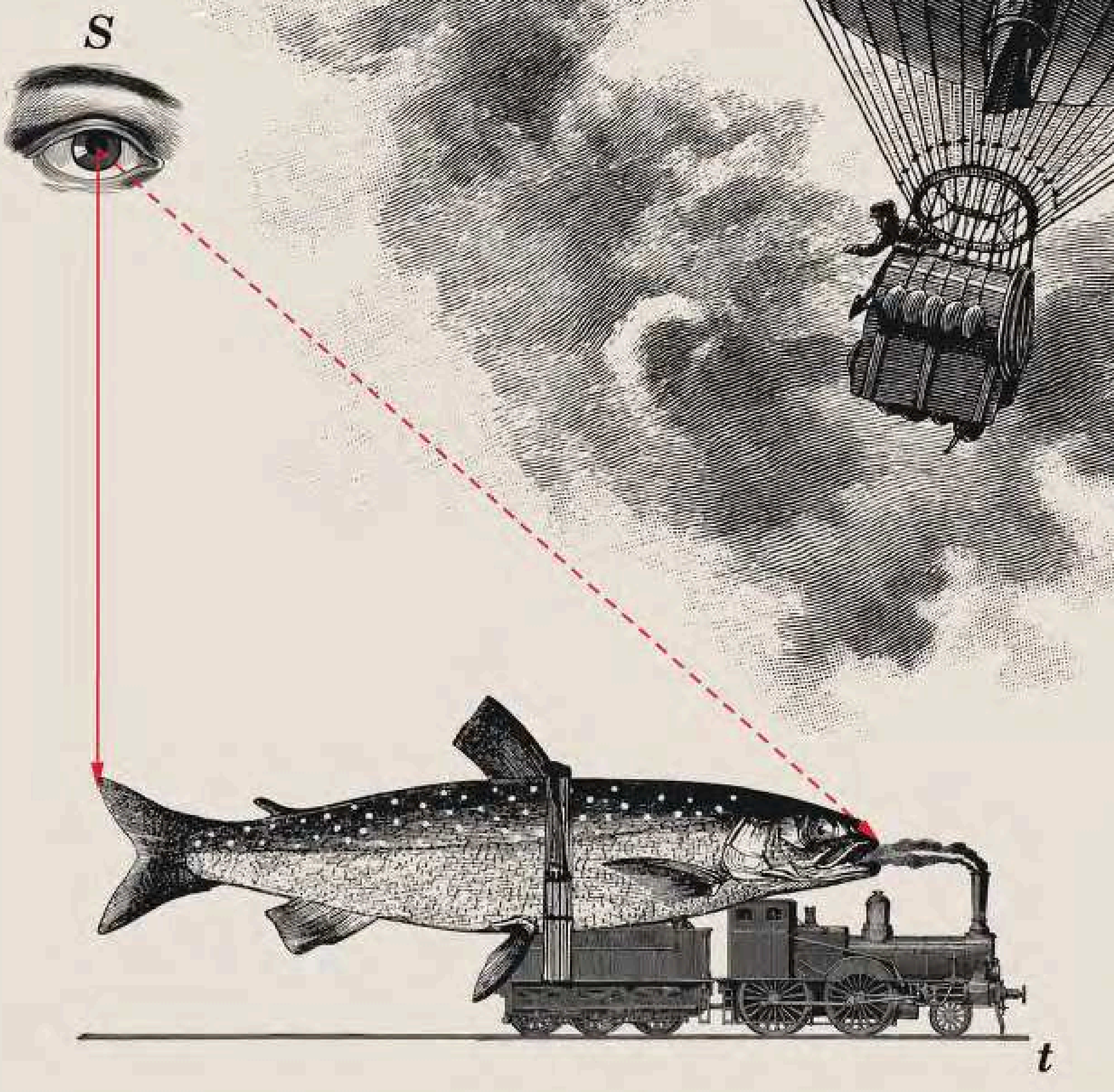
ИЮЛЬ/АВГУСТ
ISSN 0130-2221
2013 • №4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



НЕВИДИМОЕ РУКОПОЖАТИЕ

Изображенная на фотографиях скульптура стоит во дворе одного из зданий на территории колледжа Макалестер в Сент-Поле (столице штата Миннесота, США). Ее автор Хеламан Фергюсон имеет ученую степень по математике и активно занимается наукой. Он также увлекается разными видами творчества, и часто в его работах появляются математические мотивы. Скульптура представляет собой «слепок» пространства вокруг рук за мгновение до рукопожатия. Модель рукопожатия показана на следующих двух фотографиях. Веревочки изображают руки: обычно мы оттопыриваем большой палец, а остальные держим вместе, так что в момент пожатия рука напоминает букву Y. Если эти фотографии не убедят вас, то проведите эксперимент, попросив кого-нибудь пожать вам руку.
Подробнее обо всем этом рассказано на сайте: http://bit.ly/1bsGjs6

Е.Епифанов

КВАНТ

ИЮЛЬ АВГУСТ 2013 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Чему смеялся Гельфанд (Математическая новелла для нематематиков). *Е.Глаголева, В.Птушенко*
8 Распространение сигнала от движущегося источника, или Что увидит наблюдатель. *А.Рыбаков*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

13 Задачи М2309–М2315, Ф2315–Ф2322
15 Решения задач М2294–М2300, Ф2300–Ф2307

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

23 Задачи
24 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
24 Обмен мешочками на Поле Чудес. *А.Меньщиков*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

27 Сверххолодная вода. *И.Амелюшкин*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

29 Электрический ток в жидкости и фотоэффект. *С.Герасимов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Задачки на смекалку

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

34 Ну и денек! *И.Акулич*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

38 Идеальный газ в конкурсных задачах. *В.Дроздов*

ОЛИМПИАДЫ

42 XXXIV Турнир городов
43 LXXVI Московская математическая олимпиада
46 Избранные задачи Московской физической олимпиады
51 XX Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

52 Пилотируемая полоска

53 Ответы, указания, решения
Смесь (26)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье А.Рыбакова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

2 сентября 2013 года исполнилось бы 100 лет Израилю Моисеевичу Гельфанду – одному из крупнейших ученых XX века.

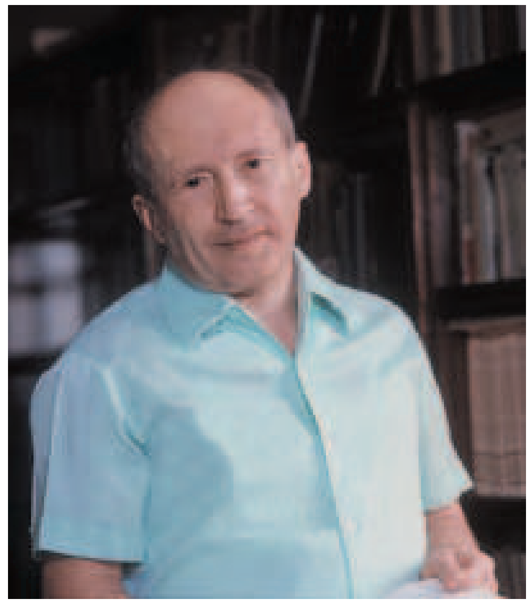
В научном мире Гельфанд известен прежде всего как математик, оставивший свой след почти во всех областях современной математики. Знают его также биологи (курьезно, что, когда появились работы Гельфанда по биологии, некоторые специалисты интересовались, имеет ли этот биолог какое-либо отношение к знаменитому математику Гельфанду). И совсем почти неизвестен Гельфанд-педагог.

Впрочем, это неудивительно: он никогда не был педагогом-теоретиком, у него нет ни одной работы по педагогике. Его чрезвычайно интересные и, можно сказать, мудрые педагогические взгляды реализованы в его обширной многолетней деятельности. И, конечно, в его учениках.

Не слишком преувеличивая, можно сказать, что учениками Гельфанда становились все, кому доводилось с ним общаться. Будь то дело, сопровождающееся более-менее длительным общением, или единственный разговор, или даже простое присутствие при какой-то беседе – люди непременно в той или иной степени испытывали на себе его влияние.

А еще он одним из первых стал вести математический кружок для школьников при МГУ, принимал участие в организации первых московских математических олимпиад.

Но главный вклад Гельфанда в педагогику – это, несомненно, Заочная математическая школа (известная теперь как ВЗМШ), которая является в полной мере его детищем и которая была придумана и создана буквально с нуля.



Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009)

Это было почти 50 лет назад. Мне довелось тогда работать с Израилем Моисеевичем. Я была первым «штатным» сотрудником Заочной школы, и это время было одно из самых трудных и счастливых в моей жизни.

Эта статья является последним поручением Израиля Моисеевича. Он жил тогда уже в Америке, и беседа шла в его кабинете в университете Ратгерса. Больше я с ним не встретилась. А Заочная школа выросла и продолжает работать, хотя формально ее не существует.

Е.Глаголева

Чему смеялся Гельфанд

(Математическая новелла для нематематиков)

Е.ГЛАГОЛЕВА, В.ПТУШЕНКО

С ДАВНИХ ПОР БЫТУЕТ ТАКАЯ ЛЕГЕНДА: БУДТО бы однажды куда-то в глубинку в школу приехало какое-то начальство, а на уроке математики учитель объяснял ученикам правило сложения дробей. «Числитель первой дроби, – говорил учитель, – надо сложить с числителем второй, а знаменатель первой – со знаменателем второй». После урока удивленный «высокий гость» подошел к учителю и рассказал ему, как правильно надо складывать дроби. И следующий урок учитель начал словами: «Нас тут поправили: пришло новое указание из Центра, и теперь надо складывать дроби иначе».

Лет 15 назад этот анекдот кто-то рассказал во время беседы в кругу нескольких математиков, среди которых был Израиль Моисеевич Гельфанд. Один из авторов этой статьи, присутствовавший при разговоре, откликнулся на анекдот неожиданным для собеседников пассажем:

– Ну, а почему, собственно, нельзя так складывать дроби? Давайте введем такое правило сложения дробей и так и будем их складывать! Что нам мешает?

На это сейчас же последовало возражение:

– Но ведь тогда не будет выполняться распределительный закон!

– Ну, если при этом все остальное оставить без изменения, то конечно! А мы изменим правило умножения дробей так, чтобы распределительный закон выполнялся, как и все остальные свойства сложения и умножения.

– Ну, ну, попробуйте! – еще больше удивились собеседники. – Интересно, как это Вам удастся!

В ответ на доске появилась формула:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac-bd}{bc+ad}.$$

Вот тут Гельфанд и засмеялся:

– Здорово! – сказал он. – Напишите про это.

Вот мы и пишем.

Почему же смеялся Гельфанд?

Дело в том, что по правилу умножения Израиль Моисеевич узнал давно известные в математике и широко применяемые в разных областях числа, только наряженные в чужую одежду!

Поэтому сознаемся в этом «спектакле с переодеванием» и отметим, что запись «a/b» в нашем случае не означает, конечно, дробь, хотя бы потому, что дроби складываются и умножаются по другим правилам. Так что мы заменим «маскарадный костюм» каким-либо другим обозначением, например $\frac{a}{\overline{\overline{b}}}$, а также вместо незаконно присвоенного названия «дроби» дадим другое, например «странные числа», или коротко «с-числа».

Но почему какие-то странные «дроби» можно считать числами? И откуда взялся этот самый распределительный закон, да и другие законы? И вообще:

А что мы называем числами?

Говоря попросту, числа – это то, что можно складывать и умножать, и чтобы при этом выполнялись некоторые правила – законы сложения и умножения, а именно:

$$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Эти требования выполняются для всех видов чисел, начиная с натуральных и кончая действительными.

Но почему так важны эти свойства чисел – в частности, именно такие, а не иные, законы сложения и умножения? Например, почему сумма непременно должна не меняться при перемене мест слагаемых, а произведение суммы на число должно быть обязательно равно сумме попарных произведений? И откуда вообще взялись эти правила?

Потрогать числа руками

Когда мы решаем любую задачу с помощью математики, мы используем вместо реальных предметов их математические образы. Но числа (точнее, натуральные числа) очень долго не отделялись от своих, так сказать, материальных носителей: люди считали не словами, а камушками, узелками, зарубками, в конце концов, пальцами.

Даже позже, когда уже появились натуральные числа, практические вычисления часто производились не на бумаге, а, например, на абаке или на русском его варианте – счетах. И числа можно было буквально потрогать руками, а действие законов было видно непосредственно. Действительно, если в одной корзине 100 яблок, а в другой 150, то необязательно ссыпать их в одну кучу и пересчитывать заново, чтобы узнать, сколько их всего.

И поскольку число яблок не зависит от того, с какой корзины вы начнете их пересчитывать, то и результат сложения чисел не должен зависеть от порядка слагаемых.

При этом, естественно, в формулировке законов не было никакой нужды.

Не счетом единым...

Знакомство с новыми явлениями природы, развитие человеческой деятельности требовали новых математических образов. Для счета предметов было достаточно только натуральных чисел; когда же начались различного рода измерения – появились дроби.

Кроме того, числа из простого инструмента человеческой практики стали предметом научного исследования, и стало ясно, что в построении системы чисел должна быть своя логика, внутренняя согласован-

ность разных свойств этой системы, их взаимная непротиворечивость. Вряд ли в практике кому-то могло быть нужным знать, что получится, если 2 разделить на ноль. А вот в Индии уже в VII веке об этом спорили: некоторые математики считали, что $x:0=x$, так как «разделить на ноль – это значит ни на что не разделить, поэтому останется то, что было»! Попробуйте-ка опровергнуть это высказывание, не задумываясь о взаимосвязи разных свойств чисел, т.е. о *теории* чисел! Можно, конечно, сказать, что делить на ноль – это не «ни на что не разделить», а «разделить на ничто», но это справедливо будет расценено как игра словами, не проясняющая сути вопроса. В таких вопросах интуиции, основанной на практике, на прямом наблюдении, в ряде случаев было уже недостаточно.

Да и до сих пор нередко наши интуитивные представления вступают в противоречие с математическими закономерностями. И сейчас бывает, что люди удивляются: «Как это так: мы умножаем число «двадцать» на одну вторую и получаем десять? Умножать – значит увеличивать, а получается меньше». А ответ на вопрос: «Что больше – пять процентов от трех или три процента от пяти?» далеко не всегда очевиден даже для школьников, поступающих в математический класс, а ведь этот ответ – прямое следствие коммутативного закона умножения.

С отрицательными числами не проще: хотя имеется хорошее истолкование отрицательных чисел как «долга», в отличие от положительных, означающих «прибыль», все равно отрицательные числа кажутся менее естественными, чем дроби. Что такое половина яблока или треть стакана воды, может видеть или вообразить себе каждый. А кто когда-нибудь держал в руках «минус три рубля»? А уж правила действий! «Что плюс на плюс дает плюс – это правильно; что плюс на минус будет минус – это может быть, но чтобы минус на минус давал плюс – это ты врешь!»[1] Неудивительно, что мы до сих пор часто в быту обходимся без отрицательных чисел, говоря, например, «восемь градусов мороза» вместо «минус 8 градусов» или «у меня 3 тысячи рублей долгу» вместо «у меня минус 3 тысячи рублей».

Назвался груздем – полезай в кузов!

Итак, свойства чисел и действий над ними отчасти определяются свойствами тех физических объектов или процессов, которые они призваны описывать, отчасти же – вытекают из необходимости построить непротиворечивую, внутренне согласованную систему. Непротиворечивость же и внутренняя согласованность так же необходима для математического аппарата, как согласованность между собой движений всех деталей любой машины – без нее она просто не будет работать.

Эта непротиворечивость обеспечивается тем, что все правила обращения с числами и с буквенными, т.е. алгебраическими, выражениями следуют из тех пяти законов, которые мы привели выше. В этом смысле они играют в алгебре ту же роль, что и геометрические аксиомы, и, требуя их выполнения для каких-то новых чисел, мы получаем «гарантию», что новое не испортит старое, что со всеми числами можно будет обращаться по единым правилам.

Собственно говоря, мы только тогда и сможем называть новое число «числом», когда убедимся, что оно удовлетворяет всем требованиям, общим для чисел, известных ранее. Пословица: «Хоть горшком назови, только в печь не ставь» неприменима в математике; здесь гораздо больше подходит другая: «Назвался груздем – полезай в кузов!» В математике уж если что-то назвали горшком, то это можно ставить в печь. Если что-то названо «числом» (или «вектором», или «функцией», или «альфа-бета-гамма-абракадаброй»), то будьте уверены – с ним можно будет выполнять все действия и оно будет обладать всеми свойствами, характерными для данного типа математических объектов.

Странные, но все же – числа

Поэтому, не веря на слово, прежде чем называть странные дроби числами, хотя и странными, нужно было бы аккуратно проверить выполнение всех пяти законов. Мы проверим только два из них, предоставив читателю проверить остальные самостоятельно.

1) Переместительный закон (коммутативность) для сложения: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$. В самом деле:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c+a}{d+b}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Здесь среднее равенство верно, поскольку коммутативный закон справедлив для сложения действительных чисел (и над, и под чертой совершаются действия с «обычными» вещественными числами), а крайние знаки равенства верны в силу нашего определения операции сложения «странных чисел».

2) Распределительный закон (дистрибутивность): $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$. В самом деле:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}\cdot\frac{e}{f}=$$

$$=\frac{(a+c)e-(b+d)f}{(b+d)e+(a+c)f}=\frac{ae+ce-bf-df}{be+de+af+cf}=$$

$$=\frac{(ae-bf)+(ce-df)}{(be+af)+(de+cf)}=\frac{ae-bf}{be+af}+\frac{ce-df}{de+cf}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

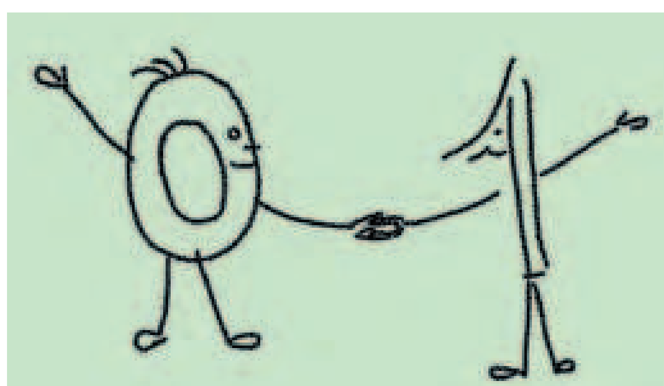
В этой цепочке равенств использованы все пять свойств действий с действительными числами.

Что же мы получили?

Нули и единицы

Итак, формальное требование соблюдено: введенные нами с-числа подчиняются законам, обязательным для всех чисел.

Теперь попробуем «повертеть в руках» эти новые числа, посмотреть, чем они похожи на известные нам



[1] Из книги Ивана Василенко «Рассказы об Артемке. Артемка у гимназистов».

действительные числа, чем от них отличаются, как происходят с ними различные действия, всегда ли выполняются обратные действия, есть ли среди этих чисел ноль и единица и т.д.

Кстати: а что такое ноль?

Легче всего получить ноль вычитанием:

$$z - z = 0.$$

Это верно для любого числа z. Другими словами, при любом z будет верно равенство

$$z + 0 = z,$$

т.е. ноль – это такое число, от прибавления которого к любому числу оно не меняется. Это равенство можно считать определением числа ноль.

Легко понять, что среди с-чисел роль нуля играет число $\frac{0}{0}$. Действительно:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{0} = \frac{a+0}{b+0} = \frac{a}{b}.$$

Теперь поищем единицу. Единица – это для умножения то же, что ноль для сложения, т.е. число, от умножения на которое никакое число не меняется: если $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ для любого числа $\frac{a}{b}$, то $\frac{x}{y}$ можно назвать единицей среди с-чисел. Легко показать, что $x = 1$, $y = 0$, т.е. роль единицы для с-чисел играет число $\frac{1}{0}$.

Действительные и странные: протянем связующие ниточки

Теперь посмотрим, как множество с-чисел связано с множеством «обычных», т.е. действительных, чисел? Воспользуемся тем, что любое с-число можно разбить на два слагаемых (по правилу сложения с-чисел):

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{0} + \frac{0}{b}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Оказывается, числа вида $\frac{a}{0}$ ведут себя в точности так, как самые обыкновенные действительные числа: сумма и произведение таких чисел будет числом *того же рода*, так как

$$\frac{a}{0} + \frac{b}{0} = \frac{a+b}{0} \quad \text{и} \quad \frac{a}{0} \cdot \frac{b}{0} = \frac{ab-0}{0 \cdot b + 0 \cdot c} = \frac{ab}{0},$$

при этом и сложение, и умножение (и обратные к ним операции) происходят по «обычным» правилам (как у «обычных» действительных чисел, если не считать приписанного в конце каждого числа нолика под чертой). И, что очень важно, и нулевой, и единичный элементы с-чисел также будут среди этих чисел вида $\frac{a}{0}$, т.е. и «ноль», и «единица» у с-чисел и у действительных чисел оказываются общими! Поэтому мы «числа» вида $\frac{a}{0}$ смело можем обозначать просто a. Тогда число $\frac{a}{b}$ представится в виде суммы $a + \frac{0}{b}$.

Рассмотрим теперь второе слагаемое, т.е. число вида $\frac{0}{b}$. Легко убедиться, что сложение таких чисел дает число того же рода:

$$\frac{0}{b} + \frac{0}{c} = \frac{0}{b+c}.$$

Получается, что с-числа складываются (и вычитаются) «почленно»: действительные слагаемые с действительными, а странные – со странными. Естественно: ведь мы и хотели, чтобы при сложении «дробей» складывались «числители» и «знаменатели».

С умножением дело сложнее, придется рассмотреть разные ситуации.

Сначала посмотрим, как умножается с-число вида $\frac{0}{b}$ на действительное число. Для этого надо в формуле, задающей правило умножения с-чисел, положить $a = 0$ и $d = 0$. Получим

$$\frac{0}{b} \cdot \frac{c}{0} = \frac{0-0}{bc+0} = \frac{0}{bc},$$

т.е. от умножения с-числа с нулевым «числителем» на действительное получается с-число. Тогда любое с-число $\frac{0}{b}$ можно представить как произведение действительного числа b на число $\frac{0}{1}$:

$$\frac{0}{b} = \frac{0}{1} \cdot \frac{b}{0}.$$

Получается, что число $\frac{0}{1}$, так сказать, порождает все с-числа, подобно тому как единица порождает все действительные. Поэтому назовем (временно) это число «с-единицей» и обозначим его так: 1_c.

Теперь всякое с-число $\frac{a}{b}$ можно будет записать в виде

$$\frac{a}{b} = a + b \cdot 1_c.$$

Здесь a и b – действительные числа, «+» – знак сложения, $b \cdot 1_c$ – произведение действительного числа b на с-единицу, т.е. с-число $\frac{0}{b}$.

Такая форма очень удобна для с-чисел: в этой форме с ними можно обращаться по всем правилам алгебры, так как мы проверили, что все законы соблюдены, а правила алгебры следуют из этих законов. Поэтому мы можем теперь перемножить два с-числа, записанных в такой форме, по правилу умножения многочленов.

Неожиданный результат

Чтобы закончить с умножением с-чисел, нам остается проверить, что получается при умножении двух с-чисел вида $\frac{0}{b}$. Поскольку, как мы только что показали, каждое число $\frac{0}{b}$ можно представить в виде произведения действительного числа и с-единицы, то достаточно проверить, чему равен квадрат с-единицы, т.е.

$(1_c)^2$. Возьмем число $\frac{0}{1}$ и умножим само на себя:

$$\left(\frac{0}{1}\right)^2 = \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0-1}{0+0} = \frac{-1}{0}.$$

Вот здесь можно закричать: караул! *Квадрат* с-числа оказался *действительным отрицательным* числом! Вот это, действительно, совсем новое и (как мы увидим уже скоро) очень важное свойство с-чисел (среди действительных чисел, как мы помним, ничего похожего не встречалось).

Итак, $\left(\frac{0}{1}\right)^2 = -1$. Заменив в следующем равенстве $(1_c)^2$ на -1, получим

$$(a + b \cdot 1_c) \cdot (c + d \cdot 1_c) =$$

$$= ac + ad \cdot 1_c + bc \cdot 1_c + bd \cdot (1_c)^2 = ac - bd + (ad + bc) \cdot 1_c.$$

Если эту формулу записать в старых обозначениях, где действительное слагаемое стоит в «числителе», а странное – в «знаменателе», т.е. заменить $a + b \cdot 1_c$ на $\frac{a}{b}$, $c + d \cdot 1_c$ на $\frac{c}{d}$ и $ac - bd + (ad + bc) \cdot 1_c$ на $\frac{ac - bd}{ad + bc}$, то мы и получим то правило умножения, которое было предложено в беседе с Гельфандом:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac - bd}{bc + ad}.$$

Снимем маски

Теперь станет понятно, почему Гельфанда не обманула наша маскировка. Освободимся от нее и мы и возвратим с-числам $\frac{a}{b}$ их собственную «одежду» – обозначение и наименование, которые употребляются в математике.

На самом деле с-единица называется не «странной» единицей, а *мнимой* и обозначается буквой i (от слова imaginarius – мнимый). Соответственно, наши странные числа bi называются *мнимыми,* а числа вида $a + bi$, где $i^2 = -1$, называются *комплексными* числами.

Ясно, что множество комплексных чисел содержит в себе все действительные числа (если $b = 0$) и все мнимые числа (если $a = 0$).[2]

Откуда взялись комплексные числа?

Итак, эти новые числа содержат число, квадрат которого отрицателен: $i^2 = -1$. Это и в самом деле новые числа, таких чисел среди действительных нет.

Ясно, что «из опыта» такие числа не могли возникнуть – ведь даже отрицательные числа не очень-то спокойно воспринимались математиками, поскольку трудно себе представить «отрицательные» предметы реального мира. А комплексные числа – это нечто еще более «экзотическое», чему еще труднее найти соответствие в «реальном» мире.

Разумеется, здесь на первый план выступают «внутриматематические» потребности. В частности, с развитием математики появился новый стимул для введения новых чисел: выполнимость обратных операций. Так, введение отрицательных чисел и нуля обеспечило выполнимость вычитания, а введение дробей – деления. (Правда, для деления осталось существенное ограничение: деление на ноль невозможно. Но это ограничение только подчеркивает, что в математике нельзя делать все что угодно: новое не должно противоречить всему, ранее сделанному и доказанному.) Благодаря введению комплексных чисел становится всегда возможным действие, обратное к возведению в степень.

Но появились комплексные числа в математике совсем по другому поводу. Это было в XVI веке. Среди математиков того времени были распространены разные соревнования, конкурсы (иногда публичные, вроде современных матбоев) по решению трудных задач. Одной из таких задач было нахождение общей формулы решения кубических уравнений. Итальянский математик Кардано (он был также медиком и инженером: карданный вал – это его работа) при решении этой задачи столкнулся с удивительным фактом. Один из подходов к решению кубических уравнений состоял в том, чтобы с помощью подстановок свести кубическое уравнение к квадратному, способ решения которого был уже известен, а затем через полученные корни квадратного выразить искомые корни кубического. При этом тогда, разумеется, считалось, что квадратное уравнение при отрицательном дискриминанте не имеет корней. Казалось, естественно было бы, что если вспомогательное квадратное уравнение корней не имеет, то и соответствующее кубическое тоже их не имеет.

Но неожиданно оказалось, что именно в том случае, когда дискриминант вспомогательного уравнения отрицателен, (т.е. под знаком квадратного корня стоит отрицательная величина), исходное кубическое уравнение не только имеет корень или два, но имеет *три* различных действительных корня! Чтобы вычислить эти корни, приходилось оперировать с квадратными корнями из отрицательных чисел. И тут Кардано сделал смелый шаг: он обозначил «неизвлекающийся» корень из -1 буквой i.

Эту ситуацию можно уподобить движению по извилистой дороге. Мы можем «перепрыгнуть» с одной ее петли на другую; при этом, сойдя с дороги, мы, в конечном итоге, опять вернемся на нее. Точки пространства, окружающего нитку дороги, идущей через бескрайние поля или леса, могут не интересовать движущегося по дороге путника сами по себе, могут быть непреодолимы без специальных транспортных средств, могут даже показаться «ненастоящими» и ненужными (на них ведь не стоят верстовые столбы, и перемещаться из города в город они не помогают). Но если по ним все же возможно как-то двигаться, то они позволяют существенно «срезать» дорогу.

Тем не менее, эти «ненастоящие» точки вокруг «действительных» со временем также оказались и весьма

[2] Числа вида bi иногда называют чисто мнимыми.

интересными сами по себе, и даже не столь уж «ненастоящими». Для них нашлись прообразы в «реальном» мире, и для описания этих прообразов комплексные числа впоследствии очень пригодились. Среди этих прообразов оказались, например, маятники и волны. А поскольку еще с первых шагов квантовой физики стало ясно, что вся материя обладает волновыми свойствами, то можно сказать, что комплексные числа окружают нас повсюду.

А главное, комплексные числа внесли определенную гармонию в математические представления. Так, например, при решении алгебраических уравнений в действительных числах мы постоянно сталкиваемся с вопросом: имеет ли данное уравнение корни, и если да, то сколько? Для разных уравнений ответы на эти вопросы могут быть различными. А при введении комплексных чисел все становится красиво и закономерно: каждое алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней. И это – только один пример.

С миру по нитке – голому куча ниток

Как вы помните, автору статьи, предложившему Гельфанду складывать дроби по «правилу» числитель с числителем, знаменатель со знаменателем, «пригрозили» невыполнением распределительного закона (или других законов).

Другой автор статьи со свойственной ему дотошностью решил проверить, в чем именно состоит это нарушение закона. И тут случился казус! Оказывается, что если принять «правило» сложения и *не менять правило умножения*, то все законы действий прекрасно себе выполняются.

Что же получается? А получается то, что такие «дроби» $\frac{a}{b}$ тоже можно считать числами!

На первый взгляд, кажется непонятным, почему же такой простой объект «не попал» в математику, почему математики обошли его вниманием, введя вместо него совсем другие, более сложные правила обращения с парами чисел? Но приглядитесь внимательно к этим простым правилам сложения и умножения: ни при каких операциях «числители» и «знаменатели» таких «дробей» не «перемешиваются»! «Числитель» результата будет зависеть только от «числителей» слагаемых или сомножителей, а «знаменатель» – только от «знаменателей». Числитель и знаменатель такой дроби «живут» каждый своею собственной жизнью – жизнью «обычного» множества целых чисел. В каждом из этих двух «миров» (над чертой и под чертой) будет свой ноль, своя единица – в точности такие же, какие есть в мире целых чисел.

Такая конструкция не дает ничего нового: это попрежнему действительные числа, просто теперь «ходящие» парами. Вспомним, что рациональные числа – это принципиально новые объекты по отношению к целым числам, точно так же, как комплексные – по отношению к вещественным: введение первых позволило решать любые линейные уравнения, введение вторых – алгебраические уравнения любых степеней. В нашем же примере произошло примерно то же, что сказано в шутке в заголовке этого параграфа: совокупность ниток оказалась не рубашкой, а просто кучей ниток...

«А мы чем хуже?», или Почему векторы – не числа?

В заключение скажем пару слов еще об одном математическом объекте, похожем на только что рассматривавшиеся нами: о двумерных векторах. Ведь это тоже упорядоченные пары чисел! Почему же они не считаются числами? Чем они хуже комплексных чисел? Сложение двумерных векторов действительно очень похоже на сложение комплексных чисел – оно тоже почленное: первое число (в случае вектора оно называется *компонентой*) складывается с первым, второе – со вторым. Здесь сходство налицо. Можно добавить, что комплексные числа часто изображают двумерными векторами на так называемой *комплексной плоскости*.

