

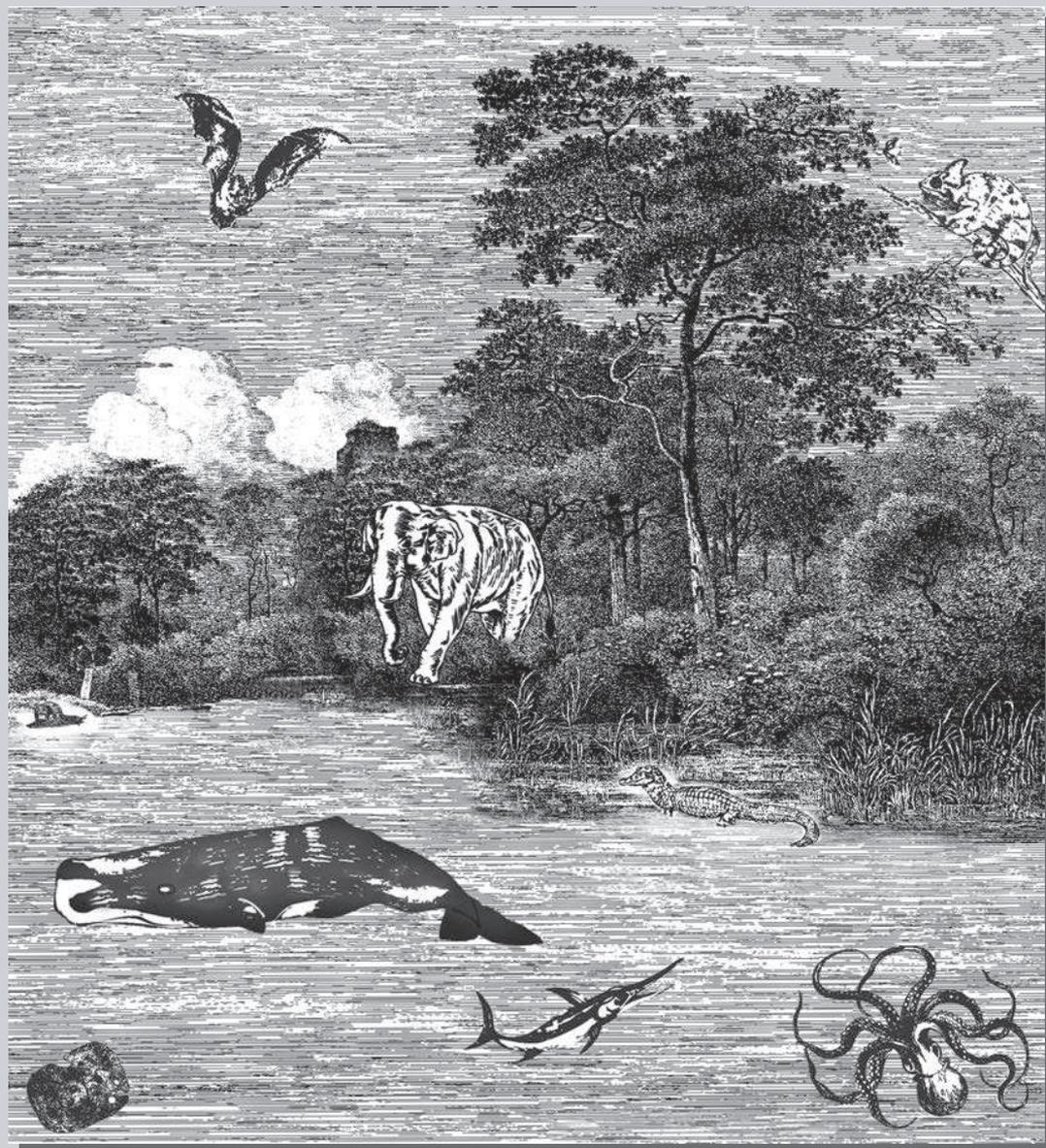
ЯНВАРЬ

ISSN 0130-2221

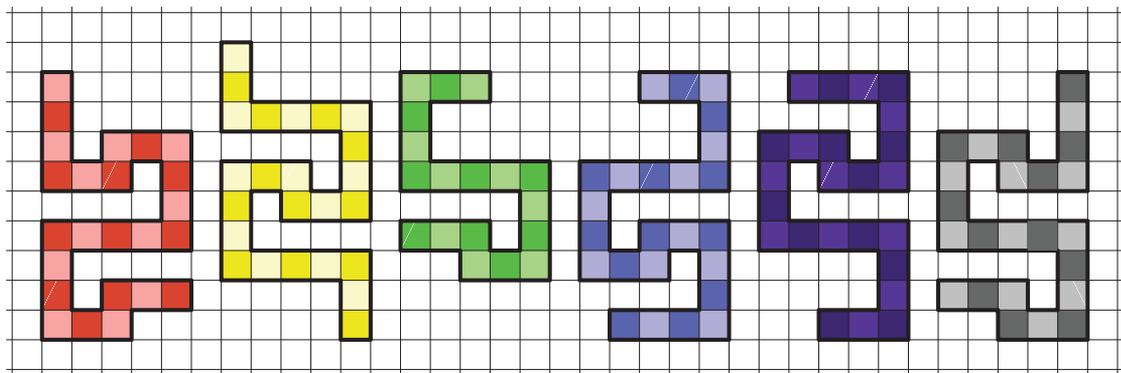
2017 · № 1

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# М•Е•А•Н•Д•Р•Ы



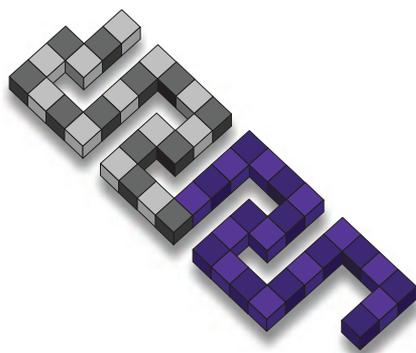
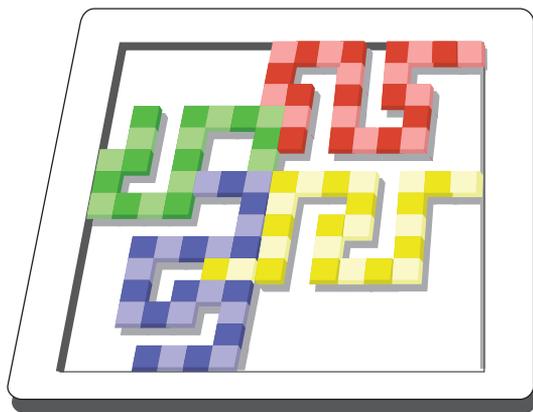
Эта головоломка состоит из поля 15×15 клеточек и шести «змеистых» деталей. Ее автору, Пантацису Хулису (Pantazis Houlis), они больше напоминают речные меандры, так что он назвал свою головоломку в их честь. Все детали можно рассматривать как «линии» из единичных квадратиков, их устройство показано на верхнем рисунке.

Предлагается несколько заданий.

- 1** Выберите любые три детали и разместите их на поле так, чтобы никакую деталь нельзя было сдвинуть, не выдвинув одну из них за пределы поля.
- 2** Разместите все шесть деталей на поле без наложений.
- 3** Сложите все детали в линию по аналогии с тем, как уложены две детали на нижнем рисунке справа.
- 4** Составьте «прямоугольную» замкнутую линию из всех шести деталей.

Желаем успеха!

Е.Епифанов



В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.Л.Семенов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, А.Я.Белов,  
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилини, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.А.Заславский,  
П.А.Жоженников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель  
главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев,  
И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица,  
В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,  
В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,  
Я.Е.Шнайдер**

- 2 Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные. *С.Дворянинов, В.Соловьев*  
8 Алгебра и арифметика элементарных параллелограммов. *А.Канунников*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи M2446–M2449, Ф2453–Ф2456  
16 Решения задач M2429–M2435, Ф2435–Ф2442

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 24 Физика+фауна

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ  
ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи  
30 Птичка вылетает! *Д.Кузнецов*

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 32 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 33 Теорема Птолемея и переключивание треугольников. *М.Горелов*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 36 Движение автомобилей и живых существ – и теорема о кинетической энергии. *А.Рыбаков*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 Обобщение теоремы Помпею. *Е.Бакаев*

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 43 Кривая, перевернутая вверх ногами. *В.Птушенко*

- 46 Ответы, указания, решения

Памяти В.Д.Арнольда (35)  
Вниманию наших читателей (14)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные

*С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ*

**В** 2015 ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ 100 ЛЕТ общей теории относительности – ОТО, предложенной Альбертом Эйнштейном. Александр Александрович Фридман в 1922 году из десяти довольно сложных уравнений ОТО получил два уравнения, описывающие рождение, жизнь и смерть наблюдаемой Вселенной. Они стали фундаментом бурно развивающейся науки – космологии. Оказывается, что уравнения Фридмана можно получить не только в теории Эйнштейна, но и в привычной нам классической механике.

## Модель первая: катание с гор

Представьте невысокую ледяную горку и хорошо скользящие санки (летом их можно заменить на скейт). Вы разгоняетесь, взлетаете на самую вершину горки, а потом по инерции скатываетесь с противоположного склона. Ваша скорость уменьшается при подъеме и увеличивается при спуске – об этом говорит нам и жизненный опыт, и формула закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U = E .$$

Здесь первое слагаемое в левой части это кинетическая энергия, второе – потенциальная, а правая часть – полная механическая энергия. Во многих школьных задачах считается, что полная механическая энергия сохраняется неизменной, причем точно. В жизни, конечно, это выполняется приблизительно – тем точнее, чем меньше трение. Если бы трения не было совсем, то санки никогда бы и не остановились. Потенциальную энергию тяготения обычно рассматривают как функцию высоты. Однако достаточно нарисовать сечение горки



вертикальной плоскостью, проходящей через траекторию саней, наложить на рисунок оси координат – и высота станет функцией от горизонтальной координаты  $x$ . Значит, подобрав соответствующий масштаб, мы получим график потенциальной энергии

$$U(x) = mgh(x).$$

И наоборот. Если дан график потенциальной энергии для некоторого тела, положение которого может быть задано одной координатой, то, не задумываясь о том, какой силе соответствует эта потенциальная энергия, мы можем отождествить движение тела с движением санок по реальным горам или ямам, имеющим изображенный на данном графике профиль. Далее, закон сохранения энергии позволит выразить кинетическую энергию одномерного движения как функцию координаты тела. Конечно, нужно также знать и полную энергию, которую можно найти по начальным данным: координате и скорости. Масса тела тоже должна быть известна. А по кинетической энергии можно определить скорость, правда с точностью до знака, так как направлений движения может быть два.

На рисунке 1 показаны три кривые, изображающие график потенциальной энергии, заданной функцией от положительной координаты  $R$ :

$$U(R) = -\frac{a}{R} - \frac{bR^2}{2}$$

при трех разных значениях параметра  $b$ , причем рассматривается случай  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Горизонтальные линии иллюстрируют возможность положительной, нулевой и отрицательной полной энергии. Конечно, кататься с такой горы можно только в мыслях – с обеих сторон вы покатитесь в бездну. Однако ниже мы покажем, в каких

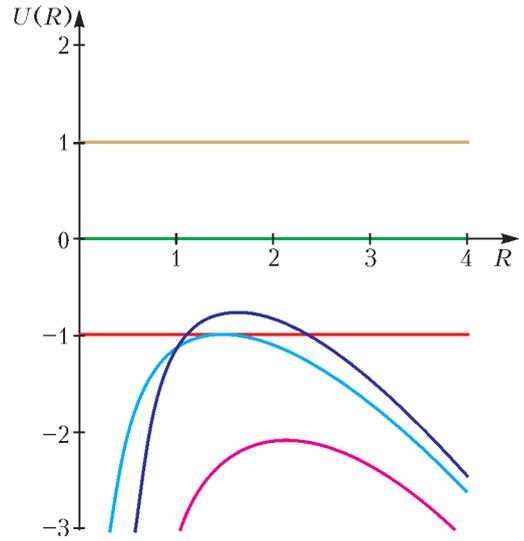


Рис. 1. Примеры графиков потенциальной энергии

именно физических задачах может встретиться обсуждаемая формула для потенциальной энергии.

### Модель вторая: стрельба из рогатки в открытом космосе

Сначала рассмотрим совсем простой случай:  $b = 0$ . Пусть в космосе есть однородный шар массой  $M$  и с него вдоль направления его радиуса выстреливают пробным телом массой  $m$ . Будем полагать  $m \ll M$ , тогда шар можно считать неподвижным. Учтем закон всемирного тяготения Ньютона в его полном виде, т.е. силу тяжести будем считать не постоянной, как вблизи поверхности Земли, а зависящей от расстояния  $R$  между центрами обоих тел:

$$F = -\frac{GMm}{R^2},$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$  – гравитационная постоянная. Знак «минус» должен напомнить нам, что направление силы, действующей на тело массой  $m$ , противоположно радиусу-вектору

этого тела, проведенному из центра тела массой  $M$ . Потенциальная энергия нашего пробного тела будет определяться формулой

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}.$$

Здесь мы считаем, что потенциальная энергия стремится к нулю при неограниченном возрастании  $R$ . Для тех, кто умеет дифференцировать, заметим, что если известна потенциальная энергия, то силу можно найти, вычислив производную:  $F = -U'(R)$ .

Как будет двигаться наше брошенное тело? Есть ровно три возможности: при  $E < 0$  тело вернется и упадет на свое прежнее место; при  $E = 0$  оно улетит бесконечно далеко и там остановится; наконец, при  $E > 0$  тело продолжит движение и на бесконечности. Во втором случае начальная скорость тела называется второй космической. Если тяжелым телом будет Земля, а пробное тело бросают с ее поверхности и пренебрегают сопротивлением атмосферы, то величина второй космической скорости будет равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} \approx 11200 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с},$$

где  $R_0 \approx 6,38 \cdot 10^6$  м – радиус Земли,  $M \approx 5,98 \cdot 10^{24}$  кг – масса Земли.

Заметим, что последняя формула, несмотря на то что она была получена на основе механики Ньютона и без всякой связи с теорией относительности, может быть использована для нахождения гравитационного радиуса тела в ОТО. Достаточно вместо  $v_{II}$  подставить скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, и мы получим гравитационный радиус тела массой  $M$ :

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Если тело сжать до размеров гравита-

ционного радиуса, то никакие силы не смогут остановить его дальнейшего сжатия под действием сил тяготения. Согласно ОТО, даже свет не может улететь от тела, радиус которого меньше  $R_g$ . Предоставим читателям возможность самостоятельно вычислить этот радиус, например для Земли или для Солнца.

### Модель третья: Ньютон против анти-Гука

Пусть теперь  $b \neq 0$  в нашей формуле для потенциальной энергии. Что может означать второе слагаемое в этой формуле? Для  $b < 0$  оно положительно и напоминает потенциальную энергию пружины. Воображаемая пружина тянет брошенное тело назад к центру шара с силой, подчиняющейся закону Гука  $F = -kR$ , причем  $k = |b|$ . Нас, однако, будет интересовать другой, весьма необычный случай:  $b > 0$ , который и отражен на рисунке 1. Тогда соответствующая сила должна отталкивать пробное тело от центра шара и возрастать с увеличением расстояния по закону  $F = +bR$ . В космологии аналогично ведет себя так называемая темная энергия. В задаче о брошенном теле мы позволим себе назвать это законом анти-Гука. Точку, в которой силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, уместно, как будет видно из дальнейшего, назвать точкой Эйнштейна.

Теперь, наконец, выпишем обещанные уравнения динамики Вселенной, полученные Фридманом из общей теории относительности, сохраняя все использованные им обозначения:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R''R}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \frac{\kappa}{2} c^2 \rho. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa = 16\pi G/c^2$ ,  $R$  – так называемый радиус мира (сейчас принят другой термин – масштабный множитель),  $\rho$  – средняя плотность вещества во Вселенной,  $\lambda$  – космологическая постоянная, введенная Эйнштейном. Штрихи обозначают производные по времени, т.е.  $R' = v$  – скорость изменения радиуса мира, а  $R'' = a$  – соответствующее ускорение. Далее мы постараемся убедить вас в том, что, даже не решая, а только обдумывая эти уравнения и построив по ним несколько графиков, можно понять закон эволюции Вселенной.

Будем предполагать, вслед за Эйнштейном и Фридманом, что Вселенная равномерно заполнена пылью, не создающей давления, что пространство одинаково в любой точке и по любому направлению, имеет постоянную положительную кривизну и простейшую топологию, а значит, оно подобно трехмерной сфере. Не советуем мучиться и пытаться себе ее вообразить – лучше представьте себя двумерным существом, живущим на поверхности обычного шара. Аналогом площади  $4\pi R^2$  двумерной сферы служит объем сферы трехмерной:  $V_3 = 2\pi^2 R^3$ .

Ясно, что уравнения Фридмана можно преобразовывать. Например, воспользовавшись вторым уравнением, можно исключить из первого  $R'$ . Можно, конечно, умножать и делить уравнения на выражения, отличные от нуля. Давайте, вслед за Фридманом, введем полную массу вещества во Вселенной:  $M = \rho V_3 = \rho \cdot 2\pi^2 R^3$ . Эта величина сохраняется при изменении радиуса мира  $R$ , что следует из приведенных уравнений Фридмана, если применить дифференцирование. После выражения плотности через массу и радиус мира, переобозначения космологической постоянной в виде  $\lambda = 3\omega^2$  и умножения обеих

частей уравнений на массу воображаемой частицы  $m$  мы приходим к таким формулам:

$$ma = -\alpha \frac{GmM}{R^2} + m\omega^2 R, \quad (3)$$

$$\frac{m\dot{v}^2}{2} = E - U(R), \quad (4)$$

где

$$U(R) = -\alpha \frac{GmM}{R} - \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \quad (5)$$

$$E = -\frac{mc^2}{2}.$$

Мы видим, что уравнения Фридмана (1) и (2) для Вселенной после преобразований почти совпадают с уравнениями классической механики для частицы массой  $m$ , движущейся радиально под действием силы притяжения Ньютона и силы отталкивания анти-Гука (модель третья). В частном случае  $\lambda = 3\omega^2 = 0$  модель третья сводится к модели второй – формула (3) есть второй закон Ньютона, а уравнение (4) – закон сохранения механической энергии. Единственное отличие заключается в появлении перед гравитационной постоянной  $G$  множителя  $\alpha = 2/(3\pi) \approx 0,21$ , который возникает из-за замены выражения  $V = (4/3)\pi R^3$  для объема шара в евклидовом пространстве на объем трехмерной сферы  $V_3 = 2\pi^2 R^3$ . Появление  $\alpha = V/V_3$  равносильно небольшому изменению гравитационной постоянной:  $G \rightarrow \alpha G$  и никак не отражается на качественной картине движения частицы, иллюстрирующего в нашей статье расширение Вселенной.

Новизна ОТО состоит, в частности, в том, что закон сохранения энергии оказывается одним из десяти уравнений этой теории, а при принятых Эйнштейном предположениях (о том, что

Вселенная в среднем одинакова во всех ее точках и во всех направлениях) этот закон выражается уравнением (2). И если в классической механике мы должны интегрировать по времени, чтобы вывести закон сохранения энергии из второго закона Ньютона, то в ОТО никакого интегрирования не требуется, все уже готово. Здесь энергия не вычисляется по свободно задаваемым начальным данным, а наоборот, эти данные оказываются связанными известным заранее значением энергии – например,  $E = -\frac{mc^2}{2}$ . Именно уравнение (2) является основным для космологии, именно оно называется в научной литературе уравнением Фридмана.

