. Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса – эллипс.

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна. Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом, – замечательная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень простое (рис. 1). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах E и F эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.

Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эллипса. Длина большой полуоси эллипса OK (рис. 2), обычно обозначаемая через a , равна длине

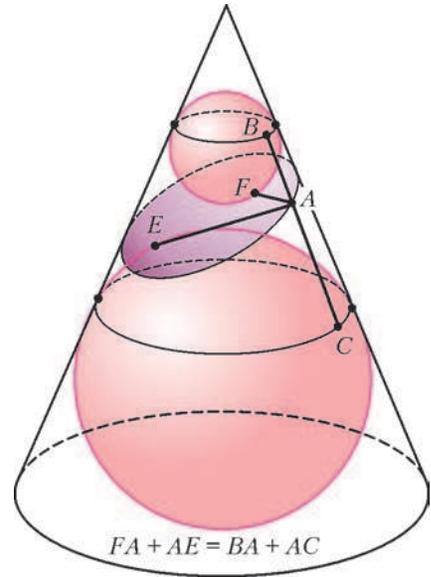


Рис. 1. Эллипс с фокусами F и E и сферы Данделена

гипотенузы EL треугольника с катетами $b = |OL|$ (малая полуось) и $c = |EO|$. Отношение c/a характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так

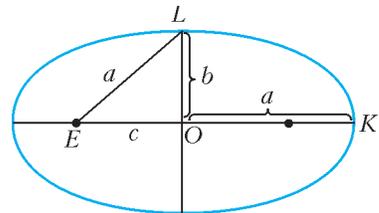


Рис. 2. Фокусы, полуоси и эксцентриситет эллипса

как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначается буквой e .

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$ при малых e .

Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если $e = 0,1$, то малая ось короче большой всего на $1/200$. Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие

такого эллипса от окружности вообще незаметно. Фокусы же смещены от центра на 5 сантиметров, что очень заметно.

Формула $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$ (означающая, что больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза, и дающая с очень хорошим приближением разность их длин) – один из самых замечательных общематематических фактов (к сожалению, в школе этому не учат).

Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде. На сколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо (рис. 3)? Первое впечатление

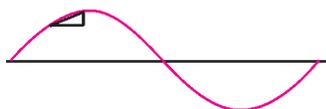


Рис. 3. На сколько синусоида длиннее прямой?

(что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причина в том, что большая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленные на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, зная и чувствующая обсуждаемую формулу, повернули двигатели на небольшой угол α (рис. 4).

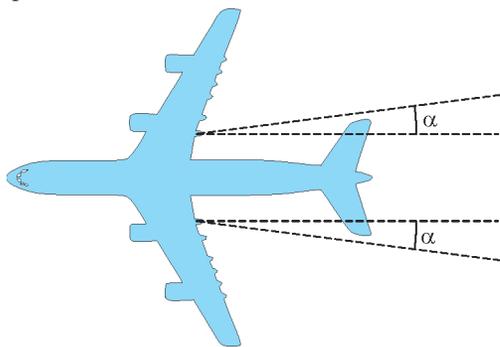


Рис. 4. Как спасти хвостовое оперение

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально α), а результирующая сила тяги практически не изменилась (потеря $\approx \alpha^2/2$, где α – угол в радианах; для угла в 3° теряется всего порядка $1/800$ мощности).

Вернемся к Кеплеру. Сначала Кеплер думал, что орбита Марса – окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на $1/10$ часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном) результате – потому что он знал теорию конических сечений. Кеплер знал, что эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось. Интересно, что сделать это можно было только благодаря исключительной точности наблюдений Тихо Браге, сделанных невооруженным глазом. В те времена астрономы не очень доверяли телескопам, и еще в конце XVII века приходилось доказывать, что телескопические наблюдения могут достигать столь же большой точности, как наблюдения невооруженным глазом.

Новая физика часто начинается с уточнения последней значащей цифры предыдущей теории – если бы Кеплер удовлетворился своей эксцентрической круговой орбитой или если бы наблюдения Тихо Браге были менее точны, развитие небесной механики (а возможно, и всей теоретической физики) могло бы задержаться – может быть, даже на века.

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце, – примерно на полпроцента, т.е. на $e^2/2$. Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет.

Если бы теория конических сечений не была заранее разработана математиками, то фундаментальные законы природы не были бы своевременно открыты, не возникла бы современная наука и технология, а наша цивилизация оставалась бы на средневековом уровне – или, по меньшей мере, пути истории были бы совсем иными.

Кеплер открыл закон движения планет, но тот факт, что они движутся по эллипсам, доказал Исаак Ньютон в своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.), которая послужила основой всей современной теоретической физики. Он получил эллиптичность планетных траекторий как следствие закона всемирного тяготения. Заметим, что до Ньютона этой проблемой занимался его современник Роберт Гук. Он изучал закон движения тела в поле тяготения, считая, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния. Приблизительно проинтегрировав уравнение движения, Гук нарисовал орбиты и увидел, что они похожи на эллипсы. Назвать их эллипсами ему не позволила научная честность, а доказать эллиптичность он не мог. Поэтому Гук назвал траекторию эллиптоидом и предложил Ньютону доказать, что первый закон Кеплера (планеты движутся по эллипсам) следует из закона обратных квадратов. Ньютон, хорошо знавший древнюю теорию конических сечений, справился с этой задачей при помощи хитроумных элементарно-геометрических построений.

Впоследствии кривые второго порядка стали все чаще появляться в естественно-научных исследованиях. Почему эта модель оказалась столь плодотворной для приложений? Почему, в частности, модель сечения конуса описывает движения планет? Мистика. Загадка. Ответа на этот вопрос нет. Мы верим в силу рациональной науки. Ньютон видел в этом доказательство существования Бога: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа... Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель Вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель».

Современные исследователи космоса, проектируя запуск искусственных спутников, тоже используют свойства конических сечений. Таким образом база со-

временной физики и научно-технической революции закладывалась и классическим произведением Аполлония. Тогда как он, исследуя конические сечения, думал лишь о красоте данной математической модели.

Другой пример – история создания ЭВМ. Задолго до появления первых ЭВМ в математике были заготовлены два их основных математических компонента: математическая логика (алгебру логики разработал Джордж Буль, 1815–1864) и принципиальная схема устройства вычислительной машины. Первую суммирующую машину сконструировал в 1641 году французский математик Блез Паскаль.

Третий пример – разработка волновой механики Э.Шредингером. К моменту, когда Шредингер обратился к колебательной задаче, уже был известен матричный вариант квантовой механики В.Гейзенберга. Встал вопрос: как получить из теории волн во всем пространстве дискретный, а не непрерывный спектр? Шредингеру помог известный немецкий математик Герман Вейль. Без его результатов по спектральной теории на неограниченном интервале мы бы никогда не узнали о знаменитом уравнении Шредингера. Опять та же история: нашелся математик, у которого уже была готова теория – граничные условия на бесконечности, – оставалось ее использовать.

(Продолжение следует)

Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи

А. АБРИКОСОВ

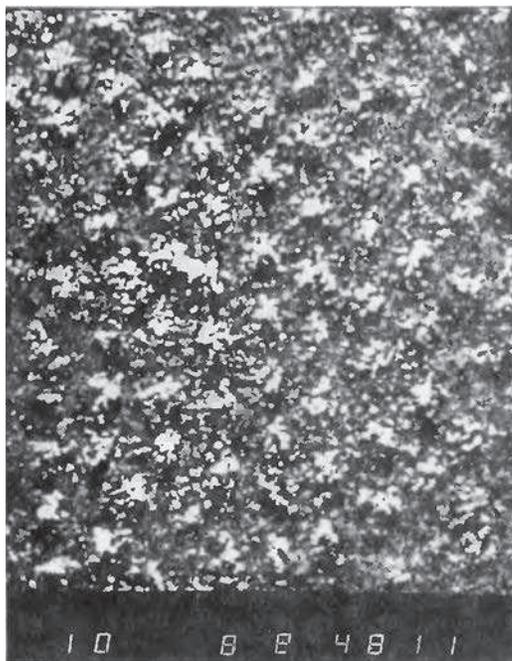
ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ вихри расходятся и в поле $B_{кр1}$ исчезают из сверхпроводника совсем. Фактически поле $B_{кр1}$ – это то поле, при котором один вихрь еще может существовать в сверхпроводнике. Область между полями $B_{кр1}$ и $B_{кр2}$ называется смешанным состоянием. В этом состоянии сверхпроводник пронизан вихревыми нитями – миниатюрными соленоидами, расположенными в правильном порядке. В поперечном срезе они образуют треугольную решетку. Каждый вихрь имеет сердцевину, размер которой равен размеру куперовской пары; эту сердцевину можно считать областью нормального металла.

Очень существенным оказывается то обстоятельство, что, увеличивая концентрацию дефектов, можно увеличивать критическое поле $B_{кр2}$, вплоть до которого по образцу может течь сверхпроводящий ток. Это дает возможность применять сверхпроводники второго рода для создания сверхпроводящих магнитов. Действительно, в сверхпроводящем кольце ток может циркулировать вечно. Можно сделать соленоид и замкнуть его накоротко. Это и будет сверхпроводящий постоянный магнит. Отличие от обычного электромагнита заключается в том, что в обычном магните энергия тока в конечном итоге тратится на разогрев обмотки. Из-за этого приходится делать громоздкую и дорогостоящую систему охлаждения. Именно это обстоятельство ограничивает возможности электромагнитов с полями до 5–6 Тл. А с помощью сверхпроводящих магнитов уже се-

годня можно получать поля до 10–12 Тл ($Nb - Zr - Ti$) и даже до 23 Тл (Nb_3Sn).

В настоящее время сверхпроводящие магниты используются в генераторах, для создания магнитной подушки в поезде-экспрессе, в ускорителях элементарных частиц, в токамаках – приборах термоядерного синтеза, в магнитогидродинамических генераторах. Кроме того, сверхпроводящая катушка с током может служить накопителем энергии.

Однако надо иметь в виду, что это дело не такое простое. Чем выше верхнее кри-



Фотография структуры вихрей в сверхпроводнике второго рода. Вихри образуют периодическую структуру, аналогичную кристаллической решетке

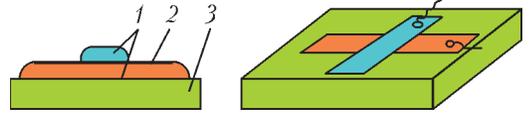
Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

тическое поле $B_{кр2}$, тем ниже нижнее $B_{кр1}$. Значит, в проволоке сверхпроводящего соленоида с током наверняка имеются вихри. Под действием силы Лоренца вихри могут прийти в движение, а это немедленно приведет к диссипации энергии, т.е. к появлению сопротивления. Выход из этого положения – как-то закрепить, припаять вихревую решетку, чтобы она не двигалась. Это называется «пиннингом» (от английского pin – булавка). В этом случае сверхпроводящий ток легко обходит нормальные сердцевинные вихрей.

Я не буду останавливаться на этом очень интересном вопросе и перейду теперь к рассказу о «слабой» сверхпроводимости.

Из квантовой механики известен так называемый туннельный эффект – возможность частицам проникать через потенциальный барьер, даже если высота этого барьера выше энергии частиц. Конечно, реально ширина барьера должна быть очень малой. Туннельный эффект был использован И.Гизвером в 1960 году для создания туннельного контакта: два металлических электрода разделены слоем изолятора (обычно в качестве изолятора берется пленка окиси на поверхности одного из металлов). Благодаря туннельному эффекту, через такой контакт может идти ток. Если один из этих металлов является сверхпроводником, то электроны в нем объединены в пары. Но для целой пары проникновение через барьер очень маловероятно. Поэтому нужно, чтобы электрическое поле расщепило пару, и тогда уже электроны поодиночке пройдут через контакт. Минимальная энергия на один электрон при этом равна Δ , и, следовательно, при $T = 0$ протекание тока начинается лишь тогда, когда разность потенциалов между электродами достигнет такого значения U , что $eU = \Delta$. Таким способом измерили энергию Δ .

Можно использовать и туннельный контакт из двух сверхпроводников. Однако в последнем случае возникает и некоторое новое явление. Если диэлектрическая прослойка достаточно тонкая, куперовские пары могут образовываться из электронов, принадлежащих к разным электро-



Сверхпроводящий туннельный контакт. На стеклянную подложку (3) наносят пленку сверхпроводника (1). Затем ее окисляют – на поверхности сверхпроводника создается слой диэлектрика (2) толщиной порядка десяти ангстрем. Сверху наносят еще одну пленку (1) сверхпроводника. Для удобства измерений сверхпроводящие пленки «укладывают» на подложку в виде креста. С некоторой вероятностью электроны из одной пленки могут проникать в другую через диэлектрическую прослойку – это называют туннельным эффектом

дам. При этом создается возможность протекания через контакт не просто тока, а сверхпроводящего тока. Этот эффект был предсказан английским физиком Б.Джозефсоном в 1962 году и после экспериментального подтверждения был назван его именем. Критический ток Джозефсона очень маленький, плотность его не более $10^2 - 10^3$ А/см². Эту величину следует сравнить с токами в магнитах – порядка $10^5 - 10^6$ А/см² или с «теоретическим пределом» для развала пар в сверхпроводнике – порядка 10^8 А/см². Однако эффект Джозефсона получил новое, очень перспективное применение.

Дело в том, что величина джозефсоновского критического тока оказалась необыкновенно чувствительной к внешнему магнитному полю. Это позволило создать особые сверхпроводящие устройства – джозефсоновские интерферометры, или сквиды, которые дают возможность измерить магнитные поля до 10^{-14} Тл (магнитное поле Земли составляет $0,5 \cdot 10^{-4}$ Тл), а затем использовать это поле для измерения токов вплоть до 10^{-14} А и разностей потенциалов до 10^{-15} В. Сквиды уже применяются в биологии и медицине, ибо они дают гораздо более точные данные, чем электрокардио- или энцефалографы, и превосходят даже рентгеновские и ЯМР-томографы. Кроме того, джозефсоновские контакты могут быть использованы как для регистрации очень слабых электромагнитных излуче-

ний, так и для генерации электромагнитных волн большой частоты. Эффект Джоузефсона – это большая область применений сверхпроводимости.

Трудно даже вообразить, сколько разных применений получили бы сверхпроводники, если бы не одно печальное обстоятельство. Все сверхпроводящие устройства, применяемые до сих пор, нуждаются в охлаждении жидким гелием. Стоимость одного литра этого хладагента – 10 рублей (напомним, что статья была опубликована в 1988 году – *прим. ред.*), и это очень удорожает использование сверхпроводников. Однако в последнее время появились так называемые сверхпроводящие окислы, или керамики, с критической температурой в районе 95 К. Это уже заметно выше, чем точка кипения жидкого азота (77 К), стоимость которого – 10 копеек за литр. Не исключено, что будут найдены и более высокотемпературные материалы. (В начале 1988 года стало известно об обнаружении сверхпроводников Bi–Sr–Ca–Cu–O и Tl–Ba–Ca–Cu–O с критической температурой 105–125 К.)

А теперь я остановлюсь на истории открытия и свойствах таких сверхпроводящих керамик. С 1973 года и до середины 1986 года рекорд максимальной критической температуры принадлежал пленкам из Nb_3Ge , сохранявшим сверхпроводимость вплоть до 23 К. Однако осенью 1986 года появилось сообщение физиков Г.Беднорца и А.Мюллера (Швейцария) об открытии сверхпроводимости соединения La – Ba – Si – O с критической температурой в районе 30 К. Эти авторы не сразу подошли к своему открытию. Дело в том, что еще до них был известен сверхпроводящий окисел Ba – Pb – Bi – O с критической температурой 14 К. Странным в этом соединении было то, что плотность свободных электронов, переносящих ток, у него была 10^{-21} см^{-3} , что на порядок меньше, чем у обычных металлов. В то же время, согласно теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ), значение критической температуры растет с увеличением числа свободных электронов. Ясно, что уменьшение числа электронов должно вести к умень-

шению $T_{кр}$. А 14 К – это была относительно высокая критическая температура.

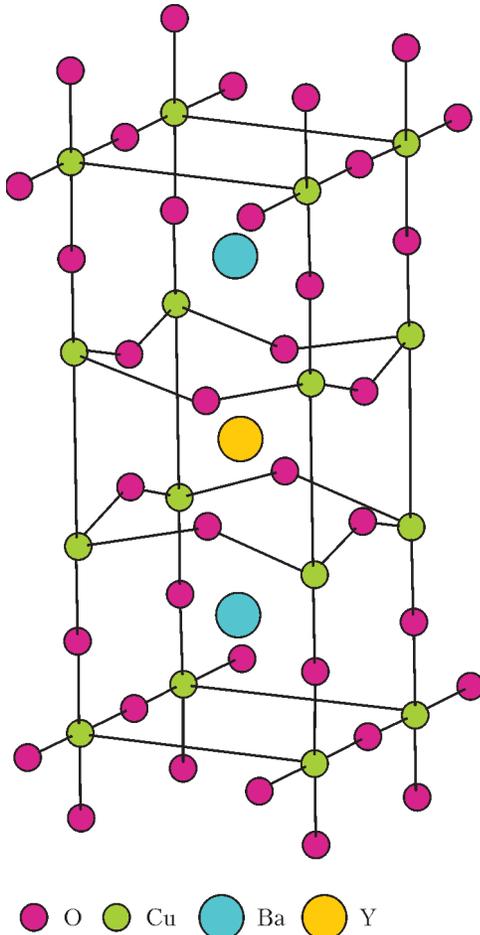
Далее внимание Беднорца и Мюллера привлекли окислы, содержащие медь в состоянии с промежуточной валентностью: часть Cu^{++} , а часть Cu^{+++} . Такие окислы изучались французскими физиками. В качестве элемента структуры в них входил редкоземельный элемент лантан. Если взять соединение La_2CuO_4 , то медь в нем только двухвалентная, и это вещество ведет себя как изолятор. Мюллер и Беднорц стали заменять трехвалентный лантан двухвалентными элементами, чтобы отнять часть электронов у меди и тем самым частично перевести медь в трехвалентное состояние. В результате был получен первый высокотемпературный сверхпроводник $La_{2-x}Ba_xCuO_4$, где $x = 0,1-0,2$. Сначала Беднорцу и Мюллеру никто не поверил, и их статью отказался печатать ведущий американский физический журнал «Physical Review Letters». Тогда они отослали ее в немецкий журнал «Zeitschrift fur Physik», где она и вышла осенью 1986 года. Первоначально статья не вызвала интереса. Но потом японские специалисты решили проверить сообщение и убедились, что Мюллер и Беднорц не ошиблись. После этого указанные соединения исследовали американские физики, и с начала 1987 года разразился настоящий «сверхпроводящий бум». Сейчас имеется уже несколько тысяч статей на эту тему. Я не могу рассказать о всех деталях этой гонки, но отмечу основные моменты.

Естественно было попытаться повысить критическую температуру путем замены элементов их химическими аналогами. Замена Ba на Sr привела к $T_{кр} = 45 \text{ К}$. Американская группа из Хьюстона во главе с П.Чу подвергла эти образцы сжатию и обнаружила, что критическая температура быстро растет при сжатии, хотя в обычных сверхпроводниках в подобных условиях $T_{кр}$, как правило, слабо убывает. Тогда они решили попытаться устроить «химическое» сжатие, заменив атомы лантана на атомы иттрия, имеющие меньший размер. В результате было получено соединение с фантастически высокой по тем,

еще недавним, временам критической температурой $T_{кр} \sim 93$ К.

Идея о «химическом сжатии» помогла сделать открытие, но в конце концов оказалась неправильной. Очень тщательное исследование показало, что высокотемпературным сверхпроводником является фаза «1-2-3»: $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, где x меньше единицы. Последующие попытки замены Y другими элементами показали, что сверхпроводимость с $T_{кр} \sim 93$ К наблюдается у соединений со структурой «1-2-3», где вместо иттрия может стоять осмий и почти все редкие земли, включая лантан.

Теперь я расскажу о некоторых особенностях этих соединений и о попытках теоретического объяснения высоких критических температур. Прежде всего – о



Структура кристаллической решетки соединения $Y-Ba-Cu-O$

структуре. В обоих типических соединениях $La - Ba - Si - O$ и $Y - Ba - Si - O$ она соответствует так называемым слоистым перовскитам. Характерной их особенностью является слоистость (периоды по двум направлениям порядка $2,8 \text{ \AA}$, а по третьему 12 \AA). В медных «слоях» каждый атом меди окружен октаэдром атомов кислорода. Расчеты показывают, что основная проводимость происходит по слоям медь – кислород в результате перекрытия d -оболочек меди с p -оболочками кислорода. Атомы редкой земли роли, по-видимому, не играют: «свободные» электроны туда просто не заходят. Далее, оба вещества имеют в принципе две модификации: тетрагональную и орторомбическую. В первой элементарная ячейка имеет вид правильной четырехгранной призмы, а во второй – прямоугольного параллелепипеда с произвольными длинами ребер. Но отличие от тетрагональности небольшое. Интересно отметить, что чистый La_2CuO_4 при низких температурах является орторомбическим, но добавление Ba подавляет этот переход, и вещество остается тетрагональным. Наоборот, иттриевое соединение «1-2-3» при низких температурах является орторомбическим. В принципе его можно получить и в тетрагональной модификации, изгнав из него часть кислорода путем нагрева, но эта модификация – не сверхпроводник.

Что касается поведения в магнитном поле, то новые вещества являются экстремальными сверхпроводниками второго рода, ибо нижнее поле $B_{кр1}$ в них порядка 10^{-2} Тл, а верхнее поле $B_{кр2}$ при низких температурах оценивается как 10^2 Тл. Надо заметить, что эти вещества хрупкие, и не так просто сделать из них проволоку для сверхпроводящего магнита. Другим отрицательным свойством является то, что критическая плотность тока в них порядка $10^2 - 10^3 \text{ A/cm}^2$. Более того, это значение очень быстро падает при помещении веществ во внешнее магнитное поле. Согласно последним исследованиям, это связано с тем, что новые вещества состоят из сверхпроводящих зерен, разделенных изо-

лирующими прослойками. Через эти прослойки возможен небольшой джозефсоновский ток, который легко подавляется магнитным полем. Правда, в пленках, состоящих из ориентированных кристаллитов, получена критическая плотность тока до 10^6 А/см² при температуре кипения жидкого азота ($T = 77$ К), но пленки не могут служить обмотками для сверхпроводящих магнитов.

В настоящее время усилия многих лабораторий мира сосредоточены на попытках получить монокристаллы новых сверхпроводников. Удалось сделать пластинки со стороной до 1 см и толщиной до 3 мм. Исследование таких образцов подтверждает, что эти вещества слоистые: сопротивление поперек слоев в десятки раз превышает сопротивление вдоль них. Кстати, отмечу, что в нормальном состоянии это плохие проводники: удельное сопротивление раз в 100 больше, чем у меди.

Что касается теоретических объяснений, то здесь больше вопросов, чем ответов. Например, по теории Бардина–Купера–Шриффера получается соотношение

$$\frac{2\Delta(0)}{T_{кр}} = 3,5.$$

Для новых сверхпроводников разные измерения дают для этой величины значения от 3 до 12. Далее, эти вещества обладают целым рядом специфических особенностей, но не очень ясно, какие именно из них имеют принципиальное значение. Например: какую роль играет слоистость кристаллов; существенны ли атомы лантана или иттрия в механизме сверхпроводимости или они играют роль просто механической фермы, которая скрепляет кристаллическую решетку? Какова роль кислорода? Известно, что в иттриевом соединении есть слои, состоящие из цепочек Cu – O – Cu – O, а есть плоскости, в которых на атом меди приходится по два атома кислорода. При удалении кислорода он прежде всего уходит из цепочек, и вещество теряет сверхпроводимость. Но в лантановом соединении таких цепочек нет.

Итак, не очень понятно, за что зацепиться. Экспериментально установлено, что и в новых сверхпроводниках электроны объединены в куперовские пары. Но каков механизм притяжения? Механизм передачи фононов – квантов колебаний решетки – влечет за собой изотопический эффект, т.е. изменение $T_{кр}$ с переходом к другому изотопу. Были сделаны измерения на образцах с заменой изотопа O¹⁶ на O¹⁸. У лантанового соединения эффект наблюдался, хотя и меньше, чем предсказывала теория БКШ. Но у иттриевого 90-градусного сверхпроводника, так же как и у такого же вещества с европием вместо иттрия, этого эффекта практически нет.

Отсюда делается вывод, что помимо давно известного фононного механизма существует другой механизм передачи взаимодействия между электронами. В принципе, в веществе могут существовать квазичастицы и иных типов – например, связанные с возбуждением электронов, удаленных от проводящих слоев. Они называются плазмонами. Есть и другая идея: вещество может находиться близко к переходу в магнитоупорядоченное состояние. В этом состоянии есть свои квазичастицы – магноны. Но даже если нет настоящего упорядочения, то оно может возникать в виде флуктуации и создавать взаимодействие электронов. Появились теории, использующие это обстоятельство.

Я не могу перечислить всех теорий – их очень много. Отмечу еще только очень интересную концепцию двухэлектронных центров. Известно, что кислород очень легко уходит из новых сверхпроводников, в то время как в обычных окислах он связан очень прочно. Есть концепция, согласно которой два электрона могут сразу уйти с атомов кислорода на медь; это делает кислород нейтральным и тем самым облегчает его выход из решетки. А то обстоятельство, что электроны то находятся в коллективизированном металлическом состоянии, то оказываются попарно локализованными на кислороде, приводит к их притяжению.

(Продолжение см. на с. 19)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2470 предлагалась на XX Кубке памяти А.Н.Колмогорова, задача M2472 – на VIII Международной олимпиаде Romanian Master in Mathematics.

Задачи Ф2477–Ф2480 предлагались на отраслевой физико-математической олимпиаде школьников «Росатом» 2016/17 учебного года. Автор этих задач – С.Муравьев

Задачи M2470–M2473, Ф2477–Ф2480

M2470. Даны несколько натуральных чисел. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал с исходными числами то же, но в другом порядке. Докажите, что Кирилл и Илья совершили поровну переносов в процессе сложений.

И.Богданов

M2471. На координатной плоскости каждая точка с целыми координатами покрашена в один из трех цветов: красный, зеленый или желтый так, что есть хотя бы одна точка каждого цвета. Докажите, что найдутся три точки X , Y и Z , покрашенные в разные цвета, такие, что $\angle XYZ = 45^\circ$.

Хорхе Туне (Перу)

M2472*. Все члены последовательности $\{x_n\}$ положительны и при всех натуральных n имеет место равенство

$$2x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}x_n + 2x_n^2 = 1.$$

Определите, какое наибольшее количество различных чисел может быть среди членов последовательности $\{x_n\}$.