Однако на этом сходство и заканчивается: у векторов нет умножения. Так называемое *скалярное произведение* двух векторов не является вектором – а ведь это основное требование к операции умножения тех объектов, которые можно назвать числами: чтобы она давала объект той же природы, что и сомножители. Правда, в векторной алгебре вводят еще и *векторное произведение* двух векторов, и его результатом является снова вектор. Но, во-первых, оно существует для векторов в пространстве, т.е. имеющих *три* компоненты. А, во-вторых, оно не удовлетворяет коммутативному закону. Почему (и *зачем*)? – это тема отдельного разговора, далеко выходящего за пределы той математической шутки, о которой просил написать Гельфанд.

Распространение сигнала от движущегося источника, или Что увидит наблюдатель

А.РЫБАКОВ

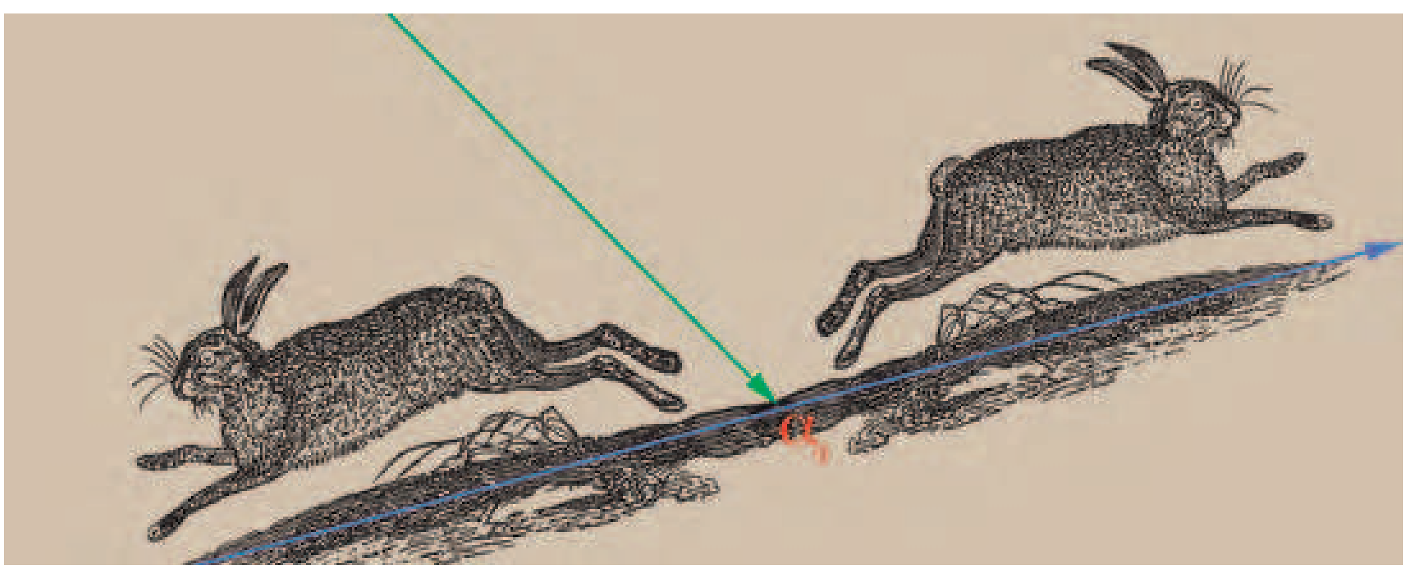
Каким образом мы получаем информацию о движении разных объектов? Есть два принципиально различных способа наблюдений.

Во-первых, можно вдоль траектории объекта расставить датчики, фиксирующие момент прохождения объекта (при необходимости – «головы» и «хвоста» объекта). Если приводить примеры «из жизни», то, по-видимому, именно так обстоит дело на железной дороге. Сигналы от всех датчиков поступают к какому-то оператору, который и восстанавливает картину движения. Движение объекта, как оно предстает перед нами при таком способе наблюдения, можно было бы назвать «истинным», «действительным» или «реальным». Скорость объекта, измеренную в этом случае, мы будем обозначать буквой v.

Во-вторых, можно получать какие-то сигналы, приходящие от самого объекта, и по ним судить о движении объекта. Любой сигнал распространяется не мгновенно. Пока сигнал от движущегося объекта дойдет до наблюдателя, объект уже окажется в другом месте. И получаемая таким образом картина движения может заметно отличаться от истинной. Конечно, этот эффект будет существенен, если скорость объекта составляет заметную часть скорости сигнала или превосходит ее. Так, слыша звук самолета, летящего за облаками, мы понимаем, что самолет находится совсем не в той точке, на которую нам указывают слуховые ощущения. Понятно также, что, например, в случае космических объектов наблюдатель может видеть движение объекта, который миллионы лет назад прекратил свое существование. При таком способе получения информации следует говорить о «видимом» движении «мнимого» объекта, которое зафиксирует наблюдатель. Скорость «видимого» движения будем обозначать буквой v'.

Установившейся общепринятой терминологии в этом вопросе, по-видимому, не существует, мы будем использовать приведенные здесь, возможно несколько неуклюжие, термины, опуская кавычки.

Итак, герои нашего рассказа – это движущийся объект (источник каких-то сигналов), испускаемые им сигналы и наблюдатель. Мы будем для краткости говорить «наблюдатель», не предполагая, что речь идет именно о человеке, полагающемся на свои органы чувств. Это может быть и исследователь, вооруженный любыми приборами, и автоматизированная научная станция. Конкретная физическая природа объекта и сигналов для наших рассуждений в значительной степени безразлична (лишь в некоторых примерах мы будем говорить конкретно о свете или звуке).



Далее мы увидим, что при достаточно большой скорости объекта видимое движение может очень существенно отличаться от истинного. Так, видимая скорость может отличаться от истинной скорости объекта как по величине, так и по направлению. При этом видимые размеры объекта могут не совпадать с его истинными размерами.

Конечно, такие эффекты, связанные с распространением света (или радиоволн), должны быть особенно заметны в астрономии. И действительно, уже в течение многих лет астрономы наблюдают движение космических объектов со скоростью, превосходящей скорость света c. (Уточним, что при этом непосредственно измеряется лишь угловая скорость объекта, расстояние до объекта оценивается различными косвенными методами, и оказывается, что составляющая скорости, перпендикулярная лучу зрения, больше c.) После сказанного выше это не должно удивлять: видимая скорость может быть любой [1]. Эти эффекты анализировались и в научной литературе, и в литературе, доступной учащимся [2]. Сюжеты такого рода даже предлагались на международных олимпиадах школьников [3, 4].

Но, кажется, осталась незамеченной возможность элементарного графического анализа наблюдаемых эффектов. Вниманию читателей предлагается графический метод, позволяющий легко переходить от описания истинного движения объекта к описанию видимого движения (и обратно) и связывать соответствующие скорости и размеры. Наибольшее внимание будет уделено анализу одномерной ситуации, когда наблюдатель расположен на той же прямой, по которой движется объект.

Предлагаемый метод очень прост

Допустим, что все события происходят на прямой, вдоль которой будем отсчитывать координату s, полагая $s = 0$ в точке, где находится наблюдатель. Пусть в точке с координатой s в момент времени t произошло некое событие, сопровождающееся испусканием сигнала, и пусть этот сигнал распространяется со скоростью w. Ясно, что к наблюдателю сигнал придет в момент времени

$$t' = t + \frac{s}{w}\,.$$

Переведем сказанное на графический язык. График зависимости $s(t)$ и саму эту зависимость для разных объектов будем называть, как и в теории относительности, мировой линией. Везде ниже будем считать, что масштаб по осям на графиках выбран таким, чтобы мировые линии сигналов составляли с осями угол $45°$. Иными словами, за единицу измерения координаты мы выбираем расстояние, которое сигнал проходит за единицу времени. В этом случае тангенс угла наклона мировой линии объекта к оси абсцисс дает значение скорости объекта в единицах скорости сигнала w.

На рисунке 1 точка A графика представляет событие, которое произошло в точке с координатой s в момент времени t. Впрочем, нас интересуют события только одного типа – испускание сигнала. На этом и на других рисунках черными штриховыми линиями обозначены мировые линии сигналов. Наблюдатель увидит произошедшее событие в момент времени t' в точке с той же координатой s. Можно сказать, что точка A' – это видимое событие. Получается, что есть очень простое правило: чтобы на плоскости (s, t) перейти от истинного события к видимому событию, надо абсциссу точки, представляющей истинное событие, увеличить на величину ее ординаты. По этому правилу строятся все точки, представляющие видимые события, а их совокупность и есть мировая линия видимого объекта.

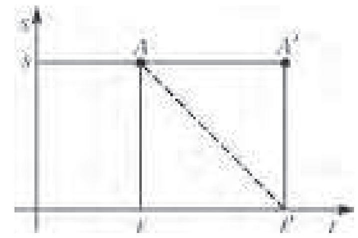


Рис.1

Указанный прием построения мировой линии видимого движения объекта будем использовать и в дальнейшем. На рисунках мировые линии объектов будем изображать синим цветом, а мировые линии видимых объектов – красным.

Рассмотрим случай, когда на наблюдателя (в положительном направлении оси s) движется какой-то объект со скоростью v, меньшей скорости сигнала w. Все скорости здесь и далее указаны в системе отсчета наблюдателя. На рисунке 2 для примера приведены мировые линии двух сигналов, испущенных объектом в разные моменты времени. Выполняя построения по сформулированному выше правилу, получаем точки A и B, принадлежащие мировой линии видимого объекта. На самом деле, для случая равномерного движения объекта достаточно построить лишь одну точку (вторая точка интересующей нас прямой – это точка пересечения мировой линии объекта с осью абсцисс). Так что предложенный прием действительно чрезвычайно прост.

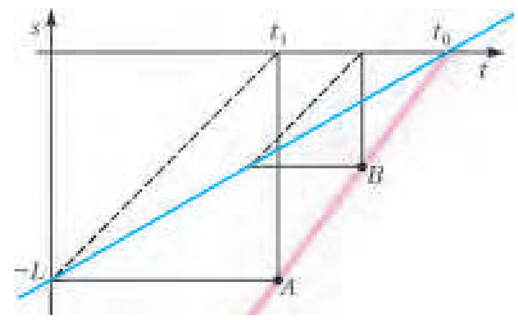


Рис.2

Пусть в начальный момент времениобъект находился на расстоянии L от наблюдателя, объект окажется рядом с наблюдателем в момент времени t_0, а сигнал придет к наблюдателю в момент времени t_1. Видно, что расстояние L видимый объект прошел за промежуток времени $t_0 - t_1$. Поэтому для скоростей сигнала, объекта и видимого объекта имеем соответственно

$$w = \frac{L}{t_1},\;\; v = \frac{L}{t_0},\;\; v' = \frac{L}{t_0 - t_1}.$$

Отсюда легко получить выражение для проекции видимой скорости на ось координат:

$$v_s' = \frac{v}{1-(v/w)}\,. \qquad (1)$$

Приглядимся внимательнее к последней формуле и обратим особое внимание на интересные частные случаи. Очевидно, что в рассматриваемом случае всегда $v' > v$, т.е. видимый объект движется быстрее, чем движется действительный объект (что видно и непосредственно из рисунка 2). Так, если объект движется со скоростью, равной половине скорости сигнала, то видимый объект будет двигаться со скоростью сигнала. А при скорости объекта $v > w/2$ видимая скорость v' будет превышать скорость сигнала. Поэтому, если речь идет о световом сигнале, наблюдатель будет видеть движение со сверхсветовой скоростью. В частности, если объект движется со скоростью сигнала, то $v' = \infty$. Это весьма наглядный результат: в этом случае все сигналы, испущенные объектом в разных точках траектории, движутся к наблюдателю вместе с объектом и достигнут наблюдателя одновременно, что он и воспримет как движение с бесконечно большой скоростью. Конечно, все отмеченные здесь соотношения легко получить и без формулы (1), лишь проводя соответствующие построения на графиках.

Так же легко можно проанализировать и другие возможные случаи. Пусть объект, рассматриваемый выше, минует наблюдателя и будет продолжать удаляться от него с той же скоростью. Соответствующие построения представлены на рисунке 3. Разумеется, при этом надо рассматривать только сигналы, распространяющиеся назад, к наблюдателю. Легко видеть, что скорость видимого объекта v' в этом случае всегда меньше скорости истинного объекта v. Рассуждая так же, как и выше, несложно получить связь между скоростями в этом случае:

$$v_s' = \frac{v}{1+(v/w)}\,. \qquad (2)$$

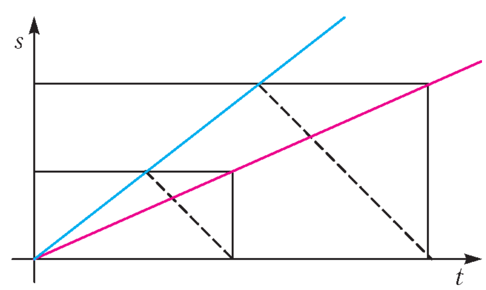


Рис.3

Сверхзвуковой или сверхсветовой источник

Перейдем теперь к случаю, когда источник движется по направлению к наблюдателю со скоростью, превышающей скорость сигнала: $v > w$. Возможность сверхзвукового источника не нуждается в обсуждении. Но нет ничего необычного и в сверхсветовом источнике. Во-первых, какая-то частица может двигаться в веществе со скоростью, превышающей скорость света в этом веществе (но, разумеется, меньшей скорости света в вакууме c). Во-вторых, объект, движение которого мы описываем, может не быть (как это ни странно на первый взгляд) материальным телом. Например, источником света может быть зайчик от прожектора или лазера, бегущий по экрану. На скорость движения такого объекта никаких ограничений не накладывается (ибо никакого перемещения материального тела вдоль экрана не происходит и с помощью зайчика нельзя передать сигнал вдоль экрана).

Итак, пусть объект приближается к наблюдателю со скоростью, большей скорости сигнала. Ясно, что в этом случае все сигналы отстают от объекта и чем позже (т.е. чем ближе к наблюдателю) испущен сигнал, тем раньше он придет к наблюдателю. Иными словами, с течением времени к наблюдателю будут приходить сигналы от все более далеких точек – значит, видимый объект будет удаляться от наблюдателя в ту сторону, откуда приближался действительный объект! Соответствующие этому случаю построения выполнены на рисунке 4. Легко убедиться, что формула (1) остается справедливой и в этом случае. Но теперь она дает, что $v_s' < 0$, как и должно быть.

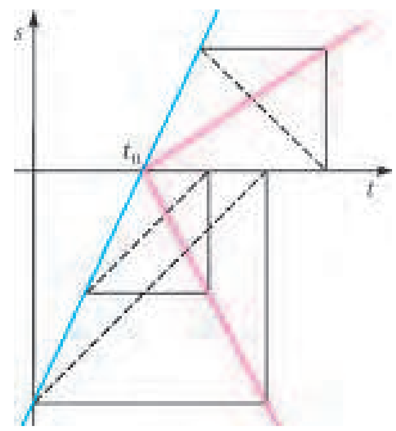


Рис.4

Когда источник минует наблюдателя и начнет удаляться от него, мы будем иметь удаляющийся в ту же сторону видимый источник, движущийся со скоростью $v' < v$. И здесь нет никакого качественного отличия от разобранного выше случая $v < w$ – в частности, остается справедливой формула (2). Из рисунка 4 со всей наглядностью следует удивительнейший вывод: с того момента как объект минует наблюдателя, тот будет видеть два объекта, удаляющихся от него в разные стороны с разными скоростями! А до этого момента наблюдатель вообще не видит объект.

Видимая длина объекта

Будем условно говорить о движении некоего «поезда». Например, такой *релятивистский поезд* встречается во многих учебных и научно-популярных книгах по специальной теории относительности.

При наблюдении движения какого-то объекта можно вести речь о разных длинах. Наблюдатель, неподвижный относительно объекта, измеряет его собственную длину L_0. Можно сказать, что L_0 – это длина объекта в собственной системе отсчета. Вопрос же о том, что такое длина движущегося объекта, нуждается в особом обсуждении.

Будем считать, что сигнал – это именно свет, так что $w = c$. Пусть движение объекта изучает движущийся относительно объекта наблюдатель. Он будет описывать движение объекта в своей системе отсчета, где он сам неподвижен. Для этого наблюдателя можно говорить о разных скоростях объекта (что мы уже обсудили) и о разных размерах объекта, соответственно двум способам получения информации о движении (об этом тоже уже говорилось). Поскольку нас интересуют большие скорости объекта, нам не обойтись без обращения к специальной теории относительности – СТО. Длиной движущегося объекта в СТО называется результат следующей измерительной процедуры: наблюдатель должен зафиксировать положения крайних точек тела в один и тот же момент времени (по часам своей системы отсчета, которые все синхронизированы) и потом любым способом измерить расстояние между этими неподвижными точками. Мы будем называть эту величину релятивистской длиной и обозначать ее L_r.

Но видимая длина объекта другая! Ведь при визуальном наблюдении, фотографировании и т.п. фиксируется изображение, создаваемое квантами, *пришедшими* к наблюдателю *в один и тот же момент времени*. Если речь идет о протяженном источнике, то испущены эти кванты были *в разные моменты времени*. Таким образом, длина L_r, которая фигурирует в СТО, и длина, которую увидит наблюдатель, или, в нашей терминологии, видимая длина объекта L' – это совершенно разные длины. И, конечно, они отличаются от собственной длины объекта L_0.

В СТО исследуется связь между L_0 и L_r и доказывается, что

$$L_r = L_0\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}.$$

Нас же здесь интересует другое – соотношение между L' и L_r. Страшно произнести, но и сам Эйнштейн не различал эти длины и говорил в своих работах о «мгновенных снимках» там, где речь шла о длине L_r. И до 60-х годов XX века физики находились под гипнозом имени Эйнштейна и не различали эти длины.

Ясно, что для определения видимой длины поезда надо лишь провести описанные выше построения для головы и хвоста поезда – и получить результат непосредственно из рисунка. Пусть поезд движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v < c$. Сигналы от головы и от хвоста поезда могут прийти к наблюдателю одновременно, если сигнал от хвоста был испущен в более ранний момент времени. Тогда видимая длина поезда окажется увеличенной по сравнению с L_r. Соответствующие построения проведены на рисунке 5 (это простое удвоение построений на рисунке 2), черные стрелки представляют поезд, они направлены от его хвоста к голове. Чтобы не загромождать рисунок, мировые линии сигналов и вспомогательные линии здесь не приведены.

Из рисунка 5 легко видеть (см. заштрихованные прямоугольные треугольники), что длины L_r и L' относятся как величины соответствующих скоростей, поэтому по формуле (1) имеем

$$L' = \frac{L_r}{1-(v/c)},$$

т.е. в этом случае видимая длина больше релятивистской: $L' > L_r$.

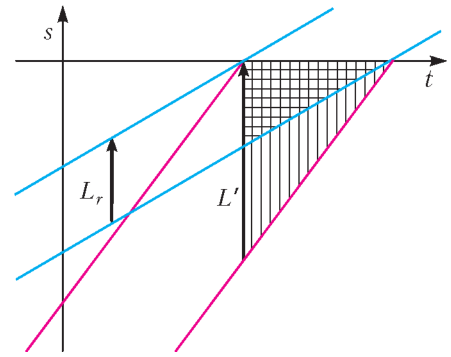


Рис.5

Теперь сравним видимую длину с собственной:

$$\frac{L'}{L_0} = \frac{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}}{\left(1-(v/c)\right)} = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}} > 1.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае видимая длина поезда *превосходит* не только его релятивистскую длину, но и его собственную длину. Поэтому кочующее по многим учебникам и пособиям небрежное утверждение, что наблюдатель (в направлении движения) увидит тело меньшего размера, чем L_0, неправильно. Следующее из СТО «сокращение длины» относится к релятивистской длине L_r, а не к видимой длине L'!

Если же поезд с произвольной скоростью v удаляется от наблюдателя, то, рассуждая аналогично, легко получить, что в этом случае

$$L' = \frac{L_r}{1+(v/c)},$$

т.е. видимая длина меньше релятивисткой: $L' < L_r$.

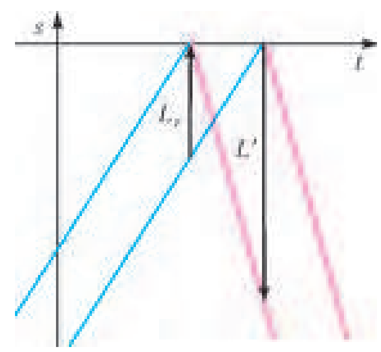


Рис.6

А что будет, если наш поезд движется на наблюдателя со сверхсветовой скоростью? Как мы уже знаем, видимый поезд будет теперь двигаться назад. Мало того, рисунок 6 отчетливо показывает, что поезд при этом не будет «пятиться задом», а развернется!

Наблюдатель в стороне от траектории

Расскажем кратко о возможности распространения предлагаемого метода на более общий случай. Пусть наблюдатель находится вне прямой, по которой равномерно со скоростью v движется объект, на расстоянии d от нее (рис.7). Ясно, что видимый объект движется по той же траектории – только с запаздыванием и с другой скоростью v'. Поскольку запаздыва-

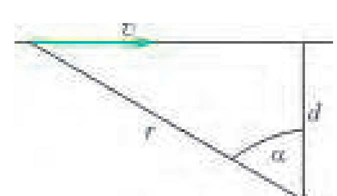


Рис.7

ние сигнала обусловлено лишь расстоянием r от объекта до наблюдателя, сосредоточим свое внимание на зависимости $r(t)$. Чтобы не вводить новых терминов, эту зависимость (и ее график) мы тоже будем называть мировой линией объекта. Сформулированное нами правило перехода к мировой линии видимого объекта сохраняется и в этом случае.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ объект находится в точке, ближайшей к наблюдателю. Ясно, что

$$r^2 = v^2t^2 + d^2 ,$$

т.е. мировая линия объекта – это гипербола с асимптотами $r(t) = \pm vt$. По сути дела, случай $r \gg d$ уже полностью разобран выше, так что нам надо рассмотреть лишь область $r \sim d$. Для случая, когда скорость объекта больше скорости сигнала, мировые линии объекта и видимого объекта представлены на рисунке 8. Обсудим лишь некоторые интересные моменты.

Главный качественный результат нам уже известен – будут наблюдаться два разбегающихся в разные стороны видимых объекта. Понятно, что до какого-то момента времени t_A наблюдатель вообще не видит объект. В момент t_A наблюдатель впервые увидит объект, который при этом будет находиться в точке траектории, где угол наклона касательной к мировой линии равен $45°$, т.е. в точке, где радиальная составляющая скорости объекта v_r по величине равна скорости сигнала. Направление от наблюдателя на объект будем задавать углом наблюдения α и будем отсчитывать его от направления на ближайшую к наблюдателю точку траектории (см. рис.7). Очевидно, что $v_r = v \sin\alpha$, поэтому для наблюдателя объект возникнет под углом наблюдения

$$\alpha_0 = \arcsin\frac{w}{v} .$$

На рисунке 8 хорошо видно, что в любой момент времени $t' > t_A$ к наблюдателю одновременно придут два сигнала, испущенные объектом в разных точках траектории (по разные стороны от точки A), т.е. наблюдатель будет видеть два объекта. Интерпретация рисунка 8 несколько отличается от используемой выше, потому что мы перешли от переменной s (отсчитываемой вдоль траектории) к переменной r. Нижняя ветвь мировой линии видимого движения (начиная от точки A') соответствует движению видимого объекта вслед за объектом. Другой же видимый объект (ему соответствует верхняя ветвь) движется в противоположную сторону.

Рис.8

Боюсь, что читателю эти рассуждения покажутся весьма абстрактными, далекими «от жизни», но это не так. Без всяких изменений рисунок 8 описывает явления при пролете сверхзвукового самолета над головой наблюдателя. Наблюдатель услышит звук самолета только в момент времени t_A. Этот звук придет под углом $\alpha_0 = \arcsin(v_{зв}/v)$ к зениту ($v_{зв}$ – скорость звука). Мы уже понимаем, что в этот момент времени возникнут в одной точке два мнимых источника звука. В течение небольшого промежутка времени после момента t_A слуховой аппарат человека не разрешает эти два близких источника шума и «отказывается» указывать направление на источник звука. Но вскоре они разойдутся, при этом мнимый источник, движущийся вперед, будет находиться значительно ближе к наблюдателю, чем второй. На рисунке 8 очень хорошо видно, как далеко отстоят друг от друга мнимые источники в момент времени t', когда движущийся вперед источник находится над головой наблюдателя. Так что реально наблюдатель будет слышать только мнимый источник, движущийся вперед. Заметим еще, что на траектории вблизи точки, где наблюдатель впервые услышит самолет, радиальная скорость самолета мало отличается от скорости звука – при этом доплеровское изменение частоты очень велико, и потому в низком («басовитом») звуке самолета должны появиться очень высокие частоты (свист). Автор много раз «наблюдал» оба эти эффекта вблизи военного аэродрома при низком пролете сверхзвукового истребителя над головой. Именно после таких «наблюдений» у автора и возник интерес к этой теме.

Аналогично, при движении зайчика по экрану со сверхсветовой скоростью наблюдатель обнаружит, как в точке, видимой под углом наблюдения α_0, возникнут и разбегутся в разные стороны два зайчика.

Литература

1. *В.Л.Гинзбург.* О сверхсветовых источниках излучения. В сборнике: О теории относительности. – М.: Наука, 1979.
2. *Б.М.Болотовский.* Наблюдения за быстродвижущимися объектами. В сборнике: Школьникам о современной физике. – М.: Просвещение, 1990.
3. *С.М.Козел, В.А.Коровин, В.А.Орлов.* Физика. 10–11 кл.: Сборник задач и заданий. – М.: Мнемозина, 2001.
4. «Квант», 2007, №2, с.53.

Примечание редакции

Автор, по существу, рассматривал движущийся предмет либо малых размеров – точку, либо в виде прямой линейки, ориентированной по скорости. Представляет интерес также случай, когда движущаяся линейка ориентирована под прямым углом к скорости или вообще не параллельна скорости. Тогда можно показать, что наблюдатель будет видеть линейку искривленной.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2309» или «Ф2315». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2309, М2310, М2312 – М2314 предлагались на XXXIV Турнире городов, задача М2315 предлагалась на XI Устной олимпиаде по геометрии.

Задачи М2309–М2315, Ф2315–Ф2322

М2309. На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.

Е.Бакаев

М2310. Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?

Г.Гальперин

М2311. Внутри единичного куба летает муха. Какой наименьший путь она должна пролететь, чтобы побывать на всех гранях куба и возвратиться в начальную точку?

А.Канель-Белов

М2312. В квадратной таблице 10×10 записаны сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.

Н.Верещагин

М2313. На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну – в красный цвет, другую – в синий, третью – в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов). Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.

Е.Бакаев

М2314. У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо черная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)

А.Бердников

М2315. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y – середины дуг BC и AD, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.

А.Заславский, В.Протасов

Ф2315. Каретка самописца с пером перемещается относительно бумаги в двух взаимно перпендикулярных направлениях x и y с помощью двух электромоторов. Мотор-x может обеспечить максимальную величину скорости перемещения $v_{x\,\max}=A$, а мотор-y – скорость $v_{y\,\max} = B$ соответственно. За какое минимальное время T самописец сможет нарисовать замкнутую линию, образующую фигуру площадью S?

К.Самописцев

Ф2316. Наклонная плоская поверхность составляет с горизонтом небольшой угол $\alpha = 0{,}1$ рад и непрерывно движется – трясется. Скорость движения ее точек всегда направлена вдоль линии наискорейшего спуска, а постоянное по модулю ускорение a скачкообразно изменяется – в течение $t = 10^{-3}$ с оно направлено «вниз», затем в течение такого же промежутка времени оно направлено «вверх», потом снова «вниз» и так далее. На поверхности находится брусок, между ним и поверхностью есть трение, характеризующееся коэффициентом $\mu = 0{,}28$. Брусок соскальзывает вниз с установившейся средней скоростью $v = 0{,}1$ м/с. Какова величина ускорения a? Каковы максимальная и минимальная скорости бруска?

Фольклор

Ф2317. Фигурку-грибок (см. рисунок), сделанную из сплошного материала плотностью $\rho = k\rho_{\text{воды}}$, поставили на горизонтальное дно бассейна и залепили пластилином щели между дном бассейна и основанием ножки грибка. Удерживая грибок на месте, залили воду в бассейн, при этом вода под грибок не затекла, а затем перестали удерживать грибок. Размеры фигурки таковы: радиус полусферы-шляпки, диаметр цилиндра, образующего ножку грибка, и высота этого цилиндра равны R каждый. Уровень воды в бассейне равен NR ($N > 2$, т.е. грибок целиком находится под водой). С какой силой ножка грибка давит на дно бассейна? При каком максимальном значении k грибок может всплыть? При каком значении N грибок не всплывет никогда?

С.Гордюнин

Ф2318. В высокоскоростных газовых центрифугах, используемых для разделения изотопов урана ^{235}U и ^{238}U, стенки цилиндрического сосуда радиусом $r = 0{,}1$ м вращаются, имея линейную скорость $v = 500$ м/с. Газообразный гексафторид урана UF_6, молекулы которого первоначально содержат $\rho_1 = 99{,}3\%$ изотопа ^{238}U и $\rho_2 = 0{,}7\%$ изотопа ^{235}U, при температуре 300 К медленно прокачивают через центрифуги, отбирая одну часть газа из пристеночных областей, а другую часть – из области вблизи оси вращения. Газ, обогащенный изотопом ^{235}U, пропускают через следующий каскад центрифуг, и так происходит вплоть до получения изотопного состава с 99,9% изотопа ^{235}U и 0,1% изотопа ^{238}U. Сколько каскадов центрифуг должны стоять последовательно друг за другом, чтобы получить такой результат?

И.Кикоин

Ф2319. Глубоководный аппарат спустили с корабля над Марианской впадиной, и он начал постепенно опускался все глубже и глубже. Вне аппарата перед его иллюминатором акванавт Вася установил сосуд с прочными прозрачными кварцевыми стенками (выдерживающими высокую температуру), снабженный сверху и снизу клапанами для открывания или закрывания отверстий, соединяющих внутренность сосуда с окружающей водой. Каждый раз после погружения на очередные сто метров Вася запускал воду в сосуд, открывая два клапана, а потом закрывал верхний клапан, оставляя нижний клапан открытым. Затем он включал нагреватель в сосуде и ждал, когда вода закипит. После достижения температуры кипения Вася добивался того, чтобы линия раздела пара и горячей воды проходила через метку на стенке сосуда, и измерял плотности пара и воды в сосуде выше и ниже этой метки. Вася заполнил таблицу Excel, в которой глубину погружения отметил в ячейках левой колонки по вертикали, а в двух соседних ячейках по горизонтали поместил значения плотностей пара и воды, соответствующих этой глубине. Сколько всего ячеек заполнил экспериментальными данными Вася?

Ж.Пикар

Ф2320. Две одинаковые литиевые плоские батарейки (типа CR216) имеют ЭДС $\mathscr{E} = 3$ В, диаметр корпуса $D = 20$ мм, толщину корпуса $d = 1{,}6$ мм. Батарейки расположили в воздухе на линии, совпадающей с их осями симметрии, положительными полюсами навстречу друг другу на расстоянии $L = 20$ см. Оцените силы электрического взаимодействия батареек. Суммарный электрический заряд каждой батарейки равен нулю.

Ш.Кулон

Ф2321. Коэффициент преломления света у жидкого масла $n = 1{,}47$, плотность масла $\rho = 0{,}95$ г/см^3. Капелька прозрачного масла в воздухе представляла собой маленький шарик, а упав на поверхность воды, она превратилась в круглое пятно радиусом $r = 2{,}5$ мм. Если высоко над масляным пятном поместить небольшой (точечный) источник света, то видны два изображения этого источника: более яркое под поверхностью воды на глубине $h_1 = 10$ мм и менее яркое над масляным пятном на высоте $h_2 = 3$ мм. Оцените величину радиуса масляной капельки в воздухе.