### Потенциальные горы для Вселенной

Как должна вести себя Вселенная, подчиненная законам Фридмана? Оказывается, так же, как брошенное в радиальном направлении от большой точечной массы  $M$  тело массой  $m$  с потенциальной энергией (5), подчиненное законам механики Ньютона. Заметим, что эти законы не запрещают движение со скоростью, сколь угодно большей скорости света. Прав-

да, для лучшего сходства с эволюцией Вселенной нам придется считать началом полета тела ситуацию, когда расстояние  $R$  почти равно нулю, скорость  $v = R'$  почти равна бесконечности, но полная энергия конечна и равна минус  $mc^2/2$  (однако, возможна и иная точка зрения – об этом будет рассказано во второй части этой статьи). Обратите внимание, что при такой постановке задачи тяжелое, но точечное тело массой  $M$  играет роль всего вещества Вселенной, а движение тела массой  $m$  описывает изменение геометрии Вселенной. При этом динамика геометрии (геометродинамика) определяется количеством вещества. Вы заметили, что, согласно уравнениям (3), (4), масса движущегося тела  $m$  никак не скажется на его движении? Разделив уравнение (4) на модуль полной энергии тела, т.е. на  $mc^2/2$ , и вводя безразмерную переменную  $x = R/R_\Xi$ , где

$$R_\Xi = \sqrt[3]{\frac{\alpha GM}{\omega^2}}$$

– координата точки Эйнштейна, мы получим уравнение, связывающее безразмерные величины:

$$\tilde{E}_{\text{кин}} = -1 - \tilde{U}, \text{ или}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = -1 + \frac{\beta}{3} \left( \frac{2}{x} + x^2 \right),$$

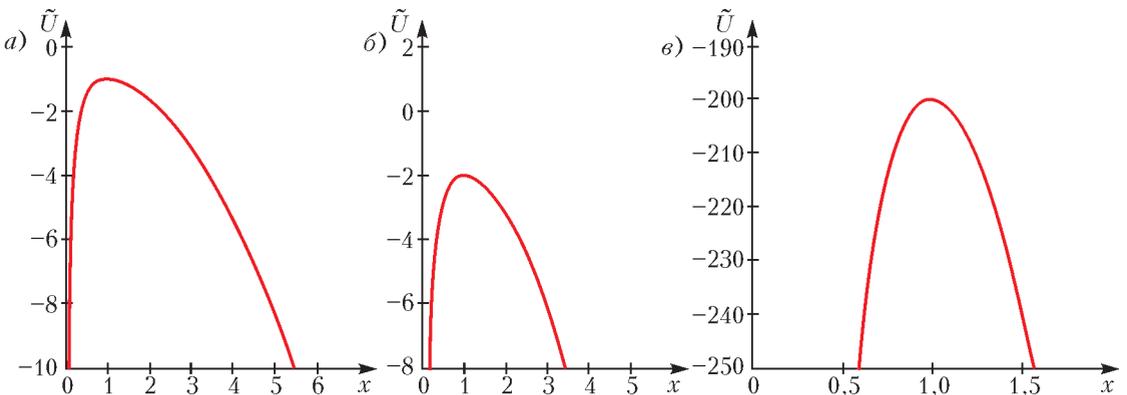


Рис. 2. Графики безразмерной потенциальной энергии: а) при  $\beta = 1$ , б) при  $\beta = 2$ , в) при  $\beta = 200$

где

$$\tilde{E}_{\text{кин}} = \frac{v^2}{c^2}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{|E|} = -\frac{\beta}{3} \left( \frac{2}{x} + x^2 \right),$$

$$\beta = \frac{R_g}{\pi R_{\text{Э}}}.$$

Построим графики зависимости безразмерной потенциальной энергии от безразмерного радиуса Вселенной при разных значениях параметра  $\beta$  (рис.2). Случай  $\beta = 1$  соответствует желанию Эйнштейна получить неизменную Вселенную: уровень безразмерной полной энергии  $\tilde{E} = -1$  касается вершины горы. Случай  $\beta = 2$  дает небольшое, но качественное отличие от предыдущего: уровень безразмерной полной энергии  $\tilde{E} = -1$  лежит выше кривой. Случай  $\beta = 200$  учитывает современные данные – точнее, в отличие от предыдущих примеров, не противоречит им, здесь уровень безразмерной полной энергии *намного выше* вершины горы. Из рисунка 2 видно, что максимум потенциальной энергии всегда находится в точке Эйнштейна, т.е. при  $x = 1$ .

Для большей наглядности построим теперь по отдельности потенциальные энергии Ньютона (гипербола) и анти-Гука (перевернутая парабола), а также их сумму (рис.3).

Вид графиков потенциальной энергии на рисунках 2, 3, как и на рисунке 1, напоминает крутую горку, по которой можно скатиться в бездну и слева и справа. Бездна соответствует бесконечной отрицательной потенциальной энергии, а значит, и бесконечно большой кинетической энергии.

Скатывание с горки справа налево соответствует все ускоряющемуся сжатию Вселенной, вплоть до нулевого радиуса; скатывание слева направо соответствует ускоренному расширению Вселенной, стремящейся к беско-

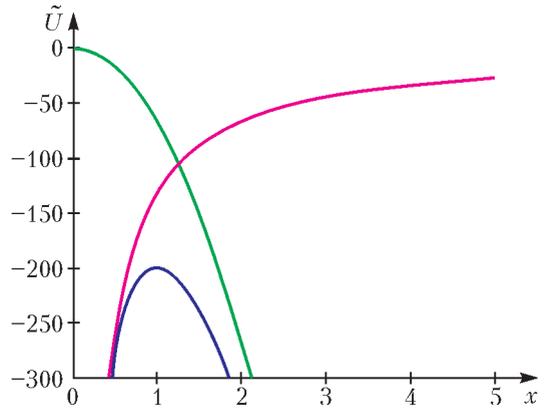


Рис. 3. Потенциальные энергии Ньютона (красная линия), анти-Гука (зеленая линия) и их сумма (синяя линия) при  $\beta = 200$

нечному радиусу. Достижима ли при движении слева направо для брошенного тела и для Вселенной вершина горы, она же – максимум потенциальной энергии, она же – точка Эйнштейна?

Если она лежит выше значения полной энергии, т.е.  $\tilde{U}_{\text{max}} > -1$ , то вершина недостижима. Это значит, что брошенное тело упадет обратно, а Вселенная, начавшая в момент Большого взрыва расширяться с бесконечной скоростью, будет постепенно замедляться, замрет на мгновение и покажется, наращивая скорость, обратно к нулевому радиусу. Это происходит при  $0 < \beta < 1$ .

Пройдет ли Вселенная через эту точку и начнет ли расширяться снова, повторяя цикл за циклом?

(Окончание следует)

# Алгебра и арифметика элементарных параллелограммов

А.КАНУННИКОВ

**М**Ы РАССКАЖЕМ ОДИН КЛАССИЧЕСКИЙ сюжет, в котором гармонично сочетаются алгебра, геометрия и арифметика. Речь пойдет об *элементарных параллелограммах* на клетчатой бумаге. Так называются параллелограммы, вершины которых – это узлы тетрадной сетки и которые не содержат ни внутри, ни на границе других узлов. Примеры – на рисунке 1. Их также называют *примитивными, простыми, фундаментальными*.

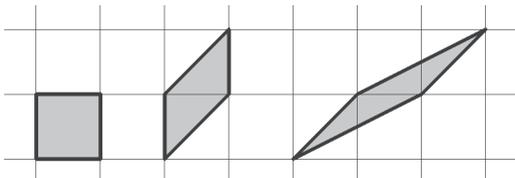


Рис. 1

Вот одна известная с давних времен детская задача, в которой элементарный параллелограмм спрятан в буквальном смысле слова!

**Задача 1.** Квадрат  $8 \times 8$  разрежали на части и сложили из них прямоугольник  $5 \times 13$  (рис.2). Но  $8 \times 8 = 64$ , а  $5 \times 13 = 65$ . Откуда взялась лишняя клетка?

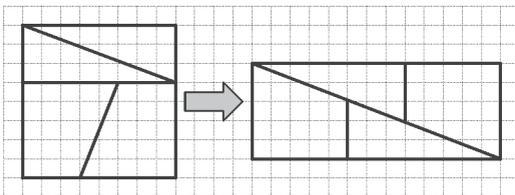


Рис. 2

Мы докажем следующий классический результат об элементарных параллелограммах.

**Теорема 1.** *Параллелограмм с вершинами в узлах клетчатой бумаги является элементарным в точности тогда, когда его площадь равна 1 (площади одной клетки).*

Эта теорема имеет разнообразные применения. Например, она выполняет роль «базы индукции» в доказательстве *формулы Пика*, выражающей площадь  $S$  многоугольника с вершинами в узлах сетки через число  $N$  узлов, лежащих внутри него, и число  $D$  узлов на его границе:  $S = N + \frac{D}{2} - 1$ ; см., например, [2, 3]. (Отметим, что формулу Пика можно доказать и не опираясь на теорему 1 – ее частный случай.)

*Замечание «на вырост».* С точки зрения высшей алгебры этот критерий элементарности интересен тем, что по сути он эквивалентен описанию базисов свободной абелевой группы  $\mathbb{Z}^2$  и описанию группы ее автоморфизмов, причем все сказанное легко обобщается на  $n$ -мерный случай. (Это одна из тем университетского курса алгебры; см., например, [4].)

Существуют разные подходы к доказательству теоремы 1.

• В.И.Арнольд [1] намеренно привел пусть нестрогое, но понятное «физическое» рассуждение, проясняющее суть дела. Идея в том, что площадь достаточно большой «кляксы» на клетчатой бумаге примерно равна числу

единичных квадратов внутри нее, а также числу точек внутри нее, а тогда и числу элементарных параллелограммов внутри нее.

• Ранее, применив эту идею для круга, Гильберт и Кон-Фоссен [5, глава 2, п.5] изложили строгое доказательство, использующее, правда, предельный переход.

• В.В.Вавилов и А.В.Устинов [2] доказывают равносильную теорему о площади примитивного треугольника (равной  $1/2$ ), окаймляя его прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, и подсчитывая целые точки внутри образовавшихся многоугольников.

• Н.Б. Васильев [3] также рассматривает примитивный треугольник. Основная идея – преобразовать его в треугольник с вершинами в одной клетке путем отражения вершин друг относительно друга.

Предлагаемый нами в §1 метод доказательства – алгебраический. Мы сведем утверждение теоремы 1 – только не удивляйтесь – к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Раскрыть эту удивительную и важную связь между геометрическим и алгебраическим сюжетами – пожалуй, главная цель статьи.

В §2 мы изложим другое доказательство, основанное на арифметических идеях. Главную роль в нем играет алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел последовательным делением с остатком.

**§1. Алгебраические идеи: соображения линейности**

Рассмотрим на координатной плоскости множество точек с целыми координатами (узлов клетчатой бумаги) – оно обозначается<sup>1</sup> через  $\mathbb{Z}^2$ . Пусть

<sup>1</sup> Буквой  $\mathbb{Z}$  обозначают множество целых чисел (от нем. *Zahl* – число), соответственно,  $\mathbb{Z}^2$  – это множество пар целых чисел.

параллелограмм  $P$  имеет вершины  $(0,0)$ ,  $(a,b)$ ,  $(c,d)$  и  $(a+c, b+d)$  в  $\mathbb{Z}^2$ , т.е., как говорят, построен на векторах  $(a,b)$  и  $(c,d)$ , или натянут на эти векторы. (Мы отождествляем точку  $A = (x, y)$  с ее радиусом-вектором  $\overrightarrow{OA}$ , где  $O = (0,0)$ .)

Рассмотрим решетку, порожденную параллелограммом  $P$ , – по определению это множество точек

$$\{x(a,b) + y(c,d) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

(например, единичный квадрат, натянутый на векторы  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ , порождает всю решетку  $\mathbb{Z}^2$ ). Примеры приведены на рисунке 3, где под каж-

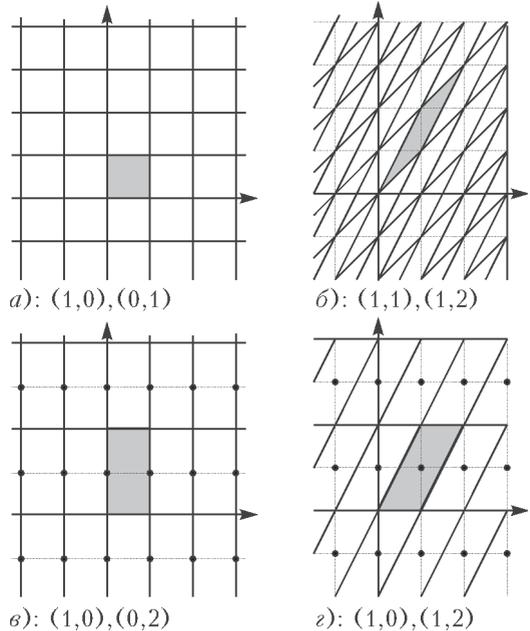


Рис. 3

дой картинкой подписаны базисные векторы.

Ключевая идея нашего доказательства теоремы 1 – переформулировать условие элементарности следующим образом<sup>2</sup>:

<sup>2</sup> Эта переформулировка объясняет, почему элементарный параллелограмм называется также фундаментальным – это базисный параллелограмм решетки.

**параллелограмм  $P$  элементарен в точности тогда, когда он порождает всю решетку  $\mathbb{Z}^2$**

(это так на рисунках 3,  $a$  и  $b$  и не так на рисунках 3,  $v$  и  $z$ , на которых отмечены узлы  $\mathbb{Z}^2$ , не являющиеся узлами решетки, порожденной  $P$ ).

Иными словами, каждая точка из  $\mathbb{Z}^2$  должна иметь вид  $x(a,b) + y(c,d)$  для некоторых целых  $x, y$ , т.е. система уравнений

$$\begin{cases} ax + cy = e, \\ bx + dy = f \end{cases} \quad (1)$$

должна иметь решение  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  при всех  $e, f \in \mathbb{Z}$ .

Число  $\Delta = ad - bc$  называется *определителем* системы (1). Легко показать, что при  $\Delta \neq 0$  (т.е. при неколлинеарных векторах  $(a,b)$  и  $(c,d)$ ) система (1) имеет единственное решение

$$x = \frac{de - cf}{\Delta}, \quad y = \frac{af - be}{\Delta}.$$

При этом числа  $x$  и  $y$  должны быть целыми при любых целых  $e$  и  $f$ . Взяв  $(e, f) = (1, 0)$ , получим, что  $d$  и  $b$  кратны  $\Delta$ , а взяв  $(e, f) = (0, 1)$  – что  $c$  и  $a$  кратны  $\Delta$ . Отсюда

$$ad, bc : \Delta^2 \Rightarrow \Delta = ad - bc : \Delta^2 \Rightarrow \Delta = \pm 1.$$

Обратное очевидно: при  $\Delta = \pm 1$  числа  $x, y$  целые при любых целых  $e, f$ . Окончательно,

$$P \text{ элементарен} \Leftrightarrow |ad - bc| = 1.$$

Теорема 1 теперь вытекает из следующего хорошо известного факта.

**Теорема 2.** *Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $(a,b)$  и  $(c,d)$ , равна  $|ad - bc|$ .*

Теорема 2 имеет важное самостоятельное значение (геометрический смысл определителя!), и на ней стоит остановиться поподробнее. Сначала приведем наброски доказательств, основанных на школьных идеях.

• *Метод 2 класса.* Достроим параллелограмм до окаймляющего его прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами с помощью прямоугольных треугольников и прямоугольников – их площади легко находятся. Например, в случае, как на рисунке 4, имеем

$$S = (a + c)(b + d) - 2bc - ab - cd = ad - bc.$$

(При перестановке векторов  $(a,b) \leftrightarrow (c,d)$  ответ был бы  $bc - ad$ .)

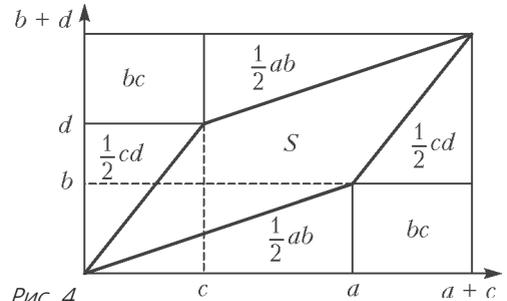


Рис. 4

Но бывают и другие случаи расположения векторов – выкладки в них хотя и аналогичны, но формально отличаются. Полный перебор случаев – досадная необходимость, но такова плата за элементарность.

• *Метод 9 класса.* Вычислим площадь параллелограмма как произведение сторон на синус угла между ними, который найдем из теоремы косинусов.<sup>3</sup> Читатель может проделать выкладки и убедиться, что все корни  $\sqrt{a^2 + b^2}, \dots$  сократятся и останется  $|ad - bc|$ . Отметим только, что модуль появится при извлечении корня  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ , под которым (среди прочего) окажется  $(ad - bc)^2$ .

Неуклюжие радикалы появились и исчезли. Может быть, без них можно обойтись?

<sup>3</sup> Альтернатива – применить формулу Герона для площади треугольника.

• *Метод 10 класса.* Воспользуемся той же формулой площади параллелограмма, но более интеллигентно – в полярных координатах:

$$(a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

$$(c, d) = (R \cos \psi, R \sin \psi).$$

Поскольку углы  $\varphi$  и  $\psi$  рассматриваются по модулю  $2\pi$ , можно считать, что  $-\pi < \psi - \varphi < \pi$ . Если  $0 < \psi - \varphi < \pi$ , то

$$S = rR \sin(\psi - \varphi) =$$

$$= rR(\sin \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \psi) = ad - bc.$$

Аналогично, в случае  $0 < \varphi - \psi < \pi$  получим  $S = bc - ad$ .

Кажущаяся простота этого доказательства обманчива: вся сложность спрятана в формуле синуса разности (которую, кстати, можно доказать, проведя выкладки предыдущим методом). Зато, в отличие от двух предыдущих методов, этот сразу проясняет, от чего зависит раскрытие модуля  $|ad - bc|$ , и подводит нас к важному понятию *ориентации*.

Базис  $(\vec{u}, \vec{v})$  на плоскости считается *положительно ориентированным*, если кратчайший поворот от  $\vec{u}$  к  $\vec{v}$  происходит против часовой стрелки, а иначе – *отрицательно ориентированным*.

Изложим концептуальное доказательство теоремы 2 *методом 1 курса*.

Площадь  $S(\vec{u}, \vec{v})$  параллелограмма, натянутого на неколлинеарные векторы  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , обладает свойствами

$$(S_1) S(\vec{u}, k\vec{v}) = kS(\vec{u}, \vec{v}) \text{ при } k > 0,$$

$$(S_2) S(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{u}, \vec{w}),$$

если векторы  $\vec{u}$ ,  $\vec{w}$  лежат по одну сторону от прямой, содержащей вектор  $\vec{u}$ .

Чтобы избавиться в этих свойствах от ограничений, рассмотрим *ориентированную площадь параллелограмма*,

называемую также *внешним произведением*:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm S(\vec{u}, \vec{v}),$$

где знак определяется ориентацией базиса  $(\vec{u}, \vec{v})$ , а в случае  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  считаем, что  $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ .

Формулу «площадь параллелограмма есть произведение основания на высоту» теперь можно уточнить:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|(\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}),$$

где  $(\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}) = \pm |\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}|$  – высота со знаком, определяемым ориентацией точно так же (рис.5).

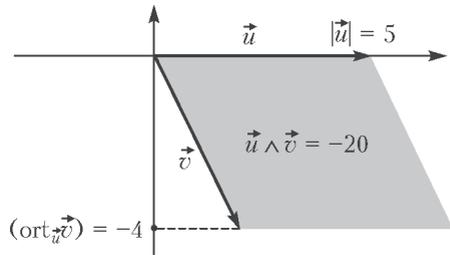


Рис. 5

Чем ориентированная высота  $(\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v})$  лучше обычной  $|\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}|$ ? А тем, что *уже для всех* векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  и чисел  $k \in \mathbb{R}$  (без ограничений, как в  $(S_1)$  и  $(S_2)$ ) верны равенства

$$(\text{ort}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w})) = (\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}) + (\text{ort}_{\vec{u}}\vec{w}),$$

$$(\text{ort}_{\vec{u}}(k\vec{v})) = k(\text{ort}_{\vec{u}}\vec{v}).$$

Отсюда и из *кососимметричности*  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$  следуют свойства внешнего произведения<sup>4</sup>:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w},$$

$$\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}),$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w},$$

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

<sup>4</sup> Эти равенства выражают свойство *билинейности* – линейности по каждому аргументу (когда другой фиксирован) – и тем самым оправдывают название «произведение».

Теперь теорему 2 можно доказать алгебраически – раскрытием скобок. Именно, обозначив  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  и  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ , имеем

$$\begin{aligned} (a, b) \wedge (c, d) &= (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \wedge (c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) = \\ &= ac \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1}_0 + ad \underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2}_1 + bc \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{-1} + \\ &\quad + bd \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2}_0 = ad - bc. \end{aligned}$$

*Замечание.* Теоремы 1 и 2 верны для любой плоской решетки, коль скоро площадь (любого) ее базисного параллелограмма принята за единицу; угол между базисными векторами и отношение их длин значения не имеют. В этом легко убедиться, проанализировав приведенные доказательства.

Подробнее об ориентированных площадях см. [6].

## §2. Арифметические аспекты: алгоритм Евклида

Элементарные параллелограммы – одни из главных героев *геометрии чисел*, разработанной немецким математиком Германом Минковским в конце XIX века. Они естественным образом связаны с диофантовыми уравнениями и алгоритмом Евклида, раскрывают геометрическую природу цепных дробей [1]. В этом параграфе мы рассмотрим два применения алгоритма Евклида:

- практическое – как найти элементарные параллелограммы с заданной стороной;
- теоретическое – как доказать теорему 1.

Пусть параллелограмм, построенный на векторах  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ , элементарен. Тогда, в частности, на его сторонах нет узлов сетки (кроме вершин), а это равносильно, как несложно понять, взаимной простоте чисел  $a, b$  и чисел  $c, d$ . Но мы уже знаем больше: указанные пары чисел, будучи связанными соотношением  $|ad - bc| = 1$  (критерием элементарности), как бы

подтверждают взаимную простоту друг друга! (Всякий общий делитель  $a$  и  $b$  или  $c$  и  $d$  делит также  $ad - bc = \pm 1$ , т.е. равен 1.)