С.Костин

M2473*. На сторонах AB , BC , CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P , Q , R и S соответственно. Оказалось, что отрезки PR и QS разбива-

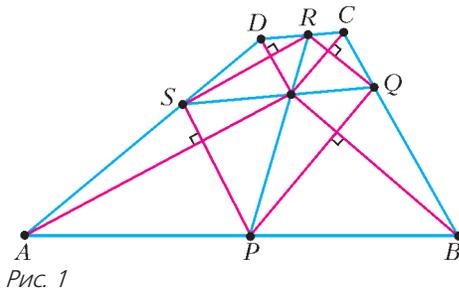


Рис. 1

ют $ABCD$ на четыре четырехугольника, у каждого из которых диагонали перпендикулярны (рис. 1). Докажите, что точки P , Q , R и S лежат на одной окружности.

Н.Белухов (Болгария)

Ф2477. В системе двух тел с массами m и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков, ускорения блоков известны и равны a и $2a$ (рис.2).

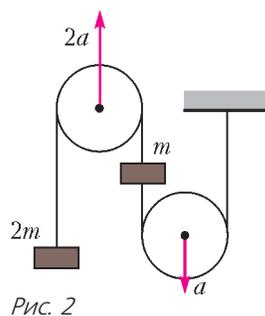


Рис. 2

Какими силами нужно действовать на блоки?

Ф2478. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды

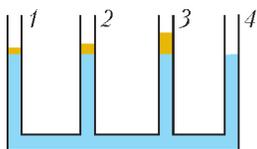


Рис. 3

в первый, второй и третий сосуды (рис. 3) аккуратно наливают слой масла толщиной h , $2h$ и $3h$ соответственно.

На сколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла ρ_0 , плотность воды ρ_1 ($\rho_1 > \rho_0$).

Ф2479. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 4, три одинаковых резистора соединены последователь-

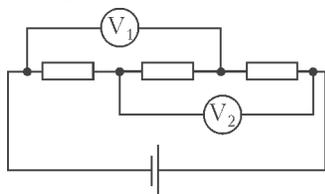


Рис. 4

но и подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 5$ В каждый. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

Ф2480. На рисунке 5 изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу и ка-

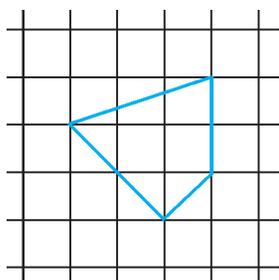


Рис. 5

ким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решите задачу графически и обоснуйте все сделанные построения на основе законов геометрической оптики. Оцените по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна одному сантиметру.

Решения задач M2458–M2461, Ф2465–Ф2468

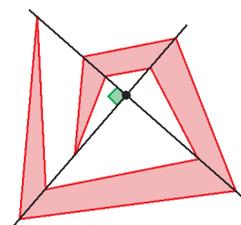
M2458. а) На каждой стороне 10-угольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной 10-угольника? б) Решите ту же задачу для 11-угольника.

Ответ: а) можно; б) нельзя.

Общая точка у всех построенных окружностей – это точка, из которой каждая сторона многоугольника видна под прямым углом.

а) Один из возможных примеров показан на рисунке.

б) Предположим, что O – общая точка построенных окружностей для n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$, где n нечетно, причем O не совпадает ни с одной из вершин. Тогда $OA_1 \perp OA_2$, $OA_2 \perp OA_3$, значит, прямые OA_1 и OA_3 совпадают, т.е. точки A_1 и A_3 лежат на одной прямой l , проходящей через O . Продолжая далее, аналогично получаем, что точка A_5 тоже лежит на прямой l , точки $A_7, A_9, \dots, A_n, A_2, A_4, \dots, A_{n-1}$ тоже лежат на прямой l . Таким образом, все вершины n -угольника лежат на одной прямой. Противоречие.



Е.Бакаев

M2459. Для положительных чисел x_1, \dots, x_n докажите неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \dots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

Умножим неравенство на 4 и представим левую часть в виде суммы $s_1 + s_2 + \dots + s_n$, где

$$s_1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4 + \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^4,$$

$$s_2 = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4 + \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^4 + \left(\frac{x_5}{x_6}\right)^4, \dots$$

$$\dots, s_n = \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4.$$

Пользуясь неравенством $a^2 + b^2 \geq 2ab$, получаем

$$s_1 = \left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4\right) + \left(\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4 + \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^4\right) \geq$$

$$\geq 2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 2\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_5}\right)^2\right) \geq 2 \cdot 2\left(\frac{x_1}{x_3}\right) \cdot \left(\frac{x_3}{x_5}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{x_1}{x_5}.$$

Итак, $s_1 \geq 4 \cdot \frac{x_1}{x_5}$. Аналогично получаем

$$s_2 \geq 4 \cdot \frac{x_2}{x_6}, \dots, s_n \geq 4 \cdot \frac{x_n}{x_4}.$$

Суммируя эти неравенства, получаем требуемое.

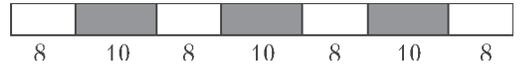
Заметим, что неравенство $s_1 \geq 4 \cdot \frac{x_1}{x_5}$ можно было установить и в один ход, воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для четырех чисел $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4, \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4, \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^4, \left(\frac{x_4}{x_5}\right)^4$.

М.Фадин

M2460. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k - 1$ клеток.) Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n , побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n , большее 50.

Докажем, что $n = 62$ не является пропрыгиваемым. Предположим противное – куз-

нечик пропрыгал полоску из 62 клеток. Покрасим 8 левых ее клеток белым, следующие 10 – черным, потом снова 8 – белым и так далее (см. рисунок). Всего будет 32



белых и 30 черных клеток. Поскольку разность количеств белых и черных клеток больше 1, то должен быть прыжок между двумя белыми клетками. Но такие прыжки невозможны.

Та же идея с небольшим дополнительным рассуждением помогает доказать, что и некоторые другие n не являются пропрыгиваемыми. Рассмотрим, например, полоску из 63 клеток. По сравнению с решением для $n = 62$ увеличим один из белых кусков на одну клетку. Тогда разность количеств белых и черных клеток увеличится на единицу (станет равна 3), но возможен лишь один прыжок между двумя белыми клетками – это снова приводит к противоречию. Так можно увеличить на одну клетку каждый из белых кусков, при каждом увеличении на одну клетку разность количеств белых и черных клеток увеличится на единицу, и количество возможных прыжков между двумя белыми клетками – тоже. Таким образом, можно показать, что числа 63, 64, 65, 66 тоже не пропрыгиваемы.

Аналогично, уменьшая в решении для $n = 62$ черные куски на одну клетку, можно показать, что числа 59, 60, 61 не пропрыгиваемы.

Заметим, однако, что все достаточно большие n являются пропрыгиваемыми.

Е.Бакаев

M2461. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8 . При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску: а) хотя бы 40 доминошек; б) хотя бы 41 доминошку; в) более 41 доминошки.

а) Возьмем на координатной плоскости

квадрат 8×8 с вершинами в точках $(\pm 4; \pm 4)$ и повернем его немного относительно центра так, чтобы его вертикальные стороны не пересекли прямых $x = -3,5$ и $x = 3,5$. После поворота квадрат высекает на каждой из восьми прямых $x = -3,5, x = -2,5, x = -1,5, x = -0,5, x = 0,5, x = 1,5, x = 2,5, x = 3,5$ отрезки длины больше 8. Значит, внутри каждого из таких отрезков можно разместить с шагом 2 по пять центров вертикальных доминошек. Итого 40 доминошек. Другой способ расположения 40 доминошек показан на рисунке 1.

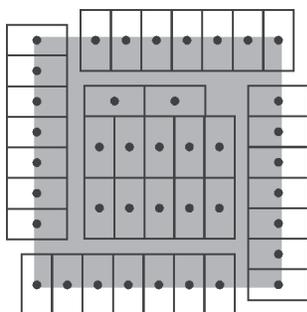


Рис. 1

в) На рисунке 2 показана укладка 42 доминошек. Центры левой верхней и правой нижней доминошек лежат на границе

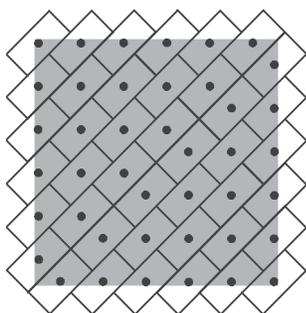


Рис. 2

квадрата с диагональю 11, которая меньше диагонали доски 8×8 . Поэтому центры всех доминошек уместятся на доске. В завершении опишем, как расположить 44 (!) доминошки. Как и в первом решении пункта а), немного повернем квадрат 8×8 с вершинами $(\pm 4; \pm 4)$ так, чтобы его вертикальные стороны не пересекли прямых $x = \pm 3\frac{3}{4}$. На

семи прямых $x = 3\frac{3}{4}, x = 2\frac{3}{4}, x = 1\frac{3}{4}, x = \frac{3}{4}, x = -\frac{1}{4}, x = -1\frac{1}{4}, x = -2\frac{1}{4}$, как и раньше, поместим по пять центров вертикальных доминошек, а на прямой $x = -3\frac{3}{4}$ поместим 9 центров горизонтальных доминошек. Итого будет выложено $7 \times 5 + 9 = 44$ доминошки.

Более наглядное описание этой конструкции таково. Расположим 35 доминошек так, как на рисунке 3, а. Центры «границ-

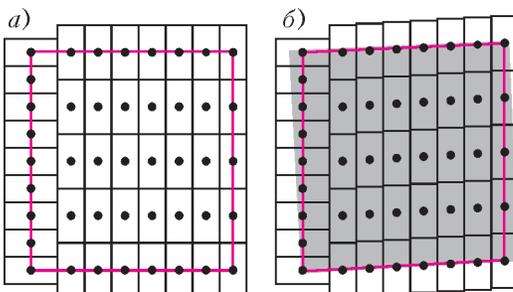


Рис. 3

ных» доминошек образуют прямоугольник $8 \times 7,5$. Чуть сдвинем 7 вертикальных рядов из 5 доминошек вверх (каждый ряд на свое расстояние), чтобы центры «границных» доминошек образовали параллелограмм (красный на рисунке 3, б). Расстояние между его верхней и нижней сторонами меньше 8, сами стороны чуть больше 7,5 и совсем немного сдвинуты друг относительно друга. Поэтому этот параллелограмм можно накрыть квадратом 8×8 .

С. Дориченко

Ф2465. Кот Леопольд сидел на неподвижной дрезине у вертикально стоящего жестко закрепленного на ней щита, повернутого под углом α к направлению рельсов. Два озорных мышонка бросили в него мешок с песком массой m , горизонтальная составляющая начальной скорости которого равна v_0 и направлена вдоль рельсов. Кот успел спрятаться за щит, и мешок, ударившись о щит, сполз по нему в сторону и скатился по насыпи вниз. С какой скоростью поехала дрезина, если масса дрезины с котом M ? Тре-

нием мешка о щит и дрезины о рельсы можно пренебречь.

После удара скорость мешка относительно дрезины будет направлена вдоль щита, поэтому горизонтальная скорость мешка относительно земли равна сумме скорости дрезины v и некоторой горизонтальной скорости мешка u , направленной вдоль щита. В системе сохраняется проекция импульса на ось, параллельную рельсам:

$$mv_0 = Mv + m(v + u \sin \alpha).$$

Кроме того, не может измениться параллельная щиту составляющая горизонтальной скорости мешка, так как трение отсутствует и единственная действующая на мешок горизонтальная сила перпендикулярна щиту. Поэтому

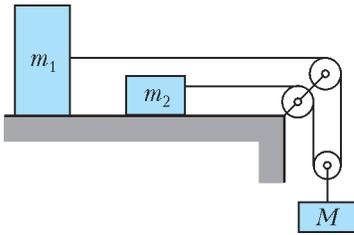
$$v_0 \sin \alpha = v \sin \alpha + u.$$

Исключая из этих двух уравнений u , найдем искомую скорость дрезины:

$$v = \frac{m \cos^2 \alpha}{M + m \cos^2 \alpha} v_0.$$

Д.Александров

Ф2466. В системе, показанной на рисунке, $m_1 = m$, $m_2 = 5m$, $M = 6m$. Найдите ускорение груза массой M , если между остальными грузами и столом имеется



трение с коэффициентом $\mu = 0,5$. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$, массой блоков и трением в их осях пренебречь.

В первую очередь нужно разобраться, будут ли двигаться грузы массами m_1 и m_2 . Возможны четыре варианта:

- 1) оба груза неподвижны;
- 2) груз массой m_1 неподвижен, а груз массой m_2 движется;
- 3) груз массой m_1 движется, а m_2 — неподвижен;
- 4) оба груза движутся.

Первый случай невозможен, так как тогда сила натяжения нити была бы равна $3mg$, а этого достаточно, чтобы сдвинуть каждый из грузов, лежащих на столе.

Второй случай невозможен, поскольку если сила натяжения нити способна сдвинуть груз массой m_2 , то она тем более сдвинет груз массой m_1 .

В четвертом случае, решив систему уравнений

$$m_1 a_1 = T - \mu m_1 g, \quad m_2 a_2 = T - \mu m_2 g, \\ Ma = Mg - 2T, \quad 2a = a_1 + a_2,$$

получим

$$T < \mu m_2 g \text{ и } a_2 < 0,$$

т.е. этот вариант тоже невозможен.

Остается третий случай: груз массой m_1 движется, а груз массой m_2 неподвижен.

Из системы уравнений

$$m_1 a_1 = T - \mu m_1 g, \quad Ma = Mg - 2T, \quad 2a = a_1$$

найдем искомое ускорение груза массой M :

$$a = \frac{g}{2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Противоречие, возникающее при рассмотрении первого случая, означает, что грузы не могут быть неподвижны одновременно. Было бы логической ошибкой сделать отсюда вывод, что оба груза движутся.

Анализ случаев можно заметно упростить, если заметить, что при закрепленном грузе массой m_2 ускорение груза массой M ни при каких значениях масс не может превысить g . Это означает, что ускорение груза массой m_1 не превышает $2g$, следовательно, сила натяжения нити не превосходит $m_1 \cdot 2g + \mu m_1 g = 2,5m_1 g$, а такая сила не способна сдвинуть груз массой m_2 .

Д.Александров

Ф2467. При подведении количества теплоты $Q = 600 \text{ Дж}$ к смеси гелия и азота при постоянном объеме смесь нагревается на $\Delta T_1 = 15 \text{ К}$. А если то же количество теплоты подвести к тому же количеству той же смеси при постоянном давлении, то температура смеси повысится на $\Delta T_2 = 10 \text{ К}$. Найдите отношение числа молекул азота к числу молекул гелия в смеси.

Теплоемкости всей смеси при постоянном

объеме и при постоянном давлении равны, соответственно,

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T_1} = \frac{600 \text{ Дж}}{15 \text{ К}} = 40 \text{ Дж/К}$$

и

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T_2} = \frac{600 \text{ Дж}}{10 \text{ К}} = 60 \text{ Дж/К},$$

а их разность составляет

$$C_p - C_V = 20 \text{ Дж/К}.$$

Так как отношение $\frac{C_p}{C_p - C_V} = 2$ не зависит от количества вещества и для одного моля любого идеального газа $c_p - c_v = R$, молярная теплоемкость смеси при постоянном объеме равна

$$c_v = 2R.$$

Пусть на одну молекулу гелия в смеси приходится x молекул азота. Тогда в одном моле смеси будет $\frac{1}{1+x}$ молей гелия и $\frac{x}{1+x}$ молей азота. Внутренняя энергия моля смеси равна

$$U = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{3}{2} RT + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{5}{2} RT = \frac{3+5x}{2(1+x)} RT,$$

откуда находим

$$c_v = 2R = \frac{U}{T} = \frac{3+5x}{2(1+x)} R.$$

Решив уравнение

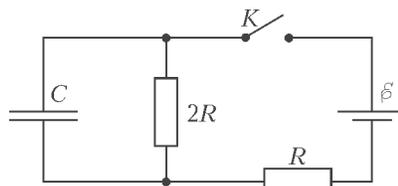
$$\frac{3+5x}{2(1+x)} = 2,$$

получим искомое отношение:

$$x = 1.$$

Д.Александров

Ф2468. В электрической цепи, изображенной на рисунке, все элементы можно



считать идеальными. В некоторый момент после замыкания ключа тепловые мощности, выделяющиеся на резисторах с сопротивлениями R и $2R$, равны $P_1 = 9 \text{ Вт}$ и $P_2 = 2 \text{ Вт}$ соответственно. С какой скоростью в этот момент растет энергия конденсатора?

Сначала, пользуясь формулой $P = I^2 R$, находим, что в рассматриваемый момент времени ток в резисторе сопротивлением R в три раза больше тока в резисторе сопротивлением $2R$. Тогда ток через конденсатор в два раза больше тока в резисторе сопротивлением $2R$, а так как напряжения на них равны, то их мощности относятся как токи.

Это означает, что скорость роста энергии конденсатора в два раза больше мощности, выделяющейся в резисторе сопротивлением $2R$, т.е. равна 4 Вт .

Д.Александров

Сверхпроводимость:

история, современные представления, последние успехи

(Начало см. на с. 9)

Итак, сейчас наступило время исследований и поисков как механизма высокотемпературной сверхпроводимости, так и способов практического применения новых сверхпроводящих материалов. Исследования ведутся очень большими силами, и не исключено, что они увенчаются успехом. Однако одно важное дело – открытие

высокотемпературных сверхпроводников – уже сделало: оно уничтожило многолетний предрассудок, что сверхпроводимость обязательно требует низких температур. Это окрыляет людей на дальнейшие поиски, и даже в том случае если не удастся «приручить» обнаруженные сверхпроводящие керамики, то обязательно будут найдены другие классы сверхпроводников с более высокими критическими температурами и более пригодные для практического использования.

Задачи

1. Бумеранг можно бросить так, что он вернется обратно, не коснувшись никакой твердой поверхности. А можно ли так бросить теннисный мяч?



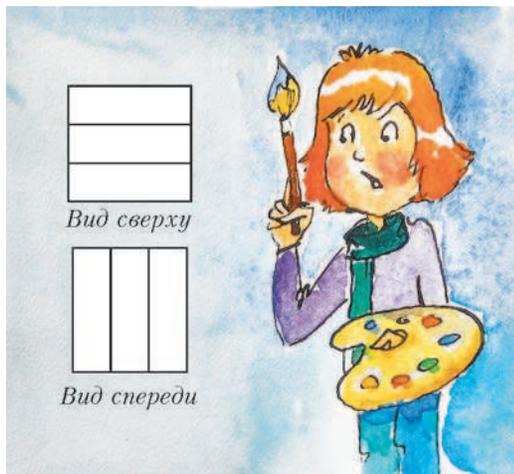
одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько стоил букварь?



2. На подоконнике сидели три мухи. Вспугнутые хозяйкой, они взлетели. Какова вероятность, что ровно через минуту они окажутся в одной плоскости?



4. Найдите многогранник, имеющий такой вид сверху и такой вид спереди, как показано на картинке. Нарисуйте вид сбоку (невидимые ребра многогранника изобразите пунктиром).



3. У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши —

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1 и 2 взяты из книги «Математический винегрет» И.Ф.Шарыгина, задачи 3 и 4 — из книги «Задачи для детей от 5 до 15 лет» В.И.Арнольда.

Какой бывает колея

С.ДВОРЯНИНОВ

*Эй вы, задние! Делай как я.
Это значит — не надо за мной.
Колея эта — только моя,
Выбирайтесь своей колеей.*

В.Высоцкий. Чужая колея

*Ступени, трудно вы мне дались,
Но как печален был ваш сюрприз.
К развязке грустной вели меня
Наверх по лестнице, ведущей вниз.*

И.Кохановский. Ступени

ПОЧТИ 180 ЛЕТ НАЗАД, 30 ОКТЯБРЯ 1837 года в 2 часа 30 минут дня первый в России пассажирский поезд плавно отошел от перрона в Петербурге и через 35 минут прибыл на станцию Царское Село. Руководил строительством Царскосельской дороги австрийский инженер Франц Герстнер. Он отказался от принятой в Европе колеи шириной 1435 мм, поскольку она, по его мнению, была слишком мала для создания правильной конструкции паровозов и вагонов. Ширина колеи Царскосельской дороги, т.е. расстояние между внутренними гранями головок рельсов (рис. 1), была 1829 мм (или 6 футов).

В 1843 году началось строительство дороги между Петербургом и Москвой. Она строилась двухпутной и рассчитанной под колею шириной 1524 мм (5 футов). Эта ширина потом стала стандартной для всех российских железных дорог. Царскосельская дорога была «перешита» на русскую колею в начале XX века.

В разных странах разная ширина железнодорожной колеи. Но даже в одной стране наряду с обычными дорогами есть узкоколейные. Так, у нас были распространены до-

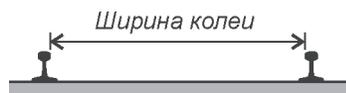


Рис. 1

роги с колеей 750 мм — для перевозки торфа и леса в местах их заготовки. Такова же ширина и детских железных дорог.

Когда поезд переходит с одной колеи на другую, то в местах их стыковки вагоны переставляют с одних вагонных тележек на другие. Иногда для этого используют раздвижные колесные пары, которые могут без остановки движения изменять ширину колеи на специальных переводных путевых устройствах.

А существуют ли колеса, пригодные для езды по колее любой ширины? Теоретически, да. Вот пример.

Вам, должно быть, хорошо известна геометрическая фигура,

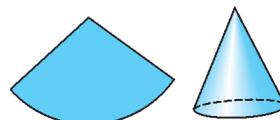
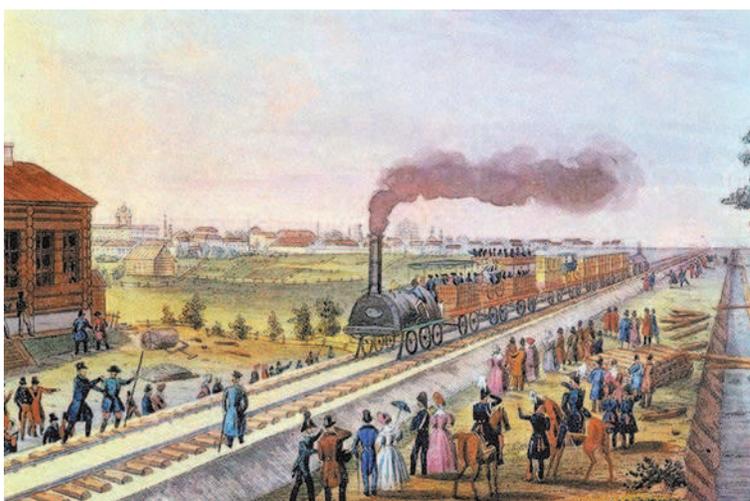


Рис. 2

называемая конусом. Модель конуса легко склеить из бумаги или картона. Для этого рисуем круговой сектор и сворачиваем его в виде кулечка (рис.2). В прежние



времена в таких кулечках, свернутых из газеты, старушки продавали семечки. Да и в крупных гастрономах до изобретения полиэтиленовых пакетов в кулечках развешивали пряники, конфеты, макароны и другие продукты.

Теперь давайте два одинаковых конуса склеим основаниями и полученное тело будем использовать как колесную пару, располагая ось конуса перпендикулярно рельсам (рис. 3). При этом фактически

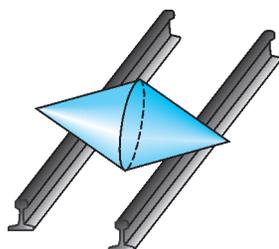


Рис. 3

получается не одна пара колес, а бесконечно много пар разного радиуса.

Действительно, пусть на плоскости есть две пары рельсов — с узкой и с широкой колеями. Поставим наше колесо на одни рельсы, а потом на другие (рис.4). Разумеется, между рельсами должна быть впадина, ложбина, канал (сродни тем, которые

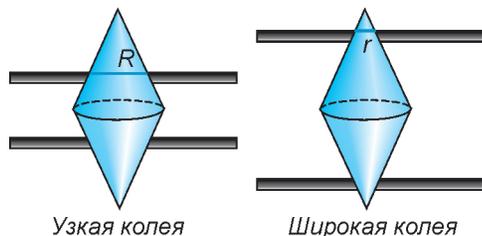


Рис. 4

есть в метро). В эту ложбину сможет погружаться часть нашего колеса. Если колея узкая, то по ней катятся колеса большего радиуса R , а если широкая — то меньшего радиуса r .

Посмотрим теперь на наше колесо сбоку (рис.5). Центр колес находится на высоте H над узкой колеей и на высоте h над широкой, и при этом $H > h$.

До сих пор ширина горизонтальной ко-

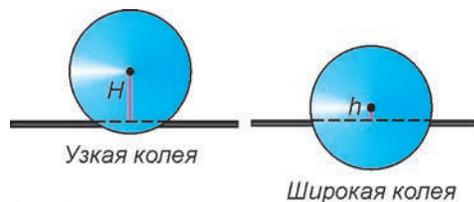


Рис. 5

леи предполагалась постоянной. Пусть теперь рельсы расходятся, колея становится шире и шире и вначале колесо находится на ее узкой части (рис.6). Если

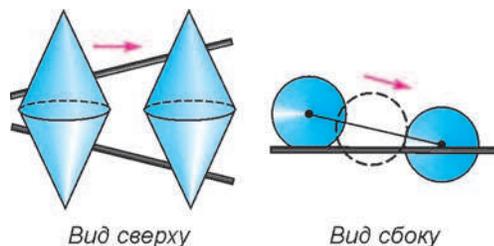


Рис. 6

такое колесо отпустить, то оно покатится в сторону широкой части. При этом центр тяжести колеса будет опускаться.

Это обстоятельство используют при демонстрации популярного механического парадокса. В случае, показанном на рисунке 6, рельсы справа (в широкой части колеи) можно чуть приподнять, но так, чтобы колесо по-прежнему скатывалось влева направо. При этом стороннему наблюдателю будет казаться, что колесо катится вверх вопреки всем законам механики! Ясно, что никакого противоречия здесь нет — центр тяжести колеса по-прежнему опускается и колесо катится вниз по двум рельсам, каждый из которых идет вверх.

В заключение — вопрос. Пусть рельсы окрашивают наше колесо, которое по ним катится. Если ширина колеи постоянна, то на поверхности двух конусов мы получим две окружности. А каким будет след, если ширина колеи меняется?

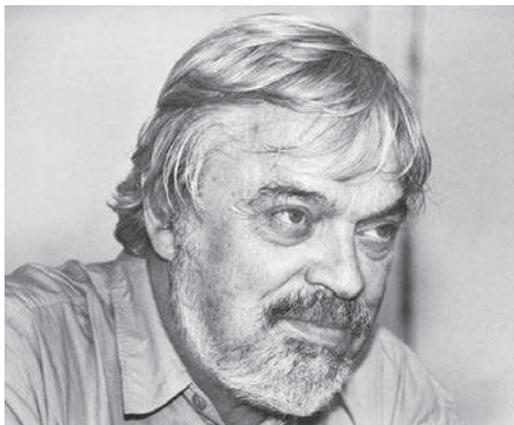
К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ИГОРЯ ФЕДОРОВИЧА ШАРЫГИНА

Истинным назначением жизни Игоря Федоровича Шарыгина была борьба за развитие математического образования – не только в нашей стране, но и во всем мире. И где-то в конце восьмидесятых начался фантастический по затраченным усилиям и плодотворности период его жизни.