В.Маслов

Ф2322. Студент Вася, узнав о существовании эффектов общей теории относительности, решил оценить влияние человека, например Евклида, на результат проводимых им геометрических измерений. Вася предположил, что космонавт с именем Евклид, масса которого $M = 70$ кг, находясь в космосе вдали от Земли и других массивных тел, начертил специальным маркером для вакуума вокруг себя окружность радиусом $R = 1$ м, а затем с помощью необычайно точных приборов измерил отношение длины окружности L к ее диаметру D. В каком знаке после запятой полученный им экспериментальный результат отличается от теоретического значения числа π в Евклидовой геометрии (3,14159265358979323846264338327950...)? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

А.Эйнштейн

Решения задач М2294 – М2300, Ф2300–Ф2307

М2294. *Натуральные a, b, c удовлетворяют равенству* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.
а) Докажите, что число a + b составное.
б) Докажите, что при $c \ge 2$ хотя бы одно из чисел a + c, b + c составное.

Из условия следует равенство

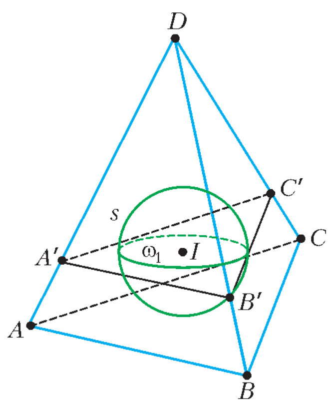
$$c(a+b)=ab. \qquad (*)$$

а) Предположим, что $a + b = p$ – простое число. Согласно $(*)$, хотя бы одно из чисел a, b должно делиться на p. Но это невозможно, так как $p > a$ и $p > b$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.
б) Достаточно показать, что хотя бы одно из двух чисел $d_a = \text{НОД}(a,c)$ и $d_b = \text{НОД}(b,c)$ больше 1. Действительно, если, например, $d_a > 1$, то $a + c$ делится на d_a и $a + c > d_a$, значит, $a + c$ – составное число.
Из равенства $(*)$ вытекает, что ab делится на c. Но тогда если $d_a = d_b = 1$, то и $c = 1$, что невозможно по условию. Итак, одно из чисел d_a и d_b больше 1, что и требовалось доказать.

В.Сендеров

М2295. *Дан тетраэдр. Может ли радиус вписанной окружности одной из его граней быть меньше, чем радиус вписанной в тетраэдр сферы?*

Ответ: не может.
Первое решение. Пусть ω – окружность радиуса r, вписанная в грань ABC тетраэдра $ABCD$; s – вписанная в тетраэдр сфера, r_1 и I – радиус и центр сферы соответственно. Через точку I проведем плоскость, параллельную плоскости ABC; пусть эта плоскость пересекает ребра DA, DB, DC в точках A', B', C' соответственно (см. рисунок). В сечении сферы s плоскостью $A'B'C'$ получается окружность ω_1 радиуса r_1. Так как ω_1 целиком лежит внутри треугольника $A'B'C'$, то r_1 не превосходит радиуса r' окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$ (обоснуйте этот переход!). Далее, так как тетраэдр $ABCD$ получается из тетраэдра $A'B'C'D$ гомотетией с центром D и коэффициентом $k > 1$, то $r = kr' > r'$. Итак, $r_1 \le r' < r$.



И.Богданов

Второе решение. Пусть R – радиус вписанной сферы тетраэдра $ABCD$, а r – радиус вписанной окружности какой-нибудь из его граней (пусть это будет грань ABC). Докажем, что $R < r$.
С одной стороны, если S – площадь полной поверхности тетраэдра, то его объем V равен $\frac{1}{3}RS$. С другой стороны, $V = \frac{1}{3}hs$, где h – высота тетраэдра, опущенная из вершины D на грань ABC, а s – площадь этой грани. Но $s = rp$, где p – полупериметр треугольника ABC. Следовательно, $RS = hrp$. Так как высота h не больше высот боковых граней, то величина hp не превосходит площади боковой поверхности тетраэдра, а значит, $S > hp$. Отсюда $R < r$.

Е.Епифанов

М2296. *В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и –1 (в каждой клетке – по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки из четырех клеток (рис. 1) на доске (фигурку можно поворачивать, но ее клетки не должны выходить за пределы доски). Назовем такое расположение неудачным, если сумма чисел, стоящих в четырех клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.*

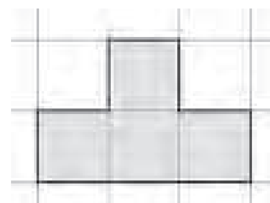


Рис. 1

Ответ: 36.
Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдется хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной – число e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S - a = S - b = S - c = S - d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Значит, $S - a = e + 3a = 0$, т.е. $e = -3a = \pm 3$, что невозможно.
Итак, в каждом из 36 «крестов» (с центрами во всех некрайних клетках доски) есть неудачное расположение фигурки. Ясно, что каждое расположение содержится не более чем в одном кресте; поэтому таких расположений не меньше 36.
С другой стороны, на рисунке 2 показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36. Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски, являются удачными.

1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1
–1	1	–1	1	–1	1	–1	1

Рис. 2

М.Антипов

М2297. *Салон самолета состоит из 50 рядов по 6 мест, помеченных буквами A, B, C, D, E, F. Свои места в салоне заняли 173 пассажира. Докажите, что найдутся два ряда, которые заняты одинаковым образом (т.е. в этих рядах заняты места, помеченные одними и теми же буквами).*

К сожалению, в условии задачи была допущена опечатка: пассажиров было 173, а не 73, как было напечатано. Приносим свои извинения.

Всего имеется $2^6 = 64$ способа заполнения ряда из 6 мест (для каждого из 6 мест A, B, C, D, E, F две возможности – место либо занято, либо свободно). Предположим, что в наших 50 рядах способы рассадки различные, добавим 14 *новых* рядов и посадим в них *новых* пассажиров так, чтобы теперь в получившихся 64 рядах каждый способ рассадки встретился ровно 1 раз.

Для каждого из 64 рядов найдется *инверсный* ряд, в котором заняты ровно те места, которые свободны в данном ряду (скажем, если в ряду заняты в точности места A и C, то в инверсном ряду будут заняты в точности места B, D, E, F). В паре рядов, являющихся инверсными друг для друга, занято ровно половина мест (6 из 12). Разбив 64 ряда на пары инверсных, получим, что во всех 64 рядах занята половина мест, т.е. общее число пассажиров (старых и новых) равно $64 \cdot 6 : 2 = 192$. Так как среди них 173 старых пассажира, то число новых пассажиров равно 19.

С другой стороны, так как способы рассадки в новых рядах различны, то среди 14 новых рядов не более одного целиком свободного ряда и не более шести рядов, в которых ровно по одному пассажиру, в остальных же новых рядах хотя бы по 2 пассажира. Значит, количество новых пассажиров не меньше чем (14 – 1) + (14 – 1 – 6) = 20. Противоречие.

И.Богданов

М2298. *На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более чем на n, увеличилось?*

Ответ: $n = 670$.

Занумеруем точки и стоящие на них фишки по часовой стрелке последовательными неотрицательными целыми числами от 0 до 2012. Рассмотрим произвольную перестановку и фишки с номерами 0, 671 и 1342, изначально расположенные в вершинах правильного треугольника. Попарные расстояния между ними равны 671. После перестановки сумма попарных расстояний между этими фишками не будет превосходить длины окружности, а значит, расстояние между какими-то двумя не будет превосходить 2013 : 3 = 671; следовательно, расстояние между этими двумя фишками не увеличится. Итак, при $n \ge 671$ требуемая перестановка невозможна.

Приведем теперь пример искомой перестановки для $n = 670$. Каждую фишку с номером $i \le 1006$ переставим в точку с номером $a_i = 2i$, а каждую фишку с номером $i \ge 1007$ – в точку с номером $a_i = 2i - 2013$. Иначе говоря, a_i – это остаток от деления $2i$ на 2013. Нетрудно понять, что в каждую точку попало по фишке. Осталось показать, что расстояния между парами фишек, изначально удаленных друг от друга не более чем на 670, при этом возрастут.

Рассмотрим произвольные фишки с номерами i и j; пусть расстояние между ними равно $d \le 670$. Тогда одна из дуг между точками a_i и a_j будет иметь длину $2d$, т.е. расстояние между этими точками есть $d' = \min\{2d, 2013 - 2d\}$. Но заметим, что $2d > d$ и $2013 - 2d > d$ (последнее – поскольку $3d < 2013$). Значит, и $d' > d$, что и требовалось доказать.

Д.Храмцов

М2299. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Пусть B_0 и C_0 – середины сторон AC и AB соответственно. Пусть D – основание высоты из точки A, а G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Окружность ω проходит через B_0, C_0 и касается окружности Ω в точке $X \ne A$. Докажите, что точки D, G, X лежат на одной прямой.*

Если $AB = AC$, то утверждение задачи сразу вытекает из симметрии относительно AD. Далее предполагаем, что $AB < AC$ (случай $AB > AC$ аналогичен).

Пусть a и x – касательные к окружности Ω, проходящие через точки A и X соответственно. Гомотетия с центром A и коэффициентом $1/2$ переводит окружность Ω в окружность (AB_0C_0). Тогда прямые a, x и B_0C_0 являются попарными *радикальными осями* окружностей Ω, (AB_0C_0) и ω. Поэтому прямые a, x и B_0C_0 пересекаются в одной точке; назовем эту точку W (рис.1).

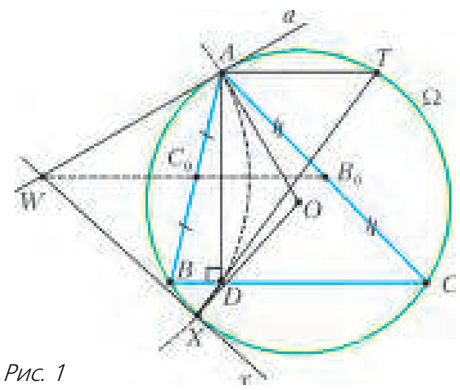


Рис. 1

Заметим, что точка D симметрична точке A относительно прямой B_0C_0, поэтому $WX = WA = WD$; это означает, что W является центром окружности (ADX). Пусть O – центр окружности Ω. Пусть прямая DX пересекает окружность Ω вторично в точке T. Проведем подсчет углов (пользуясь тем, что углы AWX и AOX – центральные углы окружностей (ADX) и Ω соответственно):

$$180° - \angle DAT = \angle ADT + \angle ATD =$$

$$= \frac{1}{2}\angle AWX + \frac{1}{2}\angle AOX = \angle AWO + \angle AOW = 90°$$

(последнее равенство верно, так как $OA \perp WA$). Следовательно, $AD \perp AT \Rightarrow AT \parallel BC$.

Остается доказать, что точки D, G, T лежат на одной прямой. Заметим, что точка D лежит на окружности $(A_0B_0C_0)$, где A_0 – середина BC (рис.2).[1] (Действи-

[1] Окружность $(A_0B_0C_0)$ является окружностью девяти точек для треугольника ABC.

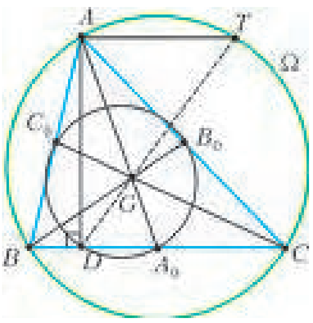


Рис. 2

тельно, из симметрии относительно B_0C_0 имеем $\angle B_0DC_0 = \angle B_0AC_0$, а из параллелограмма $B_0AC_0A_0$ имеем $\angle B_0A_0C_0 = \angle B_0AC_0$; отсюда $\angle B_0A_0C_0 = \angle B_0DC_0$.) Рассмотрим гомотетию с центром G и коэффициентом $-1/2$, переводящую треугольник ABC в треугольник $A_0B_0C_0$. Эта гомотетия переводит точку T в точку D' окружности ($A_0B_0C_0$), для которой $D'A_0 \parallel AT \parallel B_0C_0$, откуда $D' = D$. Из гомотетии точки D, G и T лежат на одной прямой, что и завершает доказательство.

И.Исаев, М.Исаев

М2300. *Пусть p – простое число вида 8n + 1 (n – натуральное). Докажите, что множество чисел {1, 2, …, p – 1} можно разбить на два подмножества с равным количеством чисел так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась: а) на p; б*) на* p^2*; в*) на* p^3.

а) Для любого простого p вида $4k + 1$ можно разбить множество $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$ на первые $(p-1)/2 = 2k$ и последние $2k$ чисел, тогда разность произведений будет делиться на p:

$$(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2k)) - ((2k+1)\cdot(2k+2)\cdot\ldots\cdot(4k)) \equiv$$

$$\equiv (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2k)) - ((-2k)\cdot(-(2k-1))\cdot\ldots\cdot(-1)) \equiv$$

$$\equiv (1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2k))\left(1-(-1)^{2k}\right) \equiv 0 \pmod p.$$

б), в) Для описания разбиения, удовлетворяющего более сильному условию «разность произведений делится на p^3» мы будем работать с понятием *квадратичного вычета*.[1] Говорят, что остаток $m \in \{1,2,\ldots$ $\ldots, p-1\}$ является *квадратичным вычетом* по модулю p, если найдется целое число x такое, что $x^2 \equiv m \pmod p$. Как известно, для простого числа $p > 1$ среди остатков $1, 2, \ldots, p - 1$ ровно половина (т.е. $(p-1)/2$) являются квадратичными вычетами, а остальные – *невычетами*. (Действительно, $x^2 \equiv y^2 \pmod p$ тогда и только тогда, когда $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ кратно p, т.е. когда $x \equiv y \pmod p$ или $x \equiv -y \pmod p$. Значит, получить все различные ненулевые квадратичные вычеты можно, взяв остатки чисел $1^2, 2^2, \ldots, ((p-1)/2)^2$ при делении на p.)

Далее потребуются следующие известные факты о квадратичных вычетах:

(1) Пусть $x, y \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, причем y – квадратичный вычет. Остаток произведения xy при делении на p является квадратичным вычетом $\Leftrightarrow$ x – квадратичный вычет.

(2) Число $p - 1$ является квадратичным вычетом по модулю $p \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$.

(3) Число 2 является квадратичным вычетом по модулю $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Пусть теперь p – данное простое число вида $8n + 1$. Возьмем нечетное число $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ и поставим ему в соответствие четное число $p - x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Так как $p - x \equiv x(p-1) \pmod p$, то, согласно (1) и (2), $p - x$ и x являются или не являются квадратичными вычетами одновременно. Отсюда следует, что в множестве $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ количества четных и нечетных квадратичных вычетов равны. То же самое справедливо для невычетов (каждое из этих количеств равно $(p-1)/4 = 2n = k$). Обозначим через $a_1, \ldots, a_k$ все нечетные квадратичные вычеты, $b_1 = p - a_1, \ldots, b_k = p - a_k$ – все четные квадратичные вычеты, $c_1, \ldots, c_k$ – все нечетные невычеты, $d_1 = p - c_1, \ldots, d_k = p - c_k$ – все четные невычеты. Ниже докажем, что разбиение множества $\{1, \ldots, p-1\}$ на подмножества $\{a_1, \ldots, a_k, d_1, \ldots, d_k\}$ и $\{b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k\}$ – искомое, т.е. что разность $AD - BC$, где $A = a_1 \ldots a_k$, $B = b_1 \ldots b_k$, $C = c_1 \ldots c_k$, $D = d_1 \ldots d_k$, делится на p^3.

(Например, для $p = 17$ искомое разбиение выглядит следующим образом: {1, 9, 13, 15, 6, 10, 12, 14}, {2, 4, 8, 16, 3, 5, 7, 11}. Можно проверить, что в этом случае разность произведений равна $17^3 \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.)

Рассмотрим произведение всех удвоенных квадратичных вычетов

$$P = (2a_1)(2a_2)\ldots(2a_k)(2b_1)(2b_2)\ldots(2b_k) = 2^{2k}AB.$$

Используя свойства (1) и (3), имеем: если x – квадратичный вычет из интервала $(0, p/2)$, то $2x < p$, и тогда $2x$ – четный квадратичный вычет, а если x – квадратичный вычет из интервала $(p/2, p)$, то $p < 2x < 2p$, значит, $2x = p + y$, где y – нечетный квадратичный вычет. Кроме того, если x пробегает все квадратичные вычеты, то остатки чисел $2x$ при делении на p также пробегают (в некотором порядке) все квадратичные вычеты (так как при $x_1, x_2 \in \{1,2, \ldots, p-1\}$, $x_1 \ne x_2$, число $2x_1 - 2x_2$ не делится на p, т.е. $2x_1 \not\equiv 2x_2 \pmod p$). Тем самым, произведение P равно

$$b_1b_2\ldots b_k(p+a_1)(p+a_2)\ldots(p+a_k) =$$

$$= (p-a_1)(p-a_2)\ldots(p-a_k)(p+a_1)(p+a_2)\ldots(p+a_k).$$

Итак,

$$P = \left(p^2 - a_1^2\right)\left(p^2 - a_2^2\right)\ldots\left(p^2 - a_k^2\right) =$$

$$= p^{4n} - S_1p^{4n-2} + \ldots - S_{k-1}p^2 + S_k, \quad (*)$$

где S_t – сумма всех произведений по t чисел из набора $a_1^2, \ldots, a_k^2$, в частности, $S_k = A^2$.

Из (*) следует, что $P - A^2$ делится на p^2. Но $P - A^2 = 2^{2k}AB - A^2 = A\left(2^{2k}B - A\right)$, значит, $2^{2k}B - A$ делится на p^2. Предыдущее рассуждение останется верным при замене $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ на $c_1, \ldots, c_k$, $d_1, \ldots, d_k$. В результате получим

$$2^{2k}B \equiv A \left(\bmod p^2\right),$$

[1] О квадратичных вычетах (помимо стандартных курсов теории чисел) можно прочитать в статье С.Гиндикина «Золотая теорема» («Квант» №1 за 1973 год) или в статье А.Спивака «Квадратичный закон взаимности» (Библиотечка «Квант», вып.102).

$$2^{2k}D \equiv C\left(\operatorname{mod} p^2\right) \Rightarrow 2^{2k}BC \equiv$$

$$\equiv A\cdot 2^{2k}D\left(\operatorname{mod} p^2\right) \Rightarrow 2^{2k}BC - 2^{2k}AD = 2^{2k}\left(BC - AD\right)$$

делится на p^2, откуда $(BC - AD)$ делится на p^2, что завершает решение задачи б).

Усилим предыдущие рассуждения. Докажем, что S_{k-1} и аналогичная сумма для чисел $c_1, \ldots, c_k$ делятся на p. Тогда из равенства (∗) будет вытекать, что $P - A^2$ делится на p^3. Дальнейшие рассуждения до конца доказательства повторяются с заменой p^2 на p^3.

Итак, остается доказать, что суммы

$$S_{k-1} = A^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_k^2}\right) \text{ и } S'_{k-1} = C^2\left(\frac{1}{c_1^2} + \ldots + \frac{1}{c_k^2}\right)$$

делятся на p. Это можно сделать следующим образом.[2]

Каждое из $2k$ слагаемых в сумме

$$S = C^2S_{k-1} + A^2S'_{k-1} = A^2C^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \ldots \frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{c_1^2} + \ldots \frac{1}{c_k^2}\right)$$

является квадратом, причем эти квадраты дают разные остатки при делении на p (так как разность $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ не делится на p при нечетных x, y, $0 < x < y < p$). Поэтому S дает при делении на p тот же остаток, что и сумма всех квадратичных вычетов из множества $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$, или $S \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2 \left(\operatorname{mod} p\right)$. Пользуясь формулой $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = m(m+1)(2m+1)/6$ для $m = 2k$ (можно доказать эту формулу по индукции), получаем, что S делится на p.

Далее, все слагаемые в сумме $S_1 = a_1^2 + \ldots + a_k^2$ являются четвертыми степенями по модулю p (т.е. для каждого из них найдется x с условием $x^4 \equiv a_i^2 \left(\operatorname{mod} p\right)$), причем они дают разные остатки при делении на p. Такой же вывод можно сделать о сумме S_{k-1}. С другой стороны, все ненулевые остатки четвертых степеней по модулю p (биквадратичные вычеты) можно получить как остатки квадратов квадратичных вычетов, т.е. чисел $a_1^2, \ldots, a_k^2, b_1^2, \ldots, b_k^2$. Так как $b_i^2 = (p - a_i)^2 \equiv a_i^2 \left(\operatorname{mod} p\right)$, то в сумме S_1 (как и в сумме S_{k-1}) каждый возможный ненулевой остаток четвертой степени встретится ровно один раз. Итак, $S_{k-1} \equiv S_1 \left(\operatorname{mod} p\right)$. Далее,

$$2S_1 \equiv \left(a_1^2 + \cdots + a_k^2\right) + \left(b_1^2 + \cdots + b_k^2\right) \equiv$$

$$\equiv 1^4 + 2^4 + \ldots + (2k)^4 \left(\operatorname{mod} p\right).$$

Пользуясь формулой $1^4 + 2^4 + \ldots + m^4 = m(m+1)(2m+1)\left(3m^2 + 3m - 1\right)/30$ для $m = 2k$, получаем, что при $p > 5$ число S_1 делится на p.

Итак, доказано, что $S = C^2S_{k-1} + A^2S'_{k-1}$ и S_{k-1} делятся на p, следовательно (так как A взаимно просто с p), и S'_{k-1} делится на p.

Замечания. Читатель может проследить, как идеи решения этой трудной задачи перекликаются с идеями решения задачи М1235 («Квант» №12 за 1990 год).

Отметим, что для простых чисел p вида $4k + 3$ множество чисел $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$ невозможно разбить даже с условием задачи а). (Если предположить противное, произведения X и Y в подмножествах давали бы равные остатки при делении на p. Тогда $(p-1)! = XY \equiv X^2 \left(\operatorname{mod} p\right)$. С другой стороны, по теореме Вильсона, $(p-1)! \equiv -1 \left(\operatorname{mod} p\right)$. Но как известно, -1 не является квадратичным вычетом по модулю $p = 4k + 3$.)

Методами, изложенными в решении задачи М2300, можно доказать также следующие интересные факты: для простого p вида $4k + 3$ сумма $AB + CD$ делится на p^2 (обозначения для A, B, C, D сохранены из решения); для простого p вида $8k + 5$ разность $A^3B - C^3D$ делится на p^3.

И.Вайнштейн

Ф2300. *Какую минимальную по величине скорость по отношению к поверхности Земли нужно сообщить космическому аппарату, находящемуся уже вне атмосферы Земли на высоте 200 км над ее экватором, чтобы он не только навсегда покинул Землю, но и улетел навсегда от Солнца, пролетев далеко от всех других планет солнечной системы? Радиус Земли R = 6400 км. Расстояние от Земли до Солнца L = = 150 млн км. Орбиту Земли считайте круговой.*

Длительность суток можно выразить в секундах:

$$t = 24\cdot 3600 \text{ с} = 86400 \text{ с}.$$

Легко вычислить скорость центра Земли при ее движении по отношению к Солнцу:

$$v_0 = \frac{2\pi L}{T} = 29{,}865 \text{ км/с} \approx 30 \text{ км/с}$$

(здесь $T = 365{,}25t$ = длительность года в секундах). Можно также вычислить скорость движения точек на экваторе Земли по отношению к системе отсчета, в которой центр Земли покоится и оси координат направлены на далекие звезды (не на Солнце):

$$v = \frac{2\pi R}{t} = 0{,}465 \text{ км/с}.$$

Кроме того, известно, как найти первую космическую скорость для корабля, находящегося на высоте h над поверхностью Земли:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R + h}} = 7{,}8 \text{ км/с} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Гравитационные поля подчиняются принципу суперпозиции, поэтому когда корабль массой m находится в поле тяжести и Солнца и Земли (на расстоянии $R + h$ от ее центра), то его потенциальная энергия равна взятой со знаком минус сумме $mv_0^2 + mv_1^2$. Это легко показать, рассмотрев движение Земли вокруг Солнца и

[2] Предлагаемое здесь доказательство годится для простых чисел $p > 5$ вида $4k + 1$. Другой способ, работающий только для $p = 8n + 1$, основан на разбиении суммы S_{k-1} на пары слагаемых, сумма которых делится на p. Для читателей, знакомых с университетским курсом алгебры, возможно, более естественным будет следующее соображение: числа a_i^2 являются корнями, а $\pm S_i$ – коэффициентами многочлена $x^{\frac{p-1}{4}} - 1$ над полем $\mathbb{Z}_p$; то же верно для чисел c_i^2 и многочлена $x^{\frac{p-1}{4}} + 1$.

полет космического аппарата по низкой орбите вокруг Земли. Если в системе отсчета Коперника (центр Солнца неподвижен и оси координат направлены от центра Солнца на далекие звезды) корабль будет иметь такую скорость, что сумма его кинетической энергии – положительной – и его потенциальной энергии – отрицательной – будет больше нуля, то такой корабль с неработающими двигателями имеет возможность улететь за пределы солнечной системы, пролетев на больших расстояниях от всех других планет. Земля в своем движении вокруг Солнца сообщает кораблю скорость v_0, это – «переносная» скорость. Если корабль уже удалился достаточно далеко от Земли и находится от Солнца на таком же расстоянии, как Земля, то ему по отношению к Земле достаточно иметь скорость $\left(\sqrt{2}-1\right)v_0 = 12{,}4$ км/с, направленную так же, как и скорость центра Земли по отношению к Солнцу, чтобы корабль навсегда покинул солнечную систему. За счет суточного вращения Земли корабль, запущенный в полночь с экватора, получает еще дополнительную скорость v. Следовательно, для нахождения нужной скорости v_3 – третьей космической скорости – по отношению к поверхности Земли в месте старта нужно решить уравнение

$$\frac{m\left(v+v_3\right)^2}{2} - mv_1^2 = \frac{m\left(\sqrt{2}-1\right)^2 v_0^2}{2}, \text{ или}$$

$$\left(v+v_3\right)^2 = 2v_1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 v_0^2 .$$

Отсюда получаем

$$v_3 = 16{,}11 \text{ км/с} .$$

(Если считать приближенно $v_0 = 30$ км/с и $v_1 = 8$ км/с, то ответ получается 16,34 км/с.)

С.Варламов

Ф2301. *При «сбрасывании» показаний медицинского ртутного максимального термометра (см. рисунок) резкими движениями руки добиваются ускорений порядка $a = 60g$. При такой «перегрузке» ртуть начинает вытекать из капилляра через малое отверстие (сужение внутреннего сечения трубки капилляра) в резервуар термометра. Форма отверстия – узкая щель. Оцените ширину щели, обеспечивающей термометру его свойство максимальности. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}5$ Дж/м^2, плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м^3. Остаточная длина столбика ртути (от отметки шкалы 35 °С до места сужения капилляра) $L = 20$ мм.*

Давление столбика ртути в капилляре при «сбрасывании», равное

$$p_1 = \rho a L ,$$

больше величины давления Лапласа под поверхностью ртути, изогнутой в форме длинного цилиндра с радиусом, равным половине ширины щели, составляющего

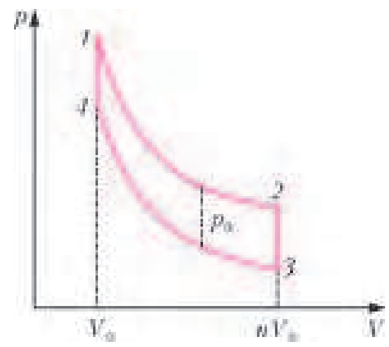
$$p_2 = \frac{\sigma}{l/2} .$$

Отсюда находим оценку для ширины щели:

$$l_0 = \frac{2\sigma}{\rho a L} \approx 6 \text{ мкм} .$$

Д.Пилюлькин

Ф2302. *Над идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, график которого изображен на pV-диаграмме (см. рисунок). Минимальный объем газа равен V_0, а максимальный – в n раз больше. Участки 2–3 и 4–1 – изохоры, участок 3–4 – адиабата, а участок 1–2 получен из участка 3–4 сдвигом на отрезок длиной p_0 вверх вдоль оси давления. Определите количества теплоты, полученные или отданные на участках 1–2, 2–3, 4–1, а также КПД этого цикла.*



На изохорных участках *4–1* и *2–3* получаемое или отдаваемое газом количество теплоты идет только на изменение его внутренней энергии

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV .$$

При этом на участке *4–1* получаемое количество теплоты положительно, а на участке *2–3* – отрицательно:

$$Q_{41} = \Delta\left(\frac{3}{2}pV\right) = \frac{3}{2}p_0V_0 ,$$

$$Q_{23} = -\frac{3}{2}np_0V_0 .$$

Обозначим зависимость давления от объема на адиабате *3–4* как

$$p = p_{\text{а}}(V) .$$

Тогда, по условию, участок *1–2* задается уравнением

$$p = p_{\text{а}} + p_0 .$$

Получаемое при расширении на малый объем ΔV на этом участке количество теплоты ΔQ идет на изменение внутренней энергии $\Delta(pV)$ и на совершение работы $p\Delta V$:

$$\Delta Q = \Delta\left(\frac{3}{2}(p_0+p_{\text{а}})V\right) + (p_0+p_{\text{а}})\Delta V =$$

$$= \frac{5}{2}(p_0+p_{\text{а}})\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_{\text{а}} V .$$

Поскольку получаемое при расширении на малый объем ΔV на адиабате количество теплоты, равное $\frac{5}{2}p_{\text{а}}\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_{\text{а}}V$, обращается в ноль, имеем

$$\Delta Q = \frac{5}{2}p_0\Delta V .$$

Таким образом, полное полученное на участке *1–2* количество теплоты равно

$$Q_{12} = \frac{5}{2} p_0 (n-1) V_0 .$$

Общее количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{41} = \frac{5}{2} p_0 (n-1) V_0 + \frac{3}{2} p_0 V_0 ,$$

а холодильникам было отдано количество теплоты

$$Q_- = |Q_{23}| = \frac{3}{2} n p_0 V_0 .$$

Следовательно, КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{(3/2) n p_0 V_0}{(5/2) p_0 (n-1) V_0 + (3/2) p_0 V_0} = \frac{n-1}{(5/2) n - 1} .$$

О.Шведов

Ф2303. *При низких температурах молярная теплоемкость твердых веществ при постоянном давлении зависит от абсолютной температуры T по закону $C_T = C_{T_0} (T/T_0)^3$. Один моль (40 г) твердого аргона при температуре 8 К привели в тепловой контакт с двумя килограммами твердого аргона при температуре 1 К и все вместе теплоизолировали. Какой будет температура вещества, когда установится тепловое равновесие?*

При таких низких температурах (< 10 К) внешнее давление, т.е. давление насыщенного пара этого самого вещества, настолько мало, что работой, связанной с тепловым расширением вещества, можно пренебречь. Запас внутренней энергии ν молей вещества определяется суммированием от нулевой температуры до конечной температуры:

$$\int \nu C_{T_0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 dT = \nu C_{T_0} \cdot \frac{1}{4} T \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 = \nu T^4 \cdot \text{const} .$$

После установления теплового равновесия суммарная внутренняя энергия останется такой же и все вещество будет иметь одинаковую температуру. Отсюда следует, что

$$\nu_1 T_1^4 \cdot \text{const} + \nu_2 T_2^4 \cdot \text{const} = (\nu_1 + \nu_2) T_3^4 \cdot \text{const} .$$