Чтобы для данных взаимно простых чисел  $a$  и  $b$  найти все элементарные параллелограммы с вершинами  $(0, 0)$  и  $(a, b)$ , надо решить два диофантовых уравнения  $ax + by = \pm 1$ . Это можно сделать, применив к числам  $a$  и  $b$  алгоритм Евклида и его обратный ход, выражающий НОД двух чисел их линейной комбинацией. Поясним сказанное на примере.

**Пример.** Решим уравнения

$$16x + 39y = \pm 1.$$

*Прямой ход:*      *Обратный ход:*

$$\begin{aligned} 39 &= 16 \cdot 2 + 7 & 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = \\ & & &= 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 = \\ 16 &= 7 \cdot 2 + 2 & &= 7 \cdot 7 - 16 \cdot 3 = \\ & & &= (39 - 16 \cdot 2) \cdot 7 - \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 & &- 16 \cdot 3 = \\ & & &= 39 \cdot 7 - 16 \cdot 17. \end{aligned}$$

Решение уравнений:

$$\begin{aligned} 16x + 39y = 1 &= 39 \cdot 7 - 16 \cdot 17 \\ &\Leftrightarrow 16(x + 17) = 39(7 - y) \\ (\Rightarrow x + 17 : 39, \text{ так как числа } 39 \text{ и } 16 \\ &\text{ взаимно просты}^5) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 17 = 39t, \\ 7 - y = 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -17 + 39t, \\ y = 7 - 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z};$$

$$16x + 39y = -1 \Leftrightarrow 16(-x) + 39(-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - 39t, \\ y = -7 + 16t, \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{Z}.$$

<sup>5</sup> Непосредственное обоснование опирается опять-таки на обратный ход алгоритма Евклида:  $x + 17 = 39 \cdot 7(x + 17) - 16 \cdot 17(x + 17) = 39 \cdot 7(x + 17) + 17 \cdot 39(y - 7) : 39$ .

Следуя разобранному примеру, можно доказать следующую теорему (см. любой учебник по элементарной теории чисел).

**Теорема 3.** Пусть целые числа  $a, b$  взаимно просты. Тогда уравнение  $ax + by = t$  разрешимо в целых числах при любом целом  $t$ ; если  $(x_0, y_0)$  — одно из его решений, то общее решение дается формулой

$$(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

В частности ( $m = \pm 1$ ), существует бесконечная серия элементарных параллелограммов с вершинами  $(0, 0)$  и  $(a, b)$ .

В заключение расскажем еще одно доказательство теоремы 1, в основе которого лежит алгоритм Евклида. Содержательная часть теоремы 1 — в том, что площадь элементарного параллелограмма равна 1. Обратное проще: параллелограмм с целыми вершинами, внутри или на стороне которого есть целая точка, можно разбить на 3 или 4 треугольника с целыми вершинами, а площадь любого такого треугольника — число полуцелое<sup>6</sup> и потому не меньше  $1/2$ .

Итак, пусть элементарный параллелограмм  $P$  площади  $S$  натянут на векторы  $(a, b)$  и  $(c, d)$ . Тогда  $\text{НОД}(a, b) = 1$ . Если  $(a, b) = (1, 0)$ , то нам повезло: для элементарности  $P$  необходимо  $d = \pm 1$  (если  $|d| > 1$ , то  $P$  содержит целую точку, отличную от вершины; рис.6), откуда  $S = |ad - bc| = |1(\pm 1) - 0c| = 1$ .

В общем случае пару  $(a, b)$  можно перевести в пару  $(1, 0)$  алгоритмом Евклида. Главная идея — выполнить деление с остатком  $a = bq + r$  и замену координат  $(a, b) \rightarrow (b, r)$  геометричес-

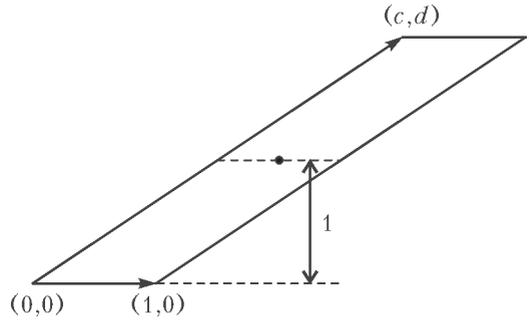


Рис. 6

ки — совершив преобразование плоскости по правилу

$$\mathcal{A}: (x, y) \mapsto (y, x - qy). \quad (2)$$

(Легко видеть, что при этом параллельные прямые переходят в параллельные, а значит, параллелограммы — в параллелограммы.) Выполнив серию таких преобразований в соответствии с алгоритмом Евклида, переведем  $P$  в параллелограмм, натянутый на вектор  $(1, 0)$  и еще какой-то, а этот случай мы уже рассмотрели.

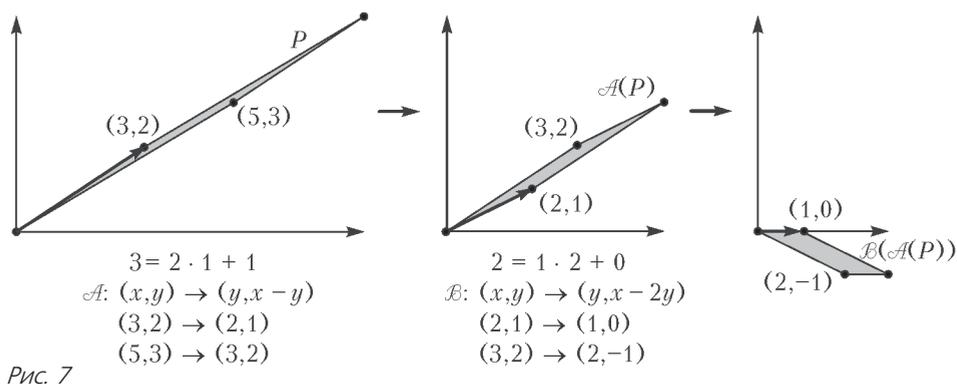
**Пример** разобран на рисунке 7:  $P$  натянут на векторы  $(3, 2)$  и  $(5, 3)$ , к координатам  $(3, 2)$  применяется алгоритм Евклида:  $(3, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 0)$ , при этом второй вектор преобразуется так:  $(5, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, -1)$ . Таким образом,  $P$  сначала переходит в  $\mathcal{A}(P)$ , а затем — в  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(P))$ .

Доказательство теоремы 1 завершает лемма.

**Лемма.** Для любого элементарного параллелограмма  $P$  его образ  $\mathcal{A}(P)$  при отображении (2) (для любого целого  $q$ ) — элементарный параллелограмм той же площади.

Действительно, вершины  $P$  перейдут в вершины  $\mathcal{A}(P)$ , а остальные целые точки лежат вне  $P$ , так что их образы окажутся вне  $\mathcal{A}(P)$ . Значит, если внутри или на границе параллелограмма  $\mathcal{A}(P)$  вдруг оказалась целая точка, отличная от вершины, то ее преобраз не из  $\mathbb{Z}^2$ . Такое и впрямь

<sup>6</sup> Это следует не только из теоремы 2, но — даже еще проще — из соображений окаймления; см. «Метод 2 класса».



могло бы случиться, скажем, для преобразования  $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ , но наше  $\mathcal{A}$  отображает решетку  $\mathbb{Z}^2$  на себя взаимно однозначно:  $x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y, x - y \in \mathbb{Z}$  при любом целом  $q$ . Итак, параллелограмм  $\mathcal{A}(P)$  тоже элементарный, как и  $P$ .

Что касается равенства площадей  $P$  и  $\mathcal{A}(P)$ , то оно легко проверяется по формуле из теоремы 2. Лемма, а с ней и теорема 1 доказаны.

### Задачи

2. Несложно построить элементарный треугольник со сколь угодно большим периметром. Например, таков треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(n, 1)$ . Постройте элементарный треугольник со сколь угодно длинными всеми тремя сторонами.

3. Для заданных целых чисел  $a, b, c, d$  с условием  $ad \neq bc$  сосчитайте число узлов сетки, лежащих: а) на границе; б) внутри параллелограмма, построенного на векторах  $(a, b)$  и  $(c, d)$ .

4. Докажите аналоги теорем 1 и 2 для параллелепипедов с вершинами в узлах трехмерной решетки  $\mathbb{Z}^3$ . (На самом деле они верны и для  $n$ -мерной решетки  $\mathbb{Z}^n$ ; для доказательства надо построить теорию систем линейных уравнений и определителей, чем занимаются на первом курсе математических факультетов. Но случай  $n = 3$  полезно разобрать самостоятельно в школьные годы.)

Отметим, что трехмерного аналога формулы Пика не существует; см. [2, с.58].

### Литература

1. В.И. Арнольд. Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2001.
2. В.В. Вавилов, А.В. Устинов. Многоугольники на решетках. – М.: МЦНМО, 2006.
3. Н.Б. Васильев. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.
4. Э.Б. Винберг. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2011.
5. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. – ОНТИ, 1936.
6. А. Лопшиц. Площади ориентированных фигур. – «Квант», 1978, №3.

### Вниманию наших читателей

Как вы, наверное, заметили, в нынешнем году наш журнал выходит в новом формате. И это не единственное изменение. Теперь мы будем выпускать 12 номеров в год, но без приложений. В остальном же «Квант» остается тем же, что и был, – научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и всех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» – 90964.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2446 – M2449 предлагались на XXXVIII Турнире городов.

## Задачи M2446–M2449, Ф2453–Ф2456

**M2446.** а) Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

*Н. Чернятьев*

б) Тот же вопрос, если ребят 100 и одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных.

*Жюри Турнира городов*

**M2447.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла (рис. 1).

*А. Заславский*

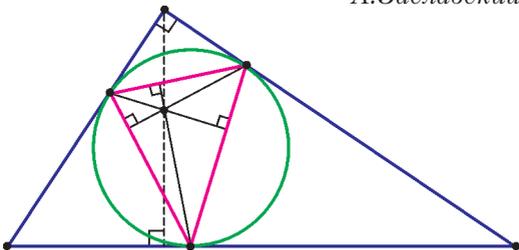


Рис. 1

**M2448.** На прямой отмечены 100 точек, и еще одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

*Е. Бакаев*

**M2449\***. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причем лягушки по-прежнему должны находиться в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать  $n$  ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать  $n$  ходов было бы столько же.

*Ф. Петров*

**Ф2453.** Один моль золота нагрели от 0 К до 336 К, при этом внутренняя энергия золота увеличилась на 5,2 кДж. Известно, что при температурах ниже так называемой температуры Дебая  $T_D$  молярная теплоемкость  $C$  твердых тел растет с температурой по закону  $C = \alpha T^3$ , а при температурах выше  $T_D$  для твердых тел справедлив закон Дюлонга и Пти:  $C = 3R$  (где  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) – универсальная

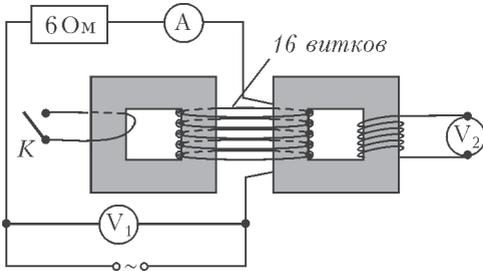
газовая постоянная). Оцените температуру Дебая для золота.

*Т.Золотов*

**Ф2454.** Расстояние между двумя одинаковыми высотными домами равно  $L = 150$  м. Между домами натянута проволока так, что вблизи мест крепления они составляют с горизонтом одинаковые малые углы  $\alpha = 5^\circ$ . Возбравшись на крышу, школьник Вася проводит опасный эксперимент. Он ударяет палкой по проводу вблизи места крепления и измеряет время, через которое бегущее по проводу «возмущение» возвращается к Васе после отражения от другого конца проволоки. Каков результат измерения Васи?

*Э.Васин*

**Ф2455.** Проволочная обмотка из 16 витков охватывает два одинаковых сердечника, сделанных из материала с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ . Цепь, изображенная на рисунке, подключена к источ-



нику переменного синусоидального напряжения. Показания идеальных приборов таковы:  $U_1 = U_2 = 10$  В,  $I = 1$  А. Какое число витков имеет катушка, к которой подключен вольтметр  $V_2$ ? Что будут показывать приборы, если замкнуть ключ  $K$ ? Сопротивления проводов катушек малы.

*С.Варламов*

**Ф2456.** Астрофизиками обнаружены газовые облака, движущиеся по почти круговым орбитам вокруг центра нашей Галактики. Такой вывод был сделан на основании результатов наблюдений за свечением этих облаков. Оказалось, что частоты  $f$

в спектрах излучения молекул или атомов газовых облаков изменяются по гармоническому закону с периодом порядка 10 лет вблизи соответствующих частот  $f_0$  неподвижных атомов и молекул таких же газов. Причем выполняется такое соотношение:  $(f_{\max} - f_{\min})/f_0 \approx 10^{-3}$ . Оцените массу объекта (черной дыры), находящегося в центре нашей Галактики.

*В.Слаутинский*

### Решения задач М2429–М2435, Ф2435–Ф2442

**М2429.** В Национальной баскетбольной ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Может ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

**Ответ:** нет, не сможет.

Пусть  $x$  и  $y$  – общее число матчей, сыгранных внутри Восточной и Западной конференций соответственно, а  $z$  – число матчей между командами разных конференций. Нам надо доказать, что равенство

$$z = \frac{x + y + z}{2} \text{ невозможно.}$$

Каждая из  $k$  команд Восточной конференции участвует в 82 играх; значит,  $82k = 2x + z$  (коэффициент 2 появился из-за того, что каждый внутренний матч учтен у обеих участвовавших в нем команд). Отсюда число  $z = 82k - 2x$  четно. Но из подсчета общего числа матчей  $x + y + z =$

$$= \frac{30 \cdot 82}{2} \text{ следует, что число}$$

$$\frac{x + y + z}{2} = 15 \cdot 41 \text{ нечетно. Значит, равенство}$$

$$z = \frac{x + y + z}{2} \text{ не может выполняться.}$$

*А.Грибалко*

**M2430.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

**Ответ:** на 8 нулей.

Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно  $9 \cdot 10^9$ , так что сумма наших чисел не меньше  $9 \cdot 10^9$ . Значит, одно из них не меньше  $10^9$ , что невозможно.

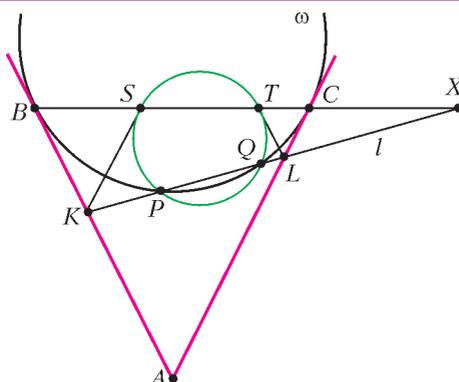
Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна  $81 \cdot 10^8$ .

Н.Агаханов

**M2431.** Окружность  $\omega$  касается сторон угла  $BAC$  в точках  $B$  и  $C$ . Прямая  $l$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Окружность  $\omega$  пересекает  $l$  в точках  $P$  и  $Q$ . Точки  $S$  и  $T$  выбраны на отрезке  $BC$  так, что  $KS \parallel AC$  и  $LT \parallel AB$ . Докажите, что точки  $P, Q, S$  и  $T$  лежат на одной окружности.

Если  $l \parallel BC$ , утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ .

Пусть теперь прямые  $l$  и  $BC$  пересекаются в точке  $X$  (см. рисунок). Из параллельности получаем  $\frac{XB}{XT} = \frac{XK}{XL} = \frac{XS}{XC}$ , откуда  $XT \cdot XS = XB \cdot XC$ . Поскольку точки  $B, C, P$  и  $Q$  лежат на  $\omega$ , имеем  $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$ . Получаем, что  $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$ ; это и означает, что точки  $P, Q, S$  и  $T$  лежат на одной окружности.



Можно показать, что полученная окружность касается прямых  $KS$  и  $LT$  в точках  $S$  и  $T$  соответственно.

И.Богданов, П.Кожевников

**M2432.** Квадрат разбит на  $n^2 \geq 4$  прямоугольников  $2(n-1)$  прямыми, из которых  $n-1$  параллельны одной стороне квадрата, а остальные  $n-1$  — другой. Докажите, что можно выбрать  $2n$  прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

Назовем пару прямоугольников вложенной, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин  $a_1, \dots, a_n$  (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин  $b_1, \dots, b_n$  (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что  $a_1 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq \dots \geq b_n$ . Обозначим через  $Q_{i,j}$  прямоугольник разбиения со сторонами  $a_i$  и  $b_j$ . Заметим, что при  $i \leq k$  и  $j \leq l$  пара  $Q_{i,j}$  и  $Q_{k,l}$  вложима.

Поскольку  $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$ , найдутся различные индексы  $i$  и  $j$  такие, что  $a_i \geq b_i$  и  $a_j \leq b_j$ . Можно считать, что  $i < j$ . Тогда существует индекс  $k \in [i, j]$  такой, что  $a_k \leq b_k$  и  $a_{k-1} \geq b_{k-1}$ .

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники:  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,k-1}, Q_{2,k-1}, \dots, Q_{k,k-1}$ , вкупе с

	$a_1$	...	$a_{k-1}$	$a_k$	...	$a_n$
$b_1$						
$\vdots$						
$b_{k-1}$						
$b_k$						
$\vdots$						
$b_n$						

$Q_{k-1,k}, Q_{k,k}, \dots, Q_{k,n}, Q_{k+1,n}, \dots, Q_{n,n}$  (см. рисунок). Их количество равно  $2(k-1) + 2(n-k+1) = 2n$ . Любая пара из них, кроме  $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$ , вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку  $a_k \leq b_k$  и  $b_{k-1} \leq a_{k-1}$  (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на  $90^\circ$ ).

С.Берлов

**M2433.** Дан кубический многочлен  $f(x)$ . Назовем циклом тройку различных чисел  $(a, b, c)$  таких, что  $f(a) = b, f(b) = c$  и  $f(c) = a$ . Известно, что нашлись восемь циклов  $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, 8$ , в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида  $a_i + b_i + c_i$  есть хотя бы: а) три различных; б) четыре различных.

Для решения достаточно доказать, что одна и та же сумма встречается: а) не более чем в трех циклах; б) не более чем в двух циклах.

Предположим, что сумма  $S$  встречается в нескольких различных циклах. Для любого элемента  $x$  любого из этих циклов имеем

$$x + f(x) + f(f(x)) = S. \quad (1)$$

Уравнение (1) – девятой степени, поэтому оно имеет не более девяти различных корней. Значит, циклов с суммой  $S$  не больше чем  $9/3 = 3$ . Это уже доказывает пункт а). Далее перепишем (1) в виде  $S - x - f(x) = f(f(x))$ . Применяя  $f$  к обе-

им частям последнего равенства (с учетом  $f(f(f(x))) = x$ ), получаем  $f(S - x - f(x)) = x$ . Складывая это равенство с (1), имеем

$$f(x) + f(f(x)) + f(S - x - f(x)) = S. \quad (2)$$

Покажем, что уравнение (2) – седьмой степени. Действительно, пусть у многочлена  $f$  коэффициент при  $x^3$  равен  $A$ . Имеем (далее троеточия обозначают многочлены, степень которых заведомо не превышает шести):

$$f(f(x)) = A(f(x))^3 + \dots,$$

$$f(S - x - f(x)) = A(S - x - f(x))^3 + \dots =$$

$$\dots = -A(f(x))^3 - 3Ax(f(x))^2 + \dots,$$

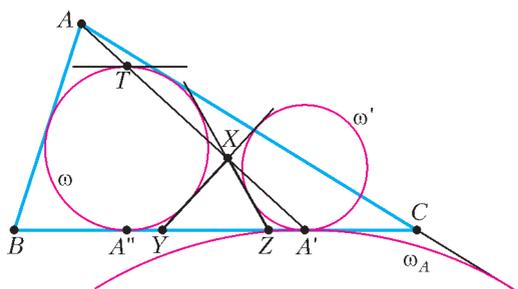
поэтому левая часть уравнения (2) равна  $-3Ax(f(x))^2 + \dots$ . Итак, уравнение (2) имеет не более семи корней. Следовательно, одна и та же сумма  $S$  встречается не более чем в  $[7/3] = 2$  различных циклах, что и требовалось доказать.

Ф.Петров

**M2434.** Окружность  $\omega$  вписана в треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Вне-вписанная окружность этого треугольника касается стороны  $BC$  в точке  $A'$ . Точка  $X$  выбирается на отрезке  $A'A$  так, что отрезок  $A'X$  не пересекает  $\omega$ . Касательные, проведенные из  $X$  к  $\omega$ , пересекают отрезок  $BC$  в точках  $Y$  и  $Z$ . Докажите, что сумма  $XY + XZ$  не зависит от выбора точки  $X$ .