Мне представляется, что разумно было бы издать сборник его страстных обращений к коллегам, парламентариям, президентам – о необходимости сберечь наше национальное достояние – математическое образование, созданное на протяжении полутора столетий усилиями русской интеллигенции.

В одной из своих статей, оказавшейся последней в его жизни, Игорь Федорович Шарыгин обращается к каждому человеку. Все человечество выступает в ней как действующее лицо. Он пишет: «История человечества пишется в трех книгах. Это История Вражды, история войн, революций, мятежей и бунтов. [...] Это История Любви. Ее пишет искусство. И это История Мысли человеческой. История ГЕОМЕТРИИ не только отражает историю развития человеческой мысли. Геометрия сама является одним из моторов,двигающих эту мысль».

Если заменить «Историю Вражды» на «Историю Борьбы», присоединив к войнам, революциям, мятежам и бунтам борьбу правды с неправдой и добра со злом, можно будет назвать Игоря Федоровича человеком, вписавшим страницы в каждую из книг, в которых прослеживается история человечества.



Игорь Федорович Шарыгин

(11.02.1937 – 11.11.1999)

Игорь Федорович был страстным борцом на стороне правды, рыцарем, стоявшим на страже просвещения. В «Историю Любви» вписаны его поразительные книги, где главной героиней, предметом восхищения и восторга является геометрия. В «Историю Мысли человеческой» надо включить его композиторское и педагогическое творчество.

Он любил цитировать слова Бродского: «Не в том суть жизни, что в ней есть, а в вере в то, что в ней должно быть». Этой верой была наполнена жизнь Игоря Федоровича Шарыгина.

«Квант», который И.Ф. Шарыгин также одарил своей любовью, отмечает восьмидесятую дату рождения этого замечательного человека.

В.Тихомиров

Выход в пространство

И.ШАРЫГИН

ПОПРОБУЙТЕ РЕШИТЬ СЛЕДУЮЩУЮ головоломку: *Из шести спичек сложить четыре правильных треугольника так,*

чтобы стороной каждого была целая спичка. Попытки решить ее к успеху как будто не приводят. Мало того, можно доказать, что такое построение не осуществимо на плоскости (попробуйте это сделать). Как же быть? Оказывается, нужно выйти в пространство – сложить из спичек правильный тетраэдр (рис.1). Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

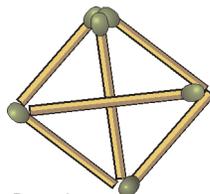


Рис. 1

Выход в пространство бывает полезен и при

решении некоторых планиметрических задач. Классическим примером является **теорема Дезарга**: *Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой (рис.2).*

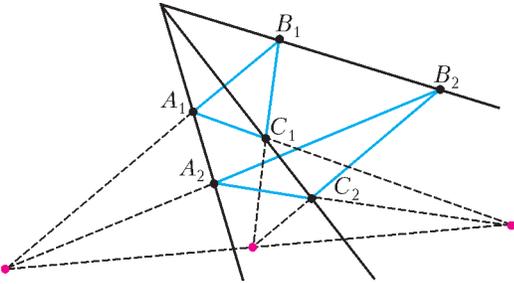


Рис. 2

Утверждение теоремы становится очевидным, если увидеть на рисунке 2 пространственную фигуру, а именно – трехгранный угол, пересеченный двумя плоскостями: одна плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках A_1 , B_1 и C_1 , а другая – в точках A_2 , B_2 и C_2 . Три точки пересечения соответствующих сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ принадлежат линии пересечения этих плоскостей и, значит, лежат на одной прямой.

С помощью выхода в пространство изящно доказывается и **теорема Бриансона**: *Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.*

Пусть $ABCDEF$ – плоский шестиугольник, описанный около окружности. Возьмем произвольный пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис.3), отличный от $ABCDEF$, проекция которого на плоскость p есть шестиугольник $ABCDEF$ и соответствующие стороны которого проходят через точ-

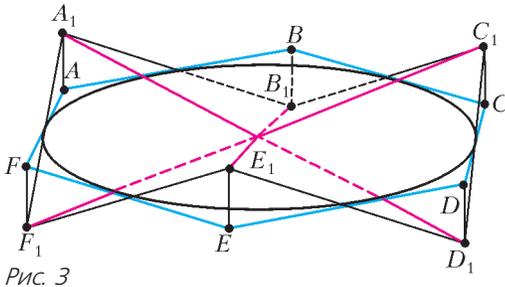


Рис. 3

ки касания шестиугольника $ABCDEF$ с окружностью. Для доказательства существования такого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ достаточно одну вершину, например A_1 , взять произвольно на перпендикуляре к плоскости p , восстановленном в точке A ; тогда остальные вершины определяются однозначно. В самом деле, пусть a, b, c, d, e, f – длины касательных к окружности, проведенных через точки A, B, C, D, E, F соответственно, и h – расстояние от A_1 до плоскости шестиугольника $ABCDEF$. Тогда B_1 находится по другую сторону от плоскости, по сравнению с A_1 , на расстоянии hb/a , C_1 – по ту же сторону от плоскости, что и A_1 , на расстоянии $\frac{hb}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{hc}{a}$ от плоскости и т.д. Наконец, найдем, что F_1 лежит по другую сторону от плоскости, нежели A_1 , на расстоянии hf/a , и, значит, A_1 и F_1 лежат на прямой, проходящей через точку касания AF с окружностью. Любые две противоположные стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ расположены в одной плоскости (докажите самостоятельно). Следовательно, любые две диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, пересекаются, а отсюда и все три диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (они *не лежат* в одной плоскости) пересекаются в одной точке. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ – проекция шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, теорема доказана.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общий факт: *Если прямые AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности, то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке или параллельны.*

Один из возможных случаев расположения точек A, B, C, D, E, F показан на рисунке 4.

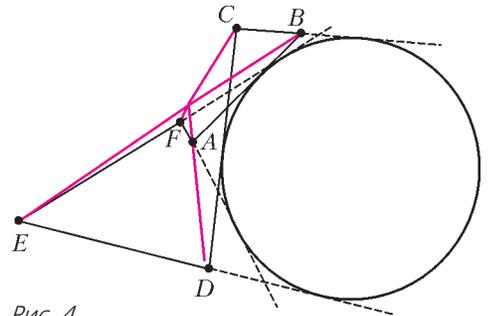


Рис. 4

Только что доказанная теорема Брианшона оказывается справедливой для шестиугольника, описанного около произвольного конического сечения (эллипса, параболы, гиперболы), поскольку произвольное коническое сечение можно спроектировать относительно некоторой точки на другую плоскость так, что его проекция будет окружностью. При этом прямые, касающиеся конического сечения, перейдут в прямые, касающиеся окружности.

Вот более сложный пример: *Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности.*

Пусть данная окружность находится в плоскости α . Если мы докажем, что существуют такие плоскость β и точка O , что проекцией данной окружности относительно точки O на плоскость β будет окружность, но при этом центр первой окружности переходит в точку, отличную от центра второй окружности, то наша задача будет решена. Действительно, любому построению с помощью одной линейки в плоскости α соответствует при проектировании построение с помощью одной линейки в плоскости β .

В качестве плоскости β возьмем произвольную плоскость, пересекающую плоскость α по прямой l , не проходящей через центр данной окружности (рис.5). Пусть AB – диаметр данной окружности, перпендикулярный к l , а N – точка пересечения прямых AB и l . Восставим из точки N перпендикуляр

к l , лежащий в плоскости β , и возьмем на нем точки A_1 и B_1 так, что $A_1N = BN$, $B_1N = AN$. В качестве точки O – центра проекции – возьмем точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Очевидно, середина отрезка AB проектируется в точку, отличную от середины отрезка A_1B_1 .

Возьмем произвольную точку D на данной окружности, $DM \perp AB$. Проекцией DM будет $D_1M_1 \perp A_1B_1$. Докажем, что D_1 лежит на окружности, построенной на A_1B_1 как на диаметре. Воспользуемся тем, что $M_1D_1 \cdot M_1O = MD \cdot M_1O$ ($\triangle DMO$ подобен $\triangle D_1M_1O$) и $MD^2 = BM \cdot MA$. Нам нужно доказать, что $M_1D_1^2 = B_1M_1 \cdot M_1A_1$, или, используя два предыдущих равенства, получить, что

$$\frac{BM \cdot MA}{MO^2} = \frac{B_1M_1 \cdot M_1A_1}{M_1O^2},$$

$$\frac{BM}{MO} \cdot \frac{MA}{MO} = \frac{B_1M_1}{M_1O} \cdot \frac{M_1A_1}{M_1O}.$$

Заменяя в последнем равенстве отношения отрезков отношением синусов противоположных углов соответствующих треугольников, получим очевидное равенство

$$\frac{\sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \gamma \cdot \sin \mu} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \mu \cdot \sin \gamma}.$$

Одной из самых красивых и неожиданных иллюстраций к теме «Выход в пространство» служит, пожалуй, решение этим методом известной **задачи Аполлония**: *Построить окружность, касательную к трем данным окружностям.*

Поставим в соответствие каждой окружности в данной плоскости две точки пространства, расположенные по разные стороны от плоскости, удаленные от этой плоскости на расстояние, равное радиусу окружности, и такие, что проекция каждой из них на плоскость есть центр окружности. Обратно: каждой точке пространства соответствует окружность в нашей плоскости, центр которой совпадает с проекцией точки на плоскость, а радиус равен расстоянию от точки до плоскости. Прежде чем перейти к решению задачи Аполлония, обратим внимание на следующее обстоятельство: если P – одна из двух точек, соответствующих окружности k , то любой точке, находящейся на конической поверхности, вер-

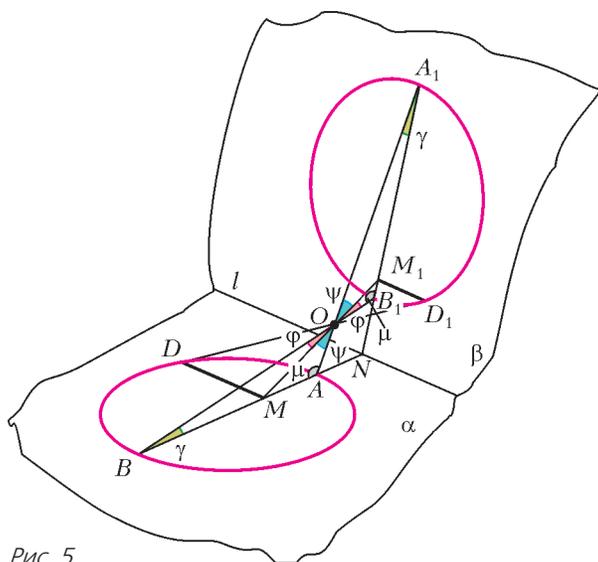


Рис. 5

шиной которой является точка P , а направляющей – окружность k (рассматриваются обе половины этой поверхности), соответствует окружность, касающаяся окружности k (рис.6). Пусть теперь даны три окружности

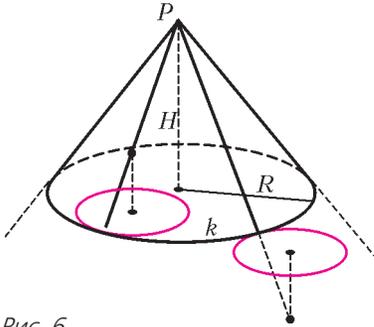


Рис. 6

на плоскости. Построим для каждой указанной выше способом одну из двух конических поверхностей. Точке пересечения этих трех поверхностей соответствует окружность, касающаяся трех данных. Беря различные расположения точек, соответствующих окружностям, можно получить все решения нашей задачи.

Мы привели несколько примеров, когда помогает трехмерное пространство. А может ли помочь четырехмерное пространство? Конечно, да! Например, с его помощью можно решить такую головоломку: *Из десяти спичек сложить десять правильных треугольников так, чтобы сторона каждого треугольника равнялась целой спичке.*

Нужно выйти в четырехмерное пространство и сложить в нем многогранник, аналогичный тетраэдру. Такие многогранники называются *симплексами*. Симплекс на плоскости – это треугольник, в трехмерном пространстве – тетраэдр; что представляет собой симплекс в четырехмерном пространстве, можно понять из рисунка 7.

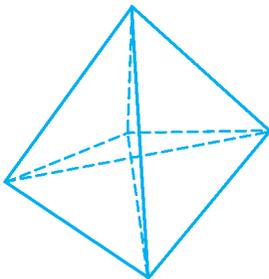


Рис. 7

Этот пример, конечно, серьезен лишь наполовину, а вот уже вполне серьезный пример. Пусть три плоскости пересекаются по одной прямой. Рассмотрим три трехгранных угла, вершины которых

расположены на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях (предполагаем, что соответствующие ребра, т.е. ребра, расположенные в одной плоскости, не пересекаются в одной точке). Тогда три точки пересечения соответствующих граней этих трехгранных углов лежат на одной прямой (рис.8).

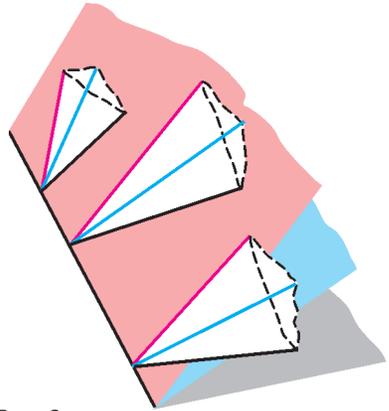


Рис. 8

Поскольку для доказательства этого утверждения мы хотим «выйти» в четырехмерное пространство, расскажем сначала о некоторых свойствах этого пространства.

Простейшими фигурами четырехмерного пространства будут: точка, прямая, плоскость и трехмерное многообразие, которое мы будем называть гиперплоскостью. Первые три фигуры – это наши старые знакомые из трехмерного пространства. Правда, некоторые утверждения, связанные с ними, нуждаются в перефразировке. Например, вместо следующей аксиомы трехмерного пространства: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, следует ввести аксиому: если две различные плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Введение нового геометрического образа – гиперплоскости – заставляет ввести связанную с ним группу аксиом, аналогично тому, как при переходе от геометрии плоскости – планиметрии – к геометрии трехмерного пространства – стереометрии – вводится группа аксиом (вспомните, каких?), выражающих основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

1. Какова бы ни была гиперплоскость, существуют точки, ей принадлежащие, и точки, ей не принадлежащие.

2. Если две различные гиперплоскости имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости,

т.е. существует плоскость, принадлежащая каждой из гиперплоскостей.

3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, имеет с ней общую точку, то существует единственная гиперплоскость, содержащая эту прямую и эту плоскость.

Из этих аксиом непосредственно следует, что четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, определяют гиперплоскость; точно так же три прямые, не принадлежащие одной плоскости, но имеющие общую точку, или две различные плоскости, имеющие общую прямую, определяют гиперплоскость. Мы не будем доказывать эти утверждения; попытайтесь сделать это самостоятельно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт, справедливый в четырехмерном пространстве: три различные гиперплоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую. В самом деле, по аксиоме 2 любые две из трех гиперплоскостей имеют общую плоскость. Возьмем две плоскости, по которым пересекается какая-то из трех гиперплоскостей с двумя другими. Эти две плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости – трехмерному многообразию, имеют общую точку и, значит, пересекаются по прямой или совпадают.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Если бы три плоскости, о которых говорится в условии, были расположены в четырехмерном пространстве, то утверждение было бы очевидным. Действительно, каждый трехгранный угол определяет гиперплоскость. Две гиперплоскости пересекаются по плоскости. Эта плоскость не принадлежит третьей гиперплоскости (по условию, эти гиперплоскости пересекают одну из данных плоскостей по трем прямым, не проходящим через одну точку) и, следовательно, пересекается с ними по прямой линии. Любые три соответствующие грани трехгранных углов лежат в одной гиперплоскости, определяемой двумя плоскостями, на которых расположены соответствующие ребра, и поэтому каждая тройка соответствующих граней имеет общую точку. Три эти точки принадлежат трем гиперплоскостям, определяемым трехгранными углами и, как было доказано, лежат на одной прямой. Теперь для завершения доказательства достаточно «увидеть» в данном условии задачи проекцию соответствующей четырехмерной конфигурации плоскостей и трехгранных углов.

В заключение мне бы хотелось предостеречь читателя: не следует чрезмерно доверять своей «трехмерной интуиции», когда речь идет о четырехмерном пространстве.

Как вы думаете, сколько вершин может иметь выпуклый многогранник, для которого каждый отрезок, соединяющий любые две его вершины, является ребром? На плоскости таким свойством обладает только треугольник, в пространстве – тетраэдр. В четырехмерном же пространстве су-

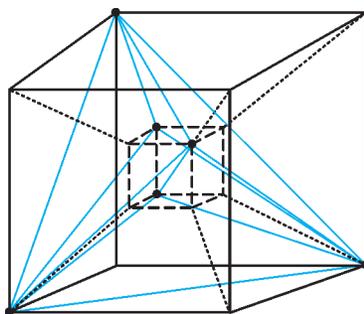


Рис. 9

ществуют такие многогранники со сколь угодно большим числом вершин (см., например, рис.9).

Упражнения

1. По четырем прямым плоскости с постоянными скоростями идут четыре пешехода A, B, C, D . Известно, что пешеходы A, B и C встречаются друг с другом, пешеход D встречается с A и B . Докажите, что пешеходы C и D встречаются.

2. На плоскости даны три непересекающиеся окружности. Рассмотрим шесть точек, каждая из которых является точкой пересечения общих внутренних или общих внешних касательных к каким-то двум из данных окружностей. Докажите, что эти шесть точек лежат на четырех прямых, по три на каждой.

3. Даны три параллельные прямые и три точки на плоскости. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

4. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B , и проведем к ней из C две касательные – CM и CM . Докажите, что точка пересечения прямых MN и AB постоянна.

5. Пусть A – данная точка внутри данной окружности, BC – произвольная хорда, проходящая через A . Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке M . Найдите геометрическое место точек M .

6. Покажите, что в четырехмерном пространстве две плоскости могут пересекаться в одной точке.

Когда показатель преломления меняется

В. ГРЕБЕНЬ

БОЛЬШОЙ ИНТЕРЕС ПРЕДСТАВЛЯЮТ ЗАДАЧИ, допускающие решения несколькими способами. Когда задача сложная, то лучший путь убедиться в правильности решения это попробовать решить ее с привлечением других физических законов. А в случае кинематики, например, задачу можно решать в различных системах отсчета. И если ответы, полученные двумя независимыми способами, совпали, то это означает (с большой вероятностью), что задача решена правильно.

Так, одну из задач вступительного экзамена в МФТИ нам удалось решить тремя способами: с использованием принципа Гюйгенса-Френеля, принципа Ферма и формулы тонкой линзы. Вот эта задача.

Задача 1 (МФТИ, 1993 г.). На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 1). Пучок параллелен оси OO' , которая проходит через центр пластинки. Расстояние между пучком и осью $R = 3$ см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку

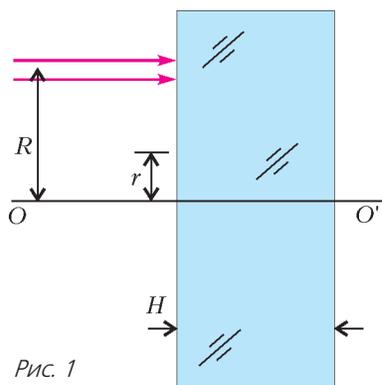


Рис. 1

света изменяется в зависимости от расстояния r до оси OO' по закону $n(r) = n_0 \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right)$, где $n_0 = 1,5$ и $r_0 = 9$ см – константы. Определите угол между выходящим пучком и осью OO' .

Решение 1, основанное на принципе Гюйгенса-Френеля

Рассмотрим крайние лучи пучка 1 и 2 (рис. 2), расстояние между которыми d , причем d – очень маленькое, так как по условию пучок узкий. Скорость луча 1 в пластинке

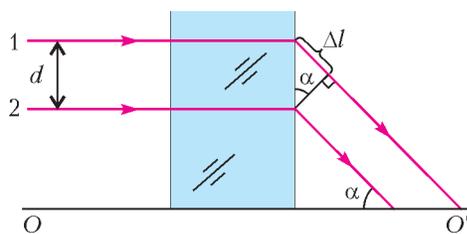


Рис. 2

больше скорости луча 2 и поэтому к правой поверхности пластинки он придет раньше. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, точки правой поверхности пластинки расположенные между крайними лучами пучка, будут являться источниками вторичных волн, огибающая этих вторичных волн определит волновой фронт пучка после выхода из пластинки, а перпендикуляр к волновому фронту укажет новое направление пучка. К моменту выхода луча 2 из пластинки луч 1 успеет пройти расстояние $\Delta l = d \sin \alpha$, где α – угол между выходящим пучком и осью OO' .

Найдем время задержки луча 2 в сравнении с лучом 1:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{H}{v_2} - \frac{H}{v_1} = \frac{H}{c} \left(\frac{c}{v_2} - \frac{c}{v_1} \right) = \frac{H}{c} (n_2 - n_1) = \\ &= \frac{H}{c} \left(n_0 \left(1 - \left(\frac{R - \frac{d}{2}}{r_0} \right)^2 \right) - n_0 \left(1 - \left(\frac{R + \frac{d}{2}}{r_0} \right)^2 \right) \right) = \\ &= \frac{H}{c} n_0 \frac{2Rd}{r_0^2}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} = \frac{d \sin \alpha}{c}.$$

Из этих двух равенств находим

$$\sin \alpha = \frac{2RHn_0}{r_0^2}, \text{ и } \alpha = \arcsin \frac{2RHn_0}{r_0^2} = 2^\circ.$$

Заметим, что при решении мы пренебрегли искривлением хода пучка в стеклянной пластинке.

Решение 2, основанное на принципе Ферма

В середине XVII века французский ученый Пьер Ферма выдвинул принцип, из которого вытекают все законы геометрической оптики. А именно, свет распространяется тем путем, который требует либо минимального, либо максимального времени. В большинстве случаев справедлива более простая формулировка принципа Ферма: свет, идущий от одной точки пространства в другую, всегда распространяется по пути, требующему минимального времени.

Выберем два луча: один (луч 1) распространяется вдоль оси OO' , а второй (луч 2) входит в пластинку, параллельно оси OO' на расстоянии $R = 3$ см (рис.3). Эти два

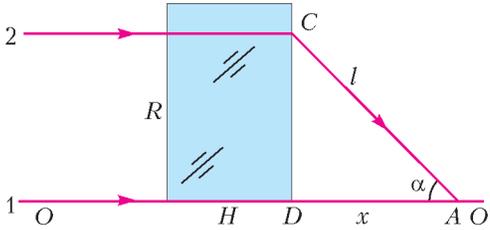


Рис. 3

луча встретятся в точке A , если они затратят одно и то же время на прохождение пути от входа в пластинку до этой точки.

Пусть $DA = x$, $CA = l$. Оптический путь первого луча равен $l_1 = Hn_0 + x$, а второго — $l_2 = Hn + l$. Так как $l_1 = l_2$, то

$$Hn_0 + x = Hn_0 - Hn_0 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 + l,$$

$$\text{или } l - x = Hn_0 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь треугольник ADC , в котором

$$x = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad l = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Отсюда находим разность путей лучей 2 и 1

после выхода из пластинки:

$$l - x = \frac{R}{\sin \alpha} - \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = R \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= R \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Сравнив два выражения для $l - x$, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{Hn_0 R}{r_0^2}, \text{ и } \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{Hn_0 R}{r_0^2}.$$

Поскольку $\frac{Hn_0 R}{r_0^2} \ll 1$, то

$$\alpha = \frac{2Hn_0 R}{r_0^2} = 2^\circ.$$

Видно, что конечная формула для угла α совпала с ответом, полученным в первом решении.

Решение 3, основанное на замене плоскопараллельной пластинки тонкой линзой

Обратим внимание на зависимость показателя преломления n от координаты r : она квадратичная. Соответственно, и оптический путь луча в пластинке будет иметь тот же вид. Это вызывает желание проверить, не будет ли такой же зависимость оптического пути l от расстояния r до главной оптической оси тонкой линзы, у которой хотя бы одна из ограничивающих поверхностей является сферической.

Рассмотрим для простоты плосковыпуклую тонкую линзу и исследуем зависимость оптического пути луча от удаления от оси симметрии. Сечение линзы плоскостью, содержащей главную оптическую ось, будет сегментом (рис.4). Запишем уравнение ок-

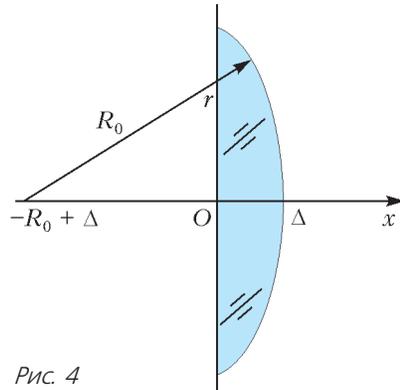


Рис. 4

ружности радиусом R_0 с центром на оси x и с абсциссой $-R_0 + \Delta$:

$$(x + R_0 - \Delta)^2 + r^2 = R_0^2,$$

где Δ – толщина линзы вдоль главной оптической оси. Для правой половины окружности будет справедливо уравнение

$$x + R_0 - \Delta = \sqrt{R_0^2 - r^2},$$

$$\text{или } x + R_0 - \Delta = R_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2}.$$

Учтем, что $R_0 \gg r$, так как линза тонкая, и воспользуемся формулой приближенных вычислений $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{x}{n}$. Тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$x + R_0 - \Delta = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) = R_0 - \frac{r^2}{2R_0},$$

$$\text{или } x = \Delta - \frac{r^2}{2R_0}.$$

Пусть n – показатель преломления материала, из которого изготовлена линза. Запишем оптический путь l луча в линзе в зависимости от расстояния r до оптической оси:

$$l = n \left(\Delta - \frac{r^2}{2R_0} \right)$$

– зависимость оказалась квадратичной. Таким образом, наше предположение оказалось верным.