Заметим, что 40 г – это 1 моль аргона, а 2 кг – это 50 молей. Тогда получим

$$T_3 = \left(\frac{\nu_1 T_1^4 + \nu_2 T_2^4}{\nu_1 + \nu_2}\right)^{1/4} \approx 3 \text{ К} .$$

С.Варламов

Ф2304. *В конденсаторе находится свернутая рулоном пачка чередующихся листов из металла и изолятора с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ одной и той же толщины d = 0,01 мм. Четные листы металла соединены электрическим контактом вместе и от места соединения сделан вывод. Так же соединены и нечетные листы. Между каждой парой четный – нечетный лист металла имеется слой изолятора. Размеры металлического корпуса конденсатора $a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5$ см. Пробойная напряженность электрического поля в диэлектрике $E = 3 \cdot 10^7$ В/м. Какова емкость такого конденсатора? Какое максимальное напряжение выдерживает такой конденсатор?*

Если потенциалы выводов конденсатора отличаются на U, то в диэлектрических промежутках между металлическими пластинами имеется электрическое поле одинаковой напряженности $E = U/d$. Половина полного объема нашего конденсатора, т.е. $a^3/2 = 62{,}5$ см^3, занята диэлектриком с таким электрическим полем. Энергия конденсатора равна произведению плотности энергии электрического поля $E^2 \varepsilon\varepsilon_0/2$ на объем, занятый полем:

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{a^3}{2} = \frac{CU^2}{2} .$$

Отсюда находим емкость нашего конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^3}{2d^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ Ф} .$$

Максимальное напряжение между выводами такого конденсатора не должно превышать величины

$$U_{\max} = Ed = 300 \text{ В}.$$

Д.Электрик

Ф2305. *В воздухе при нормальных условиях (T = = 273 К, $p = 10^5$ Па) создано однородное электрическое поле с напряженностью E. Ионизация молекул воздуха происходит за счет космического излучения. Возникшие при ионизации свободные электроны долго путешествуют, прежде чем встретить на своем пути положительно заряженный ион и снова образовать нейтральную молекулу. Считая удары нейтральных молекул с электронами абсолютно упругими, найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов и среднюю скорость неупорядоченного хаотического движения электронов. Размер (диаметр) молекул воздуха $D \approx 0{,}3$ нм. Рассмотрите два случая: $E_1 = 100$ В/м, $E_2 = 10^6$ В/м. При какой величине напряженности E возникает электрический пробой в воздухе, если для гарантированной ионизации одной молекулы требуется энергия не меньше $w_0 = 10$ эВ и каждый из двух свободных электронов после ионизации молекулы должен иметь примерно такую же энергию?*

Средняя скорость неупорядоченного хаотического движения электронов v, по-видимому, будет значительно больше средней скорости теплового движения нейтральных молекул $v_т$. Это после вычислений нужно будет проверить. В таком случае для нахождения средней длины свободного пробега электронов можно считать нейтральные молекулы стоящими на месте. Концентрация молекул равна

$$n = \frac{p}{kT} .$$

В нашем предположении длина свободного пробега электронов равна

$$\lambda = \frac{4}{n\pi D^2} = \frac{4kT}{p\pi D^2} = 5{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

После каждого удара электрона о нейтральную молекулу (движущуюся с очень малой скоростью) его скорость случайным образом меняет свое направление, а величина скорости уменьшается на некоторую свою долю. Связано это с тем, что массивная, в сравнении с электроном, нейтральная молекула после удара изменяет свою скорость и приобретает некую кинетическую энергию. Если скорость неупорядоченного хаотического движения электронов обозначить через v, а скорость дрейфа, т.е. упорядоченного движения, – через u, то между ними имеется такая связь:

$$u = \frac{at}{2} = \frac{1}{2}\frac{Ee}{m}\frac{\lambda}{v} = \frac{Ee\lambda}{2mv}$$

(между ударами электрон движется с ускорением, направленным против электрического поля E). За время t электрон в среднем переместится на расстояние ut, при этом электрическое поле совершит работу $Eeut$. При ударе о нейтральную покоящуюся молекулу массой M электрон массой m может потерять от 0 до $4m/M$ доли своей кинетической энергии (при скользящем и при лобовом ударах соответственно). Если считать, что в среднем теряется примерно $(2m/M)$-я доля энергии, то среднюю скорость неупорядоченного хаотического движения электронов можно найти из закона сохранения энергии:

$$Eeut = \frac{2m}{M}\frac{mv^2}{2}, \text{ или } Ee\frac{Ee\lambda}{2mv}\frac{\lambda}{v} = \frac{m^2v^2}{M},$$

$$\text{и } v = \sqrt[4]{\frac{E^2e^2\lambda^2M}{2m^3}}.$$

При $E = E_1 = 100$ В/м

$$v = 21\ \text{км/с и } u = 130\ \text{м/с}.$$

При $E = E_2 = 10^6$ В/м

$$v = 2100\ \text{км/с и } u = 13\ \text{км/с}.$$

Масса молекулы во много раз больше массы электрона, поэтому скорость упорядоченного движения электронов гораздо меньше скорости их хаотического движения. Сравним эти скорости со средней скоростью теплового движения молекул воздуха

$$v_{\text{т}} = \sqrt{\frac{3RT}{\text{M}}} = 480\ \text{м/с}.$$

Видно, что наше предположение о том, что скорость хаотического движения электронов больше тепловых скоростей движения молекул, оказалось верным. Однако останавливаться пока рано. Найдем скорость теплового движения электронов (свободных частиц) при заданной температуре. Поскольку масса электрона меньше массы молекулы воздуха примерно в $2000\cdot 29$ раз, скорость электронов больше скорости молекул в $\sqrt{2000\cdot 29}$ раз и составляет

$$v_{\text{т эл}} = 110\ \text{км/с}.$$

Таким образом, за счет теплового движения молекул, которые толкают в разные стороны свободные электроны, их скорости оказываются больше 21 км/с. Следовательно, именно величину 110 км/с и надо считать ответом для случая, когда $E = 100$ В/м. Тогда скорость упорядоченного движения электронов в этом случае будет меньше:

$$u = \frac{Ee\lambda}{2mv_{\text{т эл}}} = 25\ \text{м/с}.$$

Средняя кинетическая энергия, которую приобретают электроны при напряженности электрического поля E, равна

$$w = Ee\lambda\sqrt{\frac{M}{8m}}.$$

Чтобы произошла ионизация воздуха, эта энергия должна быть больше энергии ионизации в три раза:

$$w = 3w_0.$$

Отсюда следует, что электрическое поле должно иметь напряженность

$$E > \frac{3w_0}{e\lambda}\sqrt{\frac{8m}{M}} \approx 2{,}3\cdot 10^6\ \text{В/м}.$$

Значение пробойной напряженности поля для воздуха в справочнике составляет $3\cdot 10^6$ В/м. Таким образом, результат расчетов весьма близок к экспериментальным данным.

С.Дмитриев

Ф2306. *Глаз наблюдателя расположен так, что муравей и его изображение в «кривом» (сферическом) зеркале для наблюдателя имеют одинаковые угловые размеры и полностью накладываются друг на друга. Наблюдатель отодвинулся от зеркала на расстояние L вдоль линии, на которой находятся муравей и его изображение, и теперь видит, что угловой размер муравья составляет 75% от углового размера его изображения. Затем наблюдатель отодвинулся в том же направлении еще на L, и угловой размер изображения стал в 1,5 раза больше углового размера муравья. Во сколько раз изображение муравья больше его самого? Каков радиус кривизны зеркала?*

Пусть a и na – размеры муравья и его изображения, x и nx –расстояния от глаза наблюдателя до муравья и до изображения в первом случае (при этом муравей и его изображение имеют одинаковые угловые размеры и полностью накладываются друг на друга).

Поскольку человек может четко видеть маленького муравья только с расстояния, не меньшего расстояния наилучшего зрения, то $a \ll x$ и все углы падения лучей на зеркало малы. По условию, при перемещении наблюдателя на расстояние L справедливо соотношение

$$\frac{a}{x+L} = \frac{0{,}75na}{nx+L},$$

а при перемещении еще на L выполняется соотношение

$$\frac{a}{x+2L} = \frac{2}{3}\frac{na}{nx+2L}.$$

Преобразовывая эти уравнения к виду

$$nx = (3n-4)L \text{ и } nx = (4n-6)L,$$

находим

$$n = 2,\ x = L.$$

Пусть (рис.1) CD – изображение муравья AB (точка C – изображение точки A, а точка D – изображение точки B). Прямые AC и BD должны быть перпендикулярны зеркалу – луч, идущий вдоль направления AC, после отражения от зеркала должен идти в противоположном направлении. Поскольку точка пересечения продолжений линий AC и BD совпадает, с одной стороны, с положением наблюдателя, а с другой стороны – с центром O зеркала, получаем, что глаз наблюдателя находится в центре кривизны зеркала.

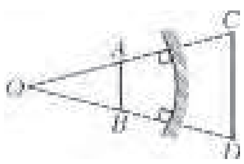


Рис. 1

Для нахождения радиуса кривизны R зеркала заметим, что световой луч AE после отражения от зеркала в точке E идет вдоль направления CE (рис.2). Проведем параллельную AE прямую OK, пересекающую

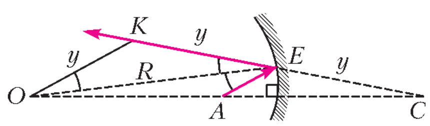


Рис. 2

продолжение луча CE в точке K. Поскольку $OA = x$ и $OC = nx = 2x$, то $AC = OA = x$, и AE является средней линией треугольника OCK, откуда следует, что $CE = EK = y$. Как вытекает из закона отражения света, в треугольнике OKE углы при основании равны, и $OK = KE = y$. Учитывая малость углов падения, находим

$$R \approx 2y,\ 2L \approx 3y, \text{ и } R \approx 2y = \frac{4L}{3}.$$

Итак, изображение муравья больше его самого в два раза, а радиус кривизны зеркала равен $R = 4L/3$.

С.Варламов

Ф2307. *Два радиотелескопа, работающие синхронно на длине волны $\lambda = 3$ см, располагаются на расстоянии $L = 1000$ км друг от друга. С помощью этих телескопов обнаружены две звезды, которые излучают в радиодиапазоне. Массы звезд одинаковы и равны массе Солнца. Звезды обращаются друг вокруг друга с периодом $T = 1$ год (двойная система). На каком максимальном расстоянии от Земли они могут находиться?*

Обозначим расстояние от звезды до звезды через $2r$. Тогда r – это расстояние от каждой звезды до центра масс системы. Силы, действующие на звезды, равны

$$F = G\frac{m^2}{4r^2}$$

и направлены к центру масс системы. Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma.$$

Следовательно,

$$a = \frac{Gm}{4r^2}.$$

Каждая из звезд движется относительно центра масс системы, причем можно считать, что движение это происходит в поле центральной силы. Для такого движения справедливы законы Кеплера. В частности, выполняется третий закон, который связывает размеры большой полуоси эллипсоидальной траектории с периодом обращения:

$$\frac{D^3}{T^2} = \text{const}.$$

Максимальное расстояние между звездами

$$R = 2D \cdot 2 = 4D.$$

Это возможно, если эллипсы вырождаются почти в прямые отрезки. Найдем эти большие полуоси в частном случае, когда траектория каждой из звезд представляет собой окружность радиусом $D = r$. Тогда

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm}{r^2}, \text{ и } \frac{r^3}{T^2} = \frac{1}{4}\frac{Gm}{4\pi^2}.$$

Для Земли, летающей вокруг Солнца (масса которого такая же, как у нашей звезды) на расстоянии 1 а.е. = = 150 млн км, период обращения тоже равен $T = 1$ год. И тоже выполняется третий закон Кеплера:

$$\frac{(1\text{ а.е.})^3}{(1\text{ год})^2} = \frac{Gm}{4\pi^2}.$$

Отсюда находим

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot 1\text{ а.е.} = 94{,}5\text{ млн км}.$$

Тогда максимальное расстояние между звездами равно

$$R = 4r = 378\text{ млн км}.$$

При синхронной работе двух телескопов их «база» L и длина волны λ, на которой они работают, определяют минимальное угловое расстояние $\alpha = \lambda/L$ между светящимися объектами, при котором эти объекты различимы. Если расстояние s от центра масс наших двух звезд до Земли больше R/α, то такие объекты невозможно различить. Следовательно, максимальное расстояние звезд от Земли равно

$$s_{\max} = \frac{RL}{\lambda} = \frac{378 \cdot 10^6\text{ км} \cdot 1000\text{ км}}{3 \cdot 10^{-5}\text{ км}} = 1{,}26 \cdot 10^{16}\text{ км}.$$

Это примерно 1330 световых лет.

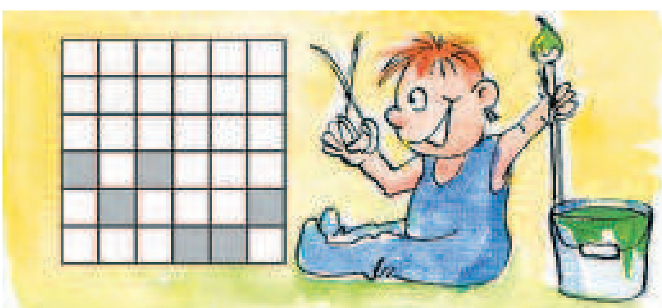
С.Варламов

Задачи

1. Пес и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пес откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

А. Шаповалов

2. В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными,



тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:

а) за 5 или менее;
б) за 4 или менее;
в) за 3 или менее таких перегибаний?

Т.Голенищева-Кутузова, М.Раскин, И.Ященко

3. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

А. Шаповалов

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи предлагались на LXXVI Математическом празднике.

Иллюстрации Д.Гришуковой

4. Дима увидел в музее странные часы (как на рисунке). Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да еще секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы?

(Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)

Д. Шноль

5. Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио.

Когда все клетки заполнены, Базилио берет себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берет лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

А. Шаповалов

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Два натуральных числа имеют по три делителя, а их разность имеет два делителя. Какие это числа?

И.Акулич

2. На доске нарисован треугольник ABC. Точку A отразили симметрично относительно прямой BC, точку B отразили симметрично относительно прямой CA, точку C отразили симметрично относительно прямой AB. Оказалось, что три новые точки являются вершинами правильного треугольника. Верно ли, что исходный треугольник ABC правильный?

С.Дворянинов

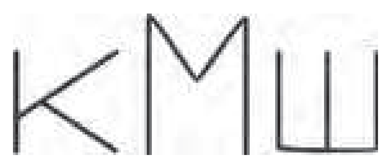
3. На объединительный съезд съехались 100 делегатов – представители трех партий. При этом две какие-то партии прислали поровну делегатов, а суммарное число социалистов и либералов оказалось в полтора раза больше, чем демократов. Сколько делегатов от каждой партии приехали на съезд?

И.Акулич

4. Будем называть число *квадратным*, если квадрат такой площади можно нарисовать на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки (например, числа 1, 2, 4 и 5 – квадратные, а 3 – нет). Докажите, что если числа a и b – квадратные, то число ab – тоже квадратное.

Е.Бакаев

5. Можно ли спаять из кусочков проволоки фигуру, три перпендикулярные проекции которой на различные плоскости выглядят так, как на рисунке?



И.Акулич

Обмен мешочками на Поле Чудес

А.МЕНЬЩИКОВ

Как-то раз, одним прохладным вечером, Лиса Алиса и Кот Базилио посоветовали Буратино зарыть мешочек с монетками на волшебном Поле Чудес – мол, зароешь, скажешь магические слова «крекс, пекс, фекс», а на следующий день там появится еще один новый мешочек с денежками. Наивный Буратино, конечно, так и сделал.

– А почему бы и нет? Лиса и Кот кажутся весьма доброжелательными, плохого они уж точно мне не посоветуют, – подумал он, зарыл мешочек и побежал довольный домой, предвкушая завтрашнюю удачу.

Но у Алисы и Базилио насчет этой удачи были свои планы. Правда, на улице уже было темно, и они решили сходить за мешочком завтра, с самого утра, когда будет светло. Мало ли, Поле-то большое, а в темноте найти мешочек сложно.

Идут следующим утром Лиса и Кот на Поле за своей добычей и видят: навстречу им бежит радостный Буратино.

– Эх, не видать нам счастья, он нас опередил. Надо было раньше выходить... – разочарованно пробормотала Алиса.

Но удача все-таки сегодня была на их стороне. Буратино подбежал к ним и, как ни удивительно, начал их благодарить:

– Спасибо вам большое! Выкопал я, значит, вчера ямку, зарыл в нее мешочек. А сегодня метрах в пяти от нее появилась новая, в которой действительно появился еще один, новый мешочек, который внешне выглядел так же, но при этом монеток в нем оказалось ровно в 2 раза больше! Ну, я оба мешочка там и оставил, завтра ведь еще два мешочка появятся, в которых будет еще больше монет! Наконец-то я разбогатею! Вот это удача, спасибо, что рассказали про это волшебное Поле Чудес!

Алиса и Базилио переглянулись, недоумевая.

— Всегда пожалуйста, всегда рады помочь!

Буратино побежал домой, подсчитывая, на сколько он разбогатеет уже через неделю.

Лиса и Кот знали, что Буратино никогда никого не обманывает, и задумались: неужели это Поле действительно творит чудеса? Как только они пришли на Поле, они увидели эти две одинаковые ямки, и Лиса сразу же заявила:

— Чур, я забираю мешочек из левой ямки. Ну а ты забирай из правой. Но, если что, по обоюдному согласию мешочками можно будет поменяться не глядя, но только если у меня окажется мало монет.

Кот не стал спорить и решил проверить собственную удачу, подходя к правой ямке. Ведь если у него вдруг окажется мало монеток, можно будет попытаться уговорить Лису поменяться не глядя. К тому же ему вдруг стало интересно.

Вопрос читателям: А выгодно ли поменяться мешочками?

Лиса быстро достала мешочек из первой ямы, открыла его и быстренько пересчитала содержимое. То же самое сделал и Кот. Тут Алиса призадумалась:

«А стоит ли меняться? У меня сейчас x сольдо. Если я меняюсь, мне может как повезти, так и не повезти. Если я меняюсь и мне везет, то у меня будет $2x$ сольдо, и я получаю дополнительно x. Если же я меняюсь и мне не везет, то у меня будет $x/2$ сольдо, и я теряю всего лишь $x/2$. Вероятность удачи и неудачи одинаковая, и *в среднем я выигрываю больше, чем теряю*. Поэтому *меняться выгодно*, преимущество на моей стороне».

Так Алиса поняла, что обмен ей выгоден и сразу же предложила меняться мешочками. Но Базилио внезапно возразил:

— Не торопись, милочка... Наверняка, все дело в том, что у тебя оказалось мало денежек, вот ты и надеешься заработать побольше... Вот ты просто скажи, а зачем мне вообще меняться с тобой? Чем твоя ямка лучше моей? Не вижу я смысла с тобой меняться — мне уже либо повезло, либо не повезло. Как говорится, лучше синица в руках, чем журавль в небе. Знаю я тебя, хитрюга, опять меня надуть хочешь!

Алиса, уверенная в необходимости обмена, поняла мысль Базилио и теперь хорошенько задумалась:

«А действительно, зачем мне меняться? Мне ведь тоже либо повезло, либо не повезло. Разницы же в ямках нет. Но, с другой стороны, я ведь уже строго математически подсчитала, что выигрываю больше, чем теряю, и для меня такой обмен выгоден. Где-то Кот меня обманывает... Наверное, он не хочет меняться, потому что у него оказалось много денег... В таком случае его надо обязательно уговорить! Но как мне это

сделать?... Стоп! Но ведь то же рассуждение, что я придумала для себя, годится и для Базилио: он ведь тоже в среднем выигрывает больше, чем проигрывает! Да он просто обязан будет поменяться, если об этом услышит».

И она тут же ему рассказала свою гениальную мысль про выгоду от обмена.

На этот раз призадумался Базилио:

«А ведь Лиса меня вроде бы не обманывает... Такой обмен и вправду честен: у каждого из нас шанс выиграть и проиграть изначально был одинаковый, и, действительно, в среднем я выиграю больше денег, чем проиграю. Значит, меняться все же выгодно. Стоп! Но ведь один и тот же обмен не может быть выгоден нам обоим одновременно: если один из нас в среднем больше выигрывает, то второй обязан в среднем больше проигрывать! Лиса меня точно пытается где-то обмануть!»

Но, как Базилио ни пытался найти ошибку в рассуждении Алисы, он ничего не смог сделать. Слишком уж правдоподобно все звучало. Может, ошибка была все-таки у него в рассуждениях? Поэтому он начал размышлять вслух: может, сама Алиса поможет найти ошибку.

— А знаешь, дорогая моя, что я понял? Если поверить твоему расчету, то нам ведь даже необязательно было считать, сколько денег у каждого из нас изначально лежит в мешочке. Ведь при обмене каждый из нас в любом случае может выиграть вдвое больше, чем потерять. Поэтому можно было меняться сразу, не задумываясь, сколько монеток у нас сейчас. Ты согласна?

Лиса замешкалась, но согласилась — ведь ее рассуждение совсем не использовало то, сколько именно денег было изначально в мешочке: возможный выигрыш всегда вдвое больше возможного проигрыша. Тогда Кот продолжил:

— Хорошо, с этим мы оба согласны. Итак, пусть мы даже не стали смотреть, сколько у нас у каждого оказалось денег в мешочке, и сразу же поменялись бы, не раздумывая. Но ведь тогда можно было бы сразу повторить это рассуждение: а почему бы не поменяться второй раз? Ведь можно считать, что я с самого начала выбрал левую ямку, а ты правую, и повторить все предыдущие рассуждения. Получается, что выгодно к тому же поменяться и обратно! Значит, совершив два раза этот, на первый взгляд потенциально выгодный для нас обоих, обмен, каждый из нас должен уже был бы выйти в плюс. Но ведь к нам обоим вернулся бы обратно наш старый мешочек, и ничего бы мы не выиграли! Все, Алиса, теперь я полностью уверен, что ты меня пытаешься где-то обмануть! Плутовка! Нет здесь никакой выгоды и быть не может!

Лиса все поняла:

«Базилио прав: обмен-то вроде выгодный, тогда два таких обмена должны быть еще выгоднее, однако от двух таких обменов пользы-то никакой не будет... Что-то здесь не так, действительно... Так все-таки этот обмен не выгоден? Получается, что мое идеальное рассуждение неверное? Итак, повторю-ка еще раз: либо я выигрываю, либо проигрываю, но в случае выигрыша я получаю больше денег, чем теряю в случае проигрыша, значит, меняться выгодно. Как это может быть неверно? Где же я ошибаюсь?»

И Лиса, и Кот полностью убедились, что рассуждение про выгоду обмена неверно, однако ошибку найти никто из них не мог, сколько они ни думали. Тут Алиса предложила посмотреть на все это с другой стороны:

— Смотри, напарник, я придумала еще одно опровержение! Изначально есть два мешочка, с x и $2x$ монетками. Есть лишь два варианта, сколько у меня может быть денег: x или $2x$. Что происходит при обмене? Если у меня x и я меняюсь, то я выигрываю x. Если же у меня $2x$ и я меняюсь, то я проигрываю x. Выходит, в среднем при обмене я выигрываю столько же, сколько и проигрываю. Но ведь у меня же получалось, что в среднем я выигрываю больше! Теперь я ничего не понимаю*! ГДЕ ТАМ ОШИБКА?*

Вопрос читателям: А сможете ли вы найти ошибку в «идеальном» рассуждении Алисы?

Число Эйлера в треугольнике Паскаля

Оба понятия из заголовка хорошо известны математикам уже не одну сотню лет. За это время их изучили, что называется, вдоль и поперек, и многие знакомятся с ними еще в школе – в классах с углубленным изучением математики проходят и число Эйлера, и треугольник Паскаля. Казалось бы, давным-давно должны быть известны все формулы и доказаны все теоремы про них. Удивительно, но это не так – новые результаты продолжают появляться. Например, не так давно был замечен такой забавный факт: если два не единичных числа стоят в одной строке треугольника Паскаля, то у них обязательно есть общий множитель, больший 1. И это утверждение имеет простое комбинаторное доказательство. А в 2012 году американский изобретатель и математик Харлан Бразерс нашел простое равенство, позволяющее «найти» число Эйлера в треугольнике Паскаля. Его открытию и посвящена эта заметка.

Треугольник Паскаля – это треугольная таблица, заполненная числами. В каждой строке по краям стоят единицы, а любое другое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа. Первые восемь строк показаны на рисунке. У этого треугольника много интересных и важных свойств, узнать о которых можно, к примеру, из статей А.Бендукидзе «Треугольник Паскаля» («Квант» №10 за 1982 г.) или Д.Фукса и М.Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов» («Квант» №6 за 1970 г.). Нам же важно лишь то, что каждое число в треугольнике Паскаля является *числом сочетаний* (т.е. количеством способов выбрать k элементов из n-элементного множества): на k-м месте в n-й строке стоит число C_n^k, равное $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (строки и числа в строках нумеруются с нуля).

Число Эйлера e определяется как предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Это иррациональное (и даже трансцендентное) число, примерно равное 2,71828... У него есть много разных определений,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Первые 8 строк треугольника Паскаля

свойств, и, вообще, это число встречается чуть ли не во всех областях математики. Мы сейчас опять не будем вдаваться в подробности, а если вам интересно узнать больше, то почитайте статью Е.Кузьмина и А.Ширшова «О числе e» («Квант» №8 за 1979 г.). Для наших целей достаточно приведенного выше определения.

Перейдем к равенству, открытому Бразерсом. Пусть s_n – это произведение всех чисел в n-й строке треугольника Паскаля, т.е. $s_n = \prod\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Например, $s_4 = 1\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 1 = 96$. Тогда верно следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2} = e.$$

Попробуйте самостоятельно доказать его. На всякий случай, приводим доказательство в конце журнала.

Е.Епифанов

Сверххолодная вода

И.АМЕЛЮШКИН

Прилежный школьник хорошо знает, что вода на Земле существует в жидком, твердом и газообразном состояниях. Когда столбик термометра опускается ниже $0\ ^\circ C$, на улице замерзают лужи, падает снег. А может ли вода оставаться жидкой при отрицательной температуре, скажем при $-10\ ^\circ C$, т.е. может ли вода быть переохлажденной? Оказывается, может. Причем пребывание воды в таком состоянии во многих случаях является опасным. Так, самолеты начинают покрываться льдом и теряют подъемную силу в переохлажденном облаке. После удара о поверхность летательного аппарата в переохлажденных каплях образуются центры кристаллизации, приводящие к быстрому превращению воды в лед в силу малости температуры окружающего воздуха. Попадая на деревья или провода, переохлажденные капли, замерзая, приводят к их обледенению и увеличению веса. Ветки деревьев и провода не выдерживают нагрузки, ломаются и разрываются.

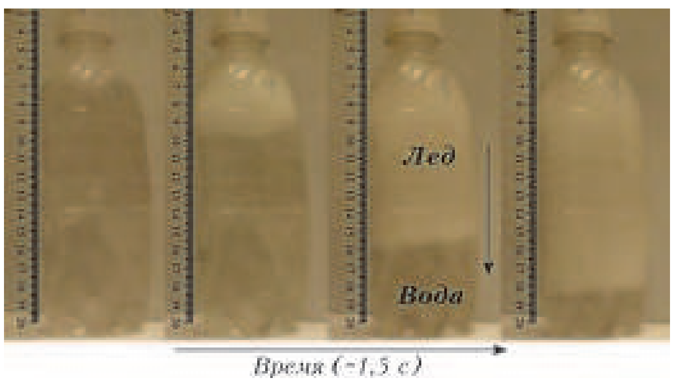


Рис.1. Движение фронта кристаллизации (межфазной границы лед–вода)

Получить переохлажденную воду дома совсем несложно. Для этого нужно взять дистиллированную или даже обычную воду (желательно для детского питания) объемом 0,5 литра. Чем больше объем, тем легче воде замерзнуть при нулевой температуре и тем сложнее получить переохлажденную воду. Но если аккуратно положить бутылку с водой в холодильник, точнее – в его морозильное отделение, то вода может и не замерзнуть. Опять же аккуратно вынув бутылку из холодильника и стукнув сверху молотком, легко увидеть, как движется граница раздела двух состояний вещества лед – вода (рис.1). Поставив линейку и замерив положения фронта кристаллизации в начальный и конечный моменты времени, несложно экспериментально получить значение скорости движения фронта кристаллизации как отношение пройденного им пути к промежутку времени, за который фронт этот путь прошел. В опыте, проиллюстрированном на рисунке 1, эта скорость оказалась порядка 10 см/с. На рисунке 2 показана визуализация изменения температуры на границе раздела двух фаз с помощью тепловизора (прибора, который «видит» температуру объекта).

После прохождения фронта кристаллизации образуется рыхлая масса, содержащая кристаллики льда. Оценим массовую долю этих кристалликов. Запишем уравнение теплового баланса:

$$cm_{\text{в}}(t_0 - t) = \lambda m_{\text{л}}\,.$$

Здесь c – удельная теплоемкость воды в жидком состоянии, λ – удельная теплота плавления льда, $m_{\text{в}}$ и $m_{\text{л}}$ – массы воды и льда (из нее образовавшегося) соответственно, $t_0 = 0\ ^\circ C$ – температура плавления льда (кристаллизации воды), t – температура переохлажденной воды. После кристаллизации вода практически мгновенно приобретает температуру, равную температуре ее замерзания (время изменения температуры – порядка времени поворота отдельной молекулы). Температура в морозильном отделении домашнего холодильника составляет $-18\ ^\circ C$. Таким образом, после «встряхивания» массовая доля α образовавшегося льда будет равна

$$\alpha = \frac{m_{\text{л}}}{m_{\text{в}}} = \frac{c}{\lambda}(t_0 - t) =$$

$$= \frac{4180\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})}{3,3\cdot 10^5\ \text{Дж/кг}}\left(0\ ^\circ\text{C} - (-18\ ^\circ\text{C})\right) \approx 0,23\,.$$

К сожалению, в домашних условиях сложно переохладить

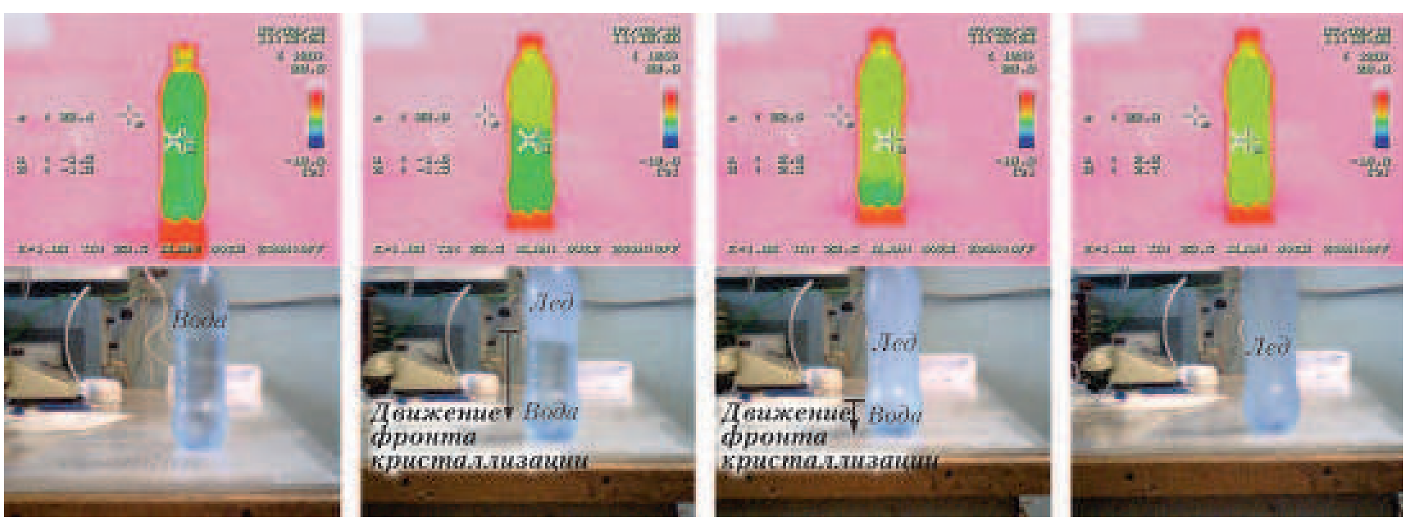


Рис.2. Съемка кристаллизации с помощью тепловизора. Четко виден скачок температуры на границе раздела двух фаз

воду в бутылке объемом 0,5 литра до $-18\ ^\circ\text{C}$ (обычно удается только до $-5\ ^\circ\text{C}$). Это связано главным образом с вибрациями холодильника, которые нарушают неустойчивое (метастабильное) состояние переохлажденной воды.