Будем считать, что точка  $Y$  лежит ближе к точке  $B$ , нежели  $Z$ ; кроме того, считаем, что сторона  $BC$  горизонтальна, а точка  $A$  лежит выше нее (см. рисунок).

Обозначим через  $\omega_A$  вневписанную окружность треугольника  $ABC$ , касающуюся стороны  $BC$ , а через  $\omega'$  – вневписанную окружность треугольника  $XYZ$ , касающуюся стороны  $XZ$ . Пусть  $\omega$  касается  $BC$  в точке  $A''$ . Обозначим через  $T$  точку пересечения  $AA'$  и  $\omega$ , лежащую ближе к  $A$ . Гомотетия с центром  $A$ , переводящая  $\omega$  в



$\omega_A$ , переводит  $T$  в  $A'$ ; значит, касательная к  $\omega$  в точке  $T$  параллельна  $BC$ .

Поскольку окружности  $\omega$  и  $\omega'$  вписаны в вертикальные углы, образованные прямыми  $XU$  и  $XZ$ , существует гомотетия с центром в  $X$  (и отрицательным коэффициентом), переводящая  $\omega$  в  $\omega'$ . Пусть при этой гомотетии точка  $T$  переходит в точку  $T'$ . Тогда  $T'$  лежит на прямой  $AA'$ , касательная к  $\omega'$  в  $T'$  параллельна  $BC$ , и  $\omega'$  лежит выше этой касательной. Такая касательная к  $\omega'$  – это прямая  $BC$ ; значит,  $T'$  лежит на  $BC$ , т.е.  $\omega'$  касается  $BC$  в точке  $A'$ .

Обозначим полупериметр треугольника  $XYZ$  через  $p$ . Так как окружности  $\omega$  и  $\omega'$  – вневписанные для этого треугольника, имеем  $ZA' = YA'' = p - YZ$ . Значит,

$$XY + XZ = 2p - YZ = 2(p - YZ) + YZ =$$

$$= ZA' + YZ + YA'' = A'A'',$$

что не зависит от выбора точки  $X$ .

*И. Митрофанов*

**M2435.** *Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка  $X$ , не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают еще не отмеченные вершины 100-угольника, причем Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка  $X$  будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.*

Раскроем стороны 100-угольника в синий и красный цвета так, чтобы любые две соседних стороны имели разные цвета. Рассмотрим две одноцветные стороны  $AB$  и  $CD$ , образующие выпуклый четырехугольник  $ABCD$ ; пусть его диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ . Предположим, что точка  $X$  лежит в треугольнике  $KBC$  (рис.1). Покажем, как Петя может выиграть в этом случае.

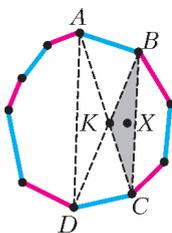


Рис. 1

Пусть он выберет первым ходом вершины  $B$  и  $C$ . После этого оба игрока могут выбирать только вершины, лежащие в другой полуплоскости от прямой  $BC$ , нежели точка  $X$ . Этих вершин четное число, поскольку они разбиваются на пары вершин, образующих стороны того же цвета, что и  $AB$ . Поэтому последний ход будет за Петей.

Осталось показать, что такие стороны  $AB$  и  $CD$  найдутся. Пусть это не так. Рассмотрим любую вершину  $T$ . Предположим, что луч  $TX$  пересекает синюю сторону  $PQ$  (рис.2). Пусть  $TR$  – синяя сторона, выходящая из  $T$ ; можно считать, что  $TRPQ$  – выпуклый четырехугольник.

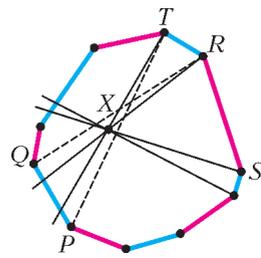


Рис. 2

Если точка  $X$  лежит внутри треугольника  $TRQ$ , то требуемый четырехугольник  $RTQP$  найден; в противном случае луч  $RX$  тоже должен пересекать отрезок  $PQ$ . Пусть  $RS$  – следующая за  $TR$  сторона 100-угольника. Если луч  $SX$  пересекает красную сторону, то аналогично доказывается, что луч  $RX$  также должен ее пересекать, что не так. Значит,  $SX$  пересекает какую-то синюю сторону, и можно повторить предыдущие рассуждения для вершины  $S$ . Рассуждая так и дальше, мы получим, что для каждой синей стороны  $T'R'$  найдется

синяя сторона  $P'Q'$ , которую пересекают оба луча  $R'X$  и  $R'X'$ . Однако это неверно для синей стороны  $PQ$  (лучи  $PX$  и  $QX$  пересекают участки контура  $QT$  и  $RP$  соответственно) – противоречие.

С.Берлов, Ф.Петров

**Ф2435.** Камень бросают с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, и он всегда удаляется от точки броска. При каких углах  $\alpha$  это возможно? Трения нет.

Чтобы камень в любой момент времени удалялся от места броска, нужно, чтобы скалярное произведение вектора перемещения и вектора скорости было всегда положительной величиной:

$$\left( \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} \right) (\vec{v}_0 + \vec{g} t) > 0.$$

Раскроем скобки и разделим каждое слагаемое на положительную величину  $v_0 g t^2 / \sqrt{2}$ . Получаем

$$\frac{\sqrt{2} v_0}{g t} + \frac{g t}{\sqrt{2} v_0} - \frac{3 \sin \alpha}{\sqrt{2}} > 0.$$

Обозначим величину  $\frac{\sqrt{2} v_0}{g t}$  через  $A$ . Тогда неравенство будет выглядеть так:

$$A + \frac{1}{A} > \frac{3 \sin \alpha}{\sqrt{2}}.$$

Минимальное значение суммы двух слагаемых слева от знака неравенства равно 2, поэтому неравенство будет выполняться всегда, если  $\sin \alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,9428$ . Это означает, что при углах

$$\alpha < \arcsin 0,9428 \approx 1,231 \text{ рад}$$

камень всегда удаляется от места броска.

А.Зильберман

**Ф2436.** Мост между берегами реки в профиль имеет форму выпуклой вверх дуги радиусом  $R = 200$  м. Расстояние между крайними опорами моста на берегах реки составляет  $R/2 = 100$  м. Дорога на берегах плавно сопрягается с поверх-

ностью моста. Коэффициент трения между полотном дороги и колесами автомобиля  $\mu = 0,7$ . С какой максимальной постоянной по величине скоростью  $v$  полноприводной автомобиль небольших размеров может проехать по такому мосту? Каким будет ответ, если автомобиль имеет привод только на одну пару колес? Считайте, что расстояние от центра масс автомобиля до всех четырех колес одинаково, а расстояние между дорогой и центром масс настолько мало, что им можно пренебречь даже в сравнении с расстоянием между осями передних и задних колес. Сопротивление воздуха не учитывайте.

Условие движения с постоянной скоростью накладывает ограничение на скорость, так как при въезде на мост силы трения должны толкать автомобиль вперед, а в конце пути на мосту – притормаживать автомобиль. В результате сложения всех сил, действующих на автомобиль, его ускорение должно быть направлено к центру кривизны моста и оставаться постоянным по величине. Пусть угол между вертикалью и отрезком, соединяющим центр кривизны окружности (моста) и автомобиль, равен  $\alpha$ . Максимальное значение этого угла таково, что  $\sin \alpha_{\max} = 1/4$ . Для нормальной составляющей силы, действующей на автомобиль со стороны дороги, будем использовать символ  $N$ , а для касательной составляющей – символ  $f$  и запишем уравнения движения:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha - N,$$

$$\mu N \geq f = mg \sin \alpha.$$

В любой момент скорость автомобиля равна

$$v = \sqrt{gR \cos \alpha - \frac{NR}{m}}.$$

Сила трения должна быть максимальной в моменты, когда модуль синуса угла  $\alpha$  самый большой, т.е. при въезде на мост и

при съезде с него. В эти моменты

$$\mu N = f = mg \sin \alpha .$$

Отсюда находим максимальное значение возможной (постоянной по величине) скорости автомобиля:

$$v_{\max} = \sqrt{gR \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\mu} \right)} \approx 35 \text{ м/с} = 126 \text{ км/ч} .$$

Если же автомобиль имеет привод только на передние или только на задние колеса, то максимальная величина силы трения равна  $\frac{\mu N}{2}$ , т.е. уравнения изменятся:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha - N ,$$

$$\frac{\mu N}{2} \geq mg \sin \alpha .$$

Тогда для максимальной скорости получаем

$$v_{\max} = \sqrt{gR \left( \cos \alpha - \frac{2 \sin \alpha}{\mu} \right)} \approx 22,5 \text{ м/с} = 81 \text{ км/ч} .$$

С.Дмитриев

**Ф2437.** *Две одинаковые по размерам книжки соединили так, что листы книжек переложены через один и при этом половина площади каждой страницы соприкасается с соответствующей половиной страницы другой книги (см. рисунок). Корешки книг параллельны друг другу. К корешкам присоединены длинные стороны листов, имеющих размеры  $L \times D = 15 \times 22$  см. Толщина каждого листа  $d = 0,1$  мм. Коэффициент трения листов бумаги друг о друга  $\mu = 0,3$ . При каком количестве листов в книгах их не удастся развязать, прикладывая к корешкам силы, направленные в противоположные стороны?*

Это очень известная демонстрация физического эффекта, состоящего в том, что какие бы по величине силы  $F$  не были



приложены, книги «не желают» разъединяться, если сцеплено достаточно большое количество листов этих книг.

Пусть имеется симметрия, т.е. средние листы книг не изогнуты, а располагаются параллельно друг другу. В каждой книге  $N \gg 1$  листов, тогда по одну и по другую сторону от средних листов располагаются примерно  $N/2$  листов каждой книги. Угол  $\varphi_0$ , который образуют со средними листами крайние листы книг, равен примерно  $\varphi_0 = (N/2)d/(L/2) = Nd/L$ . Примем, что этот угол много меньше 1, тогда при вычислениях можно будет пользоваться малостью этого и всех других аналогичных углов. Будем считать, что после приложения к книгам направленных в противоположные стороны сил  $F$  все листы книг растянуты с одинаковыми по величине силами  $F/N$ . В этом случае самые внешние (последние) листы прижаты к внутренним листам силами  $\varphi_0 F/N$  — это перпендикулярные к плоскости симметрии проекции сил натяжения.

Предпоследние листы прижимаются к следующим внутренним листам силами, которые складываются из соответствующих проекций сил последних и предпоследних, и так далее вплоть до средних листов, причем для каждого листа имеется свой угол с плоскостью симметрии. В результате средние листы сжаты охватывающими их листами сильнее всего, и эти силы равны

$$F_{\text{сред}} = \sum \frac{2n}{N} \frac{\varphi_0 F}{N} \approx \frac{\varphi_0 F}{4} ,$$

где суммирование производилось от  $n = 1$  до  $n = N/2$ . Остальные листы сжаты бо-

лее слабо, и чем дальше лист отстоит от середины, тем слабее.

Чтобы лист, сжатый с двух сторон, вытащить из его окружения, нужно вдоль листа приложить силу, равную сумме модулей сил, сжимающих лист, умноженной на коэффициент трения. Сила, которая необходима, чтобы разъединить книги, находится суммированием:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0 \mu F}{N} \sum_{n=1}^{n=N/2} 2 \cdot 2 \sum_{i=n}^{i=N/2} \frac{2i}{N} = \\ = \mu F \frac{8d}{L} \sum_{n=1}^{n=N/2} \left[ \sum_{i=n}^{i=N/2} i \right] = \mu F \frac{d}{3L} N^2. \end{aligned}$$

Если  $\mu d N^2 / (3L) > 1$ , то силы, необходимые для разъединения книг, больше приложенных к книгам сил  $F$ , т.е. происходит заклинивание. При числе листов в книгах

$$N > \sqrt{\frac{3L}{\mu d}} = 123$$

книги разъединить не удастся.

Заметим, что листы книг при такой укладке изогнуты, т.е. упруго деформированы. Поскольку в решении не учитывалась упругость листов бумаги, которая обеспечивает дополнительное прижатие листов бумаги друг к другу, то полученное значение числа  $N$  следует считать завышенным. Предлагается читателям экспериментально найти число  $N$  для двух учебников: физики и химии.

*С. Варламов*

**Ф2438.** *Плоская квадратная стеклянная пластина площадью  $S$  и толщиной  $d = 30$  см лежит на плоском горизонтальном дне высокого цилиндрического стеклянного сосуда очень большого сечения. Пластина не касается стенок этого сосуда. Несколько песчинок (шариков) одинакового диаметра  $D$  не дают возможности пластине лечь на дно своей нижней поверхностью. В сосуд очень медленно наливают ртуть. Сначала постепенно увеличивалась площадь ртутной лужицы на дне сосуда, а затем начал повышаться*

*уровень ртути. Пластина всплыла, как только уровень ртути в сосуде сравнялся с уровнем, на котором находилась верхняя поверхность пластины. Каковы размеры песчинок  $D$ ? Какова площадь пластины  $S$ ?*

*Справочные данные: плотность стекла  $\rho_{\text{ст}} = 2500$  кг/м<sup>3</sup>, плотность ртути  $\rho_{\text{рт}} = 13600$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент поверхностного натяжения ртути  $\sigma = 0,466$  Н/м, атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.*

Ртуть, как известно, не смачивает стекло, поэтому, когда лужа ртути окружит пластину со всех сторон, вблизи нижних ребер пластины и под ней окажется «запертым» некоторое количество воздуха. Сразу после запирания воздуха его давление равно атмосферному давлению  $p_0$ . По мере роста уровня ртути в сосуде давление этого воздуха увеличивается, и (по условию) когда уровень ртути в сосуде сравняется с верхней поверхностью пластины, то оно заставит пластину всплыть. Следовательно, к этому моменту давление воздуха под пластиной выросло на величину

$$\Delta p = \rho_{\text{ст}} g d.$$

При этом пластина перестала давить на песчинки, а ртуть в этот момент начала затекать под пластину, что и привело к ее всплытию.

Почему ртуть не могла раньше проникнуть под пластину? Да потому, что поверхностное натяжение на границе раздела ртуть–воздух создавало дополнительное (лапласовское) давление, которое и сдерживало ртуть от затекания под пластину. Разумно считать, что температура в течение этого эксперимента не изменяется, поэтому запертый воздух подчиняется закону Бойля–Мариотта.

Набросаем «программу действий».

1) Чтобы найти объем запертого воздуха при атмосферном давлении, нужно оценить толщину слоя ртути на большом по

площади горизонтальном стеклянном дне сосуда, когда еще не вся площадь дна покрыта ртутью.

2) Чтобы найти изменение давления воздуха после подъема уровня ртути на высоту  $d$ , нужно учесть давление столба ртути  $\rho_{рт}gd$  и дополнительное (лапласовское) давление, связанное с кривизной поверхности ртути, ограничивающей объем запертого воздуха.

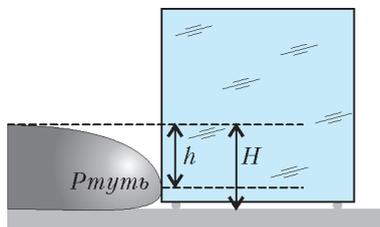
Рассмотрим большую лужу на стеклянной не смачиваемой ртутью поверхности. Условие равновесия ртути в этом случае таково:

$$2L\sigma = LH \frac{\rho_{рт}gH}{2},$$

где  $L$  – длина прямолинейного участка границы лужи,  $H$  – толщина слоя ртути. Отсюда находим

$$H = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{рт}g}} = 3,7 \text{ мм}.$$

Когда все дно сосуда покрылось ртутью и ртуть прикоснулась к вертикальным стенкам (граням) пластины, непосредственно под пластиной запертым оказался воздух, имеющий объем  $V_1 = SD$ . И еще есть воздух, прилегающий к стенке пластины вблизи ее нижних ребер, но не находящийся непосредственно под пластиной. На приведенном рисунке показано, как ртуть



слева «прикоснулась» к грани пластины на высоте  $H - h$  над дном сосуда и заперла дополнительно некоторое количество воздуха. Запишем условие равновесия жидкости ниже линии касания ртути и стенки пластины:

$$\sigma L = (H - h)L \cdot \rho_{рт}g \frac{H + h}{2},$$

откуда найдем

$$h = \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

Радиусы кривизны поверхности ртути на разных глубинах  $H$  и  $h$  можно найти из условия равновесия жидкости:

$$\frac{\sigma}{R_H} = \rho_{рт}gH, \text{ и } R_H = \frac{H}{4} \approx 0,9 \text{ мм};$$

$$\frac{\sigma}{R_h} = \rho_{рт}gh, \text{ и } R_h = \frac{H\sqrt{2}}{4} \approx 1,3 \text{ мм}.$$

Площадь  $s$  поперечного сечения, перпендикулярного ребру пластины, для дополнительного объема воздуха, запертого лужей ртути вдоль нижних ребер пластины, можно оценить так:

$$s = R_H R_h \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = H^2 \frac{\sqrt{2}}{16} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,076 \frac{\sigma}{\rho_{рт}g} \approx 0,26 \text{ мм}^2.$$

А дополнительный объем запертого воздуха будет  $V_2 = 4\sqrt{S}s$ . Итак, общий объем запертого лужей ртути воздуха при атмосферном давлении складывается из двух частей и равен

$$V_1 + V_2 \approx SD + 0,3\sqrt{S} \frac{\sigma}{\rho_{рт}g}.$$

Предположим, что за мгновение до всплытия пластины ртуть еще не затекает под пластину, т.е. радиусы кривизны  $R_H$  и  $R_h$  чуть больше или равны  $D/2$ . При увеличении уровня ртути в сосуде до величины  $d = 30 \text{ см} \gg 3,7 \text{ мм}$  радиусы кривизны отличаются друг от друга мало, поэтому их различием можно пренебречь и считать их одинаковыми:  $R_H \approx R_h = D/2$ . Тогда условие равновесия пластины имеет вид

$$\rho_{рт}gd = \rho_{ст}gd + \frac{2\sigma}{D}.$$

Отсюда находим размеры песчинок:

$$D = \frac{2\sigma}{(\rho_{рт} - \rho_{ст})gd} = 0,028 \text{ мм}.$$

(Продолжение см. на с. 26)

...не следует ребячески пренебрегать исследованием даже самых незначительных животных, ибо в каждом произведении природы найдется нечто, достойное удивления.

Аристотель

Достигнуть чрезвычайной величины животные могли бы только в том случае, если бы кости их изменились, существенно увеличившись в толщину, отчего животные по строению

и виду производили бы впечатление чрезвычайной толщины.

Галилео Галилей

Из того, что мы до сих пор узнали и исследовали, можно... с достаточным основанием заключить, что животным присуще электричество...

Луиджи Гальвани

## А так ли хорошо знакомы вам физика+фауна?

С давних времен ученые пытались объяснить явления не только «косной», мертвой природы, но и живой материи. Физика не осталась в стороне от стремления проникнуть в сопредельные науки, в том числе в биологию. Возникло немало направлений на стыке наук, например биофизика, что привело к множеству открытий и изменило наши представления об устройстве и функционировании окружающих нас организмов.

Сегодня наш разговор пойдет о том, что нового узнали мы благодаря физике о мире животных – фауне.

### Вопросы и задачи

1. Утка при ходьбе переваливается с боку на бок, а курица – нет. Почему?
2. Изменяется ли положение плавников рыбы при ее движении в воде?
3. Почему у глубоководных рыб, если их извлечь из воды, плавательный пузырь выходит через рот наружу?
4. Падая на землю с большой высоты, мелкие насекомые остаются невредимыми, а крупные животные ломают кости и могут даже погибнуть. Как это объяснить?
5. Отчего на суше нет животных крупнее слона? Почему самые крупные животные сохранились в море?
6. Что произойдет с уткой или иной водоплавающей птицей, если она сядет на воду, в которую попало много мыла или иных моющих средств?

7. Рабочая пчела, вылетевшая из улья за взятком, делает в среднем 180 взмахов крыльями в секунду. При возвращении с грузом это число возрастает до 280. Как мы можем это заметить?

8. Зачем в сухие и жаркие дни пчелы «развешивают» в улье капельки воды?

9. Почему в холодную погоду собаки и кошки сворачиваются в клубок, а в жару, наоборот, стремятся раскинуться?

10. Отчего не встречаются млекопитающие размером с муху?

11. Почему некоторые рыбы могут охотиться ночью и в совершенно мутной воде?

12. Как электрическому угрю, вырабатывающему напряжение до 600 вольт и убивающему мелкую живность электрическими разрядами, удается не поражать током самого себя?

13. Инфракрасное облучение зерна уничтожает жучков-вредителей. Почему жучки погибают, а зерно – нет?