Геометрический путь луча, идущего вдоль главной оптической оси внутри линзы, равен Δ . Такой же длины геометрический путь луча, идущего параллельно главной оптической оси линзы на расстоянии r от нее, будет состоять из отрезка длиной x внутри линзы и отрезка длиной $\Delta - x = \frac{r^2}{2R_0}$ в воздухе. Оптический путь луча в этом случае будет равен

$$\frac{r^2}{2R_0} + n \left(\Delta - \frac{r^2}{2R_0} \right).$$

Потребуем равенства оптических путей лучей, прошедших линзу и плоскопараллельную пластинку, описанную в условии задачи:

$$\frac{r^2}{2R_0} + n \left(\Delta - \frac{r^2}{2R_0} \right) = Hn_0 \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right).$$

Левую часть равенства можно преобразовать к виду

$$\frac{(n-1)r_0^2}{2R_0} \left(\frac{2nR_0\Delta}{(n-1)r_0^2} - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right).$$

Чтобы равенство было верным при любых значениях r , должна быть верной система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(n-1)r_0^2}{2R_0} = Hn_0, \\ \frac{2nR_0\Delta}{(n-1)r_0^2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$n = \frac{Hn_0}{\Delta} \text{ и } R_0 = \frac{(Hn_0 - \Delta)r_0^2}{2Hn_0\Delta}.$$

Вспомним формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где d и f – расстояния от предмета и изображения до линзы, R_1 и R_2 – радиусы сферических поверхностей, ограничивающих линзу. В нашем случае $R_1 = \infty$, $R_2 = R_0$. Так как пучок лучей параллелен главной оптической оси линзы, то $d = \infty$, тогда $f = F$, где F – фокусное расстояние линзы. С учетом сделанных замечаний, формула тонкой линзы упрощается до вида

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R_0}, \text{ или } F = \frac{R_0}{n-1}.$$

После подстановки n и R_0 , получим

$$F = \frac{r_0}{2Hn_0}.$$

Распространяющийся параллельно главной оптической оси луч после преломления в линзе пройдет через фокус и с оптической осью составит малый угол

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{R}{F} = \frac{2HRn_0}{r_0^2} = 2^\circ.$$

И в третий раз мы получили тот же результат.

Задача 2. Оцените ошибку при фиксации углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\beta = 45^\circ$ над горизонтом. Показатель преломления воздуха у поверхности Земли равен $n = 1,0003$.

Решение. Положение звезды, видимой с Земли, отличается от истинного из-за преломления световых лучей атмосферой

(рис.5). Толщина атмосферы, т.е. высота, на которой практически нет воздуха и потому показатель преломления равен единице,

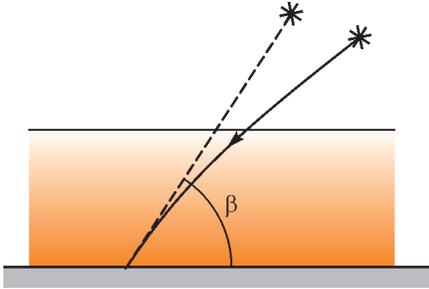


Рис. 5

составляет несколько десятков километров. Это гораздо меньше радиуса Земли ($R_3 = 6400$ км), поэтому атмосферу в условиях нашей задачи можно считать плоской. Ее показатель преломления плавно меняется от единицы в верхних слоях до значения $n > 1$ у поверхности Земли. Атмосферу можно рассматривать как набор бесконечно большого числа тонких пластинок с определенными показателями преломления. На границах раздела выполняются соотношения

$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3 \dots = n_N \sin \alpha_N$, поскольку угол преломления в каждом слое является углом падения для последующего слоя (рис.6). Иными словами, выполняется соотношение

$$n_i \sin \alpha_i = \text{const.}$$

Этот важный закон, его называют обобщенным законом Снеллиуса, указывает на то,

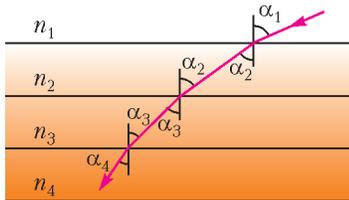


Рис. 6

что наличие промежуточных слоев не сказывается на связи между углом падения в первой среде и углом преломления в последней. Если луч доходит до последней среды, не испытав полного внутреннего отражения где-то на своем пути, то промежуточные слои можно не учитывать.

От звезды идут параллельные лучи, падающие на верхние слои атмосферы под углом

$\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α – истинное угловое положение звезды над горизонтом. А мы видим звезду под углом $\beta > \alpha$. По обобщенному закону Снеллиуса,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

$$\text{или } \cos \alpha = n \cos \beta.$$

Отнимем от обеих частей последнего равенства $\cos \beta$. Учтывая, что $n - 1 \ll 1$ и потому $\beta - \alpha \ll \beta$, получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= (\beta - \alpha) \sin \beta = (n - 1) \cos \beta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta - \alpha = (n - 1) \text{ctg} \beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'$$

– кажущаяся высота звезды над горизонтом больше истинной на одну угловую минуту.

Задача 3. Показатель преломления некоторой плоской среды имеет такую зависимость от координаты y (рис.7): при $y < 0$

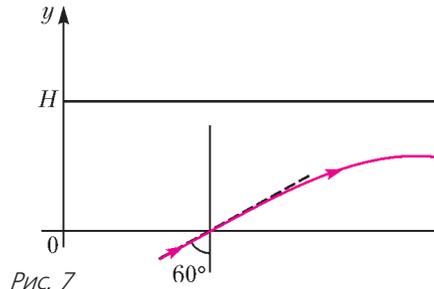


Рис. 7

$n = n_0$ ($n_0 = 1,4$); при $0 \leq y \leq H$ $n(y) = n_0 - ky$, где k – константа ($k = 0,2 \text{ м}^{-1}$, $H = 2 \text{ м}$); при $y > H$ $n = 1$. На плоскость $y = 0$ падает узкий пучок света под углом падения $\alpha = 60^\circ$. На какое максимальное расстояние y_{max} сможет проникнуть световой луч?

Решение. Свет распространяется в среде с уменьшающимся показателем преломления, поэтому угол, который он составляет с вертикалью, по мере подъема увеличивается. В данном случае среду можно разбить на очень тонкие пластинки таким образом, чтобы в пределах их толщины изменением показателя преломления можно было пренебречь.

(Продолжение см. на с. 45)

...когда из пушки вылетело ядро, я вскочил на него верхом и лихо понесся вперед.. Мимо меня пролетало встречное ядро.. Я пересел на него и, как ни в чем не бывало, помчался обратно.

Рудольф Эрих Распе. Приключения барона Мюнхгаузена

Как ни удивительны электрические явления неорганической материи, они не идут ни в какое сравнение с теми, которые связаны с деятельностью нервной системы и жизненными процессами.

Майкл Фарадей

Посредством глаза, а не глазом
Смотреть на мир умеет разум.

Уильям Блейк

...именно биология помогла физике открыть закон сохранения энергии; ведь Майер установил этот закон при изучении количества тепла, выделяемого и поглощаемого живым организмом.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам физика человека?

Из огромной сферы исследований на стыке биологии и физики выделяется важнейшая область — физика человека. После прошлых выпусков «Калейдоскопа», где шла речь о роли физики в изучении мира животных и мира растений, пора обратиться и к человеку. Ведь мы — такие же физические тела, как и все окружающие нас, и в нас так же обнаруживают себя механические, тепловые, электрические и оптические явления. Познавая себя, мы оказываемся в роли наблюдателей, исследователей, а порой ... и измерительных приборов. Так что физика не только вне, но и внутри нас!

Конечно, сейчас перед вами лишь горстка незамысловатых, кажущихся обыденными вопросов и фактов. Однако надеемся, что они дадут представление о кроющемся за ними необозримом массиве накопленных знаний и нерешенных проблем в том, что сегодня называют *наукой о жизни* — а значит, и о нас с вами.

Вопросы и задачи

1. Почему в летящем самолете, глядя в иллюминатор на безоблачное небо, мы не испытываем ощущения полета?

2. Купаясь в речке с илистым дном, можно заметить, что ноги больше вязнут в иле на мелких местах, чем на глубоких. Как это объяснить?

3. Отчего невозможна ситуация, описанная в эпиграфе бароном Мюнхгаузеном?

4. Почему пловцы, бросаясь в воду, выставляют вперед сложенные вместе вытянутые руки?

5. Отчего высоко в горах действие суставов человека нарушается: конечности плохо «слушаются», подвергаются вывихам?

6. Почему, когда мы пьем, касающаяся губ вода поднимается вверх?

7. Нормальная температура человека близка к 37°C . Отчего же нам не холодно при температуре воздуха 25°C и очень жарко при 37°C ?

8. Почему почти одним и тем же движением губ при выдохе можно согреть руки и охладить чай?

9. Отчего дети мерзнут сильнее взрослых?

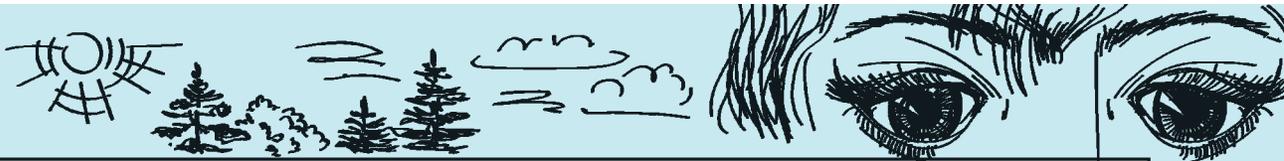
10. Почему нам не холодно, когда мы выходим из реки во время теплого летнего дождя?

11. Отчего при растягивании суставов трещат пальцы?

12. Если поднести руку к заряженной бумажной гильзе, подвешенной на шелковой нити, то гильза станет притягиваться к руке. Почему?

13. Елочная гирлянда спаяна из соединенных последовательно лампочек для карманного фонаря. При включении гирлянды в сеть на каждую из лампочек приходится напряжение 3 вольта. Отчего же опасно, выкрутив одну из лампочек, сунуть в патрон палец?

14. Когда прислушиваются к отдаленному шуму, то невольно раскрывают рот. Для чего?



15. Почему женский голос обычно выше мужского?

16. Если в театре встать за колонну, то актера на сцене не видно, а голос его слышен. Как это объяснить?

17. Диаметр зрачка человеческого глаза может меняться от 2 до 8 миллиметров. Отчего же максимальная острота зрения достигается при диаметре 3–4 миллиметра?

18. Как изменяется оптическая сила хрусталика глаза при переводе взгляда со страницы книги на облака за окном?

Микроопыт

Если вы слегка (!) нажмете пальцем на глаз, то увидите удвоенное изображение предметов. Чем это можно объяснить?

Любопытно, что...

...исследования последних лет показывают, что дети имеют врожденные представления о физике. Так, уже в возрасте двух месяцев они понимают, что предметы падают, если их не держат, и не исчезают, если их прячут, а в пять месяцев осознают, что вода и песок — не твердые вещества.

...в разных частях тела человека можно обнаружить действие простых механизмов. Например, все наши кости, имеющие некоторую свободу движения, являются рычагами — это кости конечностей, нижняя челюсть, фаланги пальцев и череп, опирающийся на первый позвонок.

...люди при ходьбе переставляют ноги с так называемой резонансной частотой, определяемой габаритами их тела, — это выгодно с точки зрения экономии сил. Поэтому если требуется идти быстрее, то прежде всего увеличивают ширину шага, а не темп ходьбы.

...при резком изменении давления воздуха способность человека слышать ухудшается. Это особенно заметно в самолете при наборе высоты или при снижении.

...на человеческий организм оказывают воздействие не воспринимаемые ухом звуки частотой ниже 16 герц — инфразвуки. Они могут входить в резонанс с внутренними органами, сильно смещая и даже деформируя их.

...заслуга Юлиуса Майера в открытии закона сохранения энергии заключалась в обнаружении разницы в цветах венозной крови

человека в северных и южных странах. На юге яркий алый ее цвет определялся избытком возвращаемого в вены кислорода, что свидетельствовало о меньшем потреблении энергии человеком.

...при тяжелой физической работе человек за день теряет до 10 литров пота. Если бы тело не охлаждалось за счет испарения, оно нагрелось бы до 100 °С!

...электрическую структуру нервного волокна в принципе угадал еще Луиджи Гальвани в XVII веке. Однако долгое время не было ясности с носителем информации, передаваемой от головного мозга к мышцам, и только в XX веке экспериментально было показано, что это — электрические сигналы.

...огромный вклад в изучение механизма зрения внес Леонардо да Винчи, производя анатомирование глаза. Ему удалось выявить его основные части, сравнить его работу с действием оптических приборов и обнаружить тот факт, что два глаза видят различные изображения тел.

...зрение человека ограничено очень узким диапазоном электромагнитного спектра. Однако если бы наш глаз чувствовал, к примеру, инфракрасное излучение, то ощущал бы огромные помехи — ведь тело человека само излучает в этой области интенсивнее, чем большинство окружающих нас предметов.

...вышедшая в 1944 году книга выдающегося физика-теоретика Эрвина Шредингера «Что такое жизнь с точки зрения физика?» послужила толчком к штурму проблемы передачи наследственной информации. Через несколько лет блестящим триумфом взаимодействия физики и биологии стала расшифровка основной «живой» молекулы — ДНК.

Что читать в «Кванте» о физике человека

(публикации последних лет)

1. «Физики в тумане» — 2010, №2, с.42;
2. «Зачем «близоруку щуриться?»» — 2014, №1, с.41;
3. «Вакуумный насос, наши легкие и камера «Мирабель» — 2014, №5/6, с.54;
4. «Физик в гостях у биолога» — 2015, Приложение №1;
5. «Буратино и его качели» — 2016, №3, с.27;
6. «Движение автомобилей и живых существ — и теорема о кинетической энергии» — 2017, №1, с.36.

Материал подготовил А.Леонович



Геометрическая олимпиада имени И.Ф.Шарыгина

Игорь Федорович Шарыгин был непревзойденным композитором геометрических задач. Его задачи регулярно появлялись в «Кванте» и в «Математике в школе», предлагались на Международных, Всесоюзных и Всероссийских, Московских, Соросовских олимпиадах и еще на десятке олимпиад рангом ниже. Он задал весьма жесткие стандарты при отборе задач на любую олимпиаду. Задача должна быть: а) новой, содержащей свежие идеи; б) нестандартной, разбивающей стереотипы; в) имеющей геометрическое, а не «счетное» решение; г) наконец, задача должна просто быть красивой! Для этого ее автор обязан иметь хороший геометрический вкус. Предпочтение всегда отдавалось задачам, пришедшим из высокой науки, а не специально придуманным.

После ухода Игоря Федоровича у его друзей, коллег и учеников родилась идея организовать олимпиаду его имени, которая (по мере сил) должна была соответствовать этим высоким стандартам. Олимпиада проходит ежегодно, начиная с 2005 года, и содержит только геометрические задачи. Однако в ней нет «однобокости», чего опасались скептики. Темы задач, кроме классической геометрии, включают комбинаторную геометрию, экстремальные задачи, задачи «из жизни», задачи с элементами математического анализа. Геометрия оказалась богаче и разнообразнее, чем нам пред-

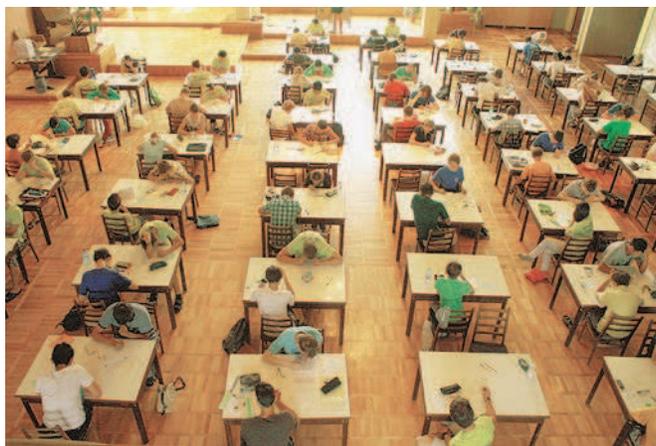
ставлялось ранее. Целью олимпиады является популяризация геометрии как отдельной науки, а также выявление геометрически одаренных ребят. Среди победителей часто встречаются дети, которые никогда до этого не добились больших успехов на других, общематематических олимпиадах. Форма проведения олимпиады также соответствует ее геометрической направленности. Первый тур – заочный, где школьникам дается несколько месяцев на неторопливое обдумывание сложных задач. Вариант заочного тура из 20–25 задач (для каждой задачи указываются классы, которым она предназначена) в начале года публикуется на интернет-портале www.geometry.ru. Варианты публикуются на русском и английском языках. Решения можно присылать до начала апреля.

Победителей заочного тура приглашают на финальный тур, проходящий в Дубне (Московская область) в конце июля. На финальный тур приглашаются также победители устных геометрических олимпиад, которые проводятся в ряде городов России. Всего в финальном туре принимают участие около 100 школьников 8–10 классов из более чем 10 стран. Финальный тур проводится в два дня. Каждый день участники решают по 4 задачи. Решение каждой задачи школьник должен защитить сам, объясняя его (устно) членам жюри. Во время финального тура для ребят и их родителей

(или учителей) организуются популярные лекции по геометрии, культурная и спортивная программы.

В жюри олимпиады входят профессиональные математики, школьные учителя, студенты – победители и призеры олимпиад прошлых лет из России, Украины, Казахстана, Болгарии, Ирана и других стран.

Условия и решения задач заочных и финальных туров можно найти на сайте www.geometry.ru. Материалы первых десяти олимпиад были опубликованы в 113 и 134 выпусках «Библиотечки Квант».





Ниже приводятся избранные задачи XI и XII Олимпиад, а также условия некоторых задач заочного тура XIII Олимпиады.

Задачи

1. Дан треугольник ABC . Две окружности, проходящие через вершину A , касаются стороны BC в точках B и C соответственно. Пусть D – вторая точка пересечения этих окружностей (A лежит ближе к BC , чем D). Известно, что $BC = 2BD$. Докажите, что $\angle DAB = 2\angle ADB$.

XI-3-8-9¹, В.Ясинский (Украина)

2. Дан неравносторонний остроугольный треугольник ABC . Точки A_1, A_2 симметричны основаниям внутренней и внешней биссектрис угла A относительно середины стороны BC . На отрезке A_1A_2 как на диаметре построена окружность α . Аналогично определяются окружности β и γ . Докажите, что эти три окружности пересекаются в двух точках.

XI-3-9-11, А.Мякишев

3. Дан тетраэдр $ABCD$. В грани ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1, O_2 , касающиеся ребра AB в точках T_1, T_2 . Плоскость π_{AB} проходит через середину отрезка T_1T_2 и перпендикулярна O_1O_2 . Аналогично определяются плоскости $\pi_{AC}, \pi_{BC}, \pi_{AD}, \pi_{BD}, \pi_{CD}$. Докажите, что все эти шесть плоскостей проходят через одну точку.

XI-3-11, М.Ягудин

4. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Точка M на основании AC такова, что $AM : MC = 1 : 2$, точка H – проекция точки C на BM . Найдите угол AHB .

XI-Ф-8, М.Евдокимов

5. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдется точка, принадлежащая не менее чем 15 кругам.

XI-Ф-9, М.Харитонов, А.Полянский

6. Докажите, что всякий треугольник площади 1 можно накрыть равнобедренным треугольником площади менее $\sqrt{2}$.

XI-Ф-10, А.Шаповалов

7. В треугольнике O, M, N – центр описанной окружности, центр тяжести и точка Нагеля соответственно. Докажите, что угол MON прямой тогда и только тогда, когда один из углов треугольника равен 60° .

XII-3-9-11, Л.Емельянов

8. На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка D . Через D и A проведены окружности ω_1 и ω_2 так, что BA касается ω_1 , CA касается ω_2 . Прямая BX – вторая касательная из точки B к окружности ω_1 , CY – вторая касательная из точки C к окружности ω_2 . Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается BC .

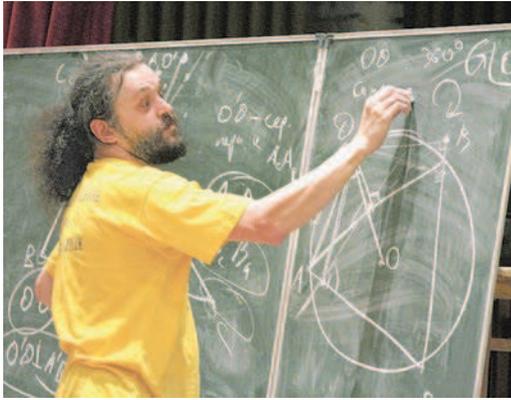
XII-3-9-11, Д.Хилько (Украина)

9. Дан тетраэдр, в который можно вписать сферу, касающуюся всех его ребер. Пусть отрезки касательных из вершин равны a, b, c и d . Всегда ли можно из этих четырех отрезков сложить какой-нибудь треугольник? (Не обязательно использовать для этого все отрезки. Разрешается образовывать сторону треугольника из двух отрезков.)

XII-3-10-11, Ф.Ивлев

10. В точке X сидит преступник, а трое полицейских, находящихся в точках A, B и C , блокируют его, т.е. точка X лежит внутри треугольника ABC . Новый полицейский сменяет одного из них следующим образом: он занимает точку, равноудаленную от всех троих полицейских, после чего один из троих уходит, и оставшаяся тройка по-прежнему блокирует преступника. Так происходит

¹ Здесь и далее римские цифры означают номер олимпиады, буква З или Ф – заочный или финальный тур соответственно, арабские цифры – классы, которым предназначалась задача.



каждый вечер. Может ли случиться, что через какое-то время полицейские вновь займут точки A , B и C (известно, что точка X ни разу не попала на сторону треугольника)?

XII-Ф-8, В.Протасов

11. В треугольнике ABC O – центр описанной окружности, I – центр вписанной. Прямая, проходящая через I и перпендикулярная OI , пересекает AB в точке X , а внешнюю биссектрису угла C – в точке Y . В каком отношении I делит отрезок XY ?

XII-Ф-9, В.Калашиников

12. Из высот остроугольного треугольника можно составить треугольник. Докажите, что из его биссектрис тоже можно составить треугольник.

XII-Ф-9, А.Заславский

13. Дьявол предлагает Человеку сыграть в следующую игру. Сначала Человек платит некоторую сумму s и называет 97 троек $\{i, j, k\}$, где i, j, k – натуральные числа, не превосходящие 100. Затем Дьявол рисует выпуклый 100-угольник $A_1A_2 \dots A_{100}$ с площадью, равной 100, и выплачивает Человеку выигрыш, равный сумме площадей 97 треугольников $A_iA_jA_k$. При каком наибольшем s Человеку выгодно согласиться?

XII-Ф-10, Н.Белухов (Болгария)

14. Окружность отсекает от прямоугольника $ABCD$ четыре прямоугольных треугольника, середины гипотенуз которых A_0 , B_0 , C_0 и D_0 соответственно. Докажите, что отрезки A_0C_0 и B_0D_0 равны.

XIII-З-8, Л.Штейнгарц

15. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BD . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABD лежит на прямой AC .

XIII-З-8-9, Е.Бакаев

16. На плоскости отмечено несколько точек, причем не все эти точки лежат на одной прямой. Вокруг каждого треугольника с вершинами в отмеченных точках описана окружность. Могут ли центры всех этих окружностей оказаться отмеченными точками?

XIII-З-8-11, А.Толесников

17. В треугольнике ABC провели чевианы AA' , BB' и CC' , которые пересекаются в точке P . Описанная окружность треугольника $PA'B'$ пересекает прямые AC и BC в точках M и N соответственно, а описанные окружности треугольников $PC'B'$ и $PA'C'$ повторно пересекают AC и BC соответственно в точках K и L . Проведем через середины отрезков MN и KL прямую s . Прямые a и b определяются аналогично. Докажите, что прямые a , b и s пересекаются в одной точке.

XIII-З-10-11, Д.Прокопенко

18. Даны прямоугольный треугольник ABC и две взаимно перпендикулярные прямые x и y , проходящие через вершину прямого угла A . Для точки X , движущейся по прямой x , определим y_b как образ прямой y при симметрии относительно XB , а y_c – как образ прямой y при симметрии относительно XC . Пусть y_b и y_c пересекаются в точке Y . Найдите геометрическое место точек Y (для несовпадающих y_b и y_c).

XIII-З-10-11, В.Лучкин, М.Фадин

19. На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли произвольную точку P и из нее опустили перпендикуляры PK , PL , PM , PN , PO на AB , BC , CD , DA , BD соответственно. Докажите, что расстояние от P до KN равно расстоянию от O до ML .

XIII-З-10-11, М.Панов

Публикацию подготовил А.Заславский

Заключительный этап XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников прошел в городе Калининграде с 24 по 30 апреля 2017 года. В олимпиаде приняли участие 364 юных математика из более 60 регионов России. Кроме того, традиционно в олимпиаде участвовали гости — команды Китая и Болгарии.

Туры олимпиады, а также церемонии открытия и закрытия проводились в здании очень большой, но в то же время уютной и гостеприимной Гимназии №40 имени Ю.А.Гагарина. На олимпиаде работала большая команда волонтеров, которые вместе с оргкомитетом организовали знакомство участников как с памятными местами Калининграда, так и с его живописными окрестностями.

Несмотря на то что задания олимпиады этого года были непростыми, в 9 и в 11 классах нашлись участники, сумевшие решить все задачи: девятиклассник *Петр Мишура* (Санкт-Петербург, ранее — Новосибирск), получивший специальный приз за абсолютный результат, и одиннадцатиклассник *Никита Добронравов* (Новосибирск), получивший специальный приз за решение самой сложной задачи олимпиады.

После туров олимпиады было проведено голосование, в котором участники указали наиболее понравившиеся задачи. В 9 классе тройка лучших по мнению школьников задач это задачи 8 (I место), 3 (II место), 6 (III место); в 10 классе — 7 (I место), 4 (II место), 3 (III место); в 11 классе — 4 (I место), 7 (II место), 3 (III место).

По окончании Всероссийской олимпиады была определена команда России на Международную математическую олимпиаду 2017 года, которая пройдет в Рио-де-Жанейро (Бразилия). В нашу сборную вошли пятеро выпускников: *Никита Добронравов* (Новосибирск),

Георгий Вепрев (Ярославль), *Тимофей Зайцев* (Москва), *Михаил Иванов* (Санкт-Петербург) и *Кирилл Тыщук* (Санкт-Петербург), а также десятиклассник *Вадим Ретинский* (Москва, ранее — город Ливны Орловской области).

Ниже публикуем условия задач и список победителей заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Условия задач

9 класс

1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B , если из B можно долететь в A , возможно с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

В.Дольников

2. См. задачу M2466 «Задачника «Кванта»».

3. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?

А.Шаповалов, С.Усов

4. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трех различных членов последовательности?

С.Берлов

5. На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших чем $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$. Для каждой пары этих чисел Сережа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он получил бы $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных.

С.Берлов

6. Верно ли, что для любых трех различных натуральных чисел a, b и c найдется квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3 ?

А.Храбров

7. Неравносторонний треугольник ABC , в котором $\angle ABC = 60^\circ$, вписан в окружность Ω . На биссектрисе угла BAC выбрана точка A' , а на биссектрисе угла ABC – точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E . Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

А.Кузнецов

8. См. задачу M2468 «Задачника «Кванта»».