Объем воды в бутылке при переохлаждении до увеличится на

$$\beta = \frac{m_л/\rho_л - m_л/\rho_в}{m_в/\rho_в} = \alpha\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) = 0,23\left(\frac{1000\ \text{кг/м}^3}{916\ \text{кг/м}^3} - 1\right) \approx 0,02\ .$$

Получили, что после удара молотком 23% по массе воды превратилось в лед, а объем образовавшейся смеси (лед–вода) оказался на 2% больше исходного объема воды в бутылке. Рисунок 3 иллюстрирует различие внутреннего устройства воды и льда.

Несложно вычислить, что, для того чтобы после «встряхивания» вся жидкая вода превратилась в лед ($m_в = m_л$), нужно ее переохладить до температуры

$$t = t_0 - \frac{\lambda}{c} = 0\ ^\circ\text{C} - \frac{3,3\cdot 10^5\ \text{Дж/кг}}{4180\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)}} \approx -80\ ^\circ\text{C}\ .$$

Для этого, скорее всего, понадобится жидкий азот, а с ним дома лучше не экспериментировать.

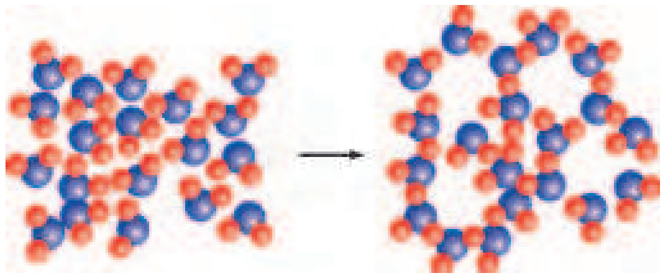


Рис.3. Молекулярное строение воды и льда

Интересно отметить, что межфазная граница – фронт кристаллизации – является теплогенератором, а ее локальная температура зависит от поверхностной энергии и скорости кристаллизации. При этом в качестве одного из каналов отвода фазового тепла кристаллизации может быть учтено открытое учеными инфракрасное излучение, вызванное резким изменением организации и внутреннего состояния молекул жидкости при ее замерзании.

Однако для изучения этих сложных процессов нужно хорошо знать законы квантовой химии и молекулярной физики, проводить эксперименты и наблюдения, открывать новые законы физики. А для этого нужно поступать в Московский физико-технический институт.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Поляризация на носу

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Солнечный свет не имеет какой-либо преимущественной поляризации. Однако, рассеиваясь на молекулах и мельчайших частичках воздуха, солнечный свет становится поляризованным. И вот почему. Каждую молекулу воздуха можно представить диполем, т.е. двумя разноименными зарядами одинаковой величины, разнесенными на некоторое расстояние (рис.1). Когда электромагнитная волна (свет) падает на молекулу воздуха, заряды молекулы начинают совершать колебания в направлении вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля, и поэтому молекула становится источником электромагнитного излучения. Интенсивность излучения J такой молекулы-диполя в некоторой точке S зависит от длины вектора $\vec{r}$ и его направления следующим образом:

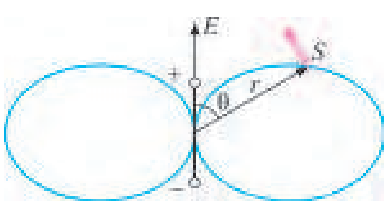


Рис. 1

$$J \sim \frac{\sin^2\theta}{r^2}\ ,$$

где θ – угол между осью диполя и $\vec{r}$. Отсюда следует, что молекула не будет излучать вдоль оси своего диполя ($\theta = 0$), а максимальной интенсивность излучения будет в направлении, перпендикулярном оси диполя ($\theta = \pi/2$). Так как вектор электрического поля излучаемой волны (световой вектор) всегда перпендикулярен вектору $\vec{r}$ (см. красный вектор на рисунке 1), то излучение диполя под действием естественного источника света (Солнца) может быть поляризованным с плоскостью поляризации, образованной осью диполя и точкой, в которой находится наблюдатель.

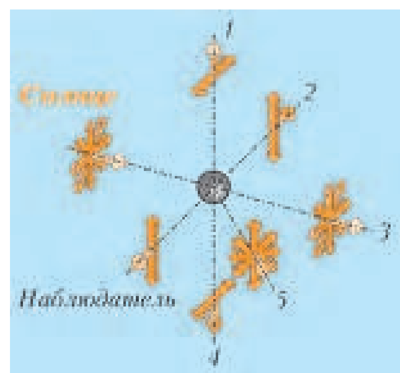


Рис. 2

Рисунок 2 иллюстрирует случай, когда Солнце встает на востоке и его горизонтальные лучи неполяризованного света ударяются о частицу воздуха (серый шарик), превращая ее в источник излучения. Это излучение в направлении к наблюдателю, который смотрит на юг, а также в направлении *2* поляризовано по вертикали. В направлениях *1* и *4* (вверх и вниз) излучение тоже поляризовано, как это показано на рисунке. Если наблюдатель смотрит не под прямым углом к направлению солнечных лучей (*5*), то излучение рассеянного света поляризовано лишь частично. Неполяризованным остается излучение, распространяющееся в направлении *3*.

Как видно на фото (рис.3), сделанных автором на рассвете (Солнце слева), поляризационные очки позволяют определить направление преимущественной поляризации света. Горизонтально расположенные очки пропускают гораздо больше света, чем вертикально ориентированные. Значит, поляризация света данного участка неба вертикальна.

(Продолжение см. на с. 31)

Электрический ток в жидкости и фотоэффект

С.ГЕРАСИМОВ

Самое интересное, привлекательное и полезное в фотоэффекте – это возможность получения электродвижущей силы, т.е. работы по перемещению электрических зарядов, которую совершают силы неэлектрического происхождения. Действительно, при взаимодействии света с веществом происходит перераспределение электронов по энергетическим уровням. Если энергия кванта превышает ширину запрещенной зоны, электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости. В результате электрод, потерявший электрон, приобретает положительный заряд, что, собственно говоря, и является причиной возникновения электрического тока в цепи.

Однако не все так просто. Обычные материалы – металлы и диэлектрики – обладают достаточно большой шириной запрещенной зоны, что, по существу, оказывается препятствием для получения дешевого и экологически чистого источника энергии. Поэтому должны приветствоваться любые попытки создать материал, характеризующийся максимальным отношением силы фототока к величине светового потока, падающего на поверхность рабочего вещества. К примеру, замечательные результаты дает монокристалл германия, но созданная таким образом солнечная батарея оказывается экономически невыгодной. И это не единственное препятствие на пути энергетического прогресса. Недолговечность – вот что может испортить и действительно портит безоблачную жизнь потребителям безоблачной энергии.

Вместе с тем, решение этой фотоэлектрической проблемы, похоже, лежит на поверхности. Так получилось, что открытый при помощи жидкости фотоэффект теперь в большей степени связывает свою судьбу с полупроводниками. Правда и то, что контакт полупроводника или металла с жидкостью (электролитом) позволил узнать о природе взаимодействия оптического излучения с веществом чрезвычайно много, а вот возможность использования контакта обычного металла с обычной жидкостью в практических целях осталась нетронутой. Поэтому попытаемся внести свой вклад в изучение этого замечательного явления, тем более что такое сравнительно несложное исследование возможно в обычной учебной лаборатории.

Лампа, алюминиевая банка и пара приборов

Почти все, что нужно для изготовления экспериментальной установки, представлено на рисунке 1. Исследуемая жидкость находится в цилиндрической кювете, боковая поверхность которой (*К*) диаметром 75 мм и высотой 45 мм изготовлена из алюминия. Это – один электрод фотоэлектрического прибора. Из того же материала изготовлен второй цилиндрический электрод (*к*) диаметром 10 мм и высотой 45 мм. Раз изучается влияние света от лампы (*Л*) на жидкость, то необходимо избежать попадания света на

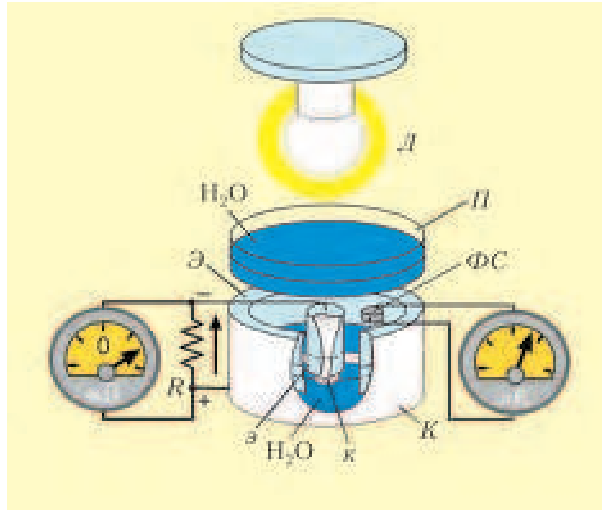


Рис. 1

поверхность металлических электродов. Для этого служат два экрана (*Э*) и (*э*), изготовленные из светонепроницаемого пластика. Высоты экранов одинаковы и составляют 40 мм, внутренний диаметр большого экрана 40 мм, внешний диаметр малого экрана 20 мм. Выбор алюминия в качестве электродов обусловлен тем, что толщина переходного слоя «алюминий–вода» обладает чрезвычайно большой электрической емкостью, и есть надежда, что процесс экспозиции удастся растянуть во времени. В качестве рабочей жидкости, как предполагается играющей самое активное участие в формировании фотоэлектрического эффекта, лучше всего использовать дистиллированную воду. Почему? Воды в природе очень много – это раз. Есть надежда избежать помех, обусловленных химическими процессами, – это два.

Между источником света (*Л*) и кюветой с исследуемой жидкостью находится поглотитель (*П*) – чтобы избавиться от нагрева жидкости лампой. Источником света может быть практически любая энергосберегающая лампа, например лампа E27-9W/C:4000 К. Выбор поглотителя достаточно очевиден – это слой воды высотой полтора сантиметра, налитой в тонкостенную кювету. Есть надежда, что инфракрасное излучение от лампы таким поглотителем будет подавлено полностью. В перспективе поглотитель можно заменить светофильтром, если потребуются спектрометрические измерения.

На входе установлено фотосопротивление (*ФС*), позволяющее однозначно судить об освещенности поверхности исследуемой жидкости. Нужны еще два прибора. Один из них измеряет падение напряжения на сопротивлении нагрузки (R = 15 кОм), а второй измеряет сопротивление фоторезистора.

Пока только опыт (наблюдение)

Заправив кювету дистиллированной водой и подключив милливольтметр, начинаешь подозревать, что направление тока на рисунке 1 указано неверно. И так, и не так. На самом деле даже дистиллированная вода, сколь бы чистой она ни была, все равно химически взаимодействует с металлом. Именно это и имеет место сразу после того, как вы залили воду в кювету. Включив источник света, обнаруживаешь достаточно странное обстоятельство: ток в цепи не только изменяется по величине, но и меняет направление (рис.2). После выключения лампы ток медленно, очень медленно,

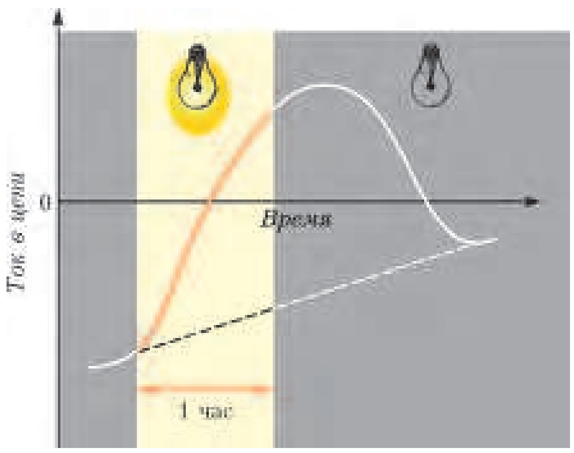


Рис. 2

возвращается в «отрицательную» область, но свое значение не восстанавливает. Придется подождать десяток часов, прежде чем можно будет снова начать измерения.

Эксперимент первый. Выбор поглотителя

Через сутки после загрузки воды в кювету темновой ток (ток в цепи при отключенном источнике света) становится практически постоянным. Почему это происходит, пока неясно.

Сколь бы маломощна ни была лампа, играющая роль источника света, но нагрев жидкости в кювете все-таки возможен. А значит, нужен термометр, позволяющий контролировать и этот процесс. Конструкция кюветы позволяет установить небольшой градусник, а лучше термопару, без особых проблем.

К фототоку можно относиться двояким образом. Прежде всего, это процесс изменения тока в цепи, обусловленный оптическим облучением. Количественная характеристика этого процесса может тоже именоваться фототоком: можно договориться, что это ток в цепи в определенный момент времени минус ток в цепи в момент включения источника света.

Первое измерение проводим без поглотителя; в рабочем журнале набор чисел отмечаем перечеркнутой букой *П*. В глаза бросаются две особенности: возрастание тока в цепи начинается почти сразу же после включения источника света и прекращается сразу же после выключения лампы (рис.3). При этом, что важно, температура жидкости еще сравнительно долго продолжает расти (рис.4). Появляется убежденность, что такое изменение фототока невозможно объяснить ни нагревом жидкости, ни влиянием света на протекание химических реакций. То и другое в подавляющем большинстве случаев – сравнительно медленные процессы.

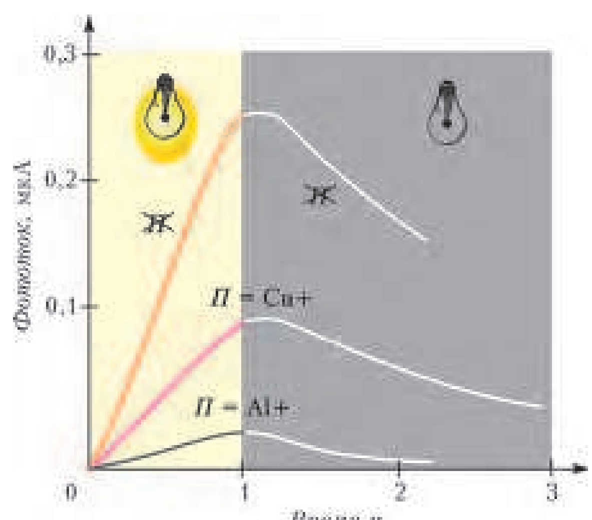


Рис. 3

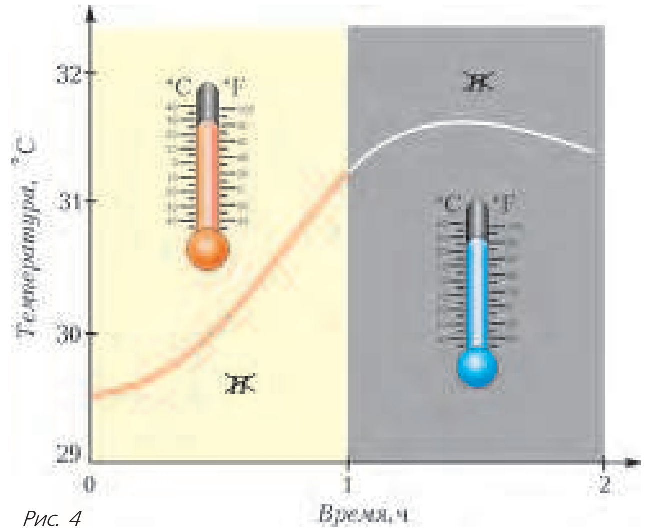


Рис. 4

Дальше начинается самое интересное и не противоречащее ни здравому смыслу, ни известным и устоявшимся представлениям. Использование в качестве поглотителя стеклотекстолита толщиной 2 мм с нанесенным сверху слоем меди толщиной 0,1 мм (*П* = Cu+) подавляет эффект лишь наполовину (см. рис.3). Гораздо сильнее действует гофрированный картон толщиной 3 мм с наклеенной сверху алюминиевой пленкой толщиной 0,05 мм (*П* = Al+). В этом нет ничего странного: медь обладает большой теплоемкостью, а картон – низкой теплопроводностью. При первом поглотителе максимальное изменение температуры составило 1,5 °С, а при втором – около 0,5 °С. Следует обратить внимание на еще одно важное обстоятельство: в начале экспозиции фототок растет, а температура жидкости если и увеличивается, то несущественно. Следствие может отставать от причины, но не наоборот.

Конечно же, все три зависимости соответствуют одному и тому же положению лампы. При отсутствии поглотителя средняя освещенность поверхности жидкости составила 15000 лк (напомним, что в люксах измеряется освещенность в Международной системе единиц – СИ).

Итак, первый эксперимент, заключающийся в ежеминутных измерениях падения напряжения и температуры в течение нескольких часов, подтвердил предположение о том, что электрический ток в жидкости, по крайней мере частично, имеет фотоэлектрическую природу.

Эксперимент второй. Фототок и освещенность

Следующий шаг – проверка линейности «люкс-амперной» характеристики. Имеется в виду пропорциональность освещенности и максимального значения фототока, а помешать такой линейности в принципе может только тепловой нагрев жидкости. Существует прекрасный способ избавиться от инфракрасного излучения – использовать воду в качестве поглотителя. Оказывается, достаточен слой воды в несколько сантиметров, чтобы заглушить это излучение полностью. Результаты измерений, аналогичных предыдущим, показали, что при использовании водного поглотителя ($П = H_2O$) фототок ведет себя совершенно по-другому (рис.5). Самое основное: после выключения источника света сила фототока начинает резко уменьшаться. Вот оно, с одной стороны,

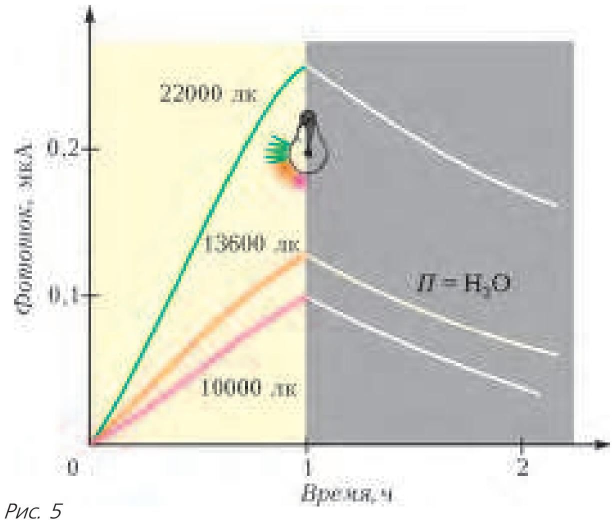


Рис. 5

обоснование фотоэлектрической природы тока в цепи, а с другой – подтверждение влияния инфракрасного излучения на электрические процессы в жидкости.

Теперь есть все, чтобы построить зависимость фототока от освещенности (рис.6). Однако трех значений, приведенных на предыдущем рисунке, недостаточно. Значит, придется провести дополнительные измерения. Но и этого мало – каждое измерение придется повторить неоднократно, иначе есть опасность за результат выдать банальный промах. И тем

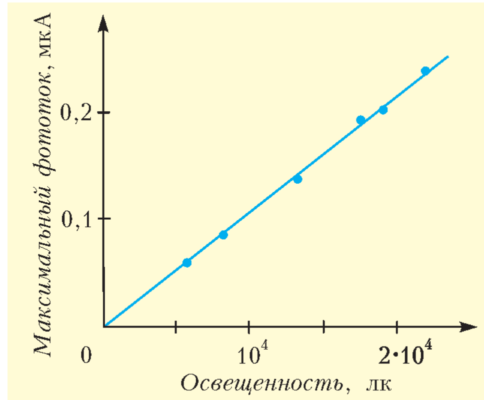


Рис. 6

не менее, у нас нет оснований сомневаться в линейности зависимости фототока от освещенности.

* * *

Всякое исследование должно заканчиваться выводом. В нашем случае можно высказать гипотезу, пусть даже и требующую проверки. А она такова: не исключено, что освещенность воды, даже очень слабая, является причиной темнового тока. По крайней мере, ощутимый вклад в электродвижущую силу световая экспозиция воды вносить безусловно должна.

Поляризация на носу

(Начало см. на 4-й странице обложки)

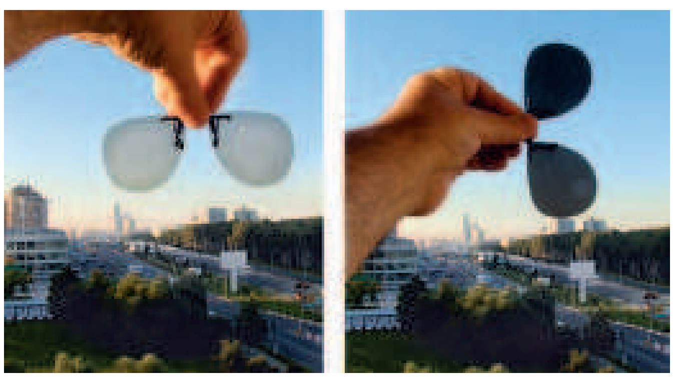


Рис. 3

Свет становится поляризованным не только при рассеянии, но и при отражении. На рисунке 4 показано, как луч неполяризованного света падает на верхнюю поверхность кубика из прозрачного материала, частично отражается от этой поверхности и преломляется. При этом отраженный луч становится линейно поляризованным. Происходит это вследствие тех же причин, что и при рассеянии, – молекулы, находящиеся на отражающей поверхности кубика, становясь источниками рассеянного излучения, делают свет поляризованным. Вот почему, например, рыбаки для устранения солнечных бликов вокруг поплавка часто используют поляризационные очки, которые иногда называют «антибликовыми».

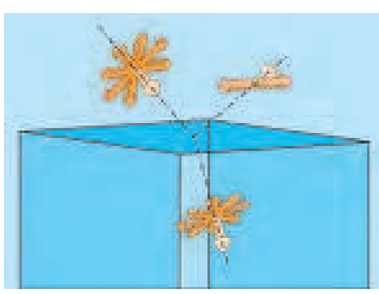


Рис. 4

Как известно, радуга – это следствие преломления и отражения лучей света в капельках воды, парящих в воздухе после дождя. Поэтому свет, идущий от радуги, тоже сильно поляризован. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на радугу через поляризационные (антибликовые) солнцезащитные очки (рис.5). Если горизонтальную

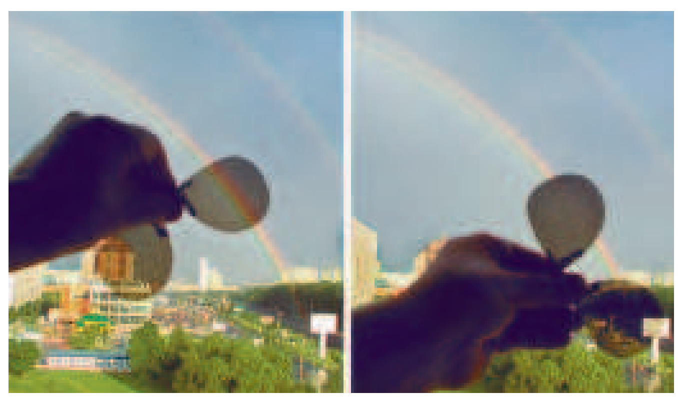


Рис. 5

ось очков разместить перпендикулярно радуге, ее изображение через очки станет более контрастным. А если повернуть очки на 90° градусов, то радуга через очки видна не будет.

К.Богданов

Задачки на смекалку

1. В корзине лежат 5 яблок. Как разделить эти яблоки между пятью девочками, чтобы каждой девочке досталось по одному яблоку и чтобы одно яблоко осталось в корзине?

2. На грядке сидели 10 воробьев. Вдруг на грядку прыгнул кот и съел одного из них. Сколько воробьев осталось на грядке?

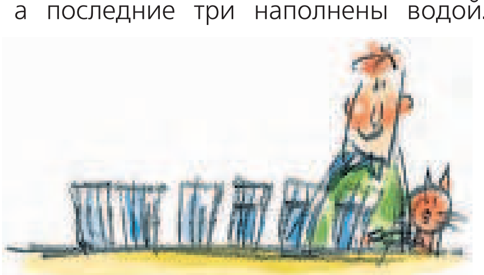
3. Какой знак надо поставить между написанными рядом цифрами 2 и 3, чтобы получилось число, большее двух, но меньшее трех?

4. На столе лежат две монеты, в сумме они дают 3 рубля. Одна из них – не 1 рубль. Какие это монеты?

5. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, причем сам профессор в разговоре не участвует. Как такое может быть?

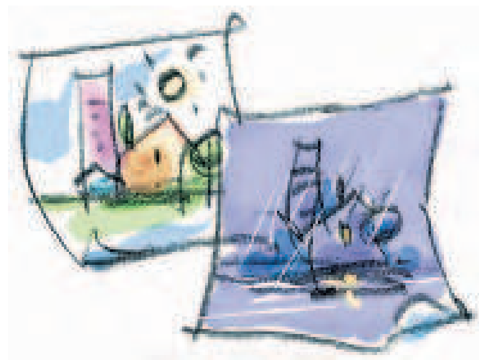
6. Кролику сегодня очень не везет: он упал с 4 ступенек и сломал лапку. А сколько лап сломает этот же кролик, если упадет с 40 ступенек?

7. На столе в ряд стоят 6 стаканов. Первые три пустые, а последние три наполнены водой. Как сделать так, чтобы пустые стаканы и полные чередовались между собой, если касаться можно только одного стакана (толкать стакан стаканом нельзя)?



8. Семья хрюшек из бабушки, мамы, папы, двух маленьких братьев и двух маленьких сестер делила торт, разрезанный на 15 кусочков. Все дети взяли себе по 3 кусочка. По сколько кусочков должны взять все остальные?

9. Если в 12 часов ночи идет дождь, то можно ли ожидать, что через 72 часа будет солнечная погода?



10. Очередь за колбасой протянулась на 200 метров, очередь за маслом на 50 метров длиннее, чем очередь за колбасой, а очередь за хлебом в 5 раз короче, чем очередь за маслом. Сколько метров очереди нужно преодолеть, чтобы съесть бутерброд с колбасой?

11. Боксер вернулся домой с золотой медалью после победы в международных соревнованиях. За

победу полагался еще денежный приз, но тренер забрал его себе, а боксер на него даже не претендовал. Почему?

12. В комнате у Миши горело 50 свечей, 20 из них он задул. Сколько свечей останется?

По материалам журнала «Квантик» за 2013 год.

13. На рынке продаются два арбуза разных размеров. Один на четверть шире другого, а стоит в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

14. Шесть кошек ловят шесть мышей за шесть минут. Сколько времени нужно одной кошке для ловли одной мышки?

15. Учитель рисует на листке бумаги несколько кружков и спрашивает одного ученика: «Сколько

здесь кружков?» «Семь», — отвечает ученик. «Правильно». Тогда учитель спрашивает другого ученика: «Так сколько здесь кружков?» «Пять», — отвечает тот. «Правильно», — снова говорит учитель. Так сколько же кружков он нарисовал на листке?

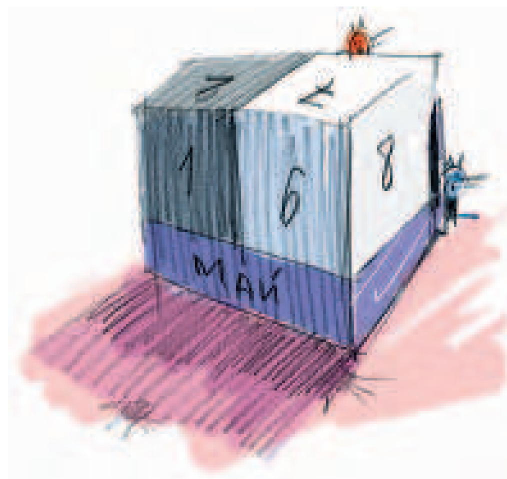
16. — Ручаюсь, — сказал продавец в зоомагазине, — что этот попугай будет повторять любое услышанное слово.

Обрадованный покупатель приобрел чудо-птицу, но, придя домой, обнаружил, что попугай нем, как рыба. Тем не менее продавец не лгал. Как такое возможно?

17. В 12-этажном доме, населенном пингвинами, есть лифт. На первом этаже живут всего два пингвина, от этажа к этажу количество жильцов увеличивается вдвое. Какая кнопка в лифте этого дома нажимается чаще других?

18. Спортсмен Петя очень быстро пробегает стометровку — всего за 10 секунд. Пробежит ли он за час 36 километров?

19. На рисунке представлен оригинальный настольный календарь. Дату указывают цифры на перед-



них гранях двух кубиков. На каждой грани кубика стоит по одной цифре от 0 до 9. Переставляя кубики, можно изобразить на календаре любую дату от 01, 02, 03, ... до 31. Какие цифры скрыты на невидимых гранях кубиков?

20. Три черепахи ползали наперегонки (по прямой). После окончания соревнований черепаха А

заявила, что она опередила Б, черепаха Б сказала, что приползла не последней, а черепаха В утверждала, что была впереди А. Как такое возможно?

Материал подготовил А.Меньщиков

Иллюстрации Сергея Чуба

Ну и денек!

И.АКУЛИЧ

На уроке математики

– Решим следующую задачу, – сказал учитель. – В правильном треугольнике ABC…

Вызванный к доске ученик принялся за дело. Сначала он начертил мелом горизонтальный отрезок – основание, затем с помощью большого деревянного циркуля провел две дуги радиусом, равным основанию, и отметил точку их пересечения – третью вершину будущего треугольника. Остальные повторяли те же построения в своих тетрадях.

Степа Мошкин старался не отстать от других, но дело осложнялось тем, что игла его циркуля оказалась на редкость тупой и никак не желала фиксироваться в нужном месте.

«Надо бы заточить», – подумал Степа, смутно представляя себе, как это сделать. Но поскольку время поджимало, он решился на крайнюю меру: изо всей силы ударил по циркулю сверху. Игла, пронзив тетрадь, накрепко застряла в поверхности стола. В ярости Степа резко дернул циркуль вверх, в результате чего тот с хрустом разделился на две неравные части.

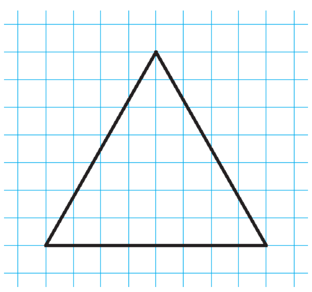


Рис. 1

Степа озадаченно переводил взгляд то на изувеченный инструмент, то на здоровенную пробоину в тетради. Но горевать было некогда, и он решил обратиться к Оле – своей соседке по парте. Повернувшись к ней, Степа несказанно удивился: среди Олиных принадлежностей не было ничего похожего на циркуль, а в ее тетради красовался аккуратный треугольник (рис.1).