14. Личинку перистоусого комара не видно в воде, но глаза заметны в виде черных точек. Почему? Останутся ли личинки невидимы в воздухе?

### Микроопыт

Понаблюдайте за водомерками, свободно скользящими по поверхности воды. Что их удерживает? А почему мелкие насекомые, попав под воду, не могут из нее выбраться?



## Любопытно, что...

...блохи, размер которых составляет несколько миллиметров, способны прыгать на расстояние, в 200 раз большее. Ученые выяснили, что блохи отталкиваются от земли преимущественно когтями задних конечностей, срабатывающими как пружины.

...рекорд скорости среди животных, измеряемый в единицах длин тела за одну секунду, принадлежит американскому клещу. Передвигая ноги с частотой 135 герц, он преодолевает за секунду 322 длины своего тела. Скорость человека, бегущего с подобной скоростью, составила бы 2000 километров в час.

...инженеры создали компьютерную модель, имитирующую таранные удары кашалотов, пробивающих головой обшивку судов, и выяснили, что поглощают нагрузки от ударов и предохраняют череп кашалотов от разрывов специальные соединительные ткани особых мешочков, вырабатывающих жир.

...в одном из музеев Англии выставлен обшитый медью кусок дуба, который проколот насквозь кинжалом меч-рыбы. Для нанесения такого удара ей нужно было развить скорость около 100 километров в час.

...осьминог, наделенный неплохим зрением, развитым мозгом и способностью менять окраску под цвет окружающей среды, еще и ловко передвигается. Удастся ему это за счет радиальной симметрии конечностей. Упираясь щупальцем в дно или скалу, осьминог затем растягивает его и перемещается в противоположную сторону, обеспечивая движение в любом направлении.

...основной механизм биологических часов находится внутри живой клетки. Это периодический процесс, колебания которого преобразуются в околосуточные ритмы. Пчелы и птицы согласуют его с движением Солнца или вращающегося звездного неба.

...продвинуться в изучении биоэлектричества ученым удалось за счет использования в опытах гигантских аксонов – отростков клеток, проводящих нервные им-

пульсы, – «заимствованных» у головоногих моллюсков.

...хамелеоны быстро меняют цвет не только за счет пигментации, но и, как обнаружили биофизики, с помощью фотонных кристаллов, выложенных в виде четко структурированной решетки в верхнем слое кожи. Изменяя расстояние между кристаллами, можно влиять на длину волны отраженного света.

...пользуясь природным ультразвуковым радаром – сонаром, летучая мышь может затратить на отлов одного летающего насекомого, например комара, менее секунды.

...эволюция способствовала совершенствованию органа зрения у животных. Так, у дождевого червя светочувствительные клетки расположены по всей коже, у моллюсков глаз напоминает камеру-обскуру, у улитки он уже содержит линзу, а у теплокровных позвоночных – хрусталик с переменным фокусным расстоянием и диафрагмой.

...Ученые выяснили, как бабочкам-монархам удается лететь строго на юго-запад при миграции из Канады в Мексику, преодолевая около двух тысяч километров. В этом им помогают большие сложно устроенные глаза, позволяющие постоянно следить за положением солнца на небосклоне. Такой «компас» не дает им сбиться с верной траектории, при отклонении от которой указывает направление для возвращения на «заданный курс».

## Что читать в «Кванте» по теме «Физика+фауна»

(публикации последних лет)

1. «Синицы и...физика» – 2010, №2, с.44;
2. «Физика невыеденного яйца» – 2011, №1, с.29;
3. «Перо птицы и воздушный полет» – 2012, №1, с.14;
4. «Хищник и жертва: уравнения сосуществования» – 2014, №5/6, с.13;
5. «Физик в гостях у биолога» – 2015, Приложение №1;
6. «Кошачья экономия» – 2015, №2, с.31.

Материал подготовил А.Леонovic



(Началосм. на с. 15)

К моменту всплытия пластины весь дополнительный объем воздуха оказался под пластиной и ртуть заняла под пластиной объем

$$V_3 = 4\sqrt{S} \left( \frac{D}{2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{S} \times 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2.$$

Этой величиной можно пренебречь в сравнении с начальным значением дополнительного объема воздуха

$$V_2 = 4\sqrt{S} \times 0,26 \text{ мм}^2.$$

Следовательно, давление воздуха под пластиной выросло на величину

$$\Delta p = p_0 \frac{V_1 + V_2}{V_1} - p_0 = p_0 \frac{V_2}{V_1} = \frac{0,3p_0\sigma}{\rho_{\text{рт}}gD\sqrt{S}} = \rho_{\text{ст}}gd.$$

Из этого уравнения можно найти площадь пластины  $S$ :

$$S = \left( \frac{0,3p_0(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ст}})}{2g\rho_{\text{рт}}\rho_{\text{ст}}} \right)^2 \approx 0,24 \text{ м}^2.$$

*С.Ртутный*

**Ф2439.** К горизонтальному потолку вблизи одной из вертикальных стен на невесомой и непроводящей нитке подвешен маленький шарик массой  $m$  с электрическим зарядом  $Q$ . Стены, пол и потолок комнаты проводящие. Шарик в положении равновесия находится на одинаковом расстоянии  $L$  и от потолка и от ближайшей стены. Расстояния от шарика до остальных стен комнаты и до пола во много раз больше  $L$ . На каком расстоянии  $s$  от ближайшей стены находится точка крепления нити к потолку? Считайте, что при заданных величинах  $m$ ,  $Q$  и  $L$  это положение равновесия устойчиво.

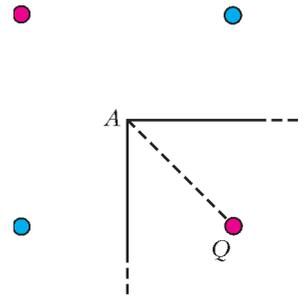
Поскольку стены, пол и потолок комнаты проводящие, можно выбрать их по-

тенциал равным нулю. Понятно, что на проводящих поверхностях электрические заряды перераспределяются так, чтобы созданное зарядом  $Q$  и этими перераспределенными зарядами электрическое поле вблизи любой проводящей поверхности было перпендикулярно этой поверхности. Подберем такое распределение точечных зарядов в пространстве, чтобы это условие было выполнено. Этот прием (способ) носит название «метод электростатических изображений». Заряды должны располагаться в вершинах квадрата, центр которого совпадает с ближайшей к шарiku точке ( $A$ ) на линии пересечения потолка и ближайшей стены, при этом заряд  $Q$  находится в одной из вершин этого квадрата, а остальные три вершины находятся вне комнаты (см. рисунок). Жирная горизонтальная линия на рисунке символизирует потолок, а жирная вертикальная линия – вертикальную стену, красным цветом отмечены заряды одного знака с  $Q$ , синим цветом – заряды противоположного знака.

На шарик действуют три силы: сила тяжести, сила натяжения нити и сила взаимодействия с электрическими зарядами, распределенными по проводящим поверхностям. Последняя сила направлена в сторону точки  $A$  и равна

$$F_{\text{эл}} = \frac{kQ^2}{L^2} \left( \frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^3} \right).$$

Горизонтальная составляющая этой силы уравновешивается горизонтальной составляющей силы натяжения нити  $T$ , а вертикальная составляющая вместе с вертикальной составляющей силы натяжения нити уравновешивают силу тяжести  $mg$ . Обозначим угол между нитью и вертикалью через  $\alpha$ . Величина, которую нужно



найти, это  $s = L(1 + \operatorname{tg} \alpha)$ . Получается система уравнений

$$T \sin \alpha = \frac{kQ^2}{L^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{7/2}} \right),$$

$$T \cos \alpha + \frac{kQ^2}{L^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{7/2}} \right) = mg,$$

из которой находим тангенс угла  $\alpha$ , а затем и расстояние  $s$  от точки  $A$  до точки крепления нити к потолку:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(kQ^2/L^2)(1/2^2 - 1/2^{7/2})}{mg + (kQ^2/L^2)(1/2^2 - 1/2^{7/2})},$$

$$s = L \frac{mg + 2(kQ^2/L^2)(1/2^2 - 1/2^{7/2})}{mg + (kQ^2/L^2)(1/2^2 - 1/2^{7/2})}.$$

А. Старов

**Ф2440.** Имеется изолированная равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  пластина в виде правильного треугольника  $ABC$  со стороной  $\sqrt{2}a$  (рис.1). Найдите напряженность элект-

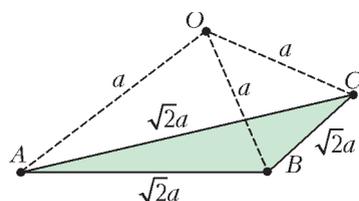


Рис. 1

рического поля в точке  $O$ , если расстояния от нее до вершин пластины равны  $a$ .

Заметим, что пластина «видна» из точки  $O$  под телесным углом  $\Omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ , так как вершина куба  $O$  занимает восьмую часть полного телесного угла  $4\pi$  (рис.2).

Поместим в точку  $O$  пробный заряд  $q$ . Вследствие того что в задаче наблюдается симметрия по отношению к повороту, сила со стороны пробного заряда  $q$ , действующая на пластину, перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Значит, эта сила равна

$$F_1 = \sigma\Phi = \sigma \cdot kq\Omega,$$

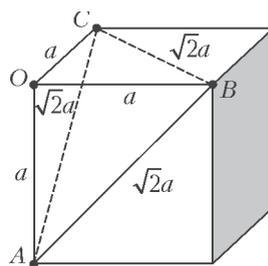


Рис. 2

где  $\Phi$  – поток электрического поля, созданного пробным зарядом, через поверхность пластины. На заряд  $q$  действует сила

$$F_2 = qE,$$

где  $E$  – напряженность электрического поля, созданного пластиной в точке  $O$ . По третьему закону Ньютона пробный заряд действует на пластину с такой же силой, с какой пластина действует на пробный заряд. Следовательно,

$$F_1 = F_2,$$

откуда находим

$$E = \frac{\sigma}{8\epsilon_0}.$$

А.Бычков

**Ф2441\*.** Незаряженный медный цилиндр с радиусом поперечного сечения  $R$  и длиной  $L \gg R$  раскрутили вокруг его оси симметрии до угловой скорости  $\omega$  и оставили крутиться в космосе ( $\omega R \ll c$ ). Как распределены электрические заряды внутри цилиндра и как зависят электрическое и магнитное поля вблизи середины цилиндра от расстояния до оси вращения?

Поскольку скорости движения всех частей цилиндра по условию задачи значительно меньше скорости света  $c$ , то основную роль будут играть электрические силы, а магнитное взаимодействие лишь создаст небольшую добавку к этим основным силам. Суммарный заряд цилиндра равен нулю, поэтому вне объема цилиндра и электрическое поле и магнитное поле равны нулю. Внутри сплошного медного проводника,

как жидкость в банке, могут свободно перемещаться носители заряда, т.е. электроны. При установившемся вращении цилиндра на каждый свободный электрон массой  $m_e$ , находящийся на расстоянии  $x$  от оси вращения, действует электрическая сила, направленная к оси вращения и равная по величине

$$F_э = m_e x \omega^2.$$

Следовательно, электрическое поле зависит от расстояния до оси цилиндра по закону

$$E_x = \frac{F_э}{e} = \frac{m_e \omega^2 x}{e}.$$

Здесь величина  $e$  – это положительный заряд, равный заряду протона (или величине заряда электрона).

Так как электрическая сила и, соответственно, электрическое поле растут линейно с удалением от оси вращения, то это означает, что внутри цилиндра плотность зарядов  $\rho$  постоянна и положительна. Согласно теореме Гаусса электрическое поле можно найти через поток вектора  $\vec{E}$  сквозь выбранную поверхность:

$$\frac{m_e \omega^2 x}{e} = E_x = \frac{\int_0^x dy \cdot 2\pi r \rho}{2\pi x \epsilon_0}.$$

Отсюда находим плотность зарядов в объеме цилиндра:

$$\rho = \frac{2\epsilon_0 m_e \omega^2}{e}.$$

Поскольку суммарный заряд цилиндра равен нулю, то выполняется еще одно соотношение:

$$R^2 \pi \rho + \sigma \cdot 2\pi R = 0.$$

Отсюда находим поверхностную плотность  $\sigma$  зарядов на цилиндре:

$$\sigma = -\frac{R\rho}{2} = -\frac{R\epsilon_0 m_e \omega^2}{e},$$

которая имеет отрицательный знак.

В силу симметрии вращающегося цилиндра, имеющего суммарный нулевой электрический заряд, магнитное поле на его оси

должно быть равно нулю. Действительно, выберем длинный прямоугольный контур для подсчета суммарного тока, протекающего через поверхность, ограниченную этим контуром, так, что одна длинная сторона находится на оси цилиндра, другая длинная сторона, параллельная оси, находится вне цилиндра, а две оставшиеся стороны перпендикулярны оси цилиндра. За любой промежуток времени суммарный заряд, прошедший через этот контур, равен нулю. А поле снаружи тоже равно нулю. Поэтому магнитное поле на оси действительно равно нулю. Если поперечные размеры контура изменить, оставив неизменной его большую длину и одну из длинных сторон на оси цилиндра, а расстояние  $x$  от оси до второй длинной стороны выбрать меньшим радиуса цилиндра, то в этом случае поток зарядов через такой контур не равен нулю. Соответственно, не равно нулю магнитное поле в объеме цилиндра и направлено оно вдоль оси цилиндра. Итак,

$$B_x L = \mu_0 \frac{\pi x^2 L \rho}{2\pi/\omega},$$

откуда находим индукцию магнитного поля:

$$B_x = \frac{\mu_0 \omega x^2 \rho}{2} = \frac{\mu_0 x^2 \epsilon_0 m_e \omega^3}{e} = \frac{x^2 m_e \omega^3}{e c^2}.$$

«Добавочная» магнитная сила, действующая на каждый электрон, находящийся на расстоянии  $x$  от оси внутри цилиндра, равна

$$F_M = e(\omega x) B_x = \mu_0 x^3 \epsilon_0 m_e \omega^4 = \frac{x^3 m_e \omega^4}{c^2}.$$

Отношение магнитной силы к электрической равно

$$\frac{F_M}{F_э} = \mu_0 \epsilon_0 x^2 \omega^2 = \left(\frac{x\omega}{c}\right)^2,$$

т.е. в рассматриваемой ситуации магнитные силы действительно значительно меньше электрических.

*С.Варламов*

**Ф2442.** Каков коэффициент преломления  $n$  прозрачного пластика, из которого

(Окончание см. на с. 31)

## Задачи

1. На праздник пришли несколько детей, некоторые из них с мамами, всего 30 человек. Оказалось, что детей, пришедших без мам, на десять меньше, чем остальных детей. Как такое могло быть?



2. Мама купила упаковку кускового сахара. Дети сначала съели верхний слой – 77 кусков, затем боковой слой – 55 кусков, наконец, передний слой. Сколько кусочков сахара осталось в коробке?



3. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?



4. Докажите, что разность

$$11 \dots 11 - 22 \dots 22,$$

где в первом числе цифр вдвое больше, чем во втором, является квадратом натурального числа.



## Птичка вылетает!

**РАССМОТРИМ** НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ, предлагавшихся на кружках Мало-го мехмата для 6 класса. В каждой задаче для обоснования ответа нужно привести пример, удовлетворяющий условию, и доказать, что этот пример нельзя улучшить.

**Задача 1.** *В фотоателье залетели 50 птиц – 18 скворцов, 17 трясогузок и 15 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щелкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Какое наибольшее число кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: у него в ателье останутся птицы всех трех видов?*

Эта задача простая: если фотограф сделает 15 кадров, то может случиться, что улетят все дятлы и останутся только скворцы и трясогузки. Если же кадров всего 14, то птиц любого вида не может улететь больше 14 – значит, хотя бы по одной останется.

**Ответ:** 14.

Мы здесь решили *двойственную* задачу: какого *наименьшего* количества кадров достаточно птицам, чтобы «обыграть» фотографа (сделать так, чтобы его условие не выполнялось). Если кадров хотя бы 15, то у коварных птиц есть «стратегия» (улетают вседятлы), если 14 или меньше – стратегии нет.

Взглянем с этой точки зрения на более сложную задачу.

**Задача 2.** *В фотоателье залетели 50 птиц – 18 скворцов, 17 трясогузок и 15 дятлов. Каждый раз, как только фотограф щелкнет затвором фотоаппарата, какая-то одна из птичек улетит (насовсем). Какое наибольшее число кадров сможет сделать фотограф, чтобы быть уверенным: в ате-*

*лье останется не меньше 10 птиц какого-то одного вида?*

Птицам здесь нужно сделать численность каждого вида меньше 10. Для этого должны улететь хотя бы 9 скворцов, хотя бы 8 трясогузок и хотя бы 6 дятлов – всего не менее 23 птиц. Значит, если кадров 22, то стратегии нет, и фотограф может быть уверен, что его условие не нарушится. Если же кадров хотя бы 23, то уверенности уже нет.

**Ответ:** 22.

И, наконец, еще одна вариация.

**Задача 3.** *В тех же условиях определите, какое наибольшее число кадров может сделать фотограф, чтобы быть уверенным: в ателье останется не меньше 11 птиц какого-то одного вида и не меньше 10 – какого-то другого.*

Здесь фотограф «гонится за двумя зайцами» (хочет, чтобы сразу выполнялись два условия), и птицам, чтобы обыграть его, достаточно «убить» хотя бы одного из них. Переводя с заячьего языка на птичий – либо сделать так, чтобы птиц каждого вида было не больше 10, либо разрешить, чтобы птиц какого-то вида было сколько угодно, но тогда каждого из остальных видов должно быть не больше 9. Посмотрим, какая из стратегий экономнее с точки зрения количества улетевших птиц.

В первом случае должны улететь «лишние» 8 скворцов, 7 трясогузок и 5 дятлов – всего 20 птиц. Во втором случае нам нужно выбрать тот вид, на который мы не накладываем ограничений по численности. Ясно, что это должны быть скворцы – их больше всего. Тогда должны улететь как минимум 8 трясогузок и 6 дятлов – всего

14 птиц. Вторая стратегия явно лучше!

Итак, в этой задаче **ответ**: 13. Если фотограф сделает хотя бы 14 кадров, то смогут улететь 8 трясогузок и 6 дятлов, и условие нарушится. Если же кадров сделано меньше (не более 13), то, как мы видели, птицы не смогут нарушить ни первое, ни второе условие – не хватит кадров. Значит, фотограф может быть уверен, что нужное число птиц останется.

### Задачи для самостоятельного решения

1. В комоде 8 черных, 6 белых и 1 серый носок. Из комода не глядя достают носки. Какое наименьшее число носков нужно достать, чтобы среди них заведомо оказалось: а) два одинаковых; б) три одинаковых; в) два разных; г) три разных носка?

2. В коробке 10 красных, 15 синих и 20 зеленых шаров. Какое наибольшее число шаров можно не глядя достать из коробки, чтобы в ней осталось не менее 5 шаров какого-то цвета?

*Материал подготовил С.Кузнецов*

## Задачник «Кванта»

*(Начало см. на с. 15)*

*сделана изображенная на фотографии (см. рисунок) половинка шара, лежащая на ткани черного цвета? (В центре вы-*



*пуклой поверхности имеется небольшое углубление.) Фотоаппарат при съемке находился далеко от половинки шара, стены и потолок комнаты были хорошо освещены.*

Прежде всего понятно, что половинка шара лежит на черной ткани так, что плоская поверхность обращена к фотоаппарату. Если бы это было не так, то фотография выглядела бы по-другому: все участки изображения половинки шара были бы светлыми. Поскольку в условии задачи сказано, что фотоаппарат при съемке на-

ходился далеко, то это означает, что в объектив фотоаппарата попали лучи света, идущие параллельно оси симметрии полушара. Эти лучи вышли из пластика, отразившись в последний раз внутри него от границы раздела пластик–воздух. В центре изображения имеется темное круглое пятно – это означает, что лучи, отраженные от внутренней кривой поверхности, имеют малую интенсивность в сравнении с теми лучами, которые вышли из участков полушара, видимых на фотографии светлыми. Иными словами, пограничные (на границе темного пятна и светлой полосы) лучи соответствуют падению лучей света изнутри пластика на границу раздела пластик–воздух под углом полного внутреннего отражения. Синус этого угла равен отношению радиуса  $r$  темного пятна к радиусу  $R$  изображения шара, а его обратная величина и есть коэффициент преломления света пластиком. Измерив на рисунке величины  $r$  и  $R$ , находим

$$n = \frac{R}{r} \approx 1,45.$$

*Д.Сергеев*

# Задачи

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

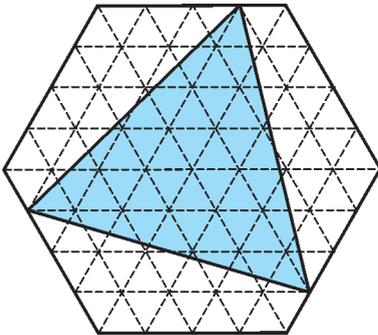
Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

11. В правильный шестиугольник площади 96 вписан равносторонний треугольник так, как показано на рисунке. Найдите площадь этого треугольника.