10 класс

1. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведенных квадратных трехчленов и две непараллельные прямые l_1 и l_2 . Известно, что отрезки, отсекаемые графиками на l_1 , равны и отрезки, отсекаемые графиками на l_2 , также равны. Докажите, что графики трехчленов совпадают.

А.Голованов

2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O . Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведе-

на прямая l , параллельная прямой AC . Докажите, что прямая l касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

А.Кузнецов

3. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучки, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своем первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Д.Белов, И.Богданов, К.Кноп

4. См. задачу M2469 «Задачника «Кванта»».

5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n , увеличенные на 1. Найдите все такие числа n , для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m . (Собственными делителями натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.)

А.Храбров

6. См. задачу M2467, б) «Задачника «Кванта»».

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. Неравносторонний треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I . Точка B' , симметричная точке B относительно прямой OI , лежит внутри угла ABI . Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенные в точках B' и I , пересекаются на прямой AC .

А.Кузнецов

11 класс

1. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ – рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

Н.Агаханов

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет ее цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

И. Богданов, К. Кноп

5. См. задачу M2467, а «Задачника «Кванта».

6. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке – красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка ви-

дит другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках.

И. Богданов

7. Изначально на доске написано натуральное число N . В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a , кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться?

М. Фадин, К. Коваленко

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D , вписанных в треугольники DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_A A + \angle I_C I_A I_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_B A + \angle I_C I_B I_D = 180^\circ$.

А. Кузнецов

ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

Мишура Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Петров Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Гайдай-Турлов Иван – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

Коган Евгений – Москва, школа «Интеллектуал»,

Смирнов Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,

Мельников Игорь – Москва, лицей «Вторая школа»;

10 класс

Голованов Георгий – Ярославль, школа 33 им. К. Маркса с углубленным изучением математики,

Герасименко Артур – Москва, школа 1329,

Гребенников Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Федоров Даниил – Санкт-Петербург, лицей 533, образовательный комплекс «Малая Охта»,

Крымский Станислав – Санкт-Петербург, Академический лицей «ФТШ»;

11 класс

Добронравов Никита – Новосибирск, лицей 130 им. академика М. А. Лаврентьева,

Дмитриева Мария – Москва, лицей «Вторая школа»,

Иванов Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Вепрев Георгий – Рыбинск, лицей 2.

Публикацию подготовили

Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников, О. Подлипский

Заключительный этап I Всероссийской олимпиады школьников по физике

Заключительный этап Всероссийской физической олимпиады прошел с 7 по 13 апреля 2017 года в городе Казани (Татарстан) на базе Приволжского федерального университета. В нем приняли участие 273 школьника.

Что касается уровня подготовки школьников к олимпиаде по физике, то он остается стабильно высоким. Об этом свидетельствует тот факт, что при все возрастающем уровне сложности задач заключительного этапа большинство ребят с ними успешно справляется.

Однако стоит отметить, что в целом по стране наблюдается резкая дифференциация уровня подготовки учащихся по физике. Так, треть участников заключительного этапа — школьники Москвы. Достаточно широко представлены учащиеся из Санкт-Петербурга (15,4%), Мордовии (7,3%), Московской области (5,1%), Татарстана (4,4%), Вологодской области (3,3%), Свердловской, Новосибирской и Челябинской областей (по 2,5%). С другой стороны, учащиеся из 18 регионов не смогли набрать даже 50% от максимального числа баллов и на финале не были представлены вовсе, а учащиеся из 32 регионов Российской Федерации, хотя и набрали более 50% баллов от максимума, но не сумели преодолеть границу для прохода на финал и (в соответ-

ствии с положением об олимпиаде) направили на олимпиаду по одному представителю «по квоте». Для исправления этой ситуации Центральная предметно-методическая комиссия (ЦПМК) по физике совместно с фондом «Талант и успех» в марте 2017 года организовали в Образовательном центре «Сириус» подготовку к заключительному этапу олимпиады учащихся из «нетоповых» регионов (200 человек).

Ниже приводятся задачи теоретического тура и список победителей заключительного этапа олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Тше едешь...

В безветренную погоду на озере была проведена серия испытаний радиоуправляемой модели катера с бензиновым двигателем, в ходе которых выяснилось, что при скорости $v_1 = 5,00$ км/ч линейный расход топлива составляет $\lambda_1 = 20,0$ г/км, а при скорости $v_2 = 15,0$ км/ч расход равен $\lambda_2 = 40,0$ г/км. Запас топлива на борту модели $M = 100$ г.

• Выведите зависимость линейного расхода топлива λ от скорости v .



Подготовка эксперимента



Идет эксперимент

• Какое максимальное время τ_x может работать двигатель у неподвижной модели?

• При какой скорости модели v_0 линейный расход топлива минимален и каково его значение λ_0 ? Полученные результаты должны быть найдены с погрешностью, не превышающей 1%.

• На какое максимальное расстояние L_0 и за какое время τ_0 сможет уплыть модель?

• Какие значения τ_1 может принимать время прохождения моделью расстояния $L_1 = 3$ км?

Примечание. Считайте, что при работе двигателя массовый расход топлива μ_0 (г/с) линейно зависит от мощности силы сопротивления, а сила сопротивления пропорциональна скорости модели относительно воды. Модель движется равномерно и при любой скорости ее осадка не меняется.

М.Замятин

Задача 2. С дымком

При проведении аэрофотосъемки местности была получена фотография, на которой видны два шлейфа дыма от паровозов (рис. 1). Одной клетке на фотографии соответствует 50 м на местности. Известно, что один паровоз двигался равномерно по кольцевой ветке железной дороги, а другой с такой же скоростью двигался по прямой. Определите:

- направление скорости ветра;
- радиус R кольцевой железной дороги;
- отношение скорости паровоза v к скорости ветра u ;
- направление прямой железнодорожной ветки (выполните построения с помощью циркуля и линейки).

М.Замятин

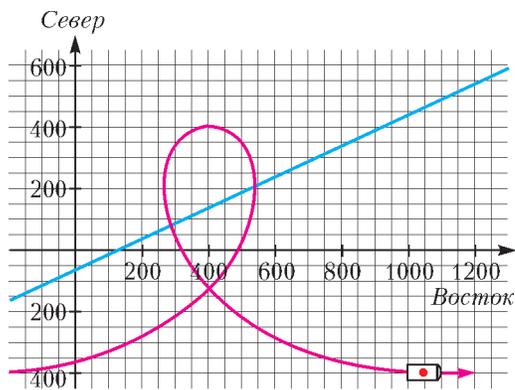


Рис. 1



Задумался

Задача 3. Нелинейная спираль

Сопротивление R спирали зависит от температуры по закону $R = R_0 + \alpha(t - t_0)$, где t — температура спирали, $R_0 = 10$ Ом, $\alpha = 40,0 \cdot 10^{-3}$ Ом/°C, $t_0 = 20$ °C. На спираль подается напряжение $U = 220$ В, и за время $\tau_1 = 100$ мкс она нагревается от t_0 до $t_1 = 80$ °C.

• До какой температуры t_2 нагреется система за время $\tau_2 = 334$ мкс от момента включения нагревателя?

• Определите теплоемкость C спирали.

А.Бычков

Задача 4. Два нелинейных элемента

Электрическая цепь состоит из двух одинаковых нелинейных элементов X , потенциометра, сопротивление между неподвижными контактами которого $R = 100$ Ом, и идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 10,0$ В (рис.2,а). Вольт-амперная характеристика элемента X приведена на рисунке 2,б. Определите:

• суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах при крайних положениях движка потенциометра;

• суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах при положении движка потенциометра на его середине;

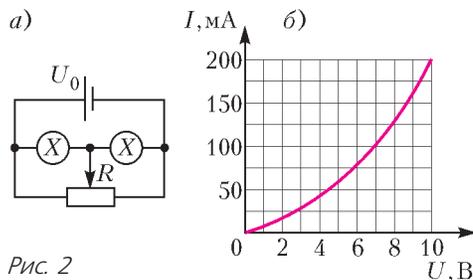


Рис. 2

• минимальную суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, и при каких положениях движка потенциометра эта мощность достигается (ответ обоснуйте);

• суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах при таком положении движка потенциометра, в котором сопротивление его левого плеча равно 25 Ом.

М. Карманов

Задача 5. Лазер в сосуде

Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиусом R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер,

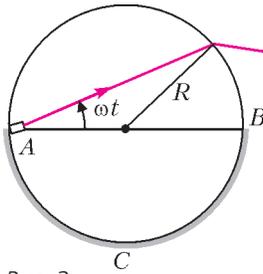


Рис. 3

размеры которого гораздо меньше R (рис.3; вид сверху). Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB , зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B . Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точку A . Показатель преломления воды $n = 4/3$.

• Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда?

• Чему будет равна скорость v «зайчика» на зачерненной поверхности цилиндра в момент времени $1,5\tau$ от начала его движения?

• Чему будет равна скорость v «зайчика» на зачерненной поверхности цилиндра в момент времени $1,5\tau$ от начала его движения?

Примечание. Вам может потребоваться закон Снеллиуса: $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$, где n_1 и n_2 – показатели преломления света в первой и второй среде, φ_1 и φ_2 – углы падения и преломления света.

А. Воронов

10 класс

Задача 1. На льдине

Рядом с мальчиком, стоящим на берегу реки, проплывает со скоростью v_0 тяжелая льдина прямоугольной формы с ровной горизонтальной поверхностью. Мальчик пус-

кает камень массой m скользить по поверхности льдины от ее края. Начальная скорость камня

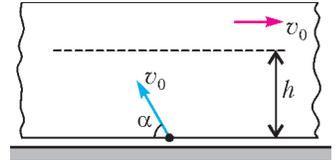


Рис. 4

равна скорости льдины и направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к берегу (рис. 4). Мальчик заметил, что когда камень оказался на расстоянии h от ближнего к нему края льдины, то скорость камня была минимальной.

• Какое количество теплоты Q выделится за время скольжения камня по поверхности льдины?

• На каком расстоянии s от мальчика, стоящего на берегу реки, будет находиться камень в момент окончания его скольжения по льдине?

А. Шеронов

Задача 2. Раздельный вылет

Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиусом $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость u . Шарики движутся по нижнему колену закрепленной стоящей на боку U-образной трубки (рис.5). Расстояние между осями колен $h = 1,00$ м, они сопряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал. Ускорение свободного падения равно g . При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой – из нижнего?

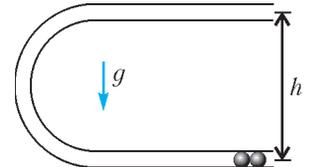


Рис. 5

• При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой – из нижнего?

И. Воробьев

Задача 3. В архиве лорда Кельвина

Однажды, разбирая архив лорда Кельвина, теоретик Баг обнаружил график (рис.6) и пояснительную записку, из которой следовало, что Кельвин изучал изохорные процессы. От времени чернила выцвели, и координатные оси с графика исчезли, но из текста следовало, что последней (верхней правой) точке графика соответствуют давление $p = 2000$ мм рт. ст. и температура 127°C . Баг выяснил, что в сосуде находились воздух и вода. Определите:

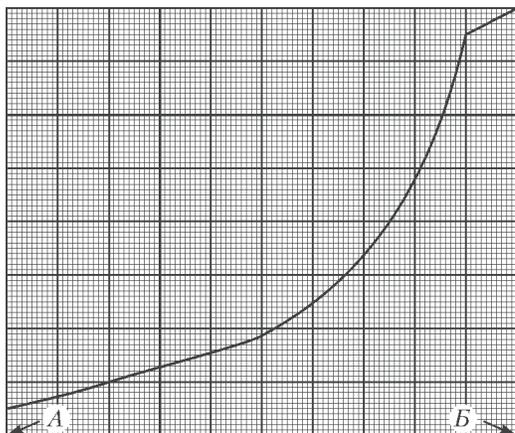


Рис. 6

- температуру и давление, соответствующие точкам А и В графика;
- температуру при которой испарилось 40% воды, находившейся в сосуде.

Примечание: 1 мм рт.ст. = 1 торр, 1 атм = 760 торр.

И.Юдин

Задача 4. Мостик с диодами и конденсаторами

Электрическая цепь (рис.7,а) составлена из трех одинаковых конденсаторов емкостью $C_1 = C_2 = C_3 = C$, двух одинаковых диодов, двух идеальных амперметров, ключа и регулируемого источника напряжения. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нем представлена на рисунке 7,б.

• Пусть напряжение источника постоянно и равно $3U_0$. Какое количество теплоты выделится в цепи при замыкании ключа K ?

• Пусть напряжение источника зависит от времени $U = U(t)$ так, как показано на рисунке 7,в. Ключ K постоянно замкнут. Определите зависимости от времени $I_1(t)$ и $I_2(t)$ показаний амперметров A_1 и A_2 .

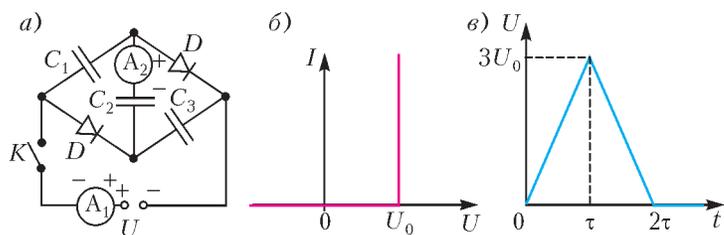


Рис. 7

Нарисуйте графики этих зависимостей с указанием значений характерных точек на графике.

Полярность источника и полярность подключения амперметров указаны на рисунке 7,а. Во всех случаях в начальный момент времени конденсаторы не заряжены.

А.Аполонский

Задача 5. Ом-м-м...

Электрическая цепь (рис.8,а) собрана из одинаковых омметров и резистора, сопротивление которого $R = 1,00$ кОм. Все омметры включены в цепь так, что у приборов с нечетным номером клемма, помеченная

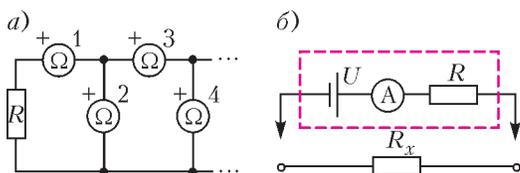


Рис. 8

знаком плюс, находится слева, а у четных – сверху. Определите показания первого, четвертого и тринадцатого омметров.

Указание. Считайте, что омметр состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения U , резистора сопротивлением $R = 1,00$ кОм и идеального амперметра (рис.8,б). При подключении к омметру исследуемого резистора показания амперметра, встроенного в омметр, автоматически пересчитываются (например, с помощью встроенного микропроцессора) так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления R_x исследуемого резистора, подключенного к омметру.

М.Замятнин

11 класс

Задача 1. «Слинки»

Пружину «Слинки» (Slinky) удерживают за верхний виток так, что ее нижний виток находится на высоте $h = 100$ см над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 150$ см (рис. 9). Пружину отпускают. Через какое время τ она упадет на пол? В нерастянутом состоянии вит-



Рис. 9

ки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться целиком. Ответ дайте с точностью 0,02 с.

А.Гуденко

Задача 2. Я тучка, тучка, тучка...

В приближении адиабатической атмосферы оцените:

- высоту H атмосферы Земли;
- высоту h_0 нижней кромки облаков.

Температура на поверхности Земли $t_0 = 27$ °С, а относительная влажность воздуха $\phi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$.

Указание. Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии. Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице.

$t, ^\circ\text{C}$	6	8	10	12	14	16	18
$p_{\text{н}}, \text{мм рт.ст.}$	7,01	8,05	9,21	10,5	12,0	13,6	15,5
$t, ^\circ\text{C}$	20	22	24	26	28	30	
$p_{\text{н}}, \text{мм рт.ст.}$	17,5	19,8	22,4	25,2	28,4	31,8	

А.Гуденко, А.Шеронов

Задача 3. Бусинка

Заряд Q равномерно распределен по поверхности диэлектрической тонкостенной трубы радиусом R и длиной H . Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноотстоящего от торцов) сечения. Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считайте известным.

В.Плис

Задача 4. И снова МГД

Модель морского магнитогидродинамического (МГД) двигателя, установленного под

днищем катера, представляет собой прямоугольный канал со сторонами $a = 1,0$ м, $l = 2,0$ м, $h = 10$ см (рис. 10). К хорошо проводящим плоскостям hl подключен идеальный источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл пронизывает канал перпендикулярно непроводящим плоскостям al . При движении катера с таким двигателем с постоянной скоростью u и скоростью вытекающей относительно катера воды равна $v = 10$ м/с. Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1,0 \cdot 10^{-2}$ Ом · м, ее плотность $\rho_{\text{в}} = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³. Найдите скорость движения катера, силу тяги, полезную мощность и КПД двигателя. Электрический ток течет вдоль сторон a .

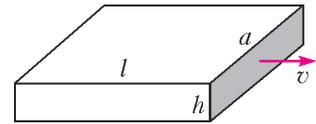


Рис. 10

М.Осин

Задача 5. Лунное затмение

Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли) $2\delta = 0,52^\circ$. Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землей оказывается конечной (рис.11).

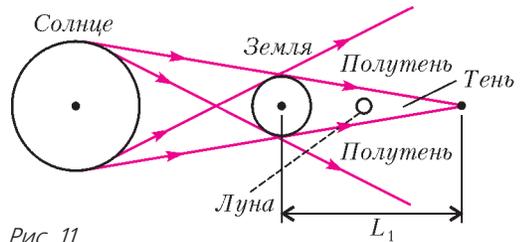


Рис. 11

• Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии L_1 от Земли еще будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.

• В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведенную высоту $h = 8$ км и средний показатель преломления $n = 1,00028$. Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, определите, на каком максимальном рассто-

янии L_2 теперь будет наблюдаться полная тень. Какая часть площади лунного диска окажется затенена?

Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, угловой

диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца 2δ , период обращения Луны вокруг Земли $T_0 = 27,3$ сут.

В.Слободянин

ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

Светлана Баранова – Москва,
Елисей Судаков – Вологодская область,
Ирина Ляликова – Курская область,
Антон Белецкий – Ростовская область,
Андрей Серженко – Москва,
Владислав Поляков – Санкт-Петербург,
Михаил Казаков – Республика Мордовия;

10 класс

Анастасия Осипова – Нижегородская область,
Алексей Шишкин – Республика Мордовия,
Станислав Цапаев – Республика Мордовия,

Даниил Павлов – Санкт-Петербург,
Григорий Бобков – Московская область,
Марат Абдрахманов – Челябинская область,
Павел Белоусов – Архангельская область,
Дмитрий Мельников – Москва;

11 класс

Василий Югов – Пермский край,
Захар Яковлев – Санкт-Петербург,
Дмитрий Плотников – Москва,
Станислав Крымский – Санкт-Петербург,
Михаил Олифиренко – Свердловская область.

Публикацию подготовил В.Слободянин

Когда показатель преломления меняется

(Начало см. на с. 28)

Снова воспользуемся обобщенным законом Снеллиуса:

$$n_0 \sin \alpha = (n_0 - ky) \sin \beta.$$

Так как на максимальном расстоянии луч движется горизонтально, т.е. $\beta = 90^\circ$, то

$$y_{\max} = \frac{n_0}{k} (1 - \sin \alpha) = 0,94.$$

Задача 4. Цилиндр изготовлен из прозрачного материала (рис. 8), но показатель преломления этого материала медленно уменьшается с увеличением расстояния до его оси по закону $n(r) = n_0(1 - \gamma r)$, где n_0 и γ – известные постоянные величины. На каком расстоянии от оси цилиндра надо произвести вспышку света, чтобы некоторые из световых лучей мог-

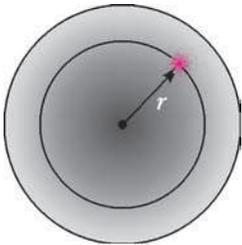


Рис. 8

ли распространяться по окружности с центром на оси цилиндра?

Решение. Для того чтобы пучок лучей мог распространяться по окружности, должно выполняться условие равенства времен распространения крайних лучей пучка.

Пусть толщина пучка равна $2\Delta r$. Оптический путь крайнего верхнего луча пучка, распространяющегося по окружности радиусом $r + \Delta r$, равен

$$l_1 = 2\pi(r + \Delta r)n_0(1 - \gamma(r + \Delta r)),$$

а нижнего –

$$l_2 = 2\pi(r - \Delta r)n_0(1 - \gamma(r - \Delta r)).$$

С учетом того что времена прохождения верхнего и нижнего лучей пучка должны совпадать, получаем равенство

$$\frac{2\pi(r + \Delta r)n_0(1 - \gamma(r + \Delta r))}{c} = \frac{2\pi(r - \Delta r)n_0(1 - \gamma(r - \Delta r))}{c}.$$

Несложные алгебраические преобразования дают ответ:

$$r = \frac{1}{2\gamma}.$$

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Ф И З И К А

ОЛИМПИАДА-2017

ПЕРВЫЙ ТУР

Вариант 1

1. Диск катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости так, что его центр

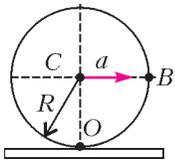


Рис. 1

С движется с постоянным ускорением $a = 2,5 \text{ см/с}^2$. Через время $t = 2 \text{ с}$ после начала движения его положение соответствует рисунку 1. Найдите модуль скорости точки В диска относительно горизонтальной плоскости.

2. На одной чаше весов стоит сосуд с водой, а на другой – штатив, на котором

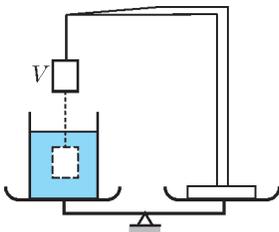


Рис. 2

подвешен металлический груз объемом $V = 1 \text{ дм}^3$ (рис. 2). Чашы весов уравновешены. Нить, на которой подвешен груз, удлиняют так, что подвешенный на ней груз оказывается целиком погруженным в воду. Равновесие весов при этом нарушается. На какую чашу весов и груз какой массы нужно положить, чтобы восстановить равновесие весов? Массой нити пренебречь. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

3. На гладкую горизонтальную поверхность поставили вертикально гантельку длиной l , состоящую из невесомого жесткого стержня с двумя маленькими шариками на концах, массы которых $2m$ и m (рис.3). Гантельку отпускают без начальной скорости, и она

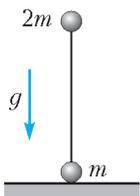


Рис. 3

начинает падать. Найдите скорость, с которой верхний шарик коснется горизонтальной поверхности, и величину перемещения нижнего шарика к этому моменту времени. Силами трения пренебречь.

4. Два бруска движутся со скоростью v по горизонтальной гладкой поверхности и налетают на упор, соединенный с вертикальной стенкой пружиной жесткостью k (рис.4). Определите минимальное значение

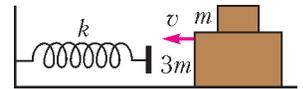


Рис. 4

коэффициента трения между брусками, при котором верхний брусок не будет проскальзывать относительно нижнего в процессе сжатия пружины. Масса упора и пружины пренебречь.

5. Теплоизолированный баллон разделен теплоизолирующей перегородкой с клапаном на две части. При закрытом клапане в одной части баллона объемом $V_1 = 1 \text{ л}$ находится гелий при давлении $p_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T_1 = 300 \text{ К}$, а в другой части баллона объемом $V_2 = 2 \text{ л}$ находится неон при давлении $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T_2 = 600 \text{ К}$. Найдите температуру газа, которая установится в баллоне после открытия клапана.

6. Рабочим телом тепловой машины является один моль одноатомного идеального газа. Цикл машины состоит из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1 (рис.5). КПД цикла $\eta = 0,26$, а разность максимальной и минимальной температур газа в цикле $\Delta T = 600 \text{ К}$. Найдите количество теплоты, подводимое к машине за один цикл.

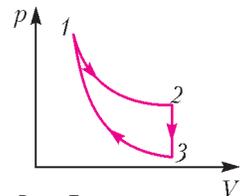


Рис. 5

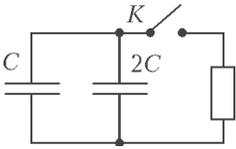


Рис. 6

7. В электрической схеме, показанной на рисунке 6, емкости плоских конденсаторов равны C и $2C$. Расстояние между обкладками конденсатора емкостью $2C$ равно d , а максимальная сила притяжения между его обкладками равна F . Определите количество теплоты, выделившееся на сопротивлении после замыкания ключа K .

8. Найдите ток через перемычку ab в схеме, представленной на рисунке 7. Сопротивлениями перемычки, проводящих проводов и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

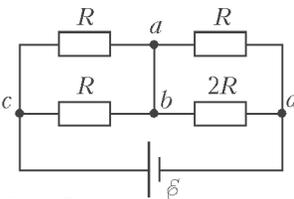


Рис. 7

9. Из проволоки общим сопротивлением R сделан плоский замкнутый контур, состоящий из двух квадратов со сторонами a и $2a$ (рис.8). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости контура. Найдите заряд, который протечет через поперечное сечение провода при повороте контура вокруг оси симметрии OO_1 на 180° . Между пересекающимися на рисунке проводами электрический контакт отсутствует.

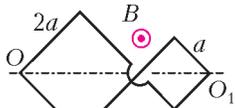


Рис. 8

10. Цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью ρ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO_1 (рис.9). Внутри сосуда к оси OO_1 в точке A прикреплен тонкий горизонтальный

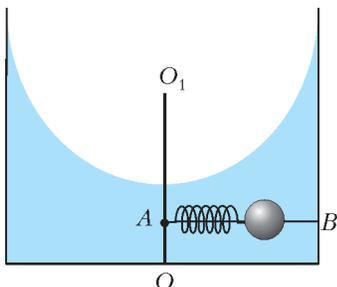


Рис. 9

стержень AB , по которому без трения может скользить муфта в виде шара радиусом r . Шар связан с концом стержня в точке A пружиной жесткостью k , длина которой в нерастянутом состоянии L_0 . Определите расстояние центра шара от оси вращения, если плотность материала шара в четыре раза больше плотности жидкости.

Вариант 2

1. Под каким углом α к горизонту следует бросить камень со скоростью $v = 14$ м/с, чтобы дальность его полета L была равна 10 м? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Гибкий однородный трос подвешен за концы к горизонтальному потолку так, что расстояние между точками подвеса меньше длины троса (рис.10). Натяжение троса в нижней точке A равно T , а в точках подвеса B и C равно T_0 . Найдите массу троса.

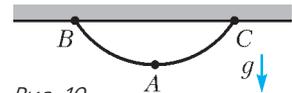


Рис. 10

3. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами m и $2m$, соединенные ненапряженной пружиной (рис.11). Какую наименьшую постоянную силу F , направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой $2m$, чтобы сдвинулся и другой брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ .

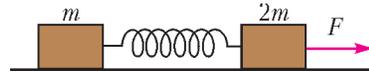


Рис. 11

4. На гладкой горизонтальной поверхности вдоль одной прямой на некотором расстоянии друг от друга расположены четыре равных по объему шарика, имеющих массы $m, 2m, m, 4m$ (рис.12). По этой же прямой



Рис. 12

движется шарик массой m такого же объема, имеющий скорость v_0 , и ударяется в крайний шарик. Считая соударения шариков абсолютно неупругими, найдите количество теплоты, выделившееся после прекращения соударений шариков.