«Как ей это удалось?» – поразился Степа.

На перемене

Он задал этот вопрос, едва прозвенел звонок.

– Я стараюсь вообще не чертить циркулем в тетради. Это неудобно, – ответила Оля.

– Да, – согласился Степа, – только что убедился.

– А вместо этого, – продолжала Оля, – я использую то, что тетрадь по математике – в клетку. Когда имеешь на бумаге квадратную сетку со стороной 5 мм, можно начертить почти все, что хочешь. Надо только подобрать подходящие узлы сетки и соединить их…

– Подожди! – возразил Степа. – Но я точно знаю, что *не существует* равностороннего треугольника с вершинами в узлах сетки. Нам об этом говорили на занятиях математического кружка.[1]

– Верно, не существует. Но зачем мне *абсолютно точный* правильный треугольник? Если его стороны различаются между собой на 1–2%, то такой треугольник с виду от равностороннего и не отличишь. Вот посмотри на мой. Его основание равно 8 клеточкам. Если точно подсчитать, то высота должна равняться $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ клеткам, а у меня на чертеже – 7. Отличие – 1%!

– Ишь ты! – восхитился Степа. – А подходящие треугольники других размеров тебе известны?

– Конечно. Если этот треугольник 8–7 (т.е. с основанием, равным 8, и высотой, равной 7 клеткам) увеличить в 2 или 3 раза, получатся треугольники 16–14 и 24–21 с той же относительной погрешностью. Неплох также треугольник 14–12. Еще меньше погрешность у треугольников 22–19 и 30–26: у первого всего лишь 0,3%, а у второго – вообще 0,07%! Но, к сожалению, они слишком велики. Например, 30–26 еле умещается на листе. Поэтому обычно я использую треугольники 8–7, 14–12 либо 16–14, и этого вполне достаточно.

– А как ты подобрала такие треугольники?

– Очень просто. Если исходить из размеров листа, основание не может превышать 30 клеток и, очевидно, должно быть четным (иначе нельзя подобрать подходящий узел для третьей вершины). Поэтому половина основания – целое число от 1 до 15. Высота правильного треугольника, как известно, равна половине основания, умноженной на $\sqrt{3}$. Я умножила все эти числа на калькуляторе, округлила произведения до целых и определила относительные погрешности округления. Осталось только отобрать лучшие результаты.

– Понятно… – пробормотал Степа.

На уроке географии

Идея использовать квадратную сетку пришлась Степе по душе. Но способ, который применила Оля для поиска лучших приближений, ему совершенно не понравился.

«Перебор – это примитивно! – рассуждал Степа. – Этак каждый смог бы. Должен быть более прогрессивный метод. Но какой? Очевидно, суть задачи – в поиске наилучших рациональных приближений числа $\sqrt{3}$. А если…»

– Цепные дроби! – воскликнул он, озаренный внезапно пришедшей мыслью, и сразу же услышал голос учительницы:

– Что случилось, Мошкин?

– Ничего…

– Тогда, будь добр, назови нам столицу Соединенных Штатов Америки.

– Нью-Йорк, – рассеянно ответил Степа и получил заслуженную двойку.

Но это его не очень огорчило. «Потом как-нибудь исправлю, – думал он, – лишь бы сейчас не трогали. Итак, цепные дроби. На занятиях математического кружка нам говорили, что как раз они дают хорошие приближения иррациональных чисел. Обыкновенная цепная дробь – это выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

Здесь a_0 – целое число, а все остальные a_i – натуральные. Оказывается, любое число может быть представлено единственным способом в виде цепной дроби, причем для рационального числа эта дробь будет конечной (последовательность a_i когда-нибудь оборвется), а для иррационального –

[1] Те, кто знает тригонометрию (в частности – формулу тангенса суммы и разности двух углов), смогут без труда доказать, что невозможно построить треугольник даже с единственным углом, равным 60° (а у правильного треугольника все углы такие!). Дело в том, что, соединяя узлы квадратной сетки, можно получить только углы с *рациональными* тангенсами, тогда как $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

бесконечной. Самое интересное, что квадратичные иррациональности (и только они!) будут *периодическими* цепными дробями, т.е. последовательность a_i рано или поздно «зациклится». Правда, почему это происходит – я не очень-то понял. А ведь у меня именно такой случай – представление в виде цепной дроби числа $\sqrt{3}$. Ладно, волков бояться – в лес не ходить! Управлюсь. Очевидно, $1<\sqrt{3}<2$, поэтому $a_0=1$ и $\sqrt{3}=1+\left(\sqrt{3}-1\right)$. Теперь надо представить $\left(\sqrt{3}-1\right)$ в виде дроби с числителем, равным 1. Это легко сделать стандартным способом – домножив и разделив на сопряженное выражение $\left(\sqrt{3}+1\right)$. Получается

$$\sqrt{3}=1+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}=1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}.$$

Так как $1<\frac{\sqrt{3}+1}{2}<2$, то $a_1=1$ и

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}.$$

Опять домножив на сопряженное выражение, имеем

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}.$$

Надо же! Опять вылез $\sqrt{3}$, который можно заменить уже известным выражением, а потом еще и еще раз, до бесконечности:

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Заодно прояснилось, почему дробь оказалась периодической – эту периодичность дает появляющийся снова и снова $\sqrt{3}$. Ну, а теперь, обрывая дробь в различных местах, получим все более точные приближения:

$$1+\frac{1}{1}=2,$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}=\frac{7}{4},$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=\frac{19}{11},$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}}=\frac{26}{15}.$$

Пожалуй, хватит: при дальнейшем возрастании знаменателя треугольник «выскакивает» за пределы тетрадного листа. Что же получилось? Первые два числа – 2 и $5/3$ – дают слишком грубое приближение $\sqrt{3}$, зато остальные – наоборот, очень хорошее и порождают почти все треугольники, о которых говорила Оля. Например, дробь $7/4$ дает нам треугольник 8–7 и подобные ему (16–14 и 24–21), дробь $19/11$ – треугольник 22–19, и, наконец, дробь $26/15$ – треугольник 30–26. Правда, не обнаружен треугольник 14–12, но цепные дроби не обязаны давать *все* хорошие приближения, а лишь наилучшие в некотором смысле. Насколько я понял из занятий математического кружка, это означает, что любая дробь с *меньшим* знаменателем даст *худшее* приближение. Скажем, $26/15$ – наилучшее приближение $\sqrt{3}$ среди всех простых дробей со знаменателем, не превышающим 15.

Что ж, прогресс налицо. Это не какой-то там жалкий перебор!»

Степа хотел немедленно поделиться с Олей своими соображениями, но она не стала его слушать. Пришлось дожидаться перемены.

На перемене

Оля была поражена.

– Мне это и в голову не приходило, – призналась она.

– То-то же! – самодовольно ухмыльнулся Степа. – Ты погоди, я еще что-нибудь придумаю. Сейчас как раз история будет – вот и займусь.

На уроке истории

«Что дальше? – думал Степа. – Если разобраться, то найденное приближенное построение правильного треугольника фактически является приближением угла, равного 60°. Какие еще углы можно построить с помощью квадратной сетки? Очевидно, 45° и 90° – причем точно! Кроме того, 30° – это меньший угол прямоугольного треугольника с бóльшим углом, равным 60°. Поэтому, построив прямоугольный треугольник с катетами 4 и 7 (или 7 и 12, 15 и 26 и т.д.) клеток, получаем угол, с большой точностью равный 30°. Таким образом, имеем набор углов, которые можно точно или почти точно построить с помощью лишь тетрадной сетки: 0, 30°, 45°, 60° и 90°. Эти углы чаще других используются в задачах, однако бросается в глаза отсутствие еще двух углов: 15° и 75° (хотя эти углы и встречаются гораздо реже, но если внести их в список, то шаг между соседними углами станет равен 15°). Так как $15°+75°=90°$, то эти углы дополнительные, и потому достаточно найти приближение только одного из них, например 15°. Правда, можно построить его как разность углов 60° и 45°, но тогда обе стороны угла пойдут не по линиям сетки, что, конечно, неудобно. Поэтому надо найти отношение катетов прямоугольного треугольника с острым углом 15°. Как это сделать?»

Степа надолго задумался. Он еще не изучал тригонометрии и поэтому не мог воспользоваться формулой тангенса двойного угла, сведя задачу к решению квадратного уравнения. Однако он все-таки был не промах, поэтому нашел, наконец, обходной путь.

«Возьмем прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle A=30°$. Тогда если $BC=1$, то $AB=2$ и $AC=\sqrt{3}$. Проведем биссектрису AL (рис.2).

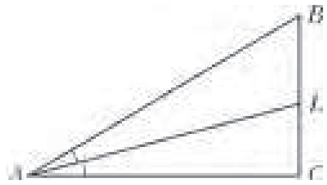


Рис. 2

Треугольник ALC – как раз прямоугольный с острым углом 15°. Но известно, что отрезки, на которые биссектриса делит основание, пропорциональны боковым сторонам, т.е. $CL/BL = AC/AB$. Но так как $BL = BC - CL$, то $CL/(BC - CL) = AC/AB$, или $CL/(1 - CL) = \sqrt{3}/2$, откуда $CL = \sqrt{3}/(2+\sqrt{3})$. И потому $CL/AC = 1/(2+\sqrt{3})$. Опять $\sqrt{3}$! Тем лучше, ведь его разложение в цепную дробь я уже нашел. Поэтому

$$\frac{CL}{AC} = \cfrac{1}{2+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}.$$

Обрывая эту дробь, получаем следующие подходящие приближения: $1/3$, $1/4$, $3/11$, $4/15$... На этом придется притормозить – следующий знаменатель слишком велик. Итак, прямоугольный треугольник с катетами 4 и 15 клеток имеет острые углы, очень и очень близкие к $15°$ и $75°$».

– Ура! – не в силах удержаться, радостно завопил Степа, и удивленная учительница спросила:

– В чем дело, Мошкин?

– Да так... – замялся Степа.

– Хорошо. Итак, как звали коня, которого укротил Александр Македонский?

– Ганнибал, – ответил Степа и получил вторую двойку.

После уроков

Возмущению Оли не было границ.

– Это уж слишком! Если ты будешь на каждом уроке получать по двойке, мне опять поручат с тобой заниматься. Очень надо!

– Не шуми, это случайность. Лучше скажи: ты используешь тетрадную сетку только для построения правильных треугольников?

– Нет, не только. Например, если надо начертить окружность...

– Окружность? Без циркуля? Не может быть!

– Как раз наоборот – может. Отмечаю несколько подходящих узлов сетки, провожу от руки через них плавную кривую – и все! Вот смотри, я сейчас изображу четвертинку окружности радиусом 5 клеток. Пусть центр ее находится в узле A. Выбираю четыре узла B, C, D и E (рис.3) и провожу через них кривую (рис.4). При таком-то радиусе провести

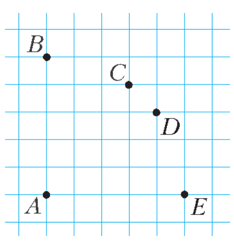


Рис. 3

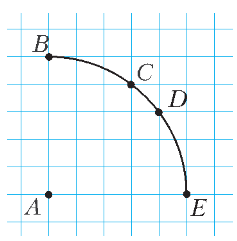


Рис. 4

дугу через 4 точки труда не составляет, тем более что в точке B касательная к дуге должна быть вертикальна, а в точке E – горизонтальна. Если же надо провести полную окружность, то она составляется из четырех таких дуг, и всего имеется 12 «опорных» точек.

– Но с чего ты взяла, что точки C и D лежат на той же дуге? Хотя понял! Теорема Пифагора, верно?

– Да. Самая известная Пифагорова тройка: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Поэтому

$$AC = AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = AB = AE.$$

Удвоив размеры, можно также построить окружность радиусом 10 клеток. Можно бы и 15, но такая окружность не помещается на листе. Если же нужно изобразить маленькую дугу (градусов на 5–10), то это легко сделать от руки даже по двум или одной точке! Не веришь – попробуй сам и убедись.

– А как насчет других Пифагоровых троек?

– Ничего полезного. Следующая по величине тройка – это $5^2 + 12^2 = 13^2$. Опять слишком большой радиус.

– Ладно, на сегодня хватит. Я и так слишком много узнал, а еще больше за это заплатил. Четыре балла за два урока – не очень-то приятно! Ну, пока!

Так и закончился этот многотрудный, но очень содержательный для Степы день.

А если серьезно?

Сказка – ложь, да в ней намек, добрым молодцам (и красным девицам) урок. Выдуманная история, с которой только что ознакомился читатель, предназначена не только для развлечения, но несет и определенную смысловую нагрузку. Какую же?

Прежде всего – прикладную. Независимо от того, насколько читателя заинтересовали цепные дроби и Пифагоровы тройки, настоятельно рекомендую запомнить хотя бы некоторые перечисленные приближенные построения правильных треугольников, различных углов и окружностей. Особенно это может оказаться полезным тем, кто посещает уроки геометрии. Вы сразу же убедитесь в эффективности описанных приемов (тем более что не придется лишний раз дырявить циркулем тетрадь), и, возможно, все это подвигнет вас на самостоятельные поиски других удобных способов приближенных построений.

Теперь несколько слов о цепных дробях (их называют также *непрерывными*). На первый взгляд, они кажутся экзотической выдумкой, предназначенной сугубо для развлечения, – уж очень «искусственно» выглядят. Но внешность в данном случае обманчива. Цепные дроби заняли свое место в математике и приносят немалую пользу. Поэтому еще нескольких слов они наверняка заслуживают.

Те цепные дроби, с которыми «работал» Степа, представляют собой лишь частный случай цепных дробей общего вида, которые выглядят так:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}.$$

Такая запись хотя и наглядна, но не очень удобна из-за многоэтажности, поэтому нередко применяют другой способ ее изображения:

$$\left[a_0; \frac{b_1}{a_1}; \frac{b_2}{a_2}; \frac{b_3}{a_3}; \ldots\right].$$

При этом все a_i и b_i (их называют *элементами* цепной дроби) в общем случае могут быть не только произвольными числами, но и функциями одной или нескольких переменных. Дроби $a_0 = a_0/1$ и b_i/a_i (для всех натуральных i) называются *звеньями* цепной дроби (соответственно, нулевым, первым и т.д. звеном), а числа или функции a_i и b_i – *членами* i-го звена.

Очевидно, цепная дробь может быть *конечной* или *бесконечной*. Цепная дробь, у которой все числители b_i равны 1, все знаменатели a_i – натуральные и a_0 – целое, называется *обыкновенной* или *стандартной* цепной дробью, причем в этом случае знаменатели звеньев a_i называются *неполными частными*.

Если отбросить все звенья цепной дроби, следующие после k-го звена, то получится некоторая конечная цепная дробь, которую, выполнив соответствующие операции, можно преобразовать в привычную нам простую дробь p_k/q_k, которую называют k-й *подходящей дробью*. Именно их и вычислял Степа. И он взялся за это не зря, потому что для обыкновенных цепных дробей справедливы несколько весьма полезных теорем. Во-первых, каждое вещественное число можно единственным образом представить в виде обыкновенной цепной дроби. Во-вторых, каждая обыкновенная цепная дробь непременно *сходится*, т.е. представляет собой разложение некоторого числа. В третьих, все подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка – монотонно убывающую последовательность. Само же число, разложенное в обыкновенную цепную дробь, содержится между двумя соседними подходящими дробями. Но самое интересное заключается в том, что разность между двумя соседними подходящими дробями – k-й и $(k+1)$-й – по абсолютной величине равна $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$, т.е., приняв за истинное значение цепной дроби k-ю подходящую дробь, мы делаем ошибку, меньшую $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$. А поскольку знаменатели подходящих дробей очень быстро растут, то погрешность при переходе к очередной подходящей дроби стремительно убывает! Именно этот факт послужил основой для использования цепных дробей в приближенных вычисленях. Как правило, сходимость цепных дробей превышает даже сходимость многих степенных рядов, которая сама по себе высока. Например, еще Эйлер нашел такое разложение знаменитого числа $e = 2{,}71828\ldots$ в цепную дробь (правда, в «не совсем» обыкновенную, поскольку $b_2 < 0$):

$$e = \left[0; \frac{1}{1}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{10}; \ldots; \frac{1}{4n+2}; \ldots\right].$$

Если ограничиться лишь четвертой подходящей дробью, получим $e = 2{,}7183\ldots$, а для достижения той же точности суммированием быстро сходящегося ряда $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ придется взять не менее 8 членов.

В заключение этой темы еще один штрих. Очевидно, знаменатели подходящих дробей q_k растут тем быстрее, чем большие значения принимают знаменатели звеньев a_i. Поэтому чем больше a_i, тем быстрее сходится цепная дробь. Следовательно, самая медленно сходящаяся дробь среди обыкновенных цепных дробей – это такая, у которой все a_i равны 1. Что же это за дробь?

Пусть ее значение равно x. Легко видеть, что

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}} = 1 + \frac{1}{x},$$

откуда

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ и } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Это – знаменитое *золотое сечение*, которое, как видно, не только позволяет делить отрезок в среднем и крайнем отношениях, но и настолько своенравно, что хуже всех других чисел раскладывается в цепную дробь! Вот вам примечательный факт, подтверждающий существование в математике глубоких внутренних закономерностей.

Теперь несколько слов о Пифагоровых тройках. Это натуральные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, позволяющие построить прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами (поскольку именно для них имеет место такое же соотношение между катетами x, y и гипотенузой z). Как было показано, они же помогают нарисовать по точкам окружность. Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ хорошо изучено, и известно, как получить все его решения. Они имеют вид

$$x = k\left(m^2 - n^2\right),\quad y = 2kmn,\quad z = k\left(m^2 + n^2\right),$$

где k – произвольное натуральное число, а m и n (где $m > n$) – взаимно простые натуральные числа различной четности. Наименьшее решение (3, 4, 5) достигается при $k = 1$, $m = 2$ и $n = 1$, и именно его использовала Оля для получения дополнительных «опорных» точек при построении окружности. Другое указанное ею решение (5, 12, 13) получается при $k = 1$, $m = 3$ и $n = 2$.

Если уравнение дает несколько различных пар (x, y) для одного и того же z, то это, казалось бы, позволяет добавить дополнительные «опорные» точки и увеличить тем самым точность построения окружности от руки. Но существуют ли такие различные пары?

Оказывается, не только существуют, но и более того – для любого натурального N существует такое натуральное z, что число z^2 представляется в виде суммы $x^2 + y^2$ не менее чем N различными способами. Например, для $N = 4$ подходит $z = 65$, так как $65^2 = 16^2 + 63^2 = 25^2 + 60^2 = 33^2 + 56^2 = 39^2 + 52^2$. Подходит также и $z = 85$ (представления для него найдите самостоятельно).

К сожалению, надежда на увеличение точности построения в связи с появлением дополнительных опорных точек является не более чем иллюзией. Причина – в возрастании необходимого числа z, т.е. радиуса окружности, что, во-первых, снижает точность из-за увеличения общих размеров и, во-вторых (по той же причине), теряется смысл построения, так как окружность перестает помещаться на листе. В частности, наименьший радиус, для которого на четвертинке дуги появляется дополнительная пара общих точек, равен 25 клеткам $\left(25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2\right)$.

Что еще можно добавить? Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ является частным случаем более общего уравнения $x^n + y^n = z^n$. Много лет назад французский математик Пьер Ферма предположил, что оно не имеет решений в натуральных числах при $n > 2$. Это утверждение называется *Великой теоремой Ферма*. Сколько известных математиков (а еще больше – безвестных) обломало об нее зубы, пытаясь опровергнуть или доказать! И хотя на протяжении столетий была подтверждена ее справедливость для огромного множества частных случаев – например, для всех $n \le 500000$ – полностью справиться с теоремой удалось лишь совсем недавно, в последнее десятилетие XX века. Данному вопросу посвящено немало специальной литературы, и всем заинтересовавшимся не составит труда ее разыскать. Мы же на этом закончим.

Идеальный газ в конкурсных задачах

В.ДРОЗДОВ

Молекулы идеального газа взаимодействуют друг с другом только при соударениях, происходящих по законам абсолютно упругого удара. Суммарный объем молекул идеального газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом, занимаемым газом.

Идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева (уравнению состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{M}RT ,$$

где p, V, T – давление, объем и абсолютная температура газа соответственно, m и M – масса и молярная масса газа, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная (т.е. одинаковая для разных газов) газовая постоянная. Величина $\nu = \frac{m}{M}$ называется количеством вещества и измеряется в молях. Эта величина, как и масса, аддитивна, т.е. суммируется, поэтому уравнение состояния для смеси n газов принимает вид

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)RT .$$

Молярная масса конкретного газа определяется по формуле

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} ,$$

где M_r – определяемая по таблице Менделеева относительная молекулярная масса.

Закон сохранения энергии для тепловых процессов, или первое начало (первый закон) термодинамики, формулируется так: количество теплоты, подведенное к системе, равно сумме изменения внутренней энергии системы и работы, совершаемая системой над внешними телами, т.е.

$$Q = \Delta U + A .$$

Вот и вся краткая теория, необходимая для решения задач на идеальные газы, к чему и приступаем.

Задача 1. *Два сосуда, содержащие один и тот же газ, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов V_1 и V_2, а давления в них p_1 и p_2. Каким будет давление газа после открытия крана соединительной трубки?*

Решение. Запишем уравнение состояния для газа в каждом сосуде до открытия крана, а затем – уравнение состояния газа в едином сосуде после открытия крана:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{M}RT ,$$

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{M}RT ,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M}RT .$$

Здесь m_1 и m_2 – массы газа в первом и втором сосудах соответственно, p – давление газа в едином сосуде. Сложив почленно первые два уравнения и сравнив новое уравнение с третьим, получим

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2 ,$$

откуда найдем искомое давление:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} .$$

Эта задача показывает, что нет ничего страшного в том, что в системе уравнений неизвестных (p, m_1, m_2, M, T – всего пять) больше, чем уравнений (три). Ведь от нас не требуется невозможного – найти все неизвестные. Поэтому в такой ситуации не следует искать «недостающие» уравнения – их не существует.

Задача 2. *Газ, масса которого m_1, а молярная масса M_1, смешали с газом, масса которого m_2, а молярная масса M_2. Найдите молярную массу смеси.*

Решение. Так как количество вещества смеси газов равно

$$\nu = \frac{m}{M} ,$$

то искомая молярная масса смеси равна

$$M = \frac{m}{\nu} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}} .$$

Отметим, что полученная формула легко обобщается на случай смеси n газов:

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots + \frac{m_n}{M_n}} .$$

Задача 3. *Вертикально расположенная трубка длиной l, открытая с обоих концов, наполовину погружена в сосуд с ртутью. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути, оставшейся в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H.*

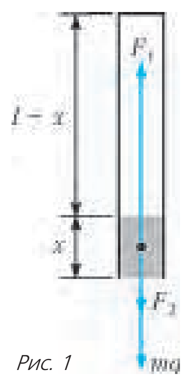


Рис. 1

Решение. Пусть длина столбика ртути, оставшейся в трубке, равна x (рис.1). Поскольку ртутный столбик находится в равновесии, то сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0 .$$

Здесь $m\vec{g}$ – сила тяжести столбика ртути, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы давления на столбик атмосферного и разреженного воздуха соответственно. Из векторного равенства вытекает скалярное:

$$F_1 = F_2 + mg .$$

Так как

$$F_1 = p_1S , \quad F_2 = p_2S , \quad m = \rho Sx ,$$

где S – площадь сечения трубки, ρ – плотность ртути, то получаем

$$p_1 = p_2 + \rho gx .$$

По условию задачи,

$$p_1 = \rho gH ,$$

тогда

$$p_2 = \rho g(H - x) .$$

В последнем уравнении два неизвестных: x и p_2. Значит, нужно еще одно уравнение. Его нам даст закон Бойля–Мариотта, записанный для воздуха в верхней части трубки:

$$p_1 \frac{l}{2} S = p_2 (l - x) S .$$

Исключая из системы уравнений

$$p_2 = \rho g (H - x) ,$$

$$p_2 = \frac{\rho g H l}{2(l - x)}$$

неизвестное p_2, приходим к квадратному уравнению

$$2x^2 - 2(H + l)x + Hl = 0$$

с двумя положительными корнями:

$$x_{1,2} = \frac{H + l \pm \sqrt{H^2 + l^2}}{2} .$$

Какой из них выбрать? Очевидно, что $x < \frac{l}{2}$. Поэтому

$$x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2} .$$

Задача 4 (мехмат МГУ, 1988). *На рисунке 2 показан цикл, совершаемый над идеальным газом, причем участок 1–2 изображает изохорный процесс, участок 2–3 – изобарный. Температуры газа в точках 1 и 3 равны $T_1 = 300$ К и $T_3 = 400$ К соответственно. Найдите температуру T_2 газа в точке 2. Масса газа не изменяется.*

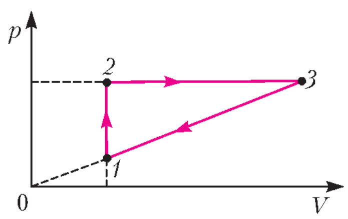


Рис. 2

Решение. Сначала запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для трех вершин треугольника:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 ,$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2 ,$$

$$p_3 V_3 = \nu R T_3 .$$

Пользуясь рисунком 2, уменьшаем индексы у величин p и V:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 ,$$

$$p_2 V_1 = \nu R T_2 ,$$

$$p_2 V_3 = \nu R T_3 .$$

Далее исключаем неизвестную величину ν, которую не требуется определять, и получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} ,$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_2} .$$

Осталось воспользоваться несколько скрытым условием задачи – точки 0, *1*, *3* лежат на одной прямой:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_1} , \text{ или } \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1} .$$

Следовательно, левые части предыдущих двух уравнений равны. Тогда равны и правые части:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} ,$$

откуда находим

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = 346 \text{ К} .$$

Задача 5 (МГТУ им.Н.Э.Баумана). *Посередине лежащего на боку заполненного газом и запаянного цилиндрического сосуда длиной $L = 1$ м находится тонкий поршень массой $m = 1$ кг и площадью $S = 10$ см^2. Если сосуд поставить на основание, то поршень переместится на расстояние $l = 10$ см. Каково было начальное давление p газа в сосуде? Трение между стенками сосуда и поршнем отсутствует.*

Решение. Рассмотрим сосуд в горизонтальном и вертикальном положениях (рис.3). Запишем закон Бойля–Мариотта для газа в каждом отсеке сосуда и условие механического равновесия поршня:

$$p_1 \left(\frac{L}{2} - l \right) S = p \frac{L}{2} S ,$$

$$p_2 \left(\frac{L}{2} + l \right) S = p \frac{L}{2} S ,$$

$$mg + p_2 S = p_1 S .$$

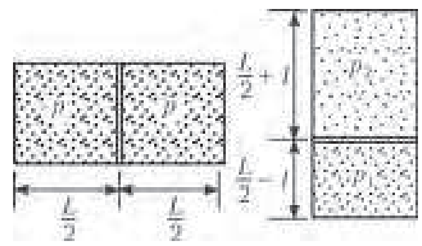


Рис. 3

Выразим из первого уравнения p_1, из второго – p_2 и подставим в третье уравнение. В результате из линейного уравнения найдем искомое неизвестное:

$$p = \frac{mg\left(L^2 - 4l^2\right)}{4lLS} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Па} .$$

Задача 6. *Зимой в комнате был включен электронагреватель мощностью 1 кВт, который работал 1 час. Как изменилась внутренняя энергия воздуха в комнате?*

Решение. Окружающий нас воздух представляет собой смесь различных газов, но в основном это двухатомные газы кислород и азот. Поэтому внутренняя энергия воздуха равна

$$U = \frac{5}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{5}{2} pV .$$

Объем комнаты V, естественно, постоянен. А что происходит с давлением p? Отметим, что реальное жилище – не наглухо изолированный от внешнего мира бункер. Как только включают нагреватель, давление в комнате слегка повышается по сравнению с атмосферным, и воздух через мельчайшие щелочки начинает выходить из комнаты. Давления внутри и вне тут же выравниваются, так что давление p остается постоянным. Но тогда постоянна и внутренняя энергия U, следовательно,

$$\Delta U = 0 .$$

Нагреватель же включили вовсе не для увеличения внутренней энергии воздуха, а чтобы в комнате стало теплее!