*С. Кузнецов*



12. а) Найдутся ли 3 натуральных числа, которые все различны и куб каждого из них делится на произведение остальных чисел? б) А найдутся ли 4 таких числа?

*П. Кожевников*

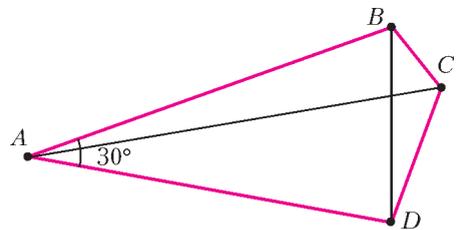
13. Куб  $10 \times 10 \times 10$  составлен из 1000 кубиков, каждый из которых черный или белый. Рассмотрим 300 рядов, каждый из которых параллелен какому-то ребру куба (в каждом таком ряду по 10 кубиков). Может ли оказаться, что в каких-то 200 из этих рядов имеется по 8 черных кубиков,

- а в остальных 100 рядах – по 5 черных кубиков?

*И. Богданов*

14. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $\angle A = 30^\circ$ , периметр треугольника  $BCD$  равен длине диагонали  $AC$ . Найдите  $\angle C$ .

*Е. Бакаев, В. Расторгуев*



15. Петя нарисовал таблицу  $10 \times 10$  и заполнил все ее клетки плюсами. Затем он сделал несколько действий по следующему правилу. Каждым действием он наугад выбирал ряд (строку или столбец) и менял каждый из 10 его знаков на противоположный (плюс на минус, минус на плюс). Когда после этого Петя вышел, хулиган Вася часть знаков стер – осталось только  $N$  знаков. Для какого наименьшего  $N$  может оказаться, что получившуюся у Пети таблицу можно однозначно восстановить по оставшимся данным?

*Е. Бакаев*

# Теорема Птолемея и перекладывание треугольников

М.ГОРЕЛОВ

**Н**АЧНЕМ С ДВУХ СТАРЫХ ЗАДАЧ. ПЕРВАЯ из них много лет назад вошла в математический фольклор; например, она предлагалась на Московской математической олимпиаде 1940 года.

**Задача 1.** Точки  $A, B, C$  – вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка  $D$  лежит на меньшей дуге  $AB$ . Докажите, что  $DC = AD + BD$ .

**Решение.** У этой задачи есть много красивых решений. Мы приведем решение, использующее вспомогательную площадь.

Вычислим двумя способами площадь  $S$  четырехугольника  $ADBC$  (рис.1).

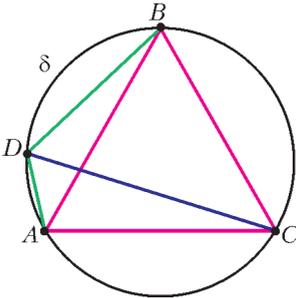


Рис. 1

С одной стороны,  $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между диагоналями четырехугольника. С другой стороны, площадь  $S$  равна сумме площадей треугольников  $ACD$  и  $BCD$ , поэтому

$$\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD + \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \angle CBD.$$

Угол  $CAD$  вписанный, поэтому он равен  $\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}$ , где  $\delta$  – величина дуги  $BD$  (по условию дуга  $BC$  равна  $\frac{2\pi}{3}$ ). Четырехугольник  $ADBC$  вписанный, поэтому  $\angle CBD = \pi - \angle CAD$ . Наконец, угол между диагоналями равен полусумме дуг  $AC$  и  $BD$ , т.е.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}$ . Следовательно,  $\sin \varphi = \sin \angle CAD = \sin \angle CBD$ . Кроме того, по условию  $AB = AC = BC$ , откуда немедленно следует нужный результат.

Другое решение этой задачи (и упражнения 10) изложено в статье «Обобщение теоремы Помпею» этого номера журнала. (Прим. ред.)

**Упражнение 1.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$ :  $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$  и  $BC = CD$ . Докажите, что  $AC = \frac{AB + AD}{\sqrt{2}}$ .

**Задача 2** (задача М137 б) из «Задачника «Кванта»». Последовательные стороны четырехугольника равны  $a, b, c, d$  (рис.2). Докажите, что его площадь не превосходит  $\frac{ac + bd}{2}$ .

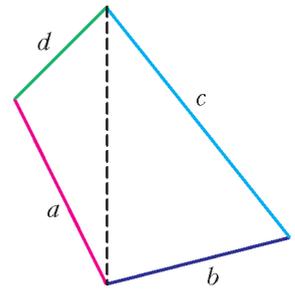


Рис. 2

**Решение.** Достаточно доказать неравенство для выпуклого четырехугольника (почему?). Разрежем четырехугольник по диагонали (см. рис.2), перевернем одну из частей «на другую сторону» и склеим обе части по линии разреза. Получим новый четырехугольник (рис.3) той же площади.

Если этот четырехугольник выпуклый, то его можно диагональю разбить на два треугольника, один из которых имеет стороны  $a$  и  $c$ , а другой –  $b$  и  $d$ . Он мог оказаться и невыпуклым, но тогда

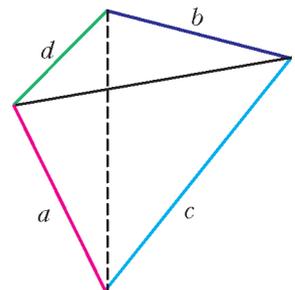


Рис. 3

он целиком покрывается одним из треугольников.

Осталось доказать, что площадь нового четырехугольника не превосходит  $\frac{ac + bd}{2}$ . Но это сразу следует из того, что новый четырехугольник можно разрезать диагональю на треугольник со сторонами  $a$  и  $c$  (площадь которого не превосходит  $\frac{ac}{2}$ ) и треугольник со сторонами  $b$  и  $d$  (площадь которого не превосходит  $\frac{bd}{2}$ ).

Задача 2 также относится к области математического фольклора, а трюк с «перекладыванием треугольника» был известен давно: например, он был красиво использован Адамаром в его классическом учебнике для вывода формул длин диагоналей вписанного четырехугольника.<sup>1</sup>

**Упражнения**

2. Приведите пример выпуклого четырехугольника, который после применения процедуры «перекладывания треугольника», использованной при решении задачи 2, превращается в невыпуклый.

3. Последовательные стороны четырехугольника равны  $a, b, c, d$ . Докажите, что его площадь  $S \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ .

Указание. Достаточно использовать неравенства  $S \leq \frac{ab + cd}{2}$  и  $S \leq \frac{ad + cd}{2}$ .

4. Опишите все четырехугольники, для которых неравенство задачи 2 превращается в равенство.

5. Многоугольник с данными длинами сторон вписан в окружность. Докажите, что его площадь не зависит от порядка, в котором стороны идут друг за другом.

«Сложив» идеи приведенных решений задач 1 и 2, можно получить доказательство следующей, совсем уж древней теоремы<sup>2</sup>.

**Теорема Птолемея.** Если четырехугольник  $ABCD$  вписанный, то

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

<sup>1</sup> См., например: Жак Адамар. Элементарная геометрия. Часть первая. Планиметрия. Издание третье. – М.: ОГИЗ, 1948, с. 217–219.

<sup>2</sup> Теорема названа в честь Клавдия Птолемея (ок. 100 – ок. 170 г.) – древнегреческого астронома и математика.

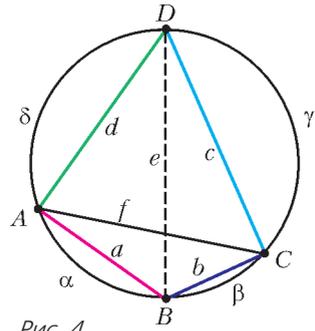


Рис. 4

**Доказательство.** Пусть  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = f$  и  $BD = e$  (рис. 4).

Разрежем четырехугольник по диагонали  $BD$ , перевернем одну из частей на другую сторону и склеим части по линии разреза. Получим новый четырехугольник  $ABC'D$ , вписанный в ту же окружность (рис. 5).

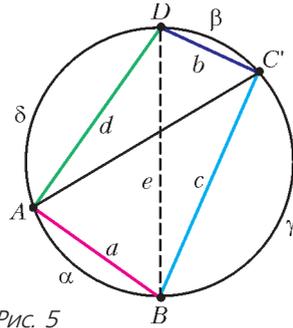


Рис. 5

Площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $\frac{1}{2}ef \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$ . А площадь четырехугольника  $ABC'D$  равна

$$\frac{1}{2}ac \sin \angle ABC' + \frac{1}{2}bd \sin \angle ADC'.$$

Но угол  $\varphi$  равен полусумме дуг  $\beta$  и  $\delta$ . И угол  $\angle ABC'$  равен полусумме дуг  $\beta$  и  $\delta$ . А  $\angle ADC' = \pi - \angle ABC'$ .

Остается воспользоваться тем, что площади четырехугольников  $ABCD$  и  $ABC'D$  равны, и упростить соответствующее равенство, разделив на  $\sin \varphi$ .

Теперь становится ясно, что утверждение задачи 1 фактически является частным случаем теоремы Птолемея (исследование которого упрощается за счет наличия равенства сторон  $AC$  и  $BC$ ).

В завершение приведем в виде упражнения еще несколько примеров применения теоремы Птолемея.

### Упражнения

**6.** Выведите из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

*Указание.* Рассмотрите случай прямоугольника.

**7.** Выведите из теоремы Птолемея формулу синуса суммы двух углов.

*Указание.* Рассмотрите случай четырехугольника  $ABCD$ , в котором диагональ  $AC$  является диаметром описанной окружности,  $\angle BAC = x$ ,  $\angle DAC = y$ .

**8.** Докажите, что из всех треугольников  $ABC$  с данной стороной  $AC$  и данным углом при вершине  $B$  наибольший периметр имеет равнобедренный.

*Указание.* Продлите биссектрису угла  $B$  до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке  $D$  и рассмотрите четырехугольник  $ABCD$ .

**9.** Найдите отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне.

**10.** Пусть точка  $P$  лежит на дуге  $BC$  окружности, описанной около правильного пятиугольника  $ABCDE$ . Докажите, что  $PA + PD = PB + PC + PE$ .

*Указание.* Примените теорему Птолемея к четырехугольникам  $PBAE$ ,  $PCDE$  и  $PAED$ .

**11.** Докажите, что

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

*Указание.* Рассмотрите четырехугольник  $A_1A_3A_4A_5$ , где  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$  – правильный семиугольник.



**Виталий Дмитриевич Арнольд**  
(14.10.1968–04.01.2017)

*Четвертого января 2017 года в автокатастрофе трагически погиб Виталий Дмитриевич Арнольд – выдающийся педагог, популяризатор науки, надежный друг журнала «Квант».*

*Организатор летних школ «Современная математика» и многочисленных олимпиад, один из создателей Московского Центра непрерывного математического образования и многих важных информационных ресурсов, Виталий Дмитриевич стал ключевой фигурой в образовании. Потрясающая работоспособность, энергия и харизма, необыкновенная эрудиция, острый ум и внимание абсолютно ко всему происходящему, открытость и тонкое чувство юмора – уникальный набор качеств Виталия Дмитриевича был всегда направлен только на созидание и борьбу с невежеством.*

*Это был настоящий Рыцарь математического просвещения.*

# Движение автомобилей и живых существ — и теорема о кинетической энергии

**А.РЫБАКОВ**

**Н**АЧНЕМ С ЦИТАТЫ ИЗ ОДНОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЙ книги, написанной более века назад: «Когда система состоит из большого числа частей, то полное изучение ее движения может оказаться очень сложным и даже невыполнимым. В таких случаях полезно, ранее подробного исследования движения частей системы, получить некоторое понятие об общем движении всей системы в совокупности».

Именно об этом и пойдет разговор — о принципиальных моментах динамики некоторых систем, которые мы видим вокруг нас.

Во множестве учебников — от базового учебника физики для 9 класса до серьезнейших курсов теоретической механики — есть теорема о кинетической энергии. И формулировка этой теоремы в разных учебниках практически одинаковы. Вот как она формулируется: *изменение кинетической энергии тела равно работе всех действующих на него сил*, или

$$E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = A_{12}.$$

Некоторые авторы вместо тела в условии теоремы говорят о материальной точке. В 9 классе доказательство этой теоремы проводится в предположении, что сила, действующая на тело, постоянна, в вузовском учебнике для работы силы будет выписан соответствующий интеграл, но сути дела это не

меняет. Более того, утверждение теоремы кажется нам вполне естественным и понятным даже и без доказательства. Между тем, для большинства тел, движение которых мы наблюдаем, теорема очевидным образом несправедлива!

«Автор ниспровергает законы механики?!» — ужаснется читатель. Да нет, конечно. Автор только напоминает, что и в жизни и, тем более, в точных науках обычно «дьявол прячется в деталях». Вот эти-то детали и предлагается обсудить.

Какие бы тела нам выбрать для применения к ним сформулированной выше теоремы? Выглянем в окно: вот — едет автомобиль, вот — человек идет, вот — бежит кошка, а вот еще какой-то жук ползет по карнизу. Их-то мы и выберем. А начнем с автомобиля. Только в одном случае — в случае буксировки на тросе — применение этой теоремы к движению автомобиля не вызывает никаких затруднений. Но обычный-то режим движения автомобилей не таков...

## Какая сила ускоряет автомобиль?

В каком-то старом учебнике механики я увидел такое название одного из разделов: «Самодвижущиеся экипажи». Замечательное название! И у нас речь в первую очередь пойдет о самодвижущихся экипажах на колесном ходу (или на гусеничном) с *традиционным* для таких устройств принципом движения. Последнее замечание исключает из нашего рассмотрения такие специфические устройства, как аэросани, парусники или автомобили с ракетным двигателем (специально конструируемые для установки рекордов скорости).

Обсудим некоторые принципиальные моменты механики самодвижущихся экипажей, т.е. те моменты, которые не связаны с конкретным устройством двигателя, трансмиссии и прочих вещей, милых сердцу каждого автомобилиста. Будем для удобства говорить об автомобиле, но все сказанное будет в равной мере применимо к тепловозу, танку, велосипеду и даже — к детскому заводному автомобильчику.

Главный вопрос, конечно, такой: какая сила ускоряет автомобиль? Упоминание в

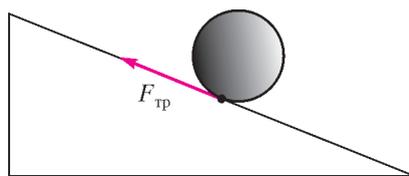
ответе на этот вопрос какой-то «силы тяги», заметим, ничего не объясняет. Надо конкретно указать взаимодействующие тела и описать свойства силы. Для наших целей лучше поставить два разных вопроса. Можно спросить: действие какой силы приводит к изменению импульса автомобиля? А можно спросить: откуда берется кинетическая энергия автомобиля? Как ни странно, ниже мы убедимся, что это действительно разные вопросы.

Будем вести речь о *нормальном* режиме движения, когда колеса не проскальзывают относительно дороги. Для ответа на первый вопрос необходимо указать конкретную *внешнюю* силу (внутренние силы изменить движения центра масс системы не могут). И такая сила легко находится. Действительно, к ведущему колесу от двигателя передается крутящий момент, под действием которого колесо стремится провернуться относительно дороги, но возникающая между колесом и дорогой сила трения мешает ему это сделать. Ясно, что сила трения, приложенная к колесу, направлена противоположно возможному проскальзыванию, т.е. вперед, по направлению движения автомобиля. Вот действие этой силы и приводит к увеличению импульса автомобиля, можно сказать – заставляет автомобиль двигаться.

### Свойства этой силы

Итак, речь идет о силе трения между ведущими колесами и дорогой. Автомобилисты называют ее *силой сцепления с дорогой*. И обладает она удивительными свойствами. Впрочем, мы можем столкнуться со свойствами этой силы, решая обыкновенные учебные задачи и не думая об автомобиле.

Вот, например, известная задача, которую нельзя обойти при изучении динамики вращательного движения, – задача о скатывании цилиндра с наклонной плоскости без проскальзывания. Очень полезно решить ее несколькими разными способами. Заметим, что именно сила трения о плоскость закручивает цилиндр (см. рисунок). И когда вы будете решать эту задачу, записывая закон сохранения энергии для цилиндра, перед вами неизбежно встанет воп-



рос о величине работы этой силы. Оказывается, работа силы трения в этом случае равна нулю.

Если читатель впервые сталкивается с такой мыслью, он скажет: «Что за чепуха? Сила есть, перемещение есть, а работы нет?!» Да, именно так. Дело в том, что эта сила – сила трения *покоя*, она приложена к точке касания цилиндра с плоскостью, мгновенная скорость которой относительно плоскости равна нулю. Есть перемещение цилиндра, но нет перемещения точки приложения силы.

Ничего нового или оригинального в высказанных сейчас соображениях, конечно, нет. И все это без всяких изменений переносится на взаимодействие автомобильного колеса с дорогой.

Итак, сила сцепления колеса с дорогой работы не совершает. Но ведь и в школьных задачниках, и в серьезных руководствах по механике автомобиля можно видеть, что авторы записывают работу силы тяги как произведение  $Fs$ , где  $F$  – сила тяги, а  $s$  – пройденный автомобилем путь. Не могут же они все ошибаться! И почему их ошибки не проявляются тотчас же на практике? Этот вопрос подробно рассматривался в «Кванте» в статье А. Черноуцана «Кое-что о силе тяги» («Квант» №5 за 1992 г.). И ответ оказался удивительным и парадоксальным.

Какую часть израсходованной на движение энергии можно считать полезной? Разумеется, ту, которая пошла на увеличение кинетической и потенциальной энергии автомобиля и на преодоление сопротивления движению. В упомянутой статье показывается, что эту энергию, израсходованную на пути  $s$ , при некоторых разумных предположениях всегда *можно записать* в виде произведения  $Fs$ . И, соответственно, мощность, расходуемая на движение, может быть записана как произведение  $Fv$ . Ниже мы укажем совсем простой путь получения этого результата.

Однако вернемся к основной линии наших рассуждений. Сформулированный сейчас результат никак не может поколебать наш вывод о том, что работы-то сила сцепления с дорогой не совершает. А значит, теорема о кинетической энергии (в том виде, как она приведена выше) для автомобиля заведомо не справедлива.

И не только для автомобиля...

### Люди, кошки, тараканы...

Есть огромный класс объектов, для которых указанное выше свойство движущей силы (равенство нулю ее работы) еще очевиднее, чем для автомобилей. И мы с вами, читатель, яркий пример тому в целом ряде случаев: когда мы разбегаемся, ускоряясь, когда скользим на лыжах, отталкиваясь палками от снега, или когда, находясь в лодке, отталкиваемся шестом от дна речки. И все братья наши меньшие. И вообще все-все-все, перемещающиеся по твердой опоре шагом или прыжками на своих двух, четырех, шести ногах (лапах). При движении всех этих объектов точка приложения силы не перемещается, потому никакой работы силы нет. Однако, объект ускоряется или движется, преодолевая сопротивление.

Здесь можно немного отвлечься в сторону и подумать о том, на что же мы тратим энергию, например, при ходьбе. По-видимому, на изменение конфигурации тела и на неизбежный подъем центра тяжести. Посмотрите на спортсменов, занимающихся ходьбой на длинные дистанции, – их странная походка ориентирована как раз на то, чтобы уменьшить расход энергии на подъем центра тяжести.

Итак, есть огромный класс объектов, движение которых очевидным образом противоречит теореме о кинетической энергии. В чем же дело?

Дело в том, что все конкретные утверждения физики обычно опираются на некоторые модельные предположения, которые либо высказаны весьма определенно, либо заложены в наши рассуждения и утверждения неявно. Вот где зарыта собака! Авторы приведенной выше формулировки теоремы о кинетической энергии рассматривали тело

либо как материальную точку, либо как абсолютно твердое тело, оставляя читателям самостоятельно определять, вписывается ли какой-то конкретный объект в рамки этих моделей.

Какое условие всегда выдвигают на первый план при обсуждении модели материальной точки? Конечно же, малость размеров тела по сравнению с другими размерами в задаче. Но нельзя думать, что это *достаточное* условие. Применимость или неприменимость какой-то модели к конкретному объекту зависит от того, на какие вопросы мы ищем ответы. Для обсуждаемых нами вопросов соотношения размеров вообще никакой роли не играют.

Что общего в принципе движения всех перечисленных выше объектов – и технических устройств, и живых существ? Все они движутся за счет изменения своей *конфигурации*. И именно на это и расходуют свою энергию. И нет ничего удивительного в том, что попытка применить к ним модель материальной точки или абсолютно твердого тела приводит к недоразумению – в рамках указанных моделей эти процессы рассматривать невозможно. А вот если представить интересующие нас объекты как системы материальных точек, то все наши недоуменные вопросы оказываются снятыми. Для такой системы кинетическая энергия меняется под действием и внешних, и внутренних сил.