5. Цикл тепловой машины, рабочим телом

которой является одноатомный идеальный газ, состоит из двух изобар и двух адиабат. Работа газа при изобарическом расширении равна A_1 ; работа, затраченная на изобарическое сжатие, равна $A_2 = 0,75A_1$. Определите КПД цикла.

6. Теплоизолированная полость соединена с двумя сосудами, содержащими газообразный гелий, одинаковыми отверстиями (рис.13), размеры которых малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа.

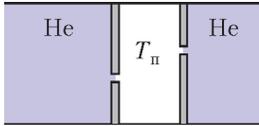


Рис. 13

Давление гелия в этих сосудах поддерживается равным p , а температура равна T в одном сосуде и $4T$ в другом. Найдите установившуюся температуру внутри полости.

7. Три положительных точечных заряда $+q$, $+q$ и $+2q$ расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a (рис.14,а). Найдите работу сил электрического поля, которую они совершат, если заряды расположить вдоль прямой, как показано на рисунке 14,б.

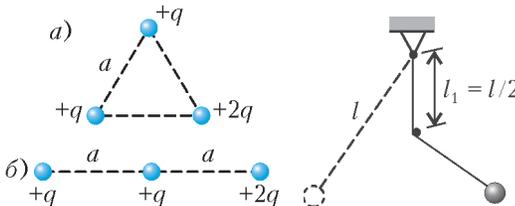


Рис. 14

Рис. 15

8. Математический маятник длиной l совершает малые колебания вблизи вертикальной стенки (рис.15). Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l_1 = l/2$ от нее в стенку забит гвоздь. Найдите период колебаний такого маятника.

9. Найдите разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на

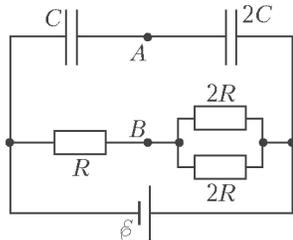


Рис. 16

рисунке 16. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

10. Тонкое проволочное кольцо площадью $S = 100 \text{ см}^2$, имеющее сопротивление $R = 0,01 \text{ Ом}$, помещено в однородное магнитное поле. Изменение проекции B_x вектора магнитной индукции этого поля на ось x , перпендикулярную плоскости кольца, в зависимости от времени представлено на графике (рис.17). Какое количество теплоты

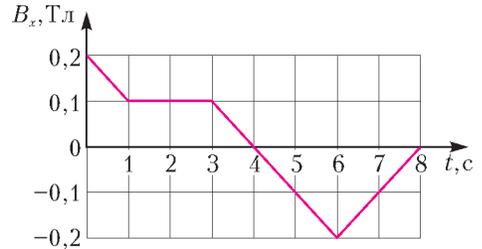


Рис. 17

выделится в кольце за интервал времени от $t = 0$ до $t = 8 \text{ с}$? Индуктивностью кольца пренебречь.

Вариант 3

1. Тело массой $m = 1 \text{ кг}$ движется по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м). Определите величину импульса тела в момент времени $t = 1 \text{ с}$.

2. Однородный стержень массой m закреплен в точке A с помощью шарнира и удерживается за второй конец под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с помощью невесомой нерастяжимой нити, расположенной под таким же углом α к вертикали, как показано на рисунке 18. Найдите силу натяжения нити.

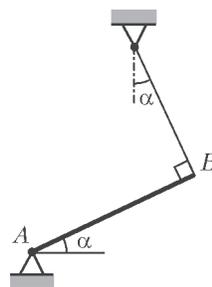


Рис. 18

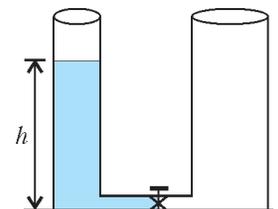


Рис. 19

3. Два цилиндрических сосуда, имеющих площади оснований S и $2S$, соединены снизу тонкой трубкой с краном (рис.19). Первоначально сосуд с площадью сечения S заполнен до высоты h жидкостью, масса которой m .

Какое количество теплоты выделится после открытия крана и перехода системы в положение равновесия?

4. Два одинаковых шара, массой m каждый, лежат на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, соприкасаясь друг с другом (рис.20; вид сверху). Третий шар таких



Рис. 20

же размеров, скользящий по той же плоскости, ударяется одновременно в оба шара. Считая удар абсолютно упругим, найдите массу налетающего шара, если после удара он останавливается.

5. В озеро, имеющее среднюю глубину $h = 10$ м и площадь поверхности $S = 20$ км², бросили кристаллик поваренной соли массой $m = 0,01$ г. Сколько молекул этой соли оказалось бы в наперстке воды объемом $v = 2$ см³, зачерпнутой из озера, если полагать, что соль, растворившись, равномерно распределилась во всем объеме воды?

6. Найдите количество теплоты, которое сообщено идеально одноатомному газу в процессе 1-2-3-4 (рис.21), если $V_1 = 1$ л, $V_2 = 2$ л, $p_1 = 9 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 9 \cdot 10^6$ Па.

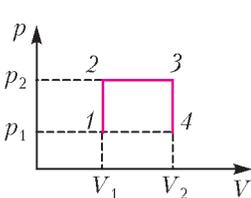


Рис. 21

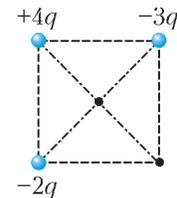


Рис. 22

точечные заряды $-2q, +4q, -3q$ (рис.22). Определите, какой заряд нужно поместить в четвертую вершину квадрата, чтобы в центре квадрата потенциал электрического поля равнялся нулю.

8. В точках A, C, D расположены неподвижные точечные заряды $+2q, +q, -6q$, как показано на рисунке 23. Определите работу сил поля при перемещении заряда $+q$

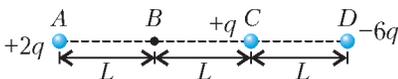


Рис. 23

из бесконечности, где потенциал электрического поля принимается равным нулю, в точку B .

9. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 24, установившееся напряжение на конденсаторе равно $U = 20$ В. Считая параметры элементов схемы известными, определите величину ЭДС источника тока.

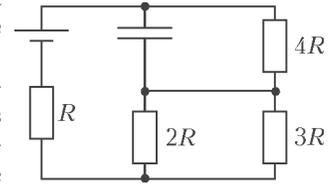


Рис. 24

Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

10. Два параллельных идеально проводящих рельса расположены на расстоянии L друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией B (рис.25). По рельсам в противоположные стороны скользят две перемычки, скорости которых v и $2v$. Сопротивления перемычек R и $2R$. Найдите величину индукционного тока в перемычках.

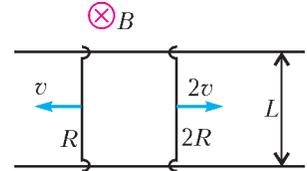


Рис. 25

ВТОРОЙ ТУР

Вариант 1

1. Два тела, находящиеся на одной высоте, брошены одновременно с одинаковыми начальными скоростями $v_0 = 5$ м/с: одно вертикально вверх, а другое вертикально вниз. Определите разницу во времени движения тел до земли. Принять $g = 10$ м/с².

2. Бруски массами $2m$ и m соединены невесомой пружиной и прикреплены легкой нитью к упору A , закрепленному на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ (рис.26). Найдите силу натяжения нити, если система покоится. Найдите ускорение (направление и модуль) бруска массой $2m$ сразу после пережигания нити.

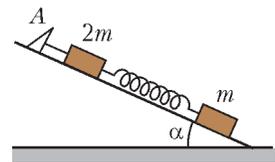


Рис. 26

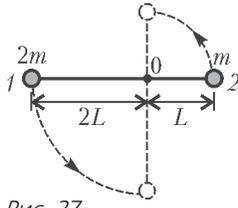


Рис. 27

3. Вокруг горизонтальной оси O может свободно вращаться легкий рычаг, плечи которого равны $2L$ и L . На концах рычага укреплены грузы, массы которых $2m$ и m . Первоначально рычаг удерживается в горизонтальном положении, как показано на рисунке 27. Затем рычаг отпускают без начальной скорости. Определите линейные скорости грузов в момент прохождения стержнем положения равновесия.

4. На p - V диаграмме (рис.28) изображен цикл $1-2-3-1$, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите отношение количества теплоты Q_{12} , полученного газом в процессе $1-2$, к количеству теплоты Q_{23} , полученному газом в процессе $2-3$.

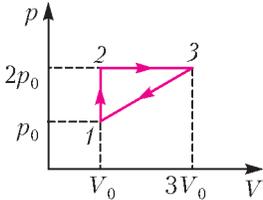


Рис. 28

5. Теплоизолированный сосуд разделен пористой неподвижной перегородкой на две части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $\nu_{\text{He}} = 2$ моль гелия, а в другой – $\nu_{\text{Ar}} = 1$ моль аргона. Температура гелия $T_{\text{He}} = 300$ К, а температура аргона $T_{\text{Ar}} = 600$ К. Считая аргон и гелий идеальными газами, определите температуру гелия после установления равновесия в системе.

6. Две бусинки, имеющие заряды $+2q$ и $+q$ и одинаковые массы m , удерживаются на длинном горизонтальном изолирующем стержне на расстоянии L_0 друг от друга (рис.29).

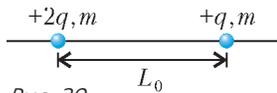


Рис. 29

Бусинку, имеющую заряд $+q$, отпускают, и она начинает скользить по стержню. Коэффициент трения скольжения равен μ . Найдите максимальное расстояние между бусинками.

7. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью \vec{v} вдоль оси

x в стационарном однородном электромагнитном поле (рис.30). Определите модуль и направление вектора напряженности электрического поля \vec{E} , если вектор магнитной индукции \vec{B} направлен вдоль оси y .

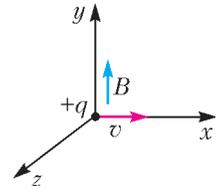


Рис. 30

8. Оптическая система состоит из рассеивающей L_1 и собирающей L_2 линз с общей главной оптической осью (рис.31). Главные фокусы рассеивающей

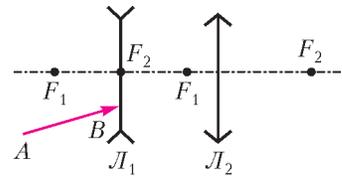


Рис. 31

линзы обозначены F_1 , а собирающей линзы – F_2 . Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

9. Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рисунке 32? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

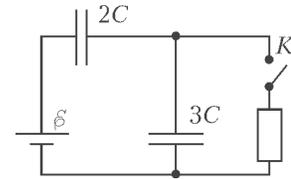


Рис. 32

10. Вертикальная часть тонкой открытой с обоих концов L-образной трубки заполнена на высоту l жидкостью и удерживается с помощью клапана K (рис. 33). Найдите, через какое время τ после открытия клапана вся жидкость вытечет из вертикальной части трубки. Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет все сечение трубки.

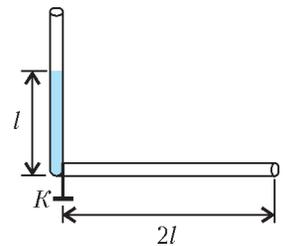


Рис. 33

Вариант 2

1. За время $t = 40$ с тело прошло путь $s = 500$ м, причем его скорость увеличилась в $n = 5$ раз. Считая движение равноускоренным с начальной скоростью, определите величину ускорения тела.

2. Два мальчика стоят на коньках на льду на расстоянии L друг от друга. Один из них, имеющий массу M , бросает мяч массой m , второй ловит его налету. Максимальная высота, которой достигает мяч при полете над точкой бросания, равна h , коэффициент трения между коньками и льдом μ . Определите расстояние, на которое откатится мальчик, бросивший мяч.

3. Небольшая шайба массой m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой $h = 5$ м и попадает на доску массой $M = 3m$, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 34. Вследствие трения



Рис. 34

между шайбой и доской шайба останавливается через время $\Delta t = 2,5$ с, не достигнув края доски. Определите коэффициент трения между шайбой и доской. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. Плотность смеси водорода и аргона при нормальных условиях равна $\rho = 0,89$ г/л. Найдите концентрацию атомов водорода в смеси.

5. На p - V диаграмме изображен цикл 1-2-3-1, проводимый с одноатомным идеальным газом (рис. 35). Определите коэффициент полезного действия этого цикла.

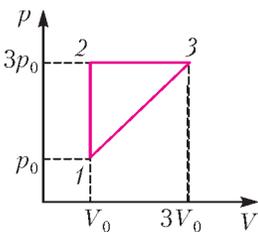


Рис. 35

Определите коэффициент полезного действия этого цикла.

6. Проводящий шар радиусом $R = 10$ см заряжен так, что потенциал электрического поля в шаре на расстоянии $r = 3$ см от центра

равен $\phi = 10$ В. Определите поверхностную плотность заряда, равномерно распределенного на поверхности шара.

7. Протон и электрон, двигаясь с одинаковыми скоростями, попадают в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны вектору их скорости. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?

8. Постройте все изображения светящейся точки A в двух взаимно перпендикулярных плоских зеркалах (рис.36).

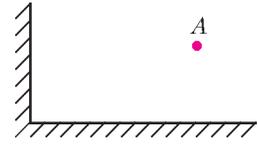


Рис. 36

9. В схеме, приведенной на рисунке 37, найдите энергию конденсатора. Параметры

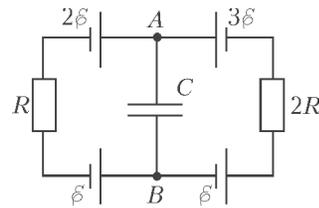


Рис. 37

элементов схемы, изображенных на рисунке, считать известными. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

10. На горизонтальной поверхности расположены три одинаковых одноименно заряженных шарика, заряд каждого из которых q , а масса m (рис.38). Шарики соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной L каждая так, что нити образуют равносторонний треугольник. Нить между шариками 1 и 2 пережигают. Пренебрегая гравитационным взаимодействием между шариками и силами трения, найдите максимальную скорость шарика 3.

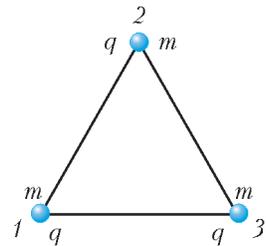


Рис. 38

Публикацию подготовил Ю.Струков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №6)

1. Антон Борисов, Вася Васильев, Гриша Григорьев, Боря Антонов.

Посмотрим, как ребята сидели за столом во второй раз. Напротив Антона – не Антонов (так как они уже сидели напротив ранее), не Борисов (так как напротив него сидит Гриша) и не Васильев (так как он сидит рядом с Антоном), значит, это Григорьев. Антон не может быть Антоновым (они сидели напротив), рядом с ним сидит Васильев, а напротив него сидит Григорьев, значит, Антон – Борисов. Напротив Борисова – Гриша, значит, Гриша – Григорьев. Васильев и Боря – разные люди, и рядом с Васильевым сидят Антон и Гриша, значит, Васильев – Вася. Тогда Антонов – Боря.

2. Подходят все имена, начинающиеся на «Ми» и оканчивающиеся на «я», например Митя.

3. Пронумеруем места, на которых написаны знаки. Вите надо сделать так, чтобы на четных местах остались знаки одного типа, а на нечетных – другого. Посмотрим на пятнадцать нечетных мест, каких-то знаков там больше, допустим плюсов, т.е. их минимум 8. Тогда на четных местах минусов больше, т.е. минимум 8. Если Витя исправит знаки так, чтобы на нечетных местах стояли плюсы, а на четных минусы, то ему придется исправить не больше $7 + 7 = 14$ знаков.

4. Если мы найдем гирьки с суммарной массой 6 граммов, то добьемся цели.

Если мы найдем 4 гирьки с суммарной массой 4 или 8 граммов, то пойдем, какая гирька сколько весит, после чего тоже легко добьемся цели.

Взвесим 4 гирьки, их масса может быть от 4 до 8 граммов. Случаи 4, 6 и 8 граммов разобраны выше. Если они весят 5 граммов, то оставшиеся 4 гирьки весят 7 граммов и наоборот. Масса в 5 граммов может быть набрана только одним способом: 1, 1, 1 и 2 грамма, назовем эти гирьки группой А, и в 7 граммов – тоже одним способом: 1, 2, 2, 2 грамма – группа Б.

Вторым действием взвесим 2 гирьки из группы А и 2 гирьки из группы Б. Случаи, когда их масса 4, 6 или 8 граммов, разобраны выше.

Если их масса 5 граммов, то из группы А попались гирьки 1 и 1 граммов, из группы Б – 1 и 2 грамма. Значит, можно взять эти гирьки группы А и не участвовавшие во взвешивании гирьки группы Б. Их суммарная масса – 6 граммов.

Случай, когда их масса 7 граммов, разбирается аналогично.

КАКОЙ БЫВАЕТ КОЛЕЯ

При движении колеса по колее переменной ширины след от каждого рельса представляет собой винтовую линию на поверхности конуса.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Нет тела отсчета, относительно которого происходит движение.

2. На глубоких местах в большей степени проявляется действие выталкивающей силы, ослабляющей давление на дно.

3. При пересадке с ядра на ядро барон испытал бы огромное ускорение. Организм человека не в состоянии перенести перегрузки, вызываемые столь быстрым изменением скорости.

4. Для лучшей обтекаемости тела и уменьшения силы сопротивления.

5. С уменьшением атмосферного давления при подъеме в горы суставы менее плотно прилегают друг к другу, из-за чего действие конечностей «разлаживается» и становятся возможными различные травмы.

6. На поверхность воды действует атмосферное давление, мы же в полости рта давление воздуха уменьшаем. За счет разности давлений вода и поднимается вверх.

7. При температуре воздуха, близкой к 37°C , замедляется процесс передачи воздуху непрерывно выделяемого человеком тепла, и в теле образуется избыточная внутренняя энергия.

8. Скорость воздуха, выдуваемого тонкой струйкой, велика, и давление в струе меньше атмосферного. К поверхности чая «подается» захватываемый струей холодный воздух, не насыщенный водяными парами, что способствует испарению и охлаждению жидкости. В другом случае выдыхается теплый, насыщенный парами воздух, скорость которого мала. Он-то и греет руки.

9. При уменьшении размеров тела возрастает отношение площади его поверхности к объему. Теплоотдача, определяемая именно площадью поверхности, растет и потеря тепла происходит интенсивнее.

10. Во время дождя вода не испаряется с нашей кожи и не охлаждает нас.

11. При растягивании суставов падает давление в суставной сумке, и находящаяся там жидкость как бы закипает. В ней появляются пузырьки газа, которые при сильном растяжении с треском лопаются.

12. В поле заряженной гильзы кисть руки, вследствие электростатической индукции, электризу-

ется, и разноименные заряды начинают притягиваться друг к другу.

13. Сопротивление пальца – несколько тысяч омов – во много раз больше сопротивления всей гирлянды в несколько сотен омов. На палец, если его сунуть в патрон, придется практически все напряжение сети.

14. Полость рта служит резонатором для звуков.

15. Мужской голос обычно ниже женского, так как у мужчины голосовые связки толще, длиннее и вибрируют с более низкой частотой.

16. Размеры колонны сравнимы с длиной звуковой волны, поэтому волны огибают колонну (дифрагируют). Играет роль и отражение звука от стен и потолка. В отличие от звуковых, световые волны слишком короткие, чтобы в этом случае наблюдалась их дифракция.

17. При большом диаметре зрачка сказывается сферическая aberrация глаза – широкий световой пучок не фокусируется в одной точке. При малом диаметре зрачка изображение искажается за счет дифракции.

18. Расслабление окружающих хрусталик мышц приводит к его вытягиванию, т.е. уменьшению кривизны его поверхности и соответствующему уменьшению оптической силы. Расчет дает изменение приблизительно на 4 диоптрии.

Микроопыт

В двух глазах получаются два изображения, которые воспринимаются мозгом как одно лишь тогда, когда они лежат в идентичных точках сетчаток глаз.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ И.Ф.ШАРЫГИНА

1. По теореме о касательной и секущей прямая AD пересекает отрезок BC в его середине M (рис.1). Тогда из условия получаем, что $BM = BD$ и $\angle ADB = \angle DMB$. С другой стороны, $\angle ADB = \angle ABM$ как угол между хордой и касательной. По теореме о внешнем угле, $\angle DAB = \angle ABM + \angle AMB = 2\angle ADB$.

2. Известно, что окружности, противоположными точками которых являются основания внешней и внутренней биссектрис, перпендикулярны

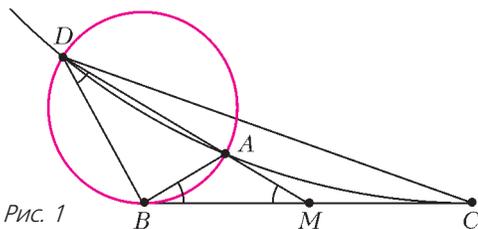


Рис. 1

описанной окружности треугольника. Значит, окружности α, β, γ , симметричные им относительно диаметров, также перпендикулярны описанной окружности, т.е. степени центра O описанной окружности относительно всех трех окружностей равны. Кроме того, поскольку середины отрезков между основаниями внешних и внутренних биссектрис лежат на одной прямой, симметричные им центры окружностей по теореме Менелая также лежат на одной прямой. Перпендикуляр из O на эту прямую является общей радикальной осью окружностей, которые, следовательно, имеют две общих точки.

3. Рассмотрим четыре сферы, для которых данные окружности являются большими кругами. Тогда, например, плоскость π_{AB} будет радикальной плоскостью двух сфер, касающихся ребра AB , следовательно, она проходит через радикальный центр всех сфер. Остальные плоскости также проходят через эту точку.

4. 100° .

Первое решение. Достроим треугольник до ромба $ABCD$ (рис.2). Пусть O – центр ромба. Тогда прямая BM делит медиану AO треугольника ABD в отношении 2:1. Значит, эта прямая тоже является медианой, т.е. проходит через середину

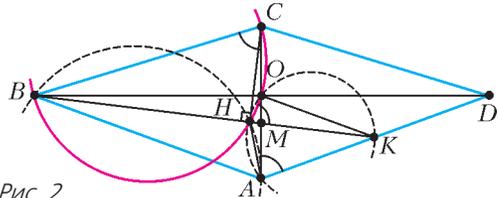


Рис. 2

K отрезка AD . Поскольку точки O и H лежат на окружности с диаметром BC , $\angle KHO = \angle BCO = \angle KAO$. Следовательно, четырехугольник $AHOK$ вписанный и $\angle ANK = \angle AOK = 80^\circ$, а $\angle ANB = 100^\circ$.

Второе решение. Аналогично предыдущему решению, заметим, что четырехугольник $BCOH$ вписанный. Следовательно, $MH \cdot MB = MO \cdot MC = MA^2$. Поэтому окружность AHB касается прямой AC , откуда $\angle ANB = 180^\circ - \angle BAC = 100^\circ$.

5. Пусть K – наименьший из данных кругов (будем считать, что его радиус равен 1), O – центр, $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильный шестиугольник с центром O и стороной $\sqrt{3}$. Докажем, что каждый из данных кругов содержит одну из точек O, A_1, \dots, A_6 ; из этого, по принципу Дирихле, будет следовать утверждение задачи. Пусть O' – центр некоторого круга K' . Если O' лежит в K , то круг K' содержит O , так как его радиус не меньше 1. Поэтому будем считать, что $OO' > 1$.

Луч OO' образует с одним из лучей OA_i угол, не больший 30° . Пусть это луч OA_1 , тогда

$$O'A_1^2 = O'O^2 + OA_1^2 - 2O'O \cdot OA_1 \cos \angle O'OA_1 \leq \leq O'O^2 + 3 - 3O'O.$$

Если $1 < O'O \leq 2$, то $O'A_1 \leq 1$ и K' содержит A_1 . Если же $O'O > 2$, то $O'A_1 < O'O - 1$. Но радиус K' не меньше чем $OO' - 1$, так как этот круг пересекается с K ; следовательно, и в этом случае K' содержит A_1 .

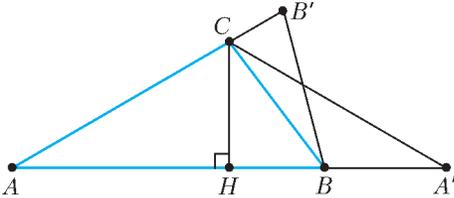


Рис. 3

6. Пусть ABC (рис.3) – данный треугольник ($AB \geq AC \geq BC$). Пусть CH – его высота, точка A' симметрична A относительно H , а точка B' симметрична B относительно биссектрисы угла A . Тогда ACA' и ABB' – равнобедренные треугольники, накрывающие ΔABC , причем $S_{ACA'}/S_{ABC} = AA'/AB = 2AH/AB$, а $S_{ABB'}/S_{ABC} = AB'/AC = 2AB/AC$. Произведение этих отношений есть $2AH/AC < 2$, значит, какое-то из них меньше $\sqrt{2}$.

7. Пусть I, H – центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника соответственно. При гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$ точки N и H переходят в I и O соответственно. Поэтому $\angle MON = \pi/2$ тогда и только тогда, когда $IO = IH$. Пусть прямая OH пересекает стороны AC и BC треугольника ABC . Тогда, так как AI, BI – биссектрисы углов HAO, HBO , точки A, B, O, I, H лежат на одной окружности. Следовательно,

$$\angle AOB = 2\angle C = \angle ANB = \pi - \angle C, \text{ и } \angle C = 60^\circ.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично.

8. Сделаем инверсию относительно окружности с центром в точке D и произвольным радиусом. При построении конструкции после инверсии будем руководствоваться известными свойствами этого преобразования. Образы точек будем обозначать штрихами (рис.4).

Описанная окружность треугольника XDA касалась BA и BX . Она перейдет в прямую $A'X'$, а прямые – в описанные окружности треугольников $B'DA'$ и $B'DX'$. Значит, они будут касаться прямой $X'A'$. Тогда радикальная ось этой пары окружностей, т.е. $B'D$, будет делить пополам

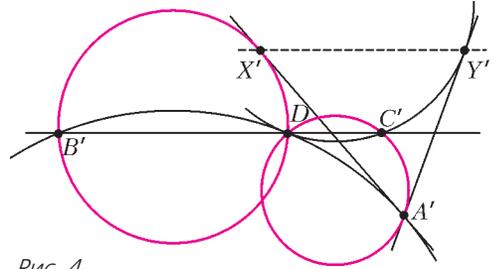


Рис. 4

отрезок $X'A'$. Аналогично, описанные окружности треугольников DCY' и $DC'A'$ касаются прямой $Y'A'$. Тогда их радикальная ось DC' будет делить пополам отрезок $A'Y'$. Значит, прямая $B'C'$ – средняя линия треугольника $X'A'Y'$, откуда $X'Y' \parallel B'D'$. Остается заметить, что прообраз прямой $X'Y'$ – окружность, проведенная через точки X, Y, D . Так как $X'Y' \parallel B'C'$, она будет касаться прямой BC в точке E .