Задача 7 (физфак МГУ, 1977). *Идеальный газ медленно переводят из состояния с объемом $V_1 = 32$ л и давлением $p_1 = 4{,}1 \cdot 10^5$ Па в состояние с объемом $V_2 = 9$ л и давлением $p_2 = 15{,}5 \cdot 10^5$ Па так, что давление во время сжатия изменяется в зависимости от объема по линейному закону $p = aV + b$, где a и b – постоянные величины. При каком объеме температура газа в этом процессе будет наибольшей?*

Решение. По условию задачи имеем

$$p_1 = aV_1 + b ,$$

$$p_2 = aV_2 + b ,$$

$$p = aV + b .$$

Теперь последовательно исключаем величины b и a:

$$p - p_1 = a(V - V_1) ,$$

$$p_2 - p_1 = a(V_2 - V_1)$$

и получаем

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{V-V_1}{V_2-V_1}.$$

Из этого уравнения и из уравнения состояния

$$pV=\nu RT$$

легко выводится, что

$$T=\frac{(p_2-p_1)V^2+(p_1V_2-p_2V_1)V}{(V_2-V_1)\nu R},$$

т.е. зависимость температуры T от объема V представляет собой квадратичную функцию с отрицательным коэффициентом (при заданных значениях p_1, V_1, p_2, V_2) при старшем члене. Значит, наибольшее значение температуры достигается при

$$V=\frac{p_1V_2-p_2V_1}{2(p_1-p_2)}\approx 20{,}1\text{ л}.$$

Задача 8. *Некоторую массу m идеального газа с молярной массой M нагревают под поршнем так, что его температура, изменяясь пропорционального квадрату давления, возрастает от первоначального значения T_1 до конечного значения T_2. Определите работу, совершенную газом.*

Решение. Из уравнений

$$pV=\frac{m}{M}RT,$$

$$T=\alpha p^2,$$

где $\alpha=\text{const}$, выражаем давление:

$$p=\frac{M}{Rm\alpha}V=kV,\text{ где } k=\text{const}.$$

Видим, что давление прямо пропорционально объему, т.е. непостоянно. В таком случае работа определяется с помощью интеграла:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)\,dV.$$

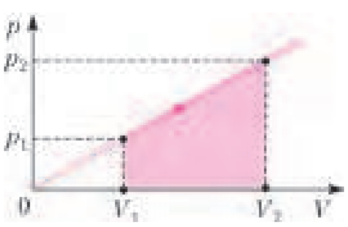


Рис. 4

Однако для линейных функций удобнее построить график в системе координат p, V (рис.4) и найти работу как площадь под графиком:

$$A=\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1).$$

По закону Клапейрона–Менделеева,

$$p_1V_1=\frac{m}{M}RT_1,\quad p_2V_2=\frac{m}{M}RT_2.$$

Кроме того,

$$p_1V_2-p_2V_1=kV_1V_2-kV_2V_1=0.$$

Следовательно,

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{mR}{2M}(T_2-T_1).$$

Задача 9 (МФТИ, 1976). *В цилиндре под легким поршнем находится m = 14 г азота при T = 300 К. Какое количество теплоты необходимо ему сообщить при изотермическом увеличении объема на $\alpha = 0{,}04$?*

Решение. По первому началу термодинамики,

$$Q=\Delta U+A.$$

Но в изотермическом процессе $U=\text{const}$, поэтому $\Delta U=0$. Значит,

$$Q=A.$$

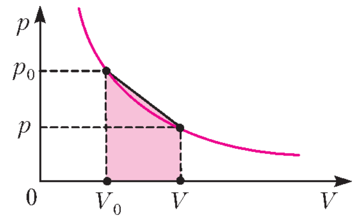


Рис. 5

При $T=\text{const}$ вычислить работу без интеграла, вообще говоря, нельзя. Однако, учитывая, что $\alpha \ll 1$, в первом приближении криволинейную трапецию можно заменить обычной, прямолинейной трапеции (рис.5). Тогда получим

$$Q=\left(\frac{p_0+p}{2}\right)(V-V_0).$$

Так как $V=V_0(1+\alpha)$, то

$$V-V_0=V_0\alpha.$$

Из уравнения $pV=p_0V_0$ выражаем p:

$$p=\frac{p_0V_0}{V}=\frac{p_0V_0}{V_0(1+\alpha)}\approx p_0(1-\alpha).$$

Следовательно,

$$Q=\left(\frac{p_0+p_0(1-\alpha)}{2}\right)V_0\alpha=p_0V_0\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{m}{M}RT\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=48{,}8\text{ Дж}.$$

Интересно сравнить приведенное решение с решением, основанным на применении интеграла, т.е. строгим решением. В последнем случае

$$Q=A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)\,dV=\int_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}\frac{p_0V_0}{V}dV=$$

$$=p_0V_0\int_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}\frac{1}{V}dV=\frac{m}{M}RT\ln V\Big|_{V_0}^{V_0(1+\alpha)}=$$

$$=\frac{m}{M}RT\ln(1+\alpha).$$

Разлагая натуральный логарифм в ряд:

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots$$

и ограничиваясь тремя первыми членами, получим

$$Q=\frac{m}{M}RT\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{3}\right).$$

Таким образом, относительная погрешность составляет всего

$$\frac{\alpha^2}{3}=5{,}3\cdot 10^{-4}.$$

Задача 10 (физфак МГУ, 1973). *Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле 1–2–3–4–1 (рис.6), если известны температуры T_1 и T_3 в точках 1 и 3 соответственно, причем эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.*

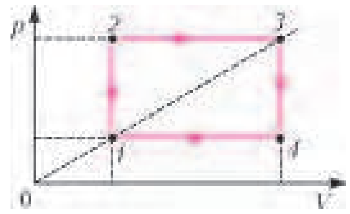


Рис. 6

Решение. Так как работа газа, совершенная им за цикл, равна площади фигуры, ограниченной циклом (*только* в координатах p, V), то

$$A = (V_4 - V_1)(p_2 - p_1) = V_4p_2 - V_4p_1 - V_1p_2 + V_1p_1 =$$

$$= (V_1p_1 + V_3p_3) - (V_2p_2 + V_4p_4) =$$

$$= \nu RT_1 + \nu RT_3 - \nu RT_2 - \nu RT_4 = \nu R(T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

В системе уравнений

$$p_1V_1 = \nu RT_1,$$

$$p_2V_2 = \nu RT_2,$$

$$p_3V_3 = \nu RT_3,$$

$$p_4V_4 = \nu RT_4$$

уменьшаем индексы:

$$p_1V_1 = \nu RT_1,$$

$$p_2V_1 = \nu RT_2,$$

$$p_2V_3 = \nu RT_3,$$

$$p_1V_3 = \nu RT_4.$$

Так как точки *1* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_1},$$

или (опять уменьшая индекс)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1}.$$

Из этого равенства, а также из второго и четвертого уравнений последней системы сразу вытекает

$$T_4 = T_2.$$

Теперь перемножим почленно первое и третье, а затем второе и четвертое уравнения системы:

$$p_1p_2V_1V_3 = (\nu R)^2 T_1T_3,$$

$$p_1p_2V_1V_3 = (\nu R)^2 T_2T_4.$$

Отсюда немедленно следует

$$T_2T_4 = T_1T_3, \text{ или } T_4 = T_2 = \sqrt{T_1T_3}.$$

Значит,

$$A = \nu R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}\right) = \nu R\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2.$$

Заметим, что здесь $\nu = 1$ моль. Если же просто опустить сомножитель ν, как единичный, то получится равенство неверной размерности.

Упражнения

1 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). За сколько циклов работы поршневого насоса с объемом цилиндра V_1 можно откачать газ из стеклянного баллона объемом V до давления p, если вначале давление в баллоне было равно атмосферному давлению p_0?

2 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Параметры идеального одноатомного газа, взятого в количестве ν = 3 моль, изменились по циклу, изображенному на рисунке 7. Температуры газа в состояниях, отмеченных цифрами, равны T_1 = 400 К, T_2 = 800 К, T_4 = 1200 К. Определите работу, которую совершил газ за цикл.

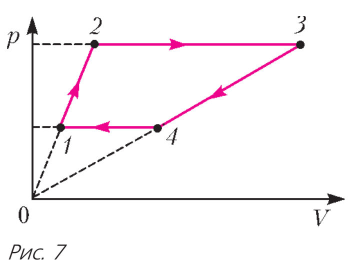


Рис. 7

3 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Моль идеального газа медленно нагревают так, что он переходит из состояния (p_0, V_0) в состояние $(2p_0, 2V_0)$. Как при этом изменяется температура газа T в зависимости от его объема V, если зависимость давления газа от объема на графике изображается прямой линией? Определите также работу A, совершаемую газом в этом процессе.

4 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). Один моль идеального газа изменяет свое состояние по циклу, изображенному на рисунке 8. Процессы *4–1* и *2–3* – изохорные, процесс *3–4* – изобарный, *1–2* – процесс с линейной зависимостью давления от объема. Температуры в состояниях *1*, *2*, *3*, *4* равны T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. Какую работу совершает газ за один цикл?

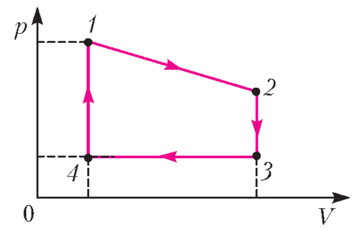


Рис. 8

5 (МГТУ им. Н.Э.Баумана). В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем, масса которого M, находится 1 моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент времени под поршнем включается нагреватель, передающий газу за единицу времени количество теплоты q. Определите установившуюся скорость v движения поршня при условии, что давление газа над поршнем постоянно и равно p_0, а газ под поршнем теплоизолирован.

6 (физфак МГУ, 1971). Два одинаковых баллона соединены короткой трубкой, в которой имеется клапан давления, пропускающий газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geq 80$ см рт.ст. Один баллон наполнен газом, имеющим при температуре T_1 = 290 К давление p = 760 мм рт.ст., в другом баллоне – вакуум. Какое давление установится в баллонах, если их нагреть до температуры T_2 = 382 К?

7 (МФТИ, 1976). В герметичном сосуде объемом V = 5,6 л содержится воздух при давлении p = 760 мм рт.ст. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты Q = 1430 Дж? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ Дж/(моль · К).

8 (МФТИ, 1979). В цилиндре под поршнем содержится $\nu = 0{,}5$ моль воздуха при температуре T_0 = 300 К. Во сколько раз увеличится объем газа при сообщении ему количества теплоты Q = 13,2 кДж? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $C_p = 29{,}1$ Дж/(моль · К).

9 (МФТИ, 1981). С какой максимальной силой прижимается к телу человека медицинская банка, если диаметр ее отверстия D = 4 см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80$ °С, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) можно пренебречь.

10 (МФТИ, 1991). Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарном процессе, а затем – в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис.9). Известно, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$, а прямая *2–3* проходит через начало координат. Найдите отношение объемов $\frac{V_2}{V_1}$, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке *1–2*, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке *2–3*.

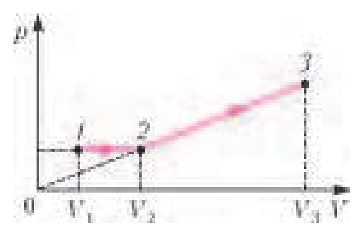


Рис. 9

ОЛИМПИАДЫ

XXXIV Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?

Г.Жуков

2 (4). Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)

Е.Бакаев

3 (4). Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши весов, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

А.Толпыго

4 (5). См. задачу М2309 «Задачника «Кванта».

5 (5). В четырехугольнике $ABCD$ угол B равен $150°$, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

Н.Стрелкова

10–11 классы

1 (3). См. задачу 2 базового варианта для 8–9 классов.

2 (4). На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE – высота, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.

И.Рудаков

3 (4). См. задачу 4 базового варианта для 8–9 классов.

4 (4). См. задачу М2310 «Задачника «Кванта».

5 (5). Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни – целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.

Г.Жуков

[1] Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них – натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?

Г.Жуков

2 (4). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка сказала, сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

Е.Бакаев

3 (5). Можно ли в таблице 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?

Е.Бакаев

4 (5). По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?

Б.Френкин

5 (6). Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

А.Полянский

6 (8). Пусть I – центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI, пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.

Д.Швецов

7 (9). В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из n человек, команда математиков – из m, причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

А.Бердников, И.Митрофанов

10–11 классы

1 (3). См. задачу 1 сложного варианта для 8–9 классов.

2 (4). На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке?

Е.Бакаев

3 (6) Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты – целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

А.Полянский

4 (6). Числа 1, 2, …, 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?

А.Шаповалов

5 (7). См. задачу М2313 «Задачника «Кванта».

6. Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.

а) (4) Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.

(б) (5) Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми).

И.Богданов

7. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста – число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Могут ли они гарантировать результат:

а) (5) более 500; б) (7) не менее 999?

А.Шаповалов, К.Кноп

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график еще какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

Г.Жуков

2. См. задачу М2312 «Задачника «Кванта».

3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

Ф. Ивлев

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?

И.Митрофанов

5. См. задачу М2314 «Задачника «Кванта».

6. Даны 1000000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой.

В.Мокин

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов

LXXVI Московская математическая олимпиада

6 класс

1. Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но все равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся?

В.Клепцын

2. Вот ребус довольно простой:
ЭХ вчетверо больше, чем ОЙ,
АЙ вчетверо больше, чем ОХ.
Найди сумму всех четырех.

Д.Шноль

3. См. задачу 1 «Кванта» для младших школьников».

4. 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребенок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

А.Хачатурян

5. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6

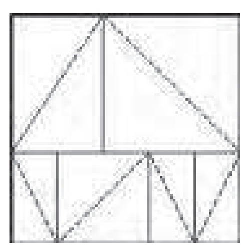


Рис. 1

графств (рис.1). Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нем нечетное число графств. Сколько графств у вас получилось?

А.Шаповалов

6. Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить все жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдает Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?

И.Раскина, А.Хачатурян

7 класс

1. См. задачу 3 для 6 класса.

2, 3, 4. См. задачи 2, 3, 4 «Кванта» для младших школьников».

5. Три квадратные дорожки с общим центром отстоят друг от друга на 1 м (рис.2). Три муравья стартуют одновременно из левых нижних углов дорожек и бегут с одинаковыми скоростями: Му и Ра против часовой стрелки, а Вей по часовой. Когда Му добежал до правого нижнего угла большой дорожки, двое других, не успев еще сделать полного круга, находились на правых сторонах своих дорожек и все трое оказались на одной прямой. Найдите стороны квадратов.

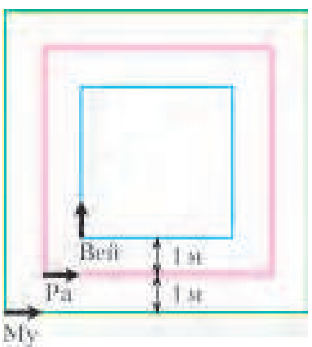


Рис. 2

А.Шаповалов

6. См. задачу 5 «Кванта» для младших школьников».

8 класс

1. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

И.Шейпак

2. Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB, точка P – середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении 3 : 1 (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

Ю.Блинков

3. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

Б.Френкин

4, 5. См. задачи 4, 5 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXIV Турнира городов.

6. На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

А.Хачатурян

9 класс

1. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошел ровно 7 кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

И.Кострикин

2. В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$.

А.Лопатников

3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \\ = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся такие три, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

И.Богданов

4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 3, на две равные части.

Ши Вэй Ли

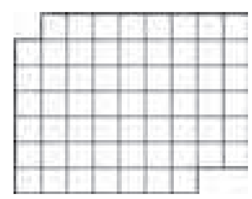


Рис. 3

5. См. задачу 3 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXIV Турнира городов.

6. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролера. После четвертой станции на каждом перегоне один из контролеров будет переходить в соседний вагон, причем они ходят по очереди. Мудрец видит контролера, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее чем на три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может добежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролером, как бы контролеры ни перемещались? (Никакой информации о контролерах, кроме указанной в задаче, мудрец не получает. Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)

И.Нетай

10 класс

1. Даны два квадратных трехчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy – в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy – в точке D (рис. 4). Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

А.Блинков, Д.Шноль

2. См. задачу 2 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXIV Турнира городов.

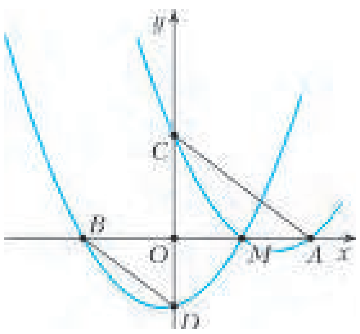


Рис. 4

3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причем $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Ф.Ивлев, С.Николаев

4. См. задачу 7 сложного варианта для 8–9 классов весеннего тура XXXIV Турнира городов.

5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

И.Богданов

6. Пусть I – центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 – середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O – центр описанной окружности треугольника ABC.

Ф.Ивлев

11 класс, первый день

1. Два приведенных квадратных трехчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трехчленов равен нулю.

Д.Горяшин

2. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p.

Д.Горяшин

3. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M – середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

А.Лопатников

4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и красный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая – конечное число красных?

А.Лопатников

5. Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом и все время находился в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 м и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше 100 м?

Б.Беднов, О.Косухин

6. Две команды шахматистов одинаковой численности сыграли матч: каждый сыграл по одному разу с каждым из другой команды. В каждой партии давали 1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ – за ничью и 0 – за поражение. В итоге команды набрали поровну очков. Докажите, что какие-то два участника матча тоже набрали поровну очков, если в обеих командах было: а) по 5 шахматистов; б) произвольное равное число шахматистов.

А.Шаповалов

11 класс, второй день

1. Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого – 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

П.Бородин, Б.Беднов

2. Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

Фольклор

3. Сравните числа $\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right)$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Д.Горяшин

4. Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные ребра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трех ее ребер и развернуть, чтобы ее разверткой

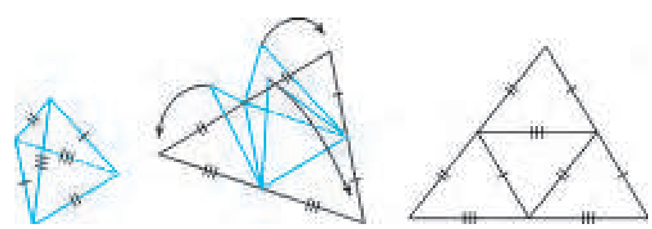


Рис. 5

стал треугольник без внутренних разрезов (рис.5). Найдется ли еще какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его ребер и развернуть, чтобы его разверткой стал треугольник без внутренних разрезов?

О.Косухин

5. Саша написал по кругу в произвольном порядке не более ста различных натуральных чисел, а Дима пытается угадать их количество. Для этого Дима сообщает Саше в некотором порядке несколько номеров, а затем Саша сообщает Диме в том же порядке, какие числа стоят под указанными Димой номерами, если считать числа по часовой стрелке, начиная с одного и того же числа. Сможет ли Дима заведомо угадать количество написанных Сашей чисел, сообщив:

а) 17 номеров; б) менее 16 номеров?

О.Косухин

Публикацию подготовили А.Воропаев, С.Дориченко

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. На прямой в точке A (рис.1) находится пункт отправления робота Кузи, который может перемещаться вдоль прямой от точки A до точки D с одной и той же скоростью v,

Рис. 1

модуль которой равен 0,5 м/с. Программа управления робота позволяет изменять направление скорости Кузи только в точках A, B, C и D, причем $AB = BC = CD = 300$ м. Кроме того, программа предусматривает, что через каждый час Кузя должен возвращаться в точку A. При прохождении точек B, C и D срабатывает замыкающий элемент, который зажигает наградную светодиодную лампочку на корпусе Кузи. Зажженные лампочки горят во все время его движения. Известно, что последовательность прохождения точек, зажигающих наградные лампочки, в каждом часе была различной. Определите количество наград на корпусе Кузи через пять часов после старта из точки A.

Е.Вишнякова

2. В XVI веке мощная буря, прошедшая по Англии в местности Камберленд, вывернула с корнями деревья, и тогда местные пастухи обнаружили в обнажившейся земле под вывернутыми корнями некую темную массу, которую они посчитали углем, поджечь который, однако, не удалось. Это был графит. В дальнейшем из него начали производить тонкие заостренные на конце палочки и использовали их для рисования. Эти палочки были мягкими, пачкали руки и подходили только для рисования, но не для письма. Столяр Каспар Фабер начал с 1761 года свое производство деревянных карандашей, что послужило началом истории фирмы Faber-Castell. Карандаши различаются по твердости грифеля. Грифель карандаша средней твердости имеет плотность 2,1 г/см^3, плотность деревянной оболочки 0,72 г/см^3. Стандартная длина карандаша 17,5 см. Самый простой из всех простых карандашей имеет круглое сечение. Используя приведенный рисунок поперечного сечения такого карандаша на миллиметровой бумаге (рис.2), определите его среднюю плотность.

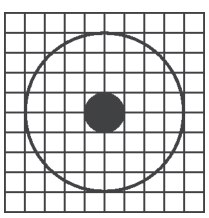


Рис. 2

Е.Вишнякова

3. Расстояние между отметками 35 °С и 42 °С шкалы медицинского ртутного термометра равно 5 см, а в резервуаре термометра хранится 2 г ртути. Оцените по этим данным площадь поперечного сечения капилляра термометра (в квадратных миллиметрах). Известно, что из-за теплового расширения плотность ртути при температуре 42 °С оказывается в 1,00125 раза меньше, чем при температуре 35 °С. Плотность ртути при температуре 35 °С считайте равной 13,6 г/см^3. Тепловым расширением стекла можно пренебречь.

С.Варламов

4. Пин смастерил для смешариков ракету, и им стали доступны космические просторы. Первыми космонавтами стали Крош, Бараш, Ежик, Лосяш и Нюша. Все они были одинаковой массы. Пин строго наказал Нюше следить за весом космонавтов с помощью сложнейшего прибора под названием «ДИНАМОМЕТР». «Запомни, Нюша! – сказал Пин. – Вес тела массой 1 кг на Земле равен 10 Н, на Луне 1,6 Н, а на Марсе 4 Н». Нюша ничего не понимала в динамометрах, но старалась быть ответственной. На Земле она взвесила сразу всех вместе, включая себя, и обнаружила, что пружина динамометра удлинилась на 12,5 сантиметров. Так она и записала в бортовой журнал: «Наш вес на Земле 12,5 сантиметров динамометра». На Луне Нюша сделала следующую запись: «Наш вес уменьшился на 10,5 сантиметров». На Марсе в бортовом журнале Нюша сделала заготовку «Наш общий вес по сравнению с Луной ...ился на ...см». Однако, взвесив всех, она отвлеклась на марсианский пейзаж и не закончила фразу. Вернувшись на Землю, Нюша получила нагоняй от Пина с угрозой, что больше она никуда не полетит. Пин также отметил: «Хе-хе! Масса-то наших космонавтов не менялась во время полетов!»

Запишите полную фразу Нюши, чтобы она смогла продолжить свои космические путешествия.

Е.Вишнякова

8 класс

1. Велосипедист с постоянной скоростью 15 км/ч курсирует между пунктами A и B, начиная из пункта A. Пешеход курсирует по той же дороге между пунктами A и B, начиная из пункта B, со скоростью 5 км/ч. Расстояние между пунктами A и B равно 10 км. Через какое время у велосипедиста и пешехода произойдет третья встреча на дороге и где, если они начали движение одновременно?

Е.Шель

2. Имеются два сосуда объемом 1 м^3 каждый. В первом сосуде находится 1 кг азота, во втором – смесь азота и 18 г водяного пара. Количества молекул в обоих сосудах одинаковы. Найдите отношение массы содержимого второго сосуда к массе содержимого первого сосуда. Масса молекулы воды составляет 9/14 от массы молекулы азота.

О.Шведов

3. На рисунке 3 изображен легкий жесткий стержень длиной $3a$, к которому на расстоянии a от одного из концов прикреплена невесомая нить, перекинутая через блок. К противоположному концу нити прикреплен груз массой $M = 3$ кг. К концам стер-

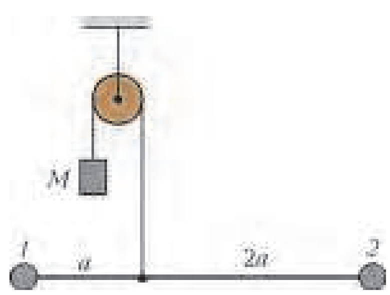


Рис. 3

жня прикреплены грузы *1* и *2*. Найдите массы m_1 и m_2 этих грузов, если система находится в равновесии и трения в оси блока нет.

О.Шведов

4. Школьник Владислав исследует охлаждение воды в стакане на морозе. Владислав заметил, что охлаждение от температуры 91 °С до 89 °С происходит за 3 мин, а от температуры 31 °С до 29 °С – за 6 мин. Чему равна температура окружающей среды? Считайте, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды.

О.Шведов

9 класс

1. Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности Земли, через промежуток времени $\tau = 1$ с после начала движения оказался выше забора высотой $h = 4$ м, а еще через этот же промежуток времени τ – ниже этого забора. Какой могла быть начальная скорость камня? В какой момент времени от начала движения могла быть достигнута максимальная высота подъема камня? До какой максимальной высоты мог подняться камень? Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывайте.

О.Шведов

2. Расстояние между отметками 35 °С и 42 °С шкалы медицинского ртутного термометра равно 5 см, а в резервуаре термометра хранится 2 г ртути. Оцените по этим данным площадь поперечного сечения капилляра термометра (в квадратных миллиметрах). График зависимости объема V ртути от температуры t, выраженной в градусах Цельсия, является прямой линией, изображенной на рисунке 4. При температуре 100 °С объем ртути в 1,018 раза больше объема ртути при 0 °С. Плотность ртути при 0 °С считайте равной 13,6 г/см^3. Тепловым расширением стекла можно пренебречь.

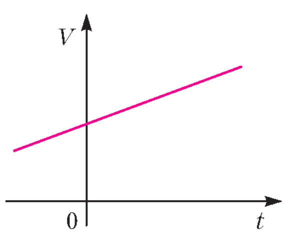


Рис. 4

С.Варламов

3. На рисунке 5 изображен легкий горизонтальный жесткий стержень длиной $3a$, к которому на расстояниях a и $2a$ от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами m_1 и m_2. К концам стержня прикреплены грузы массами m_3 и m_4. Известно, что $m_1 = 1$ кг и $m_3 = 2$ кг. Какими должны быть массы m_2 и m_4, чтобы система находилась в равновесии?

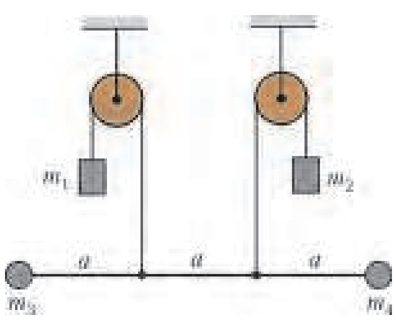


Рис. 5

О.Шведов

4. Школьница Ирина проводила опыты с электрической цепью, схема которой изображена на рисунке 6. Когда Ирина подключила выводы A и B цепи к батарейке и замкнула ключ K, она заметила, что амперметр A_1 показывает значение силы тока $I_1 = 1$ мА, а амперметр A_2 – значение $I_2 = 3$ мА. Какими будут показания амперметров, когда Ирина разомкнет ключ? Приборы считайте идеальными.

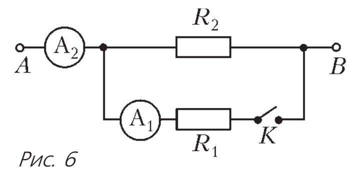


Рис. 6

О.Шведов

10 класс

1. Школьники Владислав и Ярослав стартовали из деревни Липовка в деревню Демушкино: Владислав направился пешком, а Ярослав – спустя $t_1 = 8$ мин на велосипеде. Добравшись до Демушкино, каждый из школьников развернулся и продолжил движение в обратном направлении с прежней скоростью. Ярослав прибыл в Липовку на $t_2 = 32$ мин раньше Владислава. На дистанции школьники встретились два раза, причем обе встречи произошли на одинаковом расстоянии от середины дистанции. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода? Сколько времени прошло между встречами?

М.Ромашка

2. Проводя опыты с веревкой, школьник Вася обнаружил, что ее удлинение пропорционально растягивающей силе, причем при силе натяжения $F_0 = 4$ кН удлинение составляет 20% от начальной длины. Вася закрепил концы веревки на стволах двух деревьев, расположенных на расстоянии $L = 20$ м друг от друга на разных берегах реки. Веревка оказалась на высоте $0{,}1L = 2$ м над водой. Груз какой максимальной массы можно прикрепить к середине веревки, чтобы он в положении равновесия не оказался в воде? Решите задачу в двух случаях: а) длина ненатянутой веревки равна L; б) веревка вначале натянута с силой $F_0/3$, т.е. длина ненатянутой веревки меньше L. Размерами груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

С.Варламов, О.Шведов

3. Школьник Владислав исследует охлаждение воды в стакане на морозе. Владислав заметил, что охлаждение от температуры 91 °С до 89 °С происходит за 3 минуты, а от температуры 31 °С до 29 °С – за 6 минут. За какое время будет происходить охлаждение от 11 °С до 9 °С? А от +1 °С до –1 °С? Считайте, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды. Удельные теплоемкости воды и льда составляют 4,2 кДж/(кг · °С) и 2,1 кДж/(кг · °С) соответственно, удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг. Теплоемкостью стакана пренебречь.

О.Шведов

4. Оцените температуру в центре Солнца. Считайте, что плотность вещества Солнца постоянна, а в центре Солнца атомы водорода полностью распадаются на протоны и электроны, образуя плазму с молярной массой $M = 0{,}5$ г/моль, для которой можно использовать уравнение идеального газа. Первая космическая скорость для Солнца (скорость движения спутника вблизи поверхности Солнца) составляет $v = 400$ км/с. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

О.Шведов

5. В трех вершинах равностороннего треугольника ABC разместили электрические заряды: в вершинах A и B – закрепленные электрические заряды $+q$ и $-q$ соответственно, в вершине C – незакрепленный электрический заряд $+q_1$. Укажите, в какой точке D плоскости ABC надо разместить еще один электрический заряд $+q$, чтобы находящийся в точке C электрический заряд $+q_1$ находился в равновесии?

О.Шведов

11 класс

1. Круизные лайнеры «Первый» и «Второй» плывут равномерно и прямолинейно. Угол между их курсами $\alpha = 60°$, скорость «Первого» $v_1 = 35$ км/ч, скорость «Второго» $v_2 = 31{,}6$ км/ч (рис.7). С лайнера «Первый» с временны́м интервалом в несколько часов отплывают два катера, которые, двигаясь с постоянной одинаковой скоростью, перпендикулярной курсу «Первого», точно приплывают ко «Второму». Определите скорость u катера.

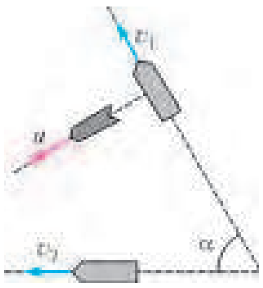


Рис. 7

Г.Гайдуков, И.Горбатый

2. Гантель, состоящая из двух шариков массами m и $2m$ и легкого стержня длиной L, поставлена вертикально на гладкую горизонтальную поверхность более массивным шариком вниз. После небольшого толчка нижний шарик гантели начинает двигаться по горизонтальной поверхности, а верхний – двигаться в пространстве. Найдите модули скоростей v_1 и v_2 шариков в зависимости от синуса угла наклона β гантели к горизонту. Ускорение свободного падения равно g.

О.Шведов

3. Идеальный газ сначала изотермически расширяют, затем охлаждают при постоянном объеме, пока его температура (в кельвинах) не уменьшится в два раза, после чего газ изотермически сжимают до первоначального объема и, наконец, завершая циклический процесс, изохорно возвращают в исходное состояние, сообщая такое же количество теплоты, что и при изотермическом расширении. Определите КПД этого цикла.

И.Горбатый

4. Найдите модуль электростатической силы, действующей на точечный заряд Q в бесконечной системе точечных зарядов, изображенной на рисунке 8. Все заряды закреплены в вакууме на одной прямой, имеют один и тот же знак, расстояния между соседними зарядами одинаковы и равны a.

Рис. 8

А.Якута

5. Заряженный конденсатор емкостью C, электростатическая энергия которого равна W, начинает разряжаться через две соединенные параллельно катушки индуктивностями L и $2L$. Какой будет максимальная энергия катушки индуктивностью L в процессе возникающих колебаний? Сопротивлением электрической цепи пренебречь.

Е.Никанорова

Второй теоретический тур

8 класс

1. Оцените, с какой скоростью растет «хвост» автомобильной пробки, образовавшейся из-за резкого снижения скорости на некотором участке дороги. До пробки автомобили движутся однородным потоком со скоростью 50 км/ч со средней плотностью 20 автомобилей на 1 км пути. В пробке скорость автомобилей снижается до 5 км/ч, и движутся они почти вплотную друг к другу со средней плотностью 125 автомобилей на 1 км пути.

И.Горбатый

2. Имеются две системы блоков, изображенные на рисунке 9. Блоки соединены легкими нерастяжимыми нитями. В каждой системе блоков есть динамометр, закрепленный между соответствующими участками нитей (динамометры в системах одинаковые). Груз *1* имеет массу $m_1 = 200$ г. Груз *2* представляет собой сосуд, наполненный водой, его суммарная масса $m_{02} = 800$ г. В сосуде имеется отверстие, изначально закрытое пробкой. Если ее вытащить, то через отверстие вода будет вытекать тонкой струйкой со скоростью $v = 25$ мл/мин. Определите, через сколько минут после того, как вытащили пробку, показания динамометров будут одинаковыми. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

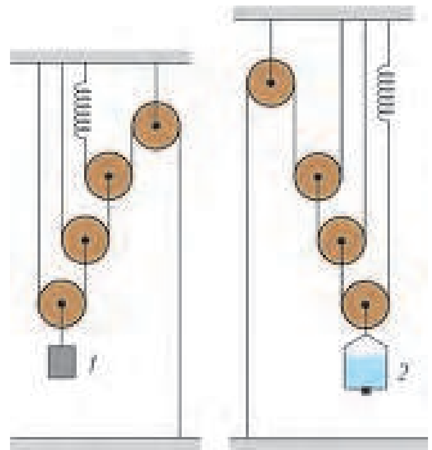


Рис. 9

Е.Вишнякова

3. Из одинаковых кубиков строят объемную пирамидку из 10-ти рядов, верхние три ряда которой изображены на рисунке 10 (вид сверху). Кубики жестко скреплены между собой. Если эту пирамидку опустить в сосуд с бензином, плотность которого $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3, то она будет плавать, погружаясь в бензин ровно на 3 нижних ряда. Определите плотность жидкости, в которой эта пирамидка будет плавать, погружаясь ровно на 1 нижний ряд.