Пусть сила  $F$ , приложенная к колесу автомобиля, постоянна по величине. Для вращения колеса к нему должен быть приложен момент сил  $M = FR$ , где  $R$  – радиус колеса. Значит, при повороте колеса на угол  $\phi$  будет совершена работа  $A = M\phi$ . Если автомобиль прошел путь  $s$ , то колесо повернулось на угол  $\phi = \frac{s}{R}$ , поэтому силы, вращающие колесо, совершили работу  $A = Fs$ . Теперь ясно, что для автомобиля величина  $Fs$ , строго говоря, является *полезной работой внутренних сил*.

Формулируя же теорему о кинетической энергии так, как это было сделано в начале статьи, необходимо помнить, что в таком виде она применима только для тел *неизменной* конфигурации.

# Обобщение теоремы Помпею

Е. БАКАЕВ

СУЩЕСТВУЮТ РАЗНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ теоремы Помпею, в этой статье мы докажем одно из них.

Для начала вспомним саму эту теорему.

**Теорема Помпею.** На дуге  $BC$  окружности, описанной около равностороннего треугольника  $ABC$ , взята произвольная точка  $P$  (рис.1). Тогда  $AP = BP + CP$ .

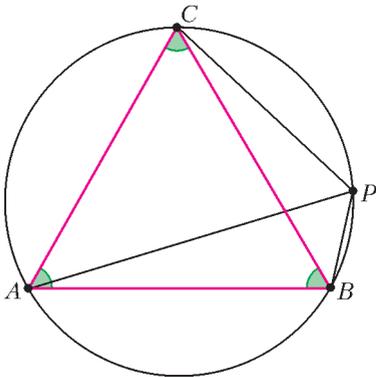


Рис. 1

**Доказательство.** Построим правильный треугольник  $BPQ$  внутри окружности (рис.2), тогда точка  $Q$  будет лежать на отрезке  $AP$ , так как вписанные углы  $APB$  и  $APC$  равны  $60^\circ$ . Из равенства углов  $PBQ$  и  $ABC$  следует равенство углов  $PBC$  и  $QBA$ . Тогда треугольники  $PBC$  и  $QBA$  равны по двум сторонам и углу между ними. Значит,  $AP = AQ + QP = CP + BP$ .

Теорема доказана.

Другие способы доказательства теоремы смотрите в статье «Теорема Птолемея и перекладывание треугольников» этого номера журнала, а также в [1] и [2].

По-видимому, эта теорема принадлежит ван Схотену (Франц ван Схотен, 1615–

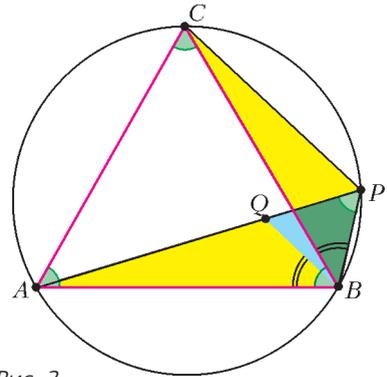


Рис. 2

1660), но за ней закрепилось имя Помпею (Димитрие Помпею, 1873–1954), который в 1936 году доказал такое обобщение теоремы: для всех точек  $P$ , не лежащих на описанной окружности треугольника  $ABC$ , из отрезков  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  можно сложить треугольник, а для точек  $P$ , лежащих на ней, такой треугольник вырождается в отрезок.

\* \* \*

Далее речь пойдет еще об одном обобщении теоремы Помпею.

Пусть  $A_1A_2\dots A_n$  – правильный многоугольник с нечетным числом сторон,  $M$  – произвольная точка на дуге  $A_1A_n$  окружности, описанной около многоугольника (рис.3). Тогда сумма расстояний от точки  $M$  до вершин с нечетными номерами равна сумме расстояний от  $M$  до вершин с четными номерами.

Это утверждение обычно доказывается с помощью теоремы Птолемея (см., например, [3] или [4]). Иные подходы (использующие

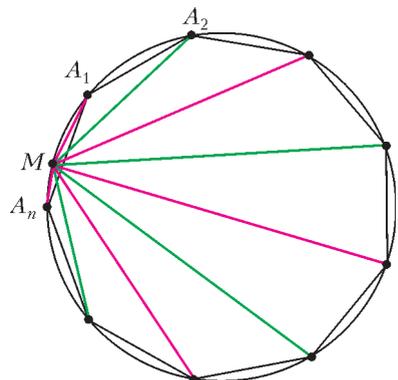


Рис. 3

тригонометрические функции и векторы) изложены в [2].

Мы приведем другое доказательство, являющееся в некотором роде развитием приведенного выше доказательства теоремы Помпею.

**Доказательство.** Построим внутри окружности правильный  $n$ -угольник  $MA_1B_2B_3 \dots B_{n-1}$  со стороной  $A_1M$  (рис.4). Вершины нового многоугольника лежат на отрезках

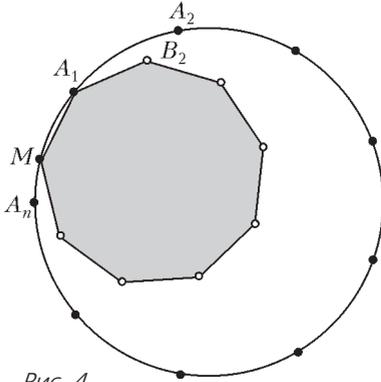


Рис. 4

$MA_2, MA_3, \dots, MA_{n-1}$ , потому что все стороны исходного многоугольника видны из точки  $M$  под одним и тем же углом  $180^\circ/n$ , так как она лежит на его описанной окружности. Под тем же углом стороны нового многоугольника видны из его вершины  $M$ , ведь она лежит и на описанной окружности нового многоугольника.

Будем называть части отрезков  $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ , ограниченные новым многоугольником (рис.5), *внутренними отрезками*, а лежащие вне него – *внешними отрезками*.

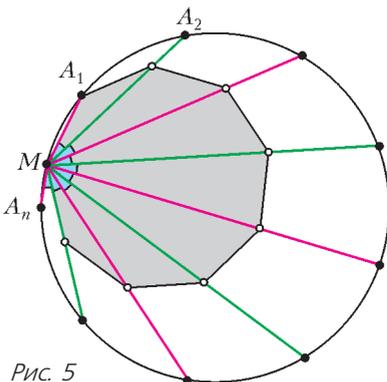


Рис. 5

Мы приведем несколько способов завершить доказательство, но в них всех построенный нами вспомогательный  $n$ -угольник будет играть ключевую роль.

*Первый способ.* Внутренние отрезки разбиваются на пары равных, так как это диагонали нового многоугольника. А правильный многоугольник с нечетным количеством сторон имеет ось симметрии, относительно которой его диагонали, проведенные из точки  $M$ , будут симметричны друг другу (рис.6).

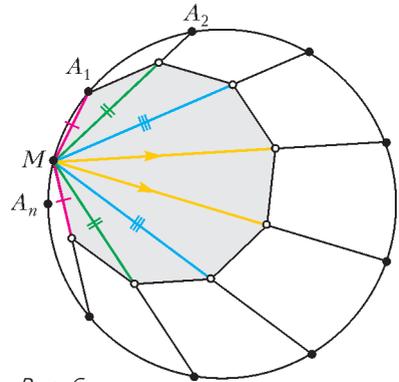


Рис. 6

Причем в каждой такой паре один из отрезков будет вести из точки  $M$  к вершине исходного многоугольника, имеющей нечетный номер, а другой – к имеющей четный номер.

Покажем теперь, что внешние отрезки также разбиваются на пары равных (рис.7). Тогда утверждение задачи будет доказано.

Рассмотрим одну из таких пар отрезков  $A_kB_k$  и  $A_mB_m$  ( $k + m = n + 2$ ) и докажем их равенство (рис.8). Треугольники  $A_1A_kA_m$  и

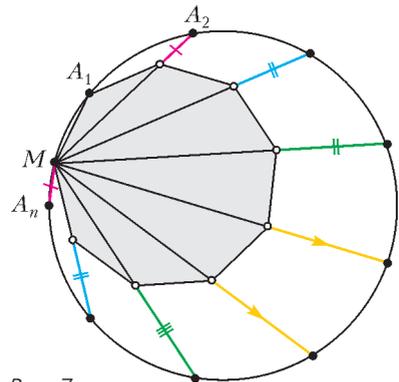


Рис. 7

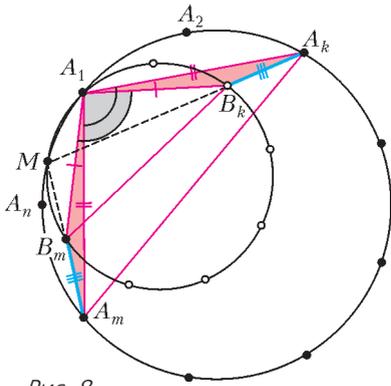


Рис. 8

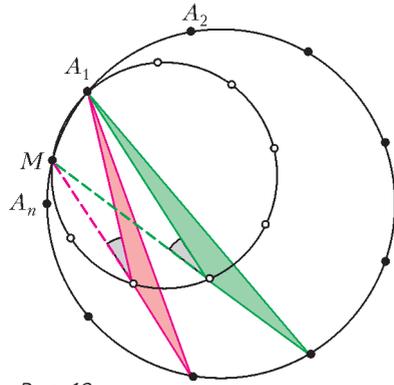


Рис. 10

$A_1B_kB_m$  – подобные равнобедренные, так как их вершины – соответствующие при подобии двух правильных  $n$ -угольников. Значит, треугольники  $A_1A_kB_k$  и  $A_1A_mB_m$  равны по двум сторонам и углу между ними, и отрезки  $A_kB_k$  и  $A_mB_m$  равны как их соответствующие элементы.

Заметим, что равенство этих отрезков можно было доказать иначе, сославшись на факт 1 из [5].

*Второй способ.* Проведем в новом  $n$ -угольнике его ось симметрии, проходящую через середину стороны  $A_1M$ . Отразим все внутренние отрезки относительно этой оси. Теперь вершина  $A_1$  соединена двузвенными ломаными с остальными вершинами исходного многоугольника (рис.9).

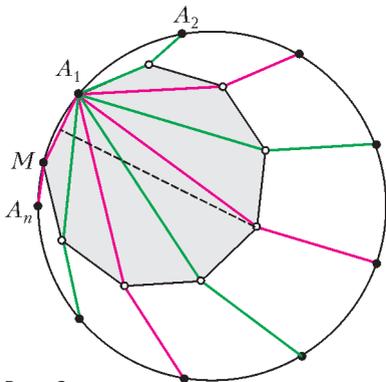


Рис. 9

Докажем, что суммарная длина красных ломаных равна суммарной длине зеленых ломаных.

Дополним эти ломаные до треугольников (рис.10). Они будут подобны между собой,

потому что у них равны один внешний угол и один внутренний, так как эти углы вписаны в описанные окружности  $n$ -угольников.

Раз все эти треугольники подобны, то, если для каждого из них двузвенную ломаную заменить на третью сторону (рис.11),

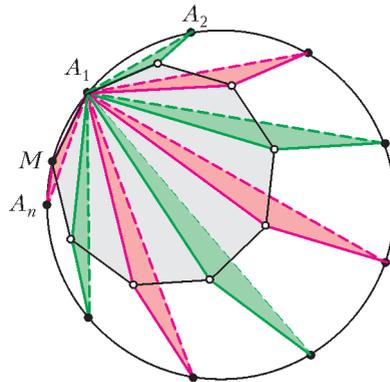


Рис. 11

суммарная длина изменится одинаково (уменьшится в одинаковое число раз). Таким образом, вместо сравнения суммарных длин ломаных можно сравнивать суммарные длины третьих сторон треугольников. А они являются диагоналями исходного многоугольника, поэтому разбиваются на пары равных.

*Третий способ.* Построим не только правильный  $n$ -угольник со стороной  $A_1M$  – будем называть его первым, но и еще один правильный  $n$ -угольник со стороной  $A_nM$  – будем называть его вторым (рис.12). Вершины второго многоугольника лежат на отрезках  $MA_2, MA_3, \dots, MA_{n-1}$  по той же причине, по какой на них лежат вершины первого. Оказывается, что внешние отрезки соответ-

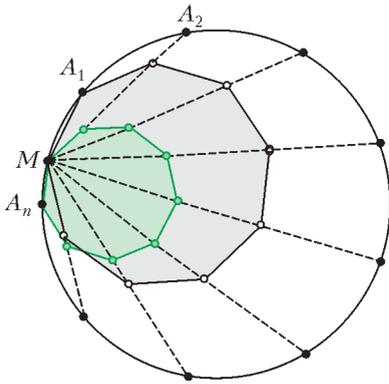


Рис. 12

ственно равны диагоналям второго многоугольника (рис.13). Докажем это.

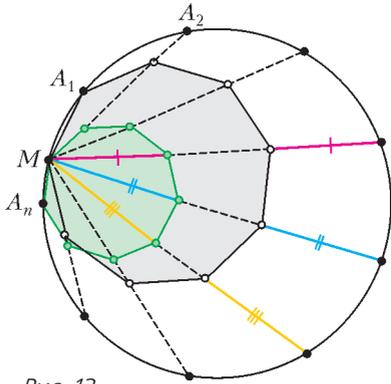


Рис. 13

Рассмотрим отрезок  $MA_k$ . Пусть лежащая на этом отрезке вершина первого многоугольника называется  $P$ , а второго многоугольника –  $Q$  (рис.14). Докажем, что  $MQ = A_kP$ .

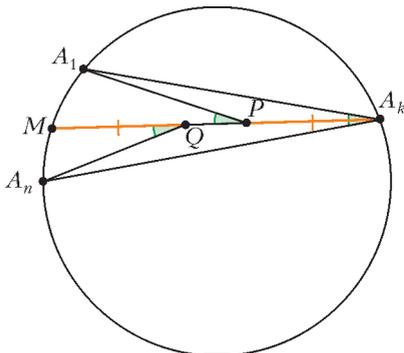


Рис. 14

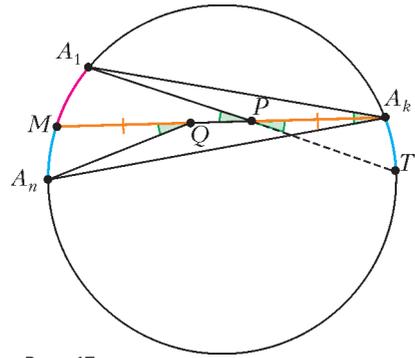


Рис. 15

Точки  $P, Q$  и  $A_k$  – вершины правильных  $n$ -угольников со сторонами  $A_1M, A_nM$  и  $A_1A_n$  соответственно. Значит, вписанные углы  $A_1PM, A_nQM$  и  $A_1A_kA_n$  равны (рис.15).

Продлим отрезок  $A_1P$  до второго пересечения с окружностью в точке  $T$ . Угол  $A_1A_kA_n$  равен половине дуги  $A_1A_n$ , а угол  $A_1PM$  – полусумме дуг  $A_1M$  и  $A_kT$ . Значит, дуги  $A_kT$  и  $A_nM$  равны. Тогда они симметричны относительно серединного перпендикуляра к хорде  $MA_k$ . Из равенства углов  $A_nQM$  и  $TPA_k$  следует, что при этой симметрии  $P$  перейдет в  $Q$ , что и означает равенство отрезков  $MQ$  и  $A_kP$ .

Итак, внешние отрезки соответственно равны диагоналям второго многоугольника. А значит, внешние отрезки разбиваются на пары равных, ведь на такие пары разбиваются диагонали правильного  $n$ -угольника, проведенные из одной вершины.

**Литература**

1. Сайт: <http://zadachi.mcsme.ru>, задача №17.
2. М.Паюв, А.Стивак. Вписанные многоугольники. – «Квант» №1 за 1999 г.
3. Сайт: <http://zadachi.mcsme.ru>, задача №4786.
4. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии. – 6-е изд. – М.: МЦНМО, 2007. – № 6.45(а), с.156.
5. А.Полянский. Воробьями по пушкам! – «Квант» №2 за 2012 г.

# Кривая, перевернутая вверх ногами

*В. ПТУШЕНКО*

**В**ЛЕГЕНДАРНОМ СБОРНИКЕ НАУЧНО-юмора «Физики продолжают шутить» приведен один анекдот про выдающегося физика-теоретика Якова Ильича Френкеля:

«О Я.И. Френкеле рассказывают, что якобы в ФТИ в 30-е годы его изловил в коридоре некий экспериментатор и показал полученную на опыте кривую. Подумав минуту, Я.И. дал объяснение хода этой кривой. Однако выяснилось, что кривая случайно была перевернута вверх ногами. Кривую водворили на место, и, немного поразмыслив, Я.И. объяснил и это поведение кривой».

Как ни смешно, но такие «анекдоты» на самом деле встречается нам на каждом шагу. Нет, не то, что «теоретики могут объяснить, что угодно». А кажущиеся противоречащими друг другу явления, которые, однако, требуют своего объяснения. Далеко ходить не надо.

Представьте себе, что вы идете на лыжах и встречаете картину, запечатленную на рисунке 1. Вроде бы, ничего удивительного:



Рис. 1

проехал автомобиль, промял в весеннем снегу колею, и снег в этой колее растаял – чуть быстрее, чем он тает вокруг. Но вот вы проходите еще несколько километров и вдруг видите нечто противоположное. На рисунке 2 явно видны автомобильные следы, но они не тают – все вокруг тает, а они нет!

Сразу предупредим, что никакого розыгрыша здесь нет: эти фотографии действительно сняты в один и тот же день, всего в нескольких километрах друг от друга. Время года, климат, погодные условия – все здесь одно и то же. И событие тоже, вроде бы, одно и то же: проехал по снегу автомобиль. Вот только результаты прямо противоположные. Что же, вспомним с уважением Френкеля и попробуем объяснить эти явления?

Прежде всего признаемся, что явление, изображенное на рисунке 1, гораздо более редкое (во всяком случае, если дело происходит в лесу или на поле, а не вблизи какого-нибудь карьера), но объяснить его проще. Уточним, что «объяснить» – это значит назвать то физическое явление, которое лежит в основе наблюдаемой нами картины, описать условия, при которых это явление проявляется, и понять, почему именно такие условия здесь возникли. Третий этап, правда, часто выходит за пределы чисто физической задачи. Но – обо всем по порядку. Попробуем пройти через все этапы.

Какое физическое явление могло бы оказаться в основе быстрого таяния снега в



Рис. 2

следе автомобильного колеса? Переберем варианты, от чего в принципе могла бы зависеть скорость таяния (плавления) вещества: от его теплоемкости, теплопроводности, интенсивности отвода тепла и его поглощения извне... Стоп, кажется, что-то правдоподобное в этом списке прозвучало, а именно – поглощение тепла. Откуда снег получает тепло? От тех объектов или сред, с которыми он взаимодействует путем непосредственного (можно сказать «контактно-го») теплообмена или излучения: это земля, воздух, вода (в виде дождя или полых вод), солнце.

Земля действительно может играть существенную роль в таянии снега по осени. Многие, возможно, замечали, как плохо ранний снег ложится на еще не остывшую землю – даже если его много и если холодно, он все равно подтаивает внизу и цепляется за лыжи, если вы решили на них встать, не дожидаясь настоящей, глубокой зимы. Но к концу зимы (а на наших фотографиях – конец зимы) земля все-таки успевает остыть – если только ее не прогревает солнце там, где она свободна от снега.

Теплый воздух тоже может сыграть роль в таянии снега – однако его температура не настолько сильно меняется на протяжении нескольких метров вдоль поверхности земли и, главное, не способна надолго сохранить эти различия (воздух ведь быстро перемешивается), чтобы вызвать такое неравномерное таяние.

Вода – а что, вполне могла бы помочь. Если колеса проторили русло для воды в снегу и по этому снегу понеслись первые потоки талых вод, то они могли бы ускорить таяние ближайшего к руслу снега. На всякий случай, запомним эту версию, хотя некоторые ее недостатки уже можно заметить: никаких следов воды, а тем более мощных потоков воды в протаявших колеях не заметно. Мощный поток размыл бы дно, и оно выглядело бы немного иначе. Кроме того, следы идут во всех направлениях и все одинаково хорошо протаяли – вряд ли ручьи одинаково легко разбегаются бы во все стороны, независимо от уклона.

Конечно, основным подозреваемым ока-

жется все-таки солнце. Колеса могли нанести грязь на снег, местами могли даже протереть в рыхлом снежном покрове дырку до земли. И там, где исчез или оказался запятнан прекрасно отражающий свет слой снега, темные участки начали активно поглощать солнечную энергию. Насколько сильно влияет это различие в отражающей способности на скорость таяния, можно наблюдать по «втравившим» в весенний снег веточкам (рис.3): каждая тоненькая былинка протапливает



Рис. 3

под собой снег и погружается в него, как горячий нож в масло.