9. Нет.

Возьмем на плоскости окружности β и γ с радиусами 2 и 1 соответственно, касающиеся внешним образом. Проведем к ним общую внешнюю касательную и построим окружность δ , вписанную в криволинейный треугольник, образованный обеими окружностями и касательной. Очевидно, что радиус этой окружности будет меньше 1, так что из радиусов трех окружностей треугольник составить нельзя. Теперь заменим прямую, касающуюся β и γ , окружностью α с радиусом больше чем 4, касающейся их внешним образом, и построим три шара, центры и радиусы которых совпадают с центрами и радиусами окружностей α, β, γ . Наконец, построим шар с радиусом, равным радиусу окружности δ , касающейся трех остальных. Центры этих шаров образуют тетраэдр, а точки их касаний лежат на сфере, касающейся всех ребер. При этом отрезки a, b, c, d равны радиусам окружностей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, из которых ни одного треугольника составить нельзя.

10. Нет.

Очевидно, что в первый вечер полицейские окажутся в вершинах равнобедренного треугольника и в дальнейшем это условие будет всегда выполнено. Поэтому можно считать, что в начале $AC = BC$. Пусть O, R – центр и радиус описанной окружности треугольника ABC . Тогда так как $OC \perp AB$, а X лежит внутри треугольника ABC , то проекция X на высоту CD треугольника лежит между C и D . Поэтому $XC^2 - XO^2 < CD^2 - DO^2 = AC^2 - AO^2$, или $XC^2 - AC^2 < XO^2 - R^2$. Аналогично получаем, что $O'X^2 - R'^2 < OX^2 - R^2$, где O', R' – центр и радиус описанной окружности нового тре-

угольника, образованного полицейскими. Таким образом, степень точки X относительно описанной окружности образованного полицейскими треугольника каждый вечер уменьшается, следовательно, полицейские не могут вернуться в исходные точки.

11. 1 : 2.

Первое решение. Пусть I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC (рис. 5). Тогда для треугольника $I_a I_b I_c$ тре-

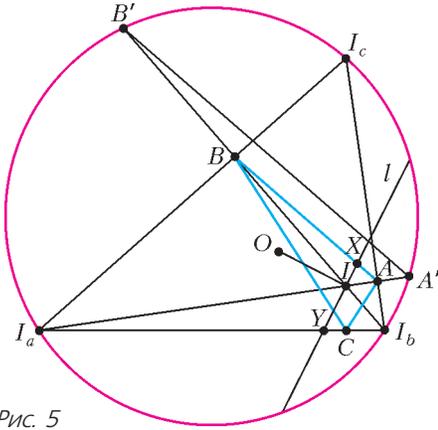


Рис. 5

угольник ABC является ортотреугольником, а его описанная окружность – окружностью девяти точек. Поэтому центр описанной окружности треугольника $I_a I_b I_c$ находится в точке, симметричной I относительно O , а ее радиус равен удвоенному радиусу описанной окружности ABC . В эту же окружность вписан треугольник $A'B'C'$, полученный из ABC гомотетией с центром I и коэффициентом 2. Прямая l , проходящая через I перпендикулярно OI , высекает в этой окружности хорду с серединой в I , также через I проходят хорды $I_a A'$ и $I_b B'$. По теореме о бабочке прямые $I_a I_b$ и $A'B'$ пересекают l в точках, симметричных относительно I , следовательно, $IX : IY = 1 : 2$.

Второе решение. Рассмотрим ГМТ, для которых сумма ориентированных расстояний до сторон треугольника ABC равна $3r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника. Так как ориентированное расстояние является линейной функцией координат точки, этим ГМТ будет проходящая через I прямая. Поскольку сумма проекций вектора OI на ориентированные прямые AB, BC, CA равна нулю, то эта прямая перпендикулярна OI . Так как точка Y лежит на внешней биссектрисе угла C , сумма расстояний от нее до прямых AC и BC равна нулю. Значит, расстояние от Y до AB равно $3r$, т.е. $YX = 3IX$.

12. Пусть в треугольнике ABC $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$. Тогда высоты h_a, h_b, h_c удовлетворяют неравенству $h_a \leq h_b \leq h_c$ и аналогичное неравенство выполнено для биссектрис l_a, l_b, l_c . Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\angle B \geq 60^\circ$. Тогда $\angle A - \angle B \leq \angle B - \angle C$, и $h_c/l_c = \cos(\angle A - \angle B)/2 \geq h_a/l_a = \cos(\angle B - \angle C)/2$. Аналогично, $h_c/l_c > h_b/l_b$. Значит, из неравенства $h_c < h_a + h_b$ следует, что $l_c < l_a + l_b$.

2) Пусть $\angle B \leq 60^\circ$. Тогда, так как $\angle A < 90^\circ, \angle C > 30^\circ$. Поэтому $l_a \geq h_a = AC \sin \angle C > AC/2$ и $l_b > BC/2$. Но биссектриса l_c не превосходит соответствующей медианы, которая меньше полусуммы сторон AC и BC . Следовательно, $l_c < l_a + l_b$.

Примечание. Заметим, что при разборе первого случая не использовалось условие остроугольности треугольника, а при разборе второго – то, что из высот можно сложить треугольник. Тем не менее, оба условия являются необходимыми. Пример тупоугольного треугольника, для которого из высот можно сложить треугольник, а из биссектрис нельзя, приводится в решении задачи 5 для 9 класса VII Олимпиады.

13. $s = 0$.

Первое решение. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть T – множество из не более чем $n - 3$ треугольников, вершины которых выбираются из вершин выпуклого n -угольника $P = A_1 A_2 \dots A_n$. Тогда можно раскрасить вершины P в три цвета так, что вершины каждого цвета образуют непустое множество подряд идущих вершин P и множество T не содержит треугольников с разноцветными вершинами.

Доказательство леммы проведем индукцией по n .

При $n = 3$ утверждение верно, так как T пусто. Пусть $n > 3$. Если $A_1 A_n$ не является стороной никакого треугольника из T , покрасим A_1 и A_n в два разных цвета, а остальные вершины – в третий цвет.

Пусть $A_1 A_n$ является стороной хотя бы одного треугольника из T . Образует множество U , удалив из T все такие треугольники и заменив в остальных A_n на A_1 . Используя предположение индукции для многоугольника $Q = A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ и множества U , раскрасим вершины Q . Теперь, раскрасив A_n в тот же цвет, что A_1 , получим искомую раскраску P .

Пусть теперь Дьявол строит раскраску, соответствующую названному Человеком тройкам, и рисует выпуклый 100-угольник P площади 100, вписанный в окружность k так, что все вершины P цвета i лежат на дуге c_i с градусной мерой ϵ° ,

а середины дуг c_1 , c_2 и c_3 образуют правильный треугольник. Если ϵ стремится к нулю, то площади всех названных Человеком треугольников, а значит, и их сумма тоже стремятся к нулю.

Второе решение. Для каждой тройки (i, j, k) запишем в вершину A_i количество сторон, покрытых углом $A_j A_i A_k$ (оно не зависит от выбора 100-угольника), то же сделаем с вершинами A_j и A_k . Сумма записанных чисел для одной тройки равна 100, поэтому общая сумма всех чисел равна $97 \cdot 100$, а значит, в какой-то вершине, скажем A_1 , сумма чисел не больше 97; это значит, что есть сторона $A_k A_{k+1}$, не содержащая A_1 и такая, что ни один из углов с вершиной в A_1 не покрывает эту сторону. Теперь Дьявол может, нарисовав 100-угольник, в котором вершины A_2, \dots, A_{k-1} близки к A_k , а вершины A_{k+2}, \dots, A_{100} близки к A_{k+1} , сделать площади всех 97 треугольников, а значит, и их сумму сколь угодно малы.

Решения задач заочного тура XIII Олимпиады доступны по адресу <http://geometry.ru/olimp/2017/zaochsol.pdf>

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Рассмотрим город A , для которого доступно наибольшее количество городов (если таких несколько – любой из них). Предположим, что некоторый город B недоступен для A . Тогда по условию существует город C , для которого A , и B доступны. Но в таком случае для C доступны B , а также все города, доступные для A . Это противоречит выбору A ; значит, для A доступны все города.

3. Нет.

Предположим, что переправа гномам удалась. Назовем рейсы лодки с левого берега на правый *прямыми*, а с правого на левый – *обратными*. Назовем гномов с весами 50, 51, 52, ..., 100 фунтов *тяжелыми*, а остальных – *легкими*. Пусть тяжелые гномы были гребцами в d обратных рейсах. Тогда эти d тяжелых гномов совершили хотя бы по два прямых рейса, а остальные – хотя бы по одному. Поскольку два тяжелых гнома не могли плыть одновременно, количество прямых рейсов было не меньше чем $2d + (51 - d) = 51 + d$. Значит, обратных рейсов было не меньше чем $50 + d$, т.е. хотя бы в 50 из них гребцами были легкие гномы. Но легких гномов всего 49, так что один из них должен был дважды грести в обратном рейсе, что невозможно.

4. Да, существует.

Построим пример такой последовательности. Положим $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = (3a_n)! + 1$. Для того чтобы показать, что она удовлетворяет требованиям, нам придется эти требования несколько усилить. Будем говорить, что пара (тройка) чисел *хорошая*, если все ее элементы, отличные от единицы, различны (а единица может встретиться в ней несколько раз). Докажем следующее утверждение, из которого будет следовать, что построенная последовательность – требуемая.

Пусть (a_i, a_j) и (a_p, a_q, a_r) – хорошие пара и тройка элементов последовательности. Тогда

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q + a_r) &= \\ &= \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q - a_r) = 1. \end{aligned}$$

Доказательство проведем индукцией по наибольшему индексу m среди i, j, p, q и r . Если $m = 1$, утверждение тривиально. Для перехода предположим, что $m > 1$. Число a_m лежит либо только в паре (a_i, a_j) , либо только в тройке (a_p, a_q, a_r) , либо в обеих.

Случай 1. Пусть a_m – только элемент пары; скажем, $a_m = a_j$. Тогда, поскольку $0 < |a_p + a_q \pm a_r| \leq 3a_{m-1}$, число $a_m - 1 = (3a_{m-1})!$ делится на $a_p + a_q \pm a_r$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_q \pm a_r) &= \\ &= \text{НОД}((a_i + 1) + (a_m - 1), a_p + a_q \pm a_r) = \\ &= \text{НОД}(a_i + a_1, a_p + a_q \pm a_r) = 1 \end{aligned}$$

по предположению индукции.

Случай 2. Пусть a_m – только элемент тройки; скажем, $a_m = a_q$. Аналогично, $a_m - 1$ делится на $a_i + a_j$, так что

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_m \pm a_r) &= \\ &= \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_1 \pm a_r) = 1 \end{aligned}$$

по предположению индукции.

Случай 3. Пусть a_m – элемент и пары, и тройки; скажем, $a_m = a_j = a_q$. Тогда $a_m - 1$ делится на $a_p - a_i \pm a_r$, так что

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_m \pm a_r) &= \\ &= \text{НОД}(a_i + a_m, (a_p + a_m \pm a_r) - (a_i + a_m)) = \\ &= \text{НОД}(a_i + a_m, a_p - a_i \pm a_r) = \\ &= \text{НОД}(a_i + a_1, a_p - a_i \pm a_r) = 1 \end{aligned}$$

по предположению индукции. Переход индукции доказан.

5. Предположим противное. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – числа на доске в порядке возрастания, а q_i – неполное частное от деления a_{i+1} на a_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$); тогда $a_{i+1} \geq q_i a_i$. Так как все q_i

различны, имеем $q_1 q_2 \dots q_{n-1} \geq (n-1)!$. Значит,

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \geq q_{n-1} q_{n-2} \dots q_1 \geq (n-1)!$$

Это невозможно, если a_1 и a_n – натуральные числа, меньшие $(n-1)!$.

6. Да, верно.

Покажем, что трехчлен

$$f(x) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x + abc = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$$

подходит. Ясно, что его коэффициенты целые и старший коэффициент $a+b+c$ положителен. Наконец, легко видеть, что $f(a) = a^3 - 0 = a^3$; аналогично, $f(b) = b^3$ и $f(c) = c^3$.

7. Из параллельности прямых AB' и BC получаем, что $\angle AB'B = \angle CBB' = \angle ABB'$. Значит, $AB' = AB$. Аналогично, $AB = A'B$. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$. Пусть, без ограничения общности, $\alpha > \beta$.

Обозначим через N середину дуги ACB окружности Ω (рис.6). Тогда $AN = BN$ и

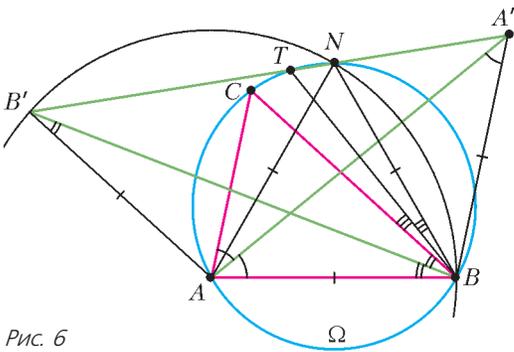


Рис. 6

$\angle ANB = \angle ACB = 60^\circ$; значит, треугольник ABN равносторонний, и $AN = BN = AB = A'B = B'A$. Поэтому точка A – центр окружности, описанной около треугольника BNB' . Заметим тогда, что $\angle NBB' = \angle NBA - \angle ABB' = 60^\circ - \beta$, откуда $\angle NAB' = 2\angle NBB' = 120^\circ - 2\beta$ и $\angle ANB' = 90^\circ - \angle NAB'/2 = 30^\circ + \beta$. Аналогично, $\angle BNA' = 30^\circ + \alpha$, откуда $\angle B'NA + \angle ANB + \angle BNA' = (30^\circ + \beta) + 60^\circ + (30^\circ + \alpha) = 120^\circ + (\alpha + \beta) = 180^\circ$.

Итак, точка N лежит на прямой $A'B'$.

Пусть T – середина меньшей дуги NC окружности Ω . Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle ANT = \angle ABT &= (\angle ABN + \angle ABC)/2 = \\ &= 30^\circ + \beta = \angle ANB'. \end{aligned}$$

Значит, точка T также лежит на прямой $A'B'$, и треугольник CDE совпадает с треугольником CNT . Этот треугольник равнобедренный, поскольку $NT = TC$.

10 класс

1. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – данные приведенные квадратные трехчлены, а параболы Γ_1 и Γ_2 – их графики. Тогда существует единственный вектор \vec{a} такой, что при параллельном переносе на этот вектор парабола Γ_1 переходит в Γ_2 (вектор \vec{a} соединяет вершины парабол).

Пусть прямая l_1 пересекает Γ_1 в точках A_1 и B_1 , а Γ_2 – в точках A_2 и B_2 так, что $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. При параллельном переносе параболы Γ_1 на вектор $\overline{A_1A_2}$ получается парабола Γ_3 , являющаяся графиком приведенного трехчлена $f_3(x)$, которая пересекает l_1 в тех же точках, что и Γ_2 . Тогда разность $f_2(x) - f_3(x)$ имеет хотя бы два корня (абсциссы точек A_2 и B_2). Но поскольку степень многочлена $f_2(x) - f_3(x)$ не выше 1, то $f_2(x) - f_3(x) \equiv 0$, т.е. $\Gamma_3 = \Gamma_2$. Значит, вектор сдвига $\vec{a} = \overline{A_1A_2}$ параллелен прямой l_1 . Аналогично, $\vec{a} \parallel l_2$, тем самым, $\vec{a} = \vec{0}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

2. Пусть прямая AO пересекает l в точке T (рис. 7). Из симметрии относительно AO имеем $\angle B'TO = \angle C'TO$. Поскольку $l \parallel AC$, получаем $\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA$.

Итак, $\angle B'TO = \angle B'CO$, т.е. T лежит на окружности ω , описанной около треугольника $B'OC$. Кроме того, из тех же соображений имеем $\angle OB'T = \angle OCT = \angle OCA = \angle OTC'$, т.е. $C'T$ касается ω в точке T .

Замечание. Можно заметить, что O и T – центры окружностей, описанных около треугольника $B'CT$ и трапеции $BCB'C'$ соответственно.

3. Илья.

Покажем, как Илье ходить, чтобы гарантированно выиграть. Обозначим через A, B и C кучки, в которых изначально было 100, 101 и 102 камня соответственно. Первым ходом Илья возьмет камень из кучки B . Далее возможны два случая.

Случай 1. Своим первым ходом Костя возьмет камень не из кучки B . Тогда Илья всегда будет повторять ход за Костей, т.е. брать камень из той же кучки, из которой только что брал камень Костя. Заметим, что пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в каждой кучке остается четное число камней.

Свой второй ход Илья сможет сделать, так как Костя взял свой первый камень не из B . После

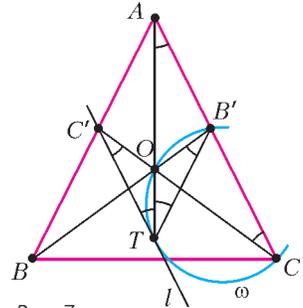


Рис. 7

этого каждым ходом Костя будет брать камень из кучки X , отличной от кучки Y , из которой только что взял Илья. Тогда в X останется нечетное число камней, и Илья сможет взять из X еще один камень. Значит, действуя по этой стратегии, Илья всегда сможет сделать ход после хода Кости. Поскольку игра рано или поздно закончится, Костя проигрывает.

Случай 2. Своим первым ходом Костя возьмет камень из кучки B . В этом случае Илья будет действовать по следующей стратегии. Если перед текущим ходом Илья Костя брал камень из кучки C , то Илья берет камень оттуда же. Если же Костя брал камень из кучки A или B , то Илья берет камень из кучки B или A соответственно. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в C будет четное число камней, а в A и B камней будет поровну.

Опять же, нам достаточно показать, что Илья всегда сможет сделать ход согласно этой стратегии. Свой второй ход Илья сделать сможет (взяв камень из A). Если на очередном шаге ему нужно брать камень из кучки C , то до этого оттуда брал камень Костя, значит, на предыдущем ходу оба игрока не брали ничего из C . При этом после хода Кости там нечетное число камней, поэтому Илья может взять камень из C . Если же Илье нужно брать камень из кучки A или B , скажем из A , то Костя только что взял камень из B (и тогда в A еще есть камень). Значит, на предыдущем шаге Костя не мог брать камень из B , поэтому Илья не брал камень из A , т.е. он может взять камень оттуда на текущем шаге.

Замечание. Стратегия, описанная в случае 2, также работает, если Костя своим первым ходом возьмет камень из C .

5. $n = 4$ или $n = 8$.

Заметим, что число 2 на доску не выписано, ибо 1 – не собственный делитель n ; стало быть, m нечетно. Значит, все выписанные делители m нечетны, а потому все делители n четны. Итак, n не делится на нечетные простые числа, т.е. n – степень двойки (и все его делители – тоже).

Если n делится на 16, то 4 и 8 – его собственные делители, поэтому на доску выписаны 5 и 9. Стало быть, m делится на 45, и, в частности, 15 является его собственным делителем. Но число 15 выписано быть не могло, поскольку 14 не является степенью двойки. Следовательно, n не может делиться на 16.

Оставшиеся (составные) степени двойки $n = 4$ и $n = 8$ подходят: для них можно соответственно положить $m = 9$ и $m = 15$.

8. Пусть прямая BI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке S . Пусть лучи SB' и CA пересекаются в

точке T (рис.8). По лемме о трезубце имеем $SA = SC = SI$. Из равенства $IB = IB'$ получаем $\angle IB'B = \angle IBB' = \varphi$. Так как $OB = OB'$, четырехугольник $AB'SB$ вписан, откуда

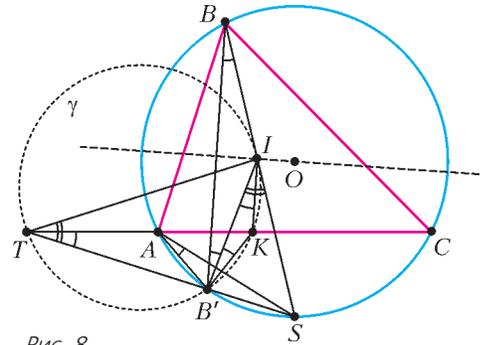


Рис. 8

$\angle SAB' = \angle SBB' = \varphi$. Угол SAC – внешний для треугольника SAT , откуда

$$\begin{aligned} \angle ATS &= \angle SAC - \angle ASB' = \angle SBC - \angle ABB' = \\ &= \angle SBA - \angle ABB' = \angle SBB' = \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, $\angle B'AS = \varphi = \angle ATS$; значит, треугольники SAB' и STA подобны по двум углам, откуда $SB' \cdot ST = SA^2 = SI^2$. Следовательно, прямая SI касается окружности γ , описанной около треугольника TIB' . Тогда $\angle ITB' = \angle B'IS$. Но угол $B'IS$ – внешний для треугольника IBB' , поэтому он равен 2φ . Значит, $\angle ITA = \angle ITB' - \varphi = 2\varphi - \varphi = \varphi$. Обозначим вторую точку пересечения окружности γ с прямой AC через K . Имеем $\angle KB'I = \angle KTI = \varphi = \angle IB'B$. Также $\angle KIB' = \angle KTB' = \varphi = \angle IBB'$. Таким образом, прямые KI и KB' касаются окружности, описанной около треугольника $BB'I$, а точка K лежит на прямой AC по построению.

11 класс

1. Заметим, что число

$$\begin{aligned} S^2 + C^2 &= \\ &= (\sin^2 64x + \cos^2 64x) + (\sin^2 65x + \cos^2 65x) + \\ &+ 2(\sin 64x \sin 65x + \cos 64x \cos 65x) = \\ &= 2 + 2 \cos(65x - 64x) = 2 + 2 \cos x \end{aligned}$$

рационально, откуда $\cos x$ – также рациональное число. Ввиду формулы $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, все числа вида $\cos 2^k x$ также рациональны – в частности $\cos 64x$. Поскольку C рационально, то и второе слагаемое в этой сумме также рационально.

Замечание. Слагаемые в сумме S могут оказаться иррациональными, например, при $x = 2\pi/3$.

4. $n = 2018$.

Положим $k = 2017$.

При $n = k + 1$ фокус устроить легко. Фокусник и помощник нумеруют цвета числами от 1 до k . Помощник, видя цвет последней, $(k + 1)$ -й карты (пусть его номер равен a), оставляет открытой a -ю карту. Фокусник, увидев, какая по номеру карта открыта, восстанавливает цвет последней карты.

Осталось показать, что при $n \leq k$ фокус не удастся. Предположим противное и рассмотрим возможные действия фокусника. Пусть, видя на i -м месте карту цвета a , он объявляет, что на j -м месте карта цвета b (тогда $i \neq j$); будем называть это *инструкцией* $(a, i) \rightarrow (b, j)$. Можно считать, что для каждой пары (a, i) существует только одна инструкция вида $(a, i) \rightarrow (b, j)$ (и фокусник при возможности всегда применяет ее – поскольку никакой информации о том, какую из таких инструкций применять, у него нет). Тогда инструкций не больше чем kn .

Будем говорить, что исходная раскладка карт *удовлетворяет инструкции* $(a, i) \rightarrow (b, j)$, если в ней на i -м и j -м местах лежат карты цветов a и b соответственно. Тогда каждой инструкции удовлетворяет ровно k^{n-2} раскладок. С другой стороны, если фокус гарантированно удастся, то каждая возможная раскладка удовлетворяет хотя бы одной инструкции – той, которую применяет помощник с фокусником. Значит, общее число раскладок не может превосходить $kn \cdot k^{n-2}$, т.е. $k^n \leq k^{n-1}n$, откуда $k \leq n$. Тогда $k = n$, и неравенство выше обращается в равенство. Это значит, что каждая раскладка удовлетворяет *ровно* одной инструкции, и с каждой пары (a, i) начинается *ровно* одна инструкция.

Рассмотрим произвольную инструкцию $(a, i) \rightarrow (b, j)$; тогда есть и инструкция вида $(b, j) \rightarrow (c, k)$. Поскольку не существует раскладки, удовлетворяющей обеим инструкциям, должны выполняться условия $i = k$ и $a \neq c$.

С другой стороны, для любых двух инструкций $(a, i) \rightarrow (b, j)$ и $(c, k) \rightarrow (d, l)$ среди номеров i, j, k, l должны быть совпадающие – иначе опять же существует раскладка, удовлетворяющая обеим инструкциям. Рассмотрим граф с вершинами $1, 2, \dots, k$, в котором i и j соединены ребром $[i, j]$, если существует инструкция вида $(a, i) \rightarrow (b, j)$ (по доказанному выше, существует также и инструкция вида $(b, j) \rightarrow (a', i)$). Тогда любые два ребра в этом графе имеют общую вершину, и из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Пусть для определенности $[1, 2]$ – ребро этого графа. Из вершины 3 выходит ребро, имеющее общую вершину с первым –

пусть для определенности это $[1, 3]$. Тогда любое ребро из вершины $k > 3$ обязано иметь вид $[1, k]$, чтобы иметь общие вершины с каждым из ребер $[1, 2]$ и $[1, 3]$. Наконец, любое ребро вообще должно иметь общую вершину с каждым из ребер $[1, 2]$, $[1, 3]$ и $[1, 4]$, т.е. должно содержать вершину 1. Итак, в каждой инструкции один из номеров мест равен 1.

Наконец, сопоставим каждому месту $i > 1$ все такие цвета a , что существует инструкция вида $(c, i) \rightarrow (a, 1)$. Из сказанного выше следует, что разным местам не может быть сопоставлен один и тот же цвет. Поскольку таких мест $k - 1$, а цветов $k < 2(k - 1)$, какому-то месту i сопоставлен только один цвет a , т.е. имеются все k инструкций вида $(c, i) \rightarrow (a, 1)$ при всевозможных c . Однако существует также инструкция вида $(a, 1) \rightarrow (c, i)$ для некоторого c . Но она не может существовать вместе с инструкцией $(c, i) \rightarrow (a, 1)$; противоречие.

6. 3800 фишек.

Пример, содержащий 3800 фишек, получается, скажем, так. Выделим у квадрата 200×200 «каемку» ширины 5. Эта каемка состоит из четырех угловых квадратов 5×5 и четырех прямоугольников 5×190 . Расставим фишки в эти четыре прямоугольника: в левый и в верхний – красные, а в правый и в нижний – синие. Нетрудно видеть, что этот пример удовлетворяет всем требованиям и в нем по 1900 красных и синих фишек.

Осталось доказать, что фишек не может быть больше 3800. Рассмотрим произвольную расстановку фишек, удовлетворяющую требованиям. Назовем ряд (строку или столбец) *разноцветным*, если в нем есть фишки обоих цветов.

Сделаем сразу два полезных замечания. Во-первых, каждая фишка видит какую-то фишку другого цвета, поэтому каждая фишка лежит хотя бы в одном разноцветном ряду. Кроме того, поскольку разноцветный ряд содержит красную фишку, в нем не может быть более пяти синих фишек (иначе красная все их увидит). Аналогично, в разноцветном ряду не более пяти красных фишек, т.е. всего не более 10 фишек.

Теперь нетрудно получить требуемую оценку. Если есть 191 разноцветная строка, то в них не более $191 \cdot 10 = 1910$ фишек, а в оставшихся девяти строках не более $9 \cdot 200 = 1800$ фишек, итого не больше $1910 + 1800 < 3800$ фишек. Аналогично разбирается случай, когда есть 191 разноцветный столбец. Если же и тех и других не более чем по 190, то они содержат не более $190 \cdot 10 + 190 \cdot 10 = 3800$ фишек, причем все фишки содержатся в этих рядах. Оценка доказана.

Замечание. Можно показать, что при любом $n \geq 30$ наибольшее число фишек, которые можно разместить на доске $n \times n$ согласно условиям, равно $20(n - 10)$.

7. Только при $N = 1$.

Лемма. При любом натуральном $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Доказательство. Ясно, что при $t > 1$

$$\frac{1}{t^2} < \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

Складывая такие неравенства при $t = 2, 3, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \\ < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Докажем индукцией по N , что при любом натуральном N на доске окажется не более N^2 чисел, причем ровно N^2 чисел может оказаться лишь при $N = 1$. Из этого и будет следовать ответ в задаче.

База при $N = 1$ очевидна. Для перехода предположим, что $N > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k < d_{k+1} = N$ – все делители числа N . После первой замены на доске окажутся числа d_1, d_2, \dots, d_k . Мысленно разделим доску на k частей так, чтобы число d_j находилось в j -й части. Далее при каждой замене будем выписывать преемников числа в ту же часть, где было само число. По предположению индукции, в j -й части доски не может оказаться больше чем d_j^2 чисел. Значит, общее количество чисел на доске не может превышать $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2$.

Заметим теперь, что числа $N/d_1 > N/d_2 > \dots > N/d_k > N/d_{k+1}$ также являются делителями числа N . Следовательно, они равны числам $d_{k+1}, d_k, \dots, d_2, d_1$ соответственно. С учетом леммы получаем, что общее количество чисел на доске не будет превосходить числа

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2 &= \frac{N^2}{d_{k+1}^2} + \frac{N^2}{d_k^2} + \dots + \frac{N^2}{d_2^2} = \\ &= N^2 \left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \dots + \frac{1}{d_{k+1}^2} \right) \leq \\ &\leq N^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{N^2} \right) < N^2 \cdot 1 = N^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

8. Шаг 1. Обозначим через P центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_D (точка P может оказаться беско-

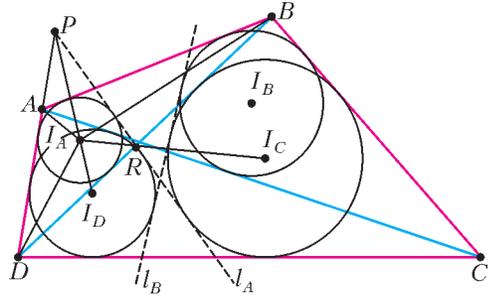


Рис. 9

нечно удаленной), а через R – центр гомотетии с отрицательным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_C (рис.9). Поскольку AD – общая внешняя касательная к ω_A и ω_D , имеем $P \in AD$; аналогично, $R \in BD$.

Покажем, что данное условие

$$\angle BI_A A = 180^\circ - \angle I_C I_A I_D \quad (*)$$

равносильно тому, что прямая l_A , проходящая через P и R , – общая касательная к окружностям ω_A, ω_C и ω_D . Пусть для определенности точка P лежит на луче DA (другие случаи аналогичны). Поскольку ω_A вписана в треугольник ABD , имеем $\angle AI_A B = 90^\circ + \angle ADB/2$; с другой стороны, $180^\circ - \angle I_C I_A I_D = \angle PI_A R$. Значит, $(*)$ равносильно равенству

$$\angle PI_A R = 90^\circ + \angle PDR/2.$$

Обозначим через J центр окружности, вписанной в треугольник PDR . Точки I_A и J лежат на биссектрисе этого треугольника из точки D , а $(*)$ равносильно тому, что $\angle PJR = \angle PI_A R$, т.е. совпадению точек J и I_A . Это, в свою очередь, означает в точности, что прямые PR и RD симметричны относительно $I_A I_C$, а прямые PD и PR симметричны относительно $I_A I_D$, т.е. что PR касается всех трех окружностей ω_A, ω_C и ω_D (ω_C лежит по другую сторону от PR , нежели остальные две).

Аналогично, требуемое условие $\angle BI_B A + \angle I_C I_B I_D = 180^\circ$ равносильно тому, что у окружностей ω_B, ω_C и ω_D существует общая касательная l_B , относительно которой ω_C и ω_B лежат по одну сторону, а ω_D – по другую. Осталось доказать, что эти два факта равносильны.

Шаг 2. Обозначим точку касания окружности ω_A с AD через A_{AD} ; аналогично обозначим другие точки касания (рис.10). Заметим, что

$$\begin{aligned} A_{AD} D_{AD} &= |AA_{AD} - AD_{AD}| = \\ &= \left| \frac{AB + AD - BD}{2} - \frac{AC + AD - CD}{2} \right| = \\ &= \frac{|AB + CD - BD - AC|}{2}; \end{aligned}$$

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
I ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. $\lambda = 2,5v + \frac{37,5}{v}$; $\tau_x = 160$ мин ;

$v_0 = 3,87$ км/ч и $\lambda_0 = 19,4$ г/км ;

$L_0 = \frac{M}{\lambda_0} = 5,2$ км и

$\tau_0 = \frac{L_0}{v_0} = 80$ мин ; $\tau_1 = 15$ мин
или $\tau_1 = 145$ мин .

2. Ветер восточный; $R = 400$ м;
 $v = 2u$; возможны 2 направле-

ния (2 курса; рис. 11).

3. $t_2 = 188$ °С ; $C = 7,2 \cdot 10^{-3}$ Дж/°С .

4. $(2,00 \pm 0,02)$ Вт ; $(0,60 \pm 0,03)$ Вт ;

$(0,60 \pm 0,03)$ Вт , движок на середине потенциометра; $(0,7 \pm 0,1)$ Вт .

5. $\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{1}{n}$; $v = 12\omega R$.

10 класс

1. $Q = \frac{3mv_0^2}{2}$; $s = \frac{8}{3\sqrt{3}} h$.

2. $4,58$ м/с $= \sqrt{2g(h+r)} > u > \sqrt{2g(h-r)}$ =
= $4,36$ м/с .

3. Проанализируем исходный график (рис. 12). Выделим участок кривой 0–1, на нем давление линейно зависит от температуры. Это свидетель-

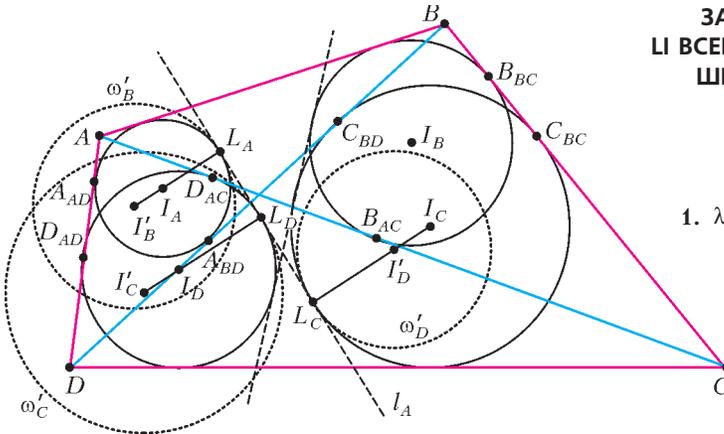


Рис. 10

аналогично,

$$B_{BC}C_{BC} = \frac{|AB + CD - BD - AC|}{2} = A_{AD}D_{AD} ,$$

$$A_{BD}C_{BD} = \frac{|AD + BC - AB - CD|}{2} = B_{AC}D_{AC} .$$

Предположим теперь, что l_A касается окружностей ω_A , ω_C и ω_D в точках L_A , L_C и L_D соответственно. Тогда

$$L_A L_D = A_{AD} D_{AD} = B_{BC} C_{BC} ,$$

$$L_A L_C = A_{BD} C_{BD} = D_{AC} B_{AC} .$$

Рассмотрим окружности ω'_B , ω'_C и ω'_D с центрами I'_B , I'_C и I'_D , имеющие те же радиусы, что и ω_B , ω_C и ω_D соответственно, и касающиеся l_A в точках L_A , L_D и L_C соответственно (причем ω'_B и ω'_C лежат по одну сторону от l_A , а ω'_D – по другую). Тогда соответственные отрезки общих касательных к ω'_B , ω'_C , ω'_D и к ω_B , ω_C , ω_D имеют одинаковые длины (для ω_C и ω_D это тривиально, для остальных пар следует из сказанного выше).

Отсюда легко следует, что соответственные стороны треугольников $I_B I_C I_D$ и $I'_B I'_C I'_D$ равны (например, $I'_B I'_C = I_B I_C$ из равенства четырехугольников $I'_B L_A L_D I'_C$ и $I_B B_{BC} C_{BC} I_C$). Поэтому и конфигурация наших окружностей $(\omega_B, \omega_C, \omega_D)$ и $(\omega'_B, \omega'_C, \omega'_D)$ также равны. Поскольку окружности в одной тройке касаются одной прямой l_A , то же верно и для другой тройки. Это и оставалось доказать.

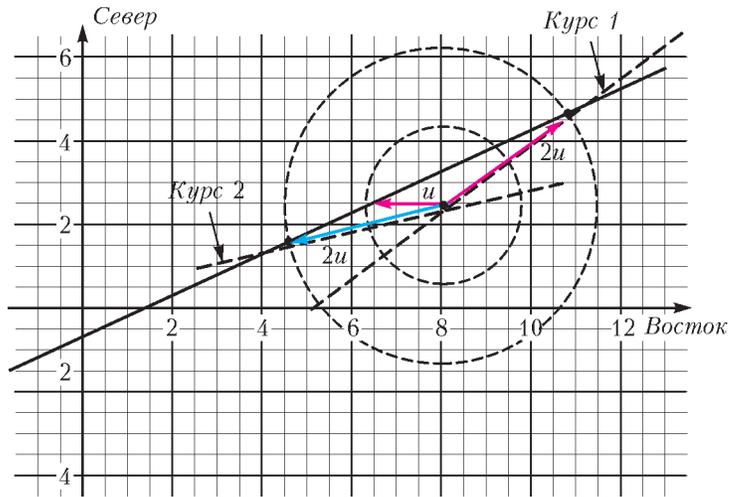


Рис. 11

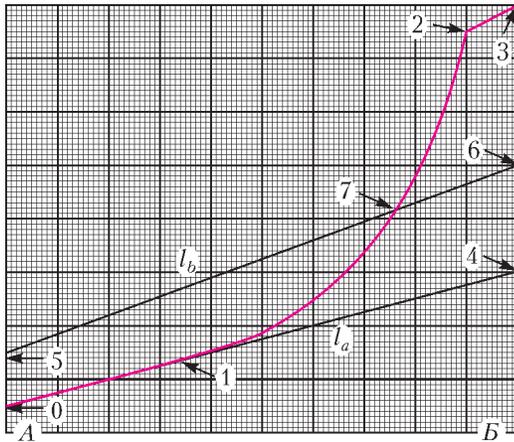


Рис. 12

ствует о том, что давление насыщенных паров много меньше давления воздуха, поэтому смесь ведет себя как идеальный газ. Участку 1–2 соответствует активное испарение воды. Участок 2–3 – линейный, и это говорит о том, что вся вода находится в парообразном состоянии, поэтому с ростом температуры давление увеличивается, как у идеального газа.

При изохорическом нагреве давление идеального газа зависит от температуры по закону

$$p = \nu \frac{R}{V} T.$$

Коэффициент наклона прямой $p(T)$ для идеального газа пропорционален количеству вещества ν . На участке 2–3 коэффициент наклона в два раза больше коэффициента наклона участка 0–1, значит, при полном испарении воды количество вещества удвоилось.

Проведем касательную l_a к участку 0–1. Она пересечет вертикальную ось в точке 4. Так как при испарении всей воды количество вещества удвоилось, то в точке 3 давление в два раза выше, чем в точке 4. С другой стороны, разность давлений между точками 3 и 4 составляет 1000 торр и насчитывает 50 вертикальных делений, т.е. по 20 торр на деление. Точке 3 по условию соответствует давление 2000 торр, следовательно, точке 4 соответствует давление 1000 торр, а точке 0 – 500 торр.

Так как давление в точке 0 в два раза меньше, чем в точке 4, то и температура в точке 0 в два раза меньше, чем в точке 4. По условию, температура в точках 3 и 4 одна и та же и равна $127^\circ\text{C} = 400\text{ K}$. Следовательно, $T_0 = T_4/2 = 200\text{ K}$, а количество маленьких делений по горизонтальной оси равно 200. Таким образом, с учетом цены делений по осям, получим

$$T_B = 400\text{ K}, T_A = 200\text{ K}, p_0 = 500\text{ торр}, p_A = p_B = 400\text{ торр}.$$

Для ответа на второй вопрос заметим, что нам необходимо найти такую температуру, при которой давление превышает давление воздуха над прямой l_a на 40 % от давления паров воды, если бы она вся испарилась. Но это как раз 40 % от давления сухого воздуха при данной температуре. Так как в точке 0 давление воздуха равно 500 торр, то 40 % это 200 торр – смещаемся на 10 делений вверх в точку 5. Аналогично находим точку 6. Прямая l_b , проходящая через точки 5 и 6, пересечет кривую смеси воздух–пар в точке 7, температура которой составляет приблизительно $T_7 = 80^\circ\text{C} = 353\text{ K}$.

4. $Q = 10,5CU_0^2$; см. рис.13.

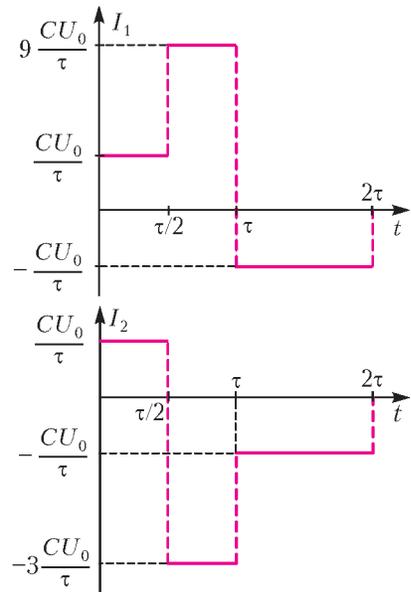


Рис. 13

5. Все нечетные омметры показывают ноль, все четные – бесконечность.

11 класс

1. $\tau = \sqrt{\frac{2(h+l/3)}{g}} \approx 0,56\text{ с}$ (если учесть длину пружины l_0 в сжатом состоянии, то поправка на время парения составит 0,01 с).
2. $H \approx \frac{7RT_0}{2Mg} \approx 30\text{ км}$ (здесь R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса воды); $h_0 \approx 0,43\text{ км}$ (нижняя кромка облаков образуется на такой высоте, где водяной пар становится насыщенным).

3. $T = 2\sqrt{2}\pi L \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 L}{\gamma Q}}$, где $L \approx \sqrt{R^2 + H^2/4}$.
4. $u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl}{\rho\rho_0 a}(\epsilon - vBa)} = 8 \text{ м/с}$,
 $F_T = \rho_0 ahv(v - u) = 2 \text{ кН}$, $P_{\text{пол}} = F_T u = 16 \text{ кВт}$,
 $\eta = \frac{\rho F_T u a}{lh\epsilon(\epsilon - vBa)} \cdot 100\% \approx 9\%$.
5. $L_1 \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ км}$, $T \approx 1,6 \text{ ч}$;
 $L_2 \approx 0,4 \cdot 10^6 \text{ км}$, $\epsilon \approx 4,8\%$.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Э.БАУМАНА**

Ф И З И К А

Олимпиада-2017

ПЕРВЫЙ ТУР

Вариант 1

1. $v_B = \sqrt{2}at = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$.
2. Груз массой $m = 2\rho V = 2 \text{ кг}$ нужно положить на правую чашу весов.
3. $v = \sqrt{2gl}$, $s = \frac{2}{3}l$.
4. $\mu_{\min} = \frac{v}{2g} \sqrt{\frac{k}{m}}$.
5. $T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} = 400 \text{ К}$.
6. $Q_{12} = \frac{3}{2} \frac{vR\Delta T}{1 - \eta} \approx 10,1 \text{ кДж}$ (здесь $v = 1 \text{ моль}$).
7. $Q = \frac{3}{2} Fd$.
8. Ток через переключку равен $I = \frac{\epsilon}{7R}$ и течет от точки b к точке a .
9. $q = \frac{6a^2 B}{R}$. 10. $x = \frac{k(L_0 + r)}{k - 4\pi r^3 \omega^2 \rho}$.

Вариант 2

1. Возможны два варианта:
 $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{Lg}{v^2} = 15^\circ$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = 75^\circ$.
2. $m = \frac{2\sqrt{T_0^2 - T^2}}{g}$.
3. $F_{\min} = \frac{5}{2} \mu mg$.
4. $Q = \frac{4}{9} mv_0^2$.

5. $\eta = 0,25 = 25\%$.
6. $T_{\text{н}} = 2T$ (потоки молекул и потоки энергии из полости уравниваются соответствующими потоками в полость из обоих сосудов).
7. $A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$.
8. $T = \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\frac{l}{g}}$.
9. $\varphi_B - \varphi_A = \frac{\epsilon}{6}$.
10. $Q = \frac{S^2}{R} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \Delta t = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$ (в кольце течет постоянный ток в течение $\Delta t = 6 \text{ с}$).

Вариант 3

1. $p = 0$.
2. $F_{\text{н}} = \frac{\sqrt{3}}{4} mg$.
3. $Q = \frac{mgh}{3}$ (количество теплоты равно убыли потенциальной энергии системы).
4. $M = \frac{3}{2} m$ (используйте законы сохранения механической энергии и импульса).
5. $N = \frac{mvN_A}{MSh} \approx 10^6$ (здесь $M = 0,058 \text{ кг/моль}$ – молярная масса поваренной соли, $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро).
6. $Q = \left(\frac{3}{2} p_1 + p_2\right) (V_2 - V_1) = 3,35 \text{ кДж}$.
7. Надо поместить заряд $+q$.
8. $A = 0$.
9. $\epsilon = \frac{U}{4R} \cdot \frac{31}{5} R = 31 \text{ В}$ (здесь $\frac{31}{5} R$ – полное сопротивление цепи).
10. $I = \frac{vBL}{R}$.

ВТОРОЙ ТУР

Вариант 1

1. $\Delta t = 2 \frac{v_0}{g} = 1 \text{ с}$.
2. $F_{\text{н}} = \frac{3}{2} mg$; ускорение направлено вдоль наклонной плоскости вниз и равно $a = \frac{3}{4} g$.
3. $v_1 = 2\sqrt{\frac{2gL}{3}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$.
4. $\frac{Q_{12}}{Q_{23}} = \frac{(3/2)p_0 V_0}{10p_0 V_0} = 0,15$.

$$5. T = \frac{v_{\text{He}} T_{\text{He}} + v_{\text{Ar}} T_{\text{Ar}}}{v_{\text{He}} + v_{\text{Ar}}} = 400 \text{ К}.$$

$$6. L_{\text{max}} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 \mu m g L_0} \quad (\text{воспользуйтесь законом сохранения энергии}).$$

7. Напряженность электрического поля равна $E = vB$ и направлена против оси z .

8. См. рис.14.

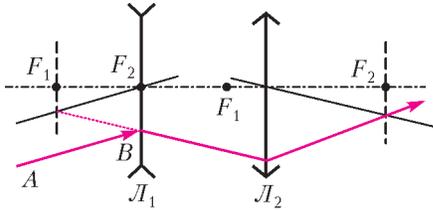


Рис. 14

$$9. Q = A_{\text{бат}} - \Delta W_{\text{конд}} = \frac{2}{5} C \epsilon^2.$$

10. Вытекание жидкости удовлетворяет уравнению гармонических колебаний, а время вытекания жидкости из вертикальной трубки составляет четверть периода колебаний:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Вариант 2

$$1. a = \frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2} \approx 0,42 \text{ м/с}^2.$$

$$2. s = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{L^2}{16\mu h} \quad (\text{используйте законы сохранения импульса и энергии}).$$

$$3. \mu = \frac{M}{(m+M)\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{3}{4\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,3.$$

$$4. n_{\text{H}_2} = N_A \frac{\frac{p}{RT} - \frac{\rho}{M_{\text{Ar}}}}{1 - \frac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{Ar}}}} = 8,24 \cdot 10^5 \text{ м}^{-3} \quad (\text{здесь}$$

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}, \quad p = 10^5 \text{ Па}, \quad T = 273 \text{ К}, \\ M_{\text{Ar}} = 0,04 \text{ кг/моль}, \quad M_{\text{H}_2} = 0,02 \text{ кг/моль}).$$

$$5. \eta = \frac{A}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{1}{9} = 0,11 = 11\%.$$

$$6. \sigma = \frac{\epsilon_0 \Phi}{R} = 8,85 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2.$$

$$7. \frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1840.$$

8. См. рис.15.

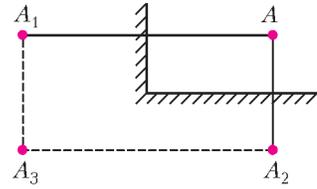


Рис. 15

$$9. W = 2C\epsilon^2.$$

10. $v_{3\text{max}} = \frac{q}{\sqrt{6mL\pi\epsilon_0}}$ (скорости шариков будут максимальны в тот момент, когда все они окажутся на одной прямой).

КВАНТ

12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
С.Л.Кузнецов, А.Ю.Котова,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, М.Н.Голованова,
Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

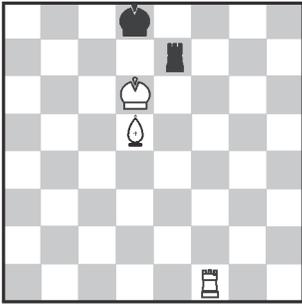
Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru**

Эндшпиль БЕЗ ПЕШЕК-2

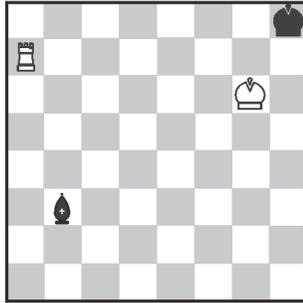
В прошлом выпуске шахматной странички разбирались способы защиты в эндшпиле «ладья + слон против ладьи». Несмотря на то что, как правило, при правильной защите слабейшая сторона способна добиться ничьей, существует такая расстановка на доске, при которой защититься уже невозможно. Ее подробно разобрал в своем этюде А.Филидор (1749):



1. ♖f8+ ♜e8 2. ♖f7! С угрозой ♖a7, удерживая короля на последней линии. Черные могут ходить только ладьей (на 2... ♜c8 выигрывает 3. ♖a7 ♜d8+ 4. ♚c6 ♜b8 5. ♖b7+ ♜a8 6. ♖b1 ♜a7 7. ♚c7) 2... ♜e2 3. ♖h7. Важно заманить черную ладью на нечетную горизонталь, чтобы после отступления слона она не могла дать шах по линии d. 3... ♜e1 4. ♖b7 ♜c1 (4... ♜c8 5. ♖b2 ♜d1 6. ♖h2 ♜b8 7. ♖a2) 5. ♜b3! Ключевая идея. Белые передают очередь хода черным, чтобы завлечь ладью на третью горизонталь. 5... ♜c3 6. ♜e6 ♜d3+ 7. ♜d5! ♜c3 8. ♖d7+ ♜c8 9. ♖h7 ♜b8 10. ♖b7+ ♜c8 11. ♖b4 ♜d8 12. ♜c4! И черные не могут дать шах с d3. 12... ♜c8 13. ♜e6+ с матом.

Эндшпиль «ладья против слона» довольно прост для анали-

за. В целом он ничеен, кроме тех случаев, когда король слабейшей стороны зажат в углу. В такой ситуации ничья получается, только если слон ходит по полям противоположного цвета относительно углового поля:



В этой позиции нет смысла давать шах 1. ♖a8+, так как после 1... ♜b8 получается патовая позиция. В случае 1. ♖h7+ ♜g8 2. ♖b7 спасает шах ♜c2+! Общая рекомендация для такого эндшпиля – держать слона таким образом, чтобы он мог в ответ на матовую угрозу дать шах, иначе есть риск проиграть (например, в варианте 1. ♖a8+ ♜b8 2. ♖a7 ♜e6? 3. ♖h7+ ♜g8 4. ♖e7 черные либо теряют слона, либо получают мат).

Если же слон ходит по полям, соответствующим угловому полю, то в таком случае ладья побеждает вне зависимости от очереди хода и положения слона. Выигрывающий метод – завлечь слона на после-

днюю горизонталь: 1. ♖f1 ♜h2 2. ♖f2 ♜g3 3. ♖g2 ♜d6 4. ♖d2 ♜e7 5. ♖a2, и черные не могут защититься от связки по последней горизонтالي с последующей потерей слона или с матом. При других отступлениях слона на любом из ходов белые добиваются победы точно таким же образом.

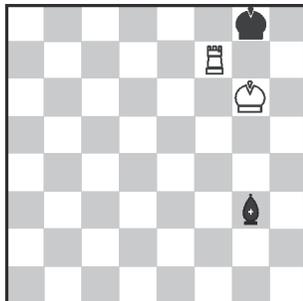
Что касается ладейно-коневых эндшпилей без пешек, то их особенности таковы:

- Окончание «ладья + конь против ладьи» практически невозможно выиграть, так как существуют всего несколько выигранных положений, при которых король слабейшей стороны неудачно располагается в углу, чего почти невозможно добиться в реальной партии. Поэтому в такой ситуации соперники высокого уровня при игре с классическим контролем практически всегда соглашались на ничью.

- Эндшпиль «ладья против коня» наиболее сложен для анализа. В случае если король и конь не разъединены, окончание практически невозможно выиграть. Соответственно, реальные шансы на победу есть в том случае, если король и конь находятся далеко друг от друга либо же они расположены рядом, но неудачно (например, рядом с угловым полем).

Подробнее обо всех разобранных эндшпилях можно прочитать в книге Д.Нанна «Секреты практических шахмат».

А.Русанов



Продуки с физикой



В разных странах используется разная ширина железнодорожной колеи.
Как же быть, если поезду нужно пересечь границу?..



СВОЯ КОЛЕЯ