Итак, с «негативом» – черные следы на белом снегу – понятно. Физическое явление, которое его объясняет, это различие в поглощении солнечного излучения более темными и более светлыми участками поверхности земли. Условие, при которых оно проявилось, это появление темных участков после проезда колеса – грязи или обнаженной земли. А почему именно здесь проезд автомобиля привел к такому эффекту – вопрос более сложный и требующий знания местности, автотехники да и просто конкретных обстоятельств события, о которых мы можем только догадываться.

Ну, а что же с «позитивом», т.е. белыми следами на темной земле? Как могла остаться белая ледяная дорога посреди протаявшего поля? А вот, кстати, прозвучало ключевое слово: ледяная. На фотографии (см. рис. 2) это не слишком хорошо заметно, но если приглядеться к настоящей белой дорожке да еще пощупать ее, то станет

очевидно, что это не просто снег. Не то чтобы лед, но, во всяком случае, хорошо спрессованный снег, а отнюдь не рыхлый. И спрессованный многими проехавшими по нему колесами. Интересно, а почему здесь колеса не испачкали снег, а лишь утрамбовали его? Можно предположить, что эта дорога появилась еще глубокой зимой. Зимнего солнечного света не хватает, чтобы растапливать снег даже «с помощью» темных пятен, а протаявшие внутрь снега ветки – типично мартовское явление, в январе такого не встретишь. И тогда испачкают колеса снег или нет, не важно: все равно не растает. Да и свежим снегом заметет: не успеешь оглянуться, а кругом снова белым-бело.

Итак, здесь все необходимые компоненты объяснения тоже есть. Хотя, нет, не все. Про самую-то главную, самую «физическую» часть мы и забыли: а что здесь за физическое явление? Почему утрамбованный снег или лед тает медленнее? Казалось бы, тут все просто: и в утрамбованном снегу, и во льду меньше воздуха, меньше пустот, вот и сложнее растопить его. Погодите, но «пустоты», воздух – это же отличная теплоизоляция! «Снеговое одеяло», «снег предохраняет землю от промерзания» – подобные фразы мы слышим с детства. Из-за своей пористой структуры рыхлому снегу как раз проще, чем льду, «не пустить» солнечное тепло внутрь себя – его теплопроводность ниже. Хорошо, но из-за этой пористой структуры в снегу просто меньше той замерзшей воды, которую надо топить. Поэтому и тепла ему требуется меньше, чтобы растаять. Однако... Попробуйте провести эксперимент – растопите на солнце блоки рыхлого и спрессованного снега, и вы убедитесь, что даже при одинаковых массах рыхлый снег все равно тает быстрее. Нет, эффект в чем-то другом.

Давайте посмотрим внимательно на тающий весенний снег. Нетрудно убедиться в том, что внутри, под снегом, вода. Снег пропитан водой, образующейся из него же, он лежит буквально в луже этой воды. Так может быть, это тающая вода, стекая по пористой снежной массе вниз, разносит по

ней тепло – гораздо быстрее, чем оно могло бы пройти само по этому пористому материалу, пользуясь «услугами» одной лишь теплопроводности? Вроде, красивая идея. Только вот как установить, правы мы или нет? Какой эксперимент мы могли бы провести, чтобы доказать правильность нашей идеи или же, наоборот, опровергнуть ее? Задача непростая. Попробуйте решить ее сами!

Прежде чем расстаться с нашими «перевернутыми кривыми», взглянем в последний раз на снежный след, причем оставленный не автомобилями, а лыжниками (рис.4). Лыжный след остается в лесу еще



Рис. 4

долго после того, как растаял весь снег вокруг. Но перед тем, как это произойдет, лыжня «инвертируется» – вдавленные в снег желобки, следы двух лыж, превращаются в валики, возвышающиеся над окружающим снегом. Как будто лыжня «выворачивается наизнанку», словно «ожившая», сошедшая со страниц сборников анекдотов о физике и физиках перевернутая вверх ногами кривая.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## АЛГЕБРА И АРИФМЕТИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

1. Фокус в том, что угловые коэффициенты гипотенуз треугольников и боковых сторон трапеций разные (хотя и очень близкие:  $3/8$  и  $2/5$  соответственно, разница  $1/40$ ), а потому эти отрезки никак не могут слиться в одну линию – диагональ прямоугольника  $5 \times 13$ . На рисунке в статье это не видно, поскольку линии на нем изображены нарочито жирно. Если же перерисовать его тонким карандашом в крупном масштабе, то по диагонали можно увидеть щель в форме параллелограмма (рис. 1). Его площадь

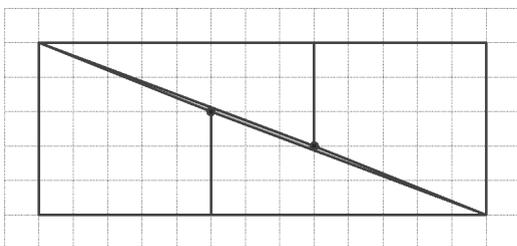


Рис. 1

как раз равна площади одной клетки – той самой «лишней».

Отметим, что возникающие в задаче числа 2, 3, 5, 8, 13 – это подряд идущие члены последовательности Фибоначчи ( $F_n$ ), заданной рекуррентно:  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Эти числа обладают многими замечательными свойствами.

На одном из них,  $F_{n-1}F_{n+2} - F_nF_{n+1} = (-1)^n$ , как раз основан эффект «появления лишней клетки» ( $2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$ ,  $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$ ).

2. Например, треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, n)$ ,  $(2, 2n + 1)$ .

3. а)  $2\text{НОД}(a, b) + 2\text{НОД}(c, d)$ ;

б)  $|ad - bc| - \text{НОД}(a, b) - \text{НОД}(c, d) + 1$  (из формулы Пика).

4. Исследование элементарности параллелепипеда  $P$  (отсутствие внутри него и на его гранях целых точек, кроме вершин), натянутого на векторы  $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $\vec{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ,  $\vec{u}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$  в  $\mathbb{Z}^3$ , аналогично двумерному случаю приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (*)$$

с целыми свободными членами  $b_1, b_2, b_3$  и ее

определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Обозначим через  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определитель, полученный из  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Трехмерный аналог теоремы 1 теперь вытекает из следующей теоремы, доказательство которой оставляется читателю в качестве упражнения.

**Теорема.** Векторы  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  некопланарны тогда и только тогда, когда  $\Delta \neq 0$ . В этом случае имеют место формулы Крамера:

$$(*) \Leftrightarrow x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Кроме того, эти решения будут целочисленными при любых целых  $b_1, b_2, b_3$  в точности тогда, когда  $\Delta = \pm 1$ .

Трехмерный аналог теоремы 2 (объем  $P$  равен  $\Delta$ ) доказывается, как в конце §1, с использованием ориентированного объема – внешнего произведения трех векторов  $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ .

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №4 за 2016 г.)

1. Можно; 40 яблок.

Если на всех тарелках разное количество яблок, то, рассмотрев первую тарелку в паре со всеми другими тарелками по очереди, получим 9 различных попарных сумм, но их всего 3. Значит, на каких-то двух тарелках поровну яблок. На них в сумме четное количество яблок, значит, их 8 (числа 5 и 11 нечетны), следовательно, на этих тарелках по 4 яблока. Таким образом, на некоторых тарелках по 4 яблока, а на всех остальных тарелках различное количество яблок.

Рассмотрим одну из тарелок с 4 яблоками в паре со всеми тарелками, на которых не 4 яблока. Так как во всех таких парах различное количество яблок, а возможные количества – только 5 и 11, то таких пар не больше двух и на этих тарелках может быть только 1 или 7 яблок.

Итак, может быть не больше одной тарелки с 1 яблоком, не больше одной тарелки с 7 яблоками, а на всех остальных тарелках по 4 яблока.

Нетрудно проверить, что при этом тарелки с 1, и с 7 яблоками должны быть, иначе одна из сумм 5 и 11 не реализуется.

Получаем единственный возможный пример: одна тарелка с 1 яблоком, одна тарелка с 7 яблоками и восемь тарелок с 4 яблоками. Всего на них 40 яблок.

2. Пусть прямые  $AM$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ . Треугольники  $AMD$  и  $KMC$  равны (так как  $\angle AMD = \angle KMC$ ,  $\angle MDA = \angle MCK$ ,  $MD = MC$ ). Тогда треугольник  $ABK$  равнобедренный (поскольку его углы  $A$  и  $K$  равны). При этом  $M$  – середина его основания, т.е.  $BM$  – его медиана, а значит, и биссектриса.

3. Десятка.

Если бы логик  $A$  получил туза, он бы сказал «да», если бы шестерку – сказал бы «нет». В остальных случаях он говорит «не знаю», иначе его слова могут оказаться неправдой (ведь у  $D$  тогда может оказаться и туз, и шестерка). Логик  $B$ , понимая все это, скажет «да», если ему попадет туз или король (ведь у логика  $A$  не туз), и скажет «нет», если ему попадет шестерка или семерка. В остальных случаях логик  $B$  скажет «не знаю». Аналогично рассуждая, из ответа логика  $C$  «не знаю» получаем, что у него не туз, не король, не дама и не шестерка, не семерка, не восьмерка. А из ответа последнего логика следует, что у него нет ни этих карт, ни валета и ни девятки, т.е. у него десятка.

4. а) Нет.

Перекатим куб вперед, вправо, назад, влево. Тогда грань, которая была дном куба, будет сбоку.

б) Да.

Раскрасим вершины тетраэдра в 4 разных цвета.

Нарисуем на плоскости сетку из равносторонних треугольников и раскрасим ее вершины в те же 4 цвета так, чтобы вершины каждого цвета образовывали сетку из равносторонних треугольников со стороной, вдвое большей (на рисунке 2 изображен фрагмент такой раскраски). Эта раскраска обладает следующим свойством.

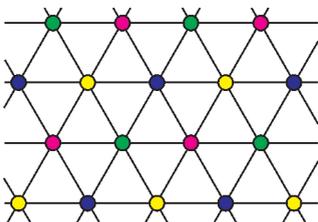


Рис. 2

Если поставить на сетку тетраэдр так, чтобы его грань совпала с одним из треугольников, а цвета вершин основания тетраэдра совпали с цветами вершин сетки, и затем перекачать его через любое ребро, то цвета вершин нового основания тетраэдра снова совпадут с цветами вершин сетки. Значит, если продолжать так делать дальше, то цвета будут продолжать совпадать, сколько бы тетраэдр ни перекачивали. Соответственно, если тетраэдр вернется на исходную позицию, то и вершины его останутся на прежних местах.

5. а) В группе из 4 человек можно сделать так, чтобы песка было поровну (сначала в двух парах, а потом между парами). Сделав так в трех группах по 4 человека, можно потом организовать встречи по три (по одному из каждой группы) и уравнивать количества песка у всех.

б) Нет.

Если у одного человека 1 кг песка, а у остальных 0, то надо добиться, чтобы было по  $\frac{1}{13}$  кг у каждого. Заметим, что после любого шага знаменатели всех дробей в разложении на простые множители не будут иметь простого множителя 13.

Действительно, если взять среднее арифметическое не более 12 дробей, знаменатели которых не содержат множителя 13, то этот множитель не появится и в знаменателе итоговой дроби. Ведь при сложении дробей их знаменатели перемножаются (или берется их НОК), так что новый простой делитель в знаменателе возникнуть не может. И при делении этой суммы дробей на их количество делитель 13 также не может возникнуть, потому что количество дробей меньше 13, значит, на 13 не делится, так как это простое число.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### Вопросы и задачи

1. Лапы утки отстоят друг от друга намного дальше, чем у курицы, поэтому при поднимании одной из лап утке приходится переносить центр тяжести в противоположную сторону. У курицы же центр тяжести всегда находится над площадью опоры.

2. Да, вначале ими рыбы отталкиваются от воды; при быстром же движении рыбы прижимают плавники к телу для уменьшения сопротивления.

3. У глубоководной рыбы внутреннее давление газов больше атмосферного, поэтому в воздухе раздувающийся плавательный пузырь не помещается в теле рыбы и выходит через рот.

4. Прочность костей и тканей животного пропорциональна площади их сечений. Сила сопротивления воздуха при падении тел также пропорциональна этой площади, масса же животного пропорциональна его объему. С уменьшением размеров тела его объем убывает значительно быстрее, чем площадь поверхности. Таким образом, для более мелкого животного и сила торможения, и прочность костей возрастают (в расчете на единицу массы).

5. Причины указаны в ответе к предыдущей задаче – увеличение размеров животного привело бы к непропорциональному увеличению скелета, пока тело не было бы раздавлено собственной тяжестью. В море, благодаря действию выталкивающей силы, такие животные, как, например, кит, при менее массивном скелете могут иметь значительно большие размеры, чем слон или бегемот.

6. Птица остается в воде сухой из-за того, что вода не смачивает ее перья, покрытые слоем жира. Мыло же смывает жир, вода проникнет в оперение, птица насквозь промокнет и может даже утонуть.

7. Чтобы удерживать в полете возросшую массу, насекомому приходится увеличить подъемную силу, чаще отбрасывая воздух вниз крыльями. А это приводит к повышению тона испускаемого пчелой звука.

8. При испарении воды температура в улье понижается, а влажность растёт.

9. Меняя площадь свободной поверхности тела, животные регулируют теплоотдачу.

10. Уменьшение размеров теплокровного животного приводит к увеличению теплоотдачи через поверхность его тела (см. задачу 4). Природа компенсирует это улучшением теплоизоляции, что, однако, имеет пределы. Вот почему нет сухопутных млекопитающих меньше мыши-землеройки, длина тела которой от 3 до 5 сантиметров, а масса – от 2 до 10 грамм.

11. Это относится к так называемым электрическим рыбам, которые создают вокруг себя электрическое поле и способны воспринимать ничтожно малые его изменения из-за появления в нем препятствия или добычи.

12. Вырабатывающие электричество клетки располагаются в угре последовательно в виде цепочек, в свою очередь соединенных параллельно друг с другом. В результате возникает суммарный ток, достаточный, чтобы оглушить или убить жертву либо врага, но слишком слабый внутри каждой клетки, чтобы повредить саму рыбу.

13. Жучки, в отличие от зерна, имеют черный

цвет, поэтому интенсивно поглощают инфракрасное излучение, перегреваются и погибают.

14. Показатель преломления тела насекомого близок к показателю преломления воды, а у его глаз – отличен (через прозрачные глаза свет проходил бы, не преломляясь и не создавая на сетчатке изображения). В воздухе личинки будут видны.

### Микроопыт

Лапки водомерок не смачиваются водой, что позволяет насекомым не «проваливаться» под воду и удерживаться на ней за счет силы поверхностного натяжения. Эту же силу выпуклой пленки воды, образующейся на месте, где мелкие насекомые пытаются выбраться из-под нее наружу, они и не могут преодолеть.

# КВАНТ

12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров,  
Е.М.Епифанов, С.Л.Кузнецов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

### Отпечатано

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

# Король АТАКУЕТ

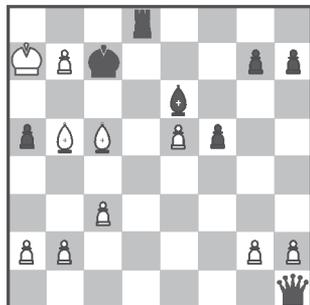
Согласно общим принципам игры в шахматы, короля нужно активизировать лишь в эндшпиле, когда с доски уже ушли дальнбойные фигуры, способные угрожать ему. Сегодняшний выпуск посвящен редчайшим исключениям из этого правила – партиям, в которых шахматный монарх лично принимал участие в атаке.

## Р.Стил–NN

### Калькутта, 1886 (87)

1. e4 e5 2. ♖f3 ♗c6 3. f4 ef 4. d4 ♗h4 5. ♘e2 d5 6. ed ♗g4 7. ♗f3 0-0-0 8. dc ♗c5 9. cb ♗b8. Разыгран острый вариант популярной в конце XIX века Венской партии – гамбит Стейница. 10. ♗b5 ♗f6 11. c3 ♗he8 12. ♘d3 ♗f5 13. ♘c4 ♗e6 14. ♘c5 a5 15. ♗c7 ♗h5 16. ♗e5 ♗d7 17. ♘b5 ♗d1 18. ♗f4 ♗a1 19. ♘a6 ♗e5 20. ♗e8 f6? (20... ♗d5!) 21. de f5 22. ♗e3 ♗e8 23. ♗b5 ♗h1 24. ♗a7 ♗c7 25. ♗c5 ♗d8? (25... ♗c8! и белые вынуждены форсировать вечный шах: ♗a7, ♗b6 и т.д.) 26. ♘a7!

Удивительный маршрут короля, как и финальная позиция этой партии, словно взяты из шахматной фантастики: при подавляющем материальном преимуществе черных они бесцельны против матовой конструкции белых. При этом партия действительно фантастическая:



она никогда не была сыграна в реальности, это лишь изящный анализ Р.Стила.

Небольшое расследование, проведенное голландским международным мастером Г.Веллингмом, относит нас к первому номеру «Международного шахматного журнала», выпущенного В.Стейницом в 1885 г. Там опубликована партия «двух известных любителей шахмат из Калькутты» Р.Стила и Д.Росса. Первые 23 хода в точности повторяют рассмотренную выше партию, а заканчивается она вечным шахом после 24. ♗c5 ♗d8 25. ♗a7. Позже в том же журнале в разделе «гамбит Стейница» опубликовано письмо самого Р.Стила, в котором он приводит выигрывающий, по его мнению, ход 23. ♗b5, в результате которого черные вынуждены либо перейти в худший эндшпиль с разноцветными слонами после 23... ♗b2 24. ♗c5 ♗b5, либо принять жертву ладьи с вариантом, рассмотренным в партии с NN (так обычно обозначаются неизвестные соперники). В конце XIX века было найдено усиление за черных: 25... ♗c8, форсирующий ничью, а затем в 1891 г. в партии Морган–Шипли был сделан ход 20... ♗d5, ведущий к победе черных.

В русскоязычном интернете этот анализ известен под названием «партия стального человека» (фамилия Р.Стила (Steel) переводится с английского как сталь). Что же, действительно, чтобы решиться на такой рейд короля, нужно обладать стальными нервами!

В реальности следующей партии сомневаться не приходится.

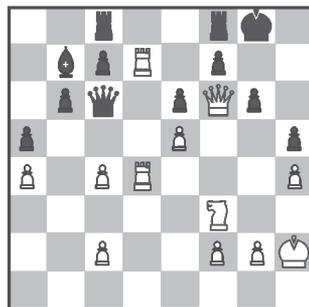
## Н.Шорт–Я.Тимман

### Тилбург, 1991

1. e4 ♗f6 2. e5 ♗d5 3. d4 d6 4. ♗f3 g6 5. ♗c4 ♗b6 6. ♗b3

♗g7 7. ♗e2 ♗c6 8. 0-0 0-0 9. h3! Профилактический ход, направленный на сохранение коня f3, защищающего пешку e5, которая ограничивает слона на g7. 9...a5 10. a4 de 11. de ♗d4 12. ♗d4 ♗d4 13. ♗e1 e6 14. ♗d2 ♗d5 15. ♗f3 ♗c5 16. ♗e4 ♗b4 17. bc4! Н.Шорт сознательно идет на ухудшение пешечной структуры с целью перевода ферзя на h4 и последующей атаки по черным полям. 17... ♗b6 18. b3 ♗c4 19. bc ♗e8 20. ♗d1 ♗c5 21. ♗h4 b6 22. ♗e3 ♗c6?! Необходимо было ♗f8, чтобы увеличить количество защитников королевского фланга. 23. ♗h6 ♗h8 24. ♗d8 ♗b7 25. ♗ad1 ♗g7 26. ♗d7! ♗f8 (26... ♗e4 27. ♗f7!! ♗f7 28. ♗g4+) 27. ♗g7 ♗g7 28. ♗d4 ♗ae8 29. ♗f6 ♗g8 30. h4 h5 31. ♘h2 ♗c8 (упорнее 31... ♗c8 32. g4! hg (32... ♗d7 33. gh) 33. ♗g5 ♗d7 34. h5! с выигрышем).

Позиция белых значительно лучше, однако их ферзь ну-



жен помощник, чтобы поставить мат черному королю. Быстрого способа эффективно подключить к атаке коня f3 не видно, поэтому в атаку идет... король! 32. ♘g3! ♗ce8 33. ♘f4! ♗c8 34. ♘g5 1-0 (34... ♗d7 35. ♘h6 с неизбежным матом на g7).

Поистине феноменальный марш-бросок короля!

А.Русанов

Индекс 90964

Что представляет собой след, оставленный лыжником на снегу:  
вдавленные в снег желобки или валики,  
возвышающиеся над окружающим снегом?

*Прогулки с физикой*

ЛЫЖНЫЙ СЛЕД



(Подробнее – на с. 43 внутри журнала)