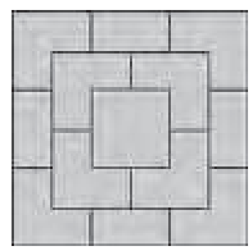


Рис. 10

Е.Вишнякова

4. По счастливой случайности отличнику Грише и первой красавице Арише выпало вместе делать лабораторную работу по физике. В работе требовалось поместить капсулу со снегом в нагреваемый калориметр и построить график зависимости температуры капсулы от времени. Гриша аккуратно включил печь, поместил 0,5 кг снега в калориметр и ровно в 9:00 по московскому времени начал измерения. «Скучно», – примерно через минуту подумала Ариша и подсыпала

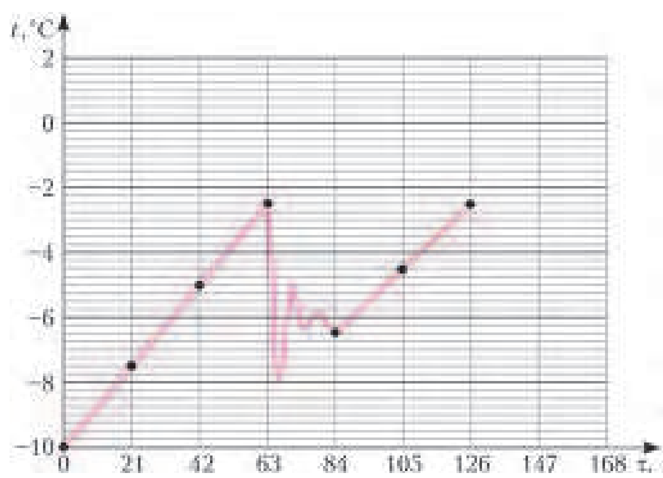


Рис. 11

немного снега в калориметр. Гриша в ужасе смотрел на график (рис.11) и печально думал: «Красота требует жертв…» Используя график, определите мощность печи и массу добавленного Аришей снега. Удельная теплоемкость снега $c = 2{,}1$ кДж/(кг · °С) .

Е.Вишнякова

9 класс

1. Рабочий катит катушку с канатом вверх по плоской горке, образующей угол $\alpha \approx 6°$ с горизонтом, одновременно разматывая канат (рис.12). Внешний радиус катушки R = = 60 см, внутренний r = = 40 см, а масса катушки с канатом m = 100 кг. Катушка катится без проскальзывания и делает один полный оборот за время t = 4 с, причем ее центр движется равномерно. С какой скоростью идет рабочий? Какой выигрыш в силе он получает при таком подъеме? С какой силой он тянет за конец каната? Какую полезную мощность он развивает? Массой размотанного участка каната пренебречь, считать $\sin 6° \approx 0{,}10$.

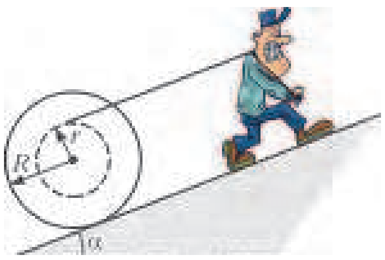


Рис. 12

М.Ромашка

2. У школьника Вовы есть три кубика разных размеров. Длина ребра первого кубика l = 10 см, второго $2l$ = 20 см, а третьего $3l$ = 30 см. Вова поставил кубики один на другой так, как показано на рисунке 13, погрузил в воду и отпустил. При установившемся равновесии самый большой кубик полностью погрузился в воду, а два других находились над водой. Кубики однородны и сделаны из одного и того же материала.

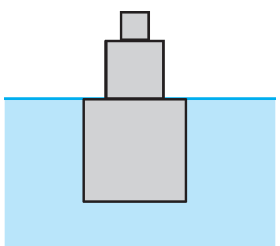


Рис. 13

а) Определите плотность этого материала, если известно, что плотность воды 1000 кг/м^3 .

б) Вова хочет погрузить в воду два кубика (маленький и средний). Определите, где будет находиться граница раздела кубиков: над водой, под водой или точно на уровне воды. Если над водой или под водой, то вычислите, на каком расстоянии от поверхности воды окажется граница раздела кубиков.

М.Ромашка

3. По счастливой случайности отличнику Грише и первой красавице Арише выпало вместе делать лабораторную работу по физике. В работе требовалось поместить капсулу со снегом в нагреваемый калориметр и извлечь ее точно в тот момент, когда весь снег растает, а температура образовавшейся воды все еще будет равна 0 °С . Гриша аккуратно рассчитал точное время начала и завершения измерений, включил печь, поместил 0,5 кг снега в калориметр и ровно в 9:00 по московскому времени начал измерения. «Скучно», – примерно через минуту подумала Ариша и подсыпала немного снега в калориметр. Гриша в ужасе смотрел на график (см. рис.11) и печально думал «Красота требует жертв…» Используя график, определите, каково теперь должно быть точное московское время извлечения капсулы из калориметра, чтобы выполнить условия лабораторной работы. У снега удельная теплота плавления λ = = 330 кДж/кг , а удельная теплоемкость c = = 2,1 кДж/(кг · °С) .

Е.Вишнякова

4. Система, изображенная на рисунке 14, состоит из резисторов двух типов, с сопротивлениями $R = 2r = 200$ Ом и $r = 100$ Ом, источника постоянного напряжения U = 9 В и шести перемычек (проводов, сопротивлением которых можно пренебречь). Найдите силы токов через все резисторы, перемычки и источник напряжения.

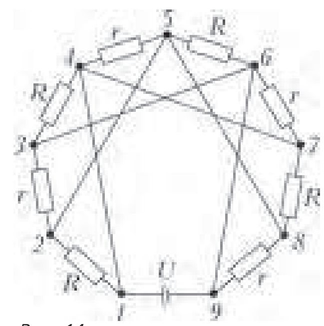


Рис. 14

М.Ромашка

10 класс

1. На лабораторной работе по физике отличнику Грише и красавице Арише с помощью системы блоков, изображенной на рисунке 15, требовалось измерить массу воды, налитой в сосуд, который сам был нелегким. К одной из нитей Гриша прикрепил динамометр, жесткость пружины которого была известна и составляла 1000 Н/м. Гриша налил воды в сосуд и аккуратно измерил удлинение пружины. В этот момент Ариша случайно задела небольшую пробку в дне сосуда и, вооружившись тряпкой, стала ликвидировать растекающуюся по столу воду. Гришу же заинтересовало совсем другое явление – он стал записывать значения удлинения пружины, поглядывая на часы. Используя график, получившийся у ребят (рис.16), определите, сколько граммов воды в секунду вытекало из сосуда.

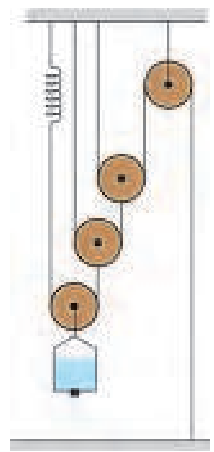


Рис. 15

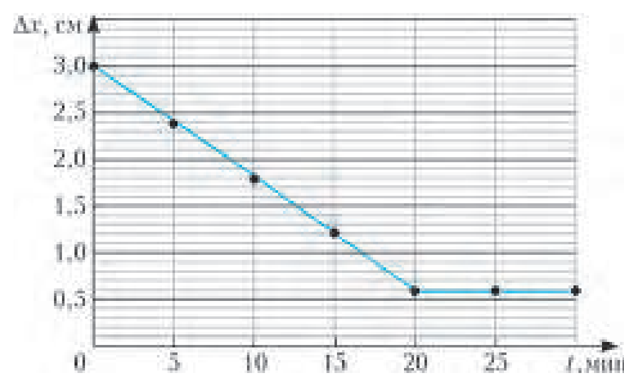


Рис. 16

Е.Вишнякова

2. Два маленьких шарика *1* и *2*, масса каждого из которых m, соединены невесомым стержнем длиной L (рис.17). Первый шарик шарнирно закреплен в точке O, а второй шарик совершает колебания в вертикальной плоскости. В один из моментов, когда стержень был вертикален, верхний шарик освободили из крепления. Когда угол между стержнем и вертикалью оказался равным $\beta > 0$, шарик *2* приблизился к прямой AB на минимальное рас-

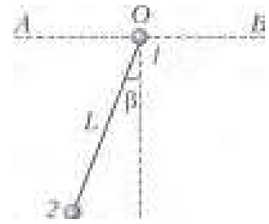


Рис. 17

стояние. С какой скоростью двигался шарик *2* в момент освобождения шарика *1*? Сопротивлением воздуха пренебречь.

М.Ромашка

3. Отопление на даче работает на природном газе – метане CH_4, который сжигается в воздухе, соединяясь с кислородом O_2. Из трубы дома в атмосферу выходят продукты сгорания: вода H_2O и углекислый газ CO_2, а попутно с ними – не участвовавший в горении азот; кислорода нет совсем. Температура на выходе из трубы составляет 100 °С. Найдите относительную влажность смеси газов, выходящих из трубы. Считайте, что в атмосферном воздухе на каждую молекулу кислорода приходятся 4 молекулы азота, а наличием других газов можно пренебречь.

С.Варламов

4. Система, изображенная на рисунке 18, состоит из восьми одинаковых параллельных металлических пластин площадью S каждая. Расстояние между соседними пластинами d. Промежутки между некоторыми пластинами заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, и пластины соединены друг с другом проволочными перемычками. Найдите емкость C_{AB} получившейся системы конденсаторов.

М.Ромашка

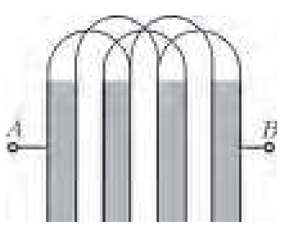


Рис. 18

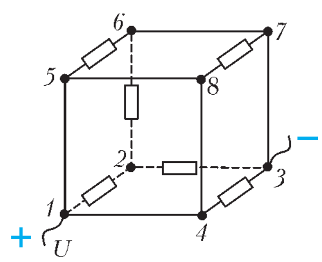


Рис. 19

5. В шесть ребер куба впаяны одинаковые резисторы сопротивлением R каждый, как показано на рисунке 19. Сопротивления перемычек в остальных ребрах одинаковы и очень малы. Источник напряжения U подключен к выводам *1* и *3* куба. Найдите токи, текущие через ребра куба, и общее сопротивление куба.

М.Замятнин

11 класс

1. «Хула-хуп» – это обруч, который девушки крутят на талии, а спортсменки проделывают с ним и другие «фокусы». Например, закручивают его в вертикальной плоскости и толкают от себя по горизонтали, после чего вращающийся обруч, проскальзывая по полу, отъезжает от них на некоторое расстояние и возвращается обратно. Пусть обруч радиусом R в момент толчка закручен вокруг горизонтальной оси до угловой скорости ω_0 и ему придали скорость, равную v_0 и направленную вдоль пола перпендикулярно оси вращения (рис.20). Коэффициент трения обруча об пол равен μ.

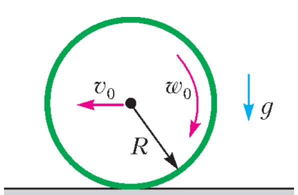


Рис. 20

1) На какое максимальное расстояние в направлении начальной скорости удалится обруч от начальной точки?

2) Какова будет его угловая скорость в момент остановки?

3) С какой скоростью он будет катиться после окончания проскальзывания по полу?

4) Как связаны v_0 и ω_0, если проскальзывание прекращается в момент возврата в исходную точку?

М.Семенов

2. На длинном горизонтальном столе лежит груз *1* массой m, к которому привязана легкая нерастяжимая нить (рис.21). Эта нить перекинута через установленный на краю стола невесомый блок, который может вращаться без трения, и ко второму концу нити прикреплен такой же груз *2*. Сначала груз *1* удерживают неподвижно так, что груз *2* свободно висит на нити, а затем груз *1* отпускают без начальной скорости. При движении системы на груз *1* действует сила сухого трения, причем коэффициент трения скольжения зависит от координаты x груза *1* по закону $\mu(x) = kx$ (координата x отсчитывается от начального положения груза *1*).

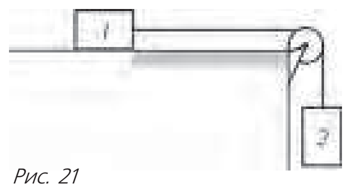


Рис. 21

1) Какой путь пройдет груз *1* после отпускания?

2) Какую максимальную скорость будут иметь грузы в процессе движения этой системы?

3) Найдите максимальное значение модуля силы натяжения нити в процессе движения этой системы.

4) Изобразите график зависимости проекции ускорения груза *1* на направление его движения от координаты x и график зависимости модуля силы натяжения нити от времени.

А.Якута

3. На рисунке 22 показана вольт-амперная характеристика источника напряжения. Если сила тока в подключенной к источнику цепи меньше I_0 = 1 А, то напряжение на клеммах источника равно U_0 = 10 В. Если же сила тока в цепи превышает величину I_0, то в источнике срабатывает защита от перегрузки и напряжение U на его клеммах начинает убывать с ростом силы тока I по линейному закону, пока при силе тока $2I_0$ (ток короткого замыкания) напряжение U не обратится в ноль. К клеммам этого источника подключили цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора сопротивлением R_0 = 15 Ом и незаряженного конденсатора. К моменту, когда конденсатор полностью зарядился, в резисторе выделилось количество теплоты Q_0 = 12 мкДж. Затем цепь отсоединили от источника, разрядили конденсатор, заменили резистор на другой, сопротивлением R_1 = = 5 Ом, и вновь подключили цепь к клеммам источника.

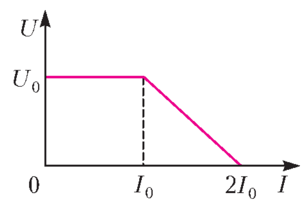


Рис. 22

1) Чему равна максимальная сила тока, протекающего в цепях с резисторами сопротивлениями R_0 и R_1?

2) Чему равна емкость включенного в цепь конденсатора?

3) Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_1 к моменту полной зарядки конденсатора?

А.Якута

Публикацию подготовили
М.Семенов, О.Шведов, А.Якута

XX Международная олимпиада школьников «Туймаада». Физика

Нынешним летом состоялась юбилейная, XX Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. В этой статье мы расскажем о физической части олимпиады, которая проходила в Якутске с 17 по 24 июля 2013 года. Участники соревновались, как обычно, в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Условия задач выдавались на русском и английском языках, а решения участники писали на родном языке, которым для большинства стал язык физики и математики. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к двум последним классам).

Российские и зарубежные школьники, желающие испытать свои силы на олимпиаде «Туймааду» по физике в следующем году, и их преподаватели могут согласовать организационные вопросы, связанные с участием, с жюри олимпиады по физике (fiztuy@mail.ru). Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут прислать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Ниже представлены теоретические и экспериментальные задачи для старшей лиги (статья с задачами для младшей лиги опубликована в 9 номере журнала «Потенциал» за 2013 год) и список дипломантов олимпиады по обеим лигам.

ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАРШЕЙ ЛИГИ

Теоретический тур

Задача 1. Составной стержень

Два однородных металлических стержня одинакового поперечного сечения поочередно подвешивают за один конец. При этом их удлинения составляют $\Delta L_1 = 3$ мм и $\Delta L_2 = 5$ мм. Известны отношения плотностей (ρ_1 и ρ_2) и модулей Юнга (E_1 и E_2) сплавов, из которых изготовлены первый и второй стержни соответственно: $\rho_1/\rho_2 = 0,4$ и $E_1/E_2 = 6$.

1) Чему равно отношение длин L_1 и L_2 недеформированных стержней?

2) Определите общее удлиннение ΔL составного стержня (последовательно соединенных обоих стержней), подвешенного за один конец.

Задача 2. Диссоциация водорода

После выброса протуберанца вблизи Солнца образовалось расширяющееся водородное облако. В некоторый момент времени небольшая внутренняя часть облака имела объем $V_1 = 1\ \text{км}^3$ и температуру $T_1 = 4500$ K. Какой объем V_2 будет занимать эта часть, когда ее температура понизится до $T_2 = 3500$ K? Считайте, что данная часть облака расширяется адиабатически и находится в механическом равновесии с окружающим газом. В рассматриваемом диапазоне температур доля диссоциировавших молекул водорода зависит от температуры линейно, уменьшаясь от $\eta_1 = 0,8$ при T_1 до $\eta_2 = 0,2$ при T_2. Известно, что энергия диссоциации одной молекулы водорода $W = 4,5$ эВ, число Авогадро $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$, элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

Указание. Интегралы от отношений многочленов можно вычислить, если предварительно алгебраически привести дроби к простейшему виду. Кроме того, напомним основные формулы интегрирования:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{при} \quad n \neq -1, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Задача 3. Колебания заряда

По непроводящему кольцу радиусом R равномерно распределен заряд с линейной плотностью ρ. В центре кольца находится точечный заряд q массой m. Найдите период T малых колебаний этого заряда в плоскости кольца.

Задача 4. Масса фотона

Экспериментатор Глюк наблюдает затмение двойной звезды, свет от которой доходит до Земли за время $T = 4$ года. Будучи большим скептиком, Глюк не верит, что у фотона нет массы, и для доказательства наличия этой массы ищет запаздывание приходящего от звезды красного света по сравнению с синим. Желание опровергнуть основы физики у Глюка огромное, а аппаратура — несовершенная. В результате он «обнаруживает», что красный свет запаздывает на $\tau = 0,1$ с по сравнению с синим. Чему равна масса m фотона по мнению Глюка? Скорость света в вакууме $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, длина волны красного света $\lambda_1 = 700$ нм, длина волны синего света $\lambda_2 = 450$ нм.

Указание. При $nx \ll 1$ справедливо приближение $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

Экспериментальный тур

Задача 5. Мощность взрыва воздушного шарика

Полная энергия, которая выделяется при взрыве, по традиции называется мощностью взрыва, хотя правильнее было бы назвать эту величину энергией взрыва. Численное значение мощности взрыва обычно указывают в тротиловом эквиваленте, который имеет смысл массы тротила, при взрыве которого выделяется такое же количество энергии. Например, мощность взрыва при падении 15 февраля 2013 года Челябинского метеорита составила в тротиловом эквиваленте около 500 кт (килотонн) по оценкам NASA и примерно 150 кт по оценкам РАН. На основании усредненных экспериментальных данных принято, что энергия, выделяющаяся при взрыве одного грамма тротила, равна $Q = 1$ ккал $= 4184$ Дж. Таким образом, мощность взрыва при падении Челябинского метеорита была порядка 10^{15} Дж.

В данной задаче предлагается оценить мощность взрыва воздушного шарика и определить критические параметры резины, из которой он изготовлен. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт.ст. $= 10^5$ Па.

1) Снимите зависимость избыточного давления Δp в шарике от его объема V и изобразите результаты на графике.

2) Определите критические избыточное давление $\Delta p_{\max}$ и объем $V_{\max}$ шарика, при которых он лопается.

3) Оцените энергию $W_{упр}$ упругой деформации оболочки в момент взрыва шарика.

4) Оцените энергию $W_{воз}$ ударной воздушной волны, возникающей из-за резкого расширения воздуха в шарике (без учета влияния оболочки).

5) Вычислите общую мощность взрыва W шарика в тротиловом эквиваленте и доли $\eta_{упр}$ и $\eta_{воз}$ каждой из найденных выше составляющих.

6) Оцените максимальную относительную деформацию ε_{max} и максимальное механическое напряжение σ резины, из которой изготовлен шарик.

Оборудование: три воздушных шарика, имеющих форму сосиски, груша или маленький поршневой насос известного объема, медицинский манометр, тройник, соединительные трубки, миллиметровая бумага, бумажный метр, штангенциркуль, ножницы, скотч, беруши (вставлять в уши).

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

по младшей лиге

№	участник	диплом
1	Иван Утешев (Республика Мордовия)	I
2	Виктор Тясин (Республика Мордовия)	I
3	Иван Карасев (Республика Мордовия)	II
4	Кристиан Дутеску (Румыния)	II
5	Роман Тепайкин (Республика Мордовия)	II
6	Глеб Овчаров (Владивосток)	III
7	Ирина Понамарева (Владивосток)	III
8	Андрей Борисов (Иркутск)	III
9	Дмитрий Татаркин (Республика Мордовия)	III

по старшей лиге

№	участник	диплом
1	Владимир Ситнов (Бийск)	I
2	Игнат Иоан (Румыния)	I
3	Антон Дегтяренко (Владивосток)	I
4	Рауль-Алекс Пипис (Румыния)	II
5	Хориа-Петру Николаеску (Румыния)	II
6	Айсиэн Иванов (Республика Саха (Якутия))	II
7	Кристиан Захария (Румыния)	II
8	Наталия Дмитриева (Иркутск)	III
9	Айаал Новгородов (Республика Саха (Якутия))	III
10	Аян Сегизбай (Казахстан)	III

Публикацию подготовили А.Чудновский, Ю.Григорьев

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Пилотируемая полоска

Игрушка, о которой сегодня пойдет речь, появилась всего несколько лет назад, ее английское название – tumblewing. Это прямоугольная бумажная полоска с четырьмя короткими разрезами и с четырьмя отогнутыми крылышками – двумя боковыми и двумя продольными. Шаблон для изготовления пилотируемой полоски представлен на рисунке 1.

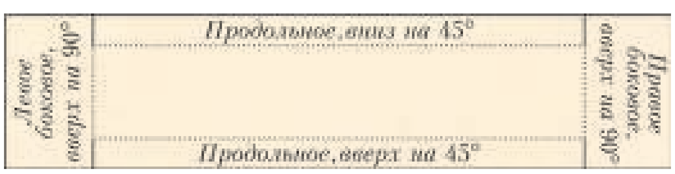


Рис. 1. Шаблон для изготовления полоски

Размеры внешнего прямоугольника 5×24 см, размеры внутреннего, ограниченного пунктирными линиями, по которым будут проводиться сгибы, 3×19 см.

Лучший материал для изготовления пилотируемой полоски – это лист бумаги из телефонной книги. Вырежьте из такого листа заготовку указанных размеров. Сделайте на ней четыре коротких разреза и отогните крылышки, как написано на рисунке 1 и показано на рисунке 2 – и полоска готова. Для ее пилотирования понадобится еще картонка размером 50×50 см.

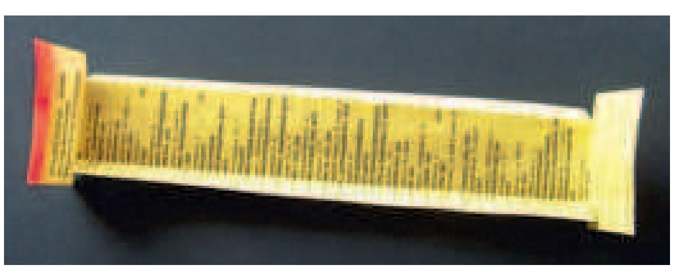


Рис. 2. Готовая пилотируемая полоска

Перед началом полетов полоску нужно «настроить», чтобы в свободном падении она двигалась прямолинейно и не заворачивала в ту или другую сторону. Возьмите полоску за продольное крылышко. Держите ее перед собой так, чтобы ее левое боковое крылышко находилось слева от вас. Движением вперед-вниз закрутите и запустите полоску. Если вращающаяся полоска в полете отклоняется влево, то чуть влево отклоните и оба боковых крылышка. Если полоска поворачивает вправо, то соответственно отклоните их вправо. За несколько запусков удастся добиться прямолинейного полета. И теперь можно приступать к пилотированию.

Если идти вперед с чуть наклоненной к себе картонкой, то над ее верхней кромкой возникнет восходящий воздушный поток. Ваша задача – посадить вращающуюся полоску на гребень этой воздушной волны. Перед запуском держите картонку перед собой в одной руке, а полоску – в другой, вытянутой над головой. Запустите полоску и с картонкой в руках начните движение вперед, стараясь подхватить вращающуюся полоску. Потренировавшись, вы научитесь не только пилотировать полоску вдоль прямой, но и осуществлять с ней повороты и передвигаться на большие расстояния.

Заметим, что пилотирование полоски возможно только в замкнутых помещениях при отсутствии сквозняков и других воздушных потоков.

Подробные описания и демонстрации полетов можно посмотреть на сайтах:
- http://www.youtube.com/watch?v=LefTqarcvCI
- http://sciencetoymaker.org/tumblewing/makeTumblewing.htm

А.Панов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

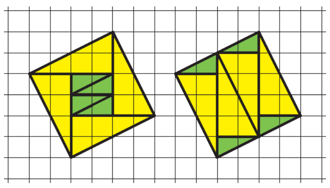


Рис. 1

1. На рисунке 1 приведены два способа сложить квадрат из данных треугольников.

2. $45^2 - 11 = 2014$.

Заметим, что 2025 = 2014 + + 11 – это полный квадрат, поэтому решением ребуса будет А = 4, Б = 5, С = 1.

Других решений нет: АБ не может равняться 44 или меньшему числу, так как $44^2 = 1936 < 2014$, и не может равняться 46 или большему числу, так как $46^2 = 2116 > 2014 + 99 = 2113$.

3. У второго.

Третий мудрец точно не солгал – иначе и первый, и второй оба сказали правду, что невозможно (по условию, правду сказал только один мудрец). Значит, у третьего самая длинная борода, а первый и второй мудрецы солгали. Поэтому борода второго мудреца короче бороды первого.

4. 30 продаж.

Будем считать, что тетя Груша откладывала в фартук по доллару с продажи каждого кабачка, а остальное прятала в карман (получается по два доллара с каждой продажи). Тогда в конце дня у нее в фартуке было ровно 100 долларов, а тогда остальные 60 лежали в кармане. Значит, продаж было $60 : 2 = 30$.

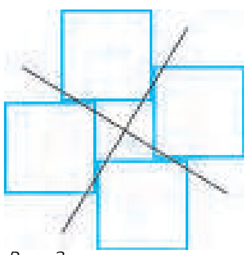


Рис. 2

5. Можно.

Пример подходящего расположения прямых и квадратов изображен на рисунке 2.

ОБМЕН МЕШОЧКАМИ НА ПОЛЕ ЧУДЕС

Разумеется, никакой выгоды (в среднем) от такого обмена получиться не может. Если как следует задуматься, то становится непонятно, почему Лиса просто так полагает одинаковыми вероятности выигрыша и проигрыша.

Если у Кота в мешочке будет, например, 1000000 сольдо, то он решит, что у него сейчас больший мешочек, и меняться не захочет. Если же их там окажется, например, 10, то он подумает, что его мешочек – меньший, и захочет поменяться. Стало быть, как только он узнает, сколько у него сейчас имеется денег, его субъективная оценка шанса выиграть при обмене будет не 50%. Значит, нельзя так просто считать, что победа и поражение одинаково вероятны.

Или же так: у каждого есть своя субъективная граница, до которой он готов поверить, что его мешочек меньший, а после нее уже подумает, что его мешочек – больший. Поэтому если он будет недоволен своим содержимым (если в мешочке вдруг окажется сумма меньше, чем значение на этой границе), то будет оценивать вероятность выигрыша при таком обмене больше вероятности проигрыша (и наоборот).

Более строго: если бы вероятность выигрыша и проигрыша была одинаковой, то каждое значение возможного количества денег в мешочке было бы равновероятно. Но если бы каждое из этих значений имело одинаковую ненулевую вероятность P, то общая вероятность 1 должна была бы получиться из суммы всех вероятностей для всех значений, т.е. она была бы равна $P + P + \ldots + P + \ldots$, что равно бесконечности. Противоречие.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

1. Достаточно одной из девочек отдать яблоко в корзине.

2. 0.

Ведь все воробьи при виде кота должны были улететь с грядки.

3. Знак запятой: 2,3.

4. 1 рубль и 2 рубля.

Вторая монета действительно не 1 рубль.

5. Это может быть, если профессор — женщина. Тогда сын отца профессора — ее брат, а отец сына профессора — ее муж, и диалог проходит только между братом и мужем профессора.

6. Три.

Ведь одну он уже сломал, заведомо сломает еще три, а больше ломать ему нечего.

7. Достаточно перелить всю воду из 5-го стакана во 2-й.

8. 0.

Всего детей пятеро (ведь мама или папа — соответственно дочь или сын бабушки), и каждый съедает по 3 кусочка. Кусков всего 15, поэтому остальным ничего не останется.

9. Нет, нельзя.

Ведь через $72 = 3 \cdot 24$ часа будет опять ночь, и на солнечную погоду рассчитывать не стоит.

10. 250 метров.

Очередь за маслом 250 метров, а за хлебом $250 : 5 = 50$ метров. Но масло-то для такого бутерброда не нужно — достаточно только простоять 200 метров за колбасой и 50 метров за хлебом.

11. Боксер — это еще и порода собаки. Описанные соревнования проходили между собаками, поэтому все призовые деньги доставались хозяевам собак.

12. 20.

Задутые свечи останутся, а незадутые – сгорят.

13. Объем шара пропорционален третьей степени его радиуса. Поэтому первый арбуз по объему больше второго в $\left(\frac{5}{4}\right)^3$, что чуть меньше двух, но больше полутора. Поэтому выгоднее покупать широкий арбуз.

14. 6.

Охотников (кошек) стало в шесть раз меньше, и добычи (мышек) – тоже. Поэтому время охоты останется тем же.

15. 12.

Из них 7 он нарисовал на одной стороне листа, а 5 — на другой.

16. Такое возможно, если попугай был глухим.

17. Кнопка «1», ведь каждый пингвин (кроме жителей первого и, возможно, каких-то еще нижних этажей) в половине случаев нажимает кнопку «1», когда выходит на улицу (и кнопку своего этажа, когда возвращается). Оставшиеся случаи — это когда нажимают все остальные кнопки, и каждая из них по отдельности нажимается реже.

18. Нет, не пробежит.

Если он 100 метров пробегает за 10 секунд, то в идеале 600 метров пробежит за минуту, а 36 километров – за час. Но в таком быстром темпе Петя бежать целый час не сможет (ведь он выдохнется).

19. 0, 1, 2 на обоих кубиках, 3, 4, 5 на черном, 6, 7, 8 на белом.

На календаре можно увидеть даты 11 и 22, поэтому на белом кубике должны быть также 1 и 2. Если бы 0 был только на одном кубике, то все даты 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07 было бы невозможно увидеть (ведь у второго кубика только 6 граней). Поэтому на обоих кубиках должны быть 0, 1 и 2. Осталось только до конца заполнить черный кубик цифрами 3, 4 и 5 (а девятку и не нужно — ведь ее можно получить, перевернув кубик с шестеркой).

20. Это возможно, если какая-то из черепах соврала (или несколько сразу). Если мы допускаем, что черепахи умеют разговаривать, то почему же они не могут лгать?

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ В КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧАХ

1. $n = \dfrac{\ln(p/p_0)}{\ln\left(V/(V+V_1)\right)}$. **2.** $A = 20$ кДж.

3. $T = \dfrac{p_0}{RV_0}V^2$, $A = \dfrac{3}{2}p_0V_0$. **4.** $A = \nu R\dfrac{(T_3 - T_4)}{2}\left(\dfrac{T_1+T_2}{T_4} - 2\right)$.

5. $v = \dfrac{2q}{5(p_0S + Mg)}$. **6.** $p_1 = \dfrac{1}{2}\left(p\dfrac{T_2}{T_1} + \Delta p\right) = 900$ мм рт.ст,

$p_2 = \dfrac{1}{2}\left(p\dfrac{T_2}{T_1} - \Delta p\right) = 100$ мм рт.ст.

7. $p_1 = p\left(1 + \dfrac{QR}{C_VpV}\right) = 1520$ мм рт.ст. **8.** $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{Q}{\nu C_pT_0} + 1 = 4$.

9. $F_{\max} = \dfrac{\pi D^2(T - T_0)p_0}{4T_0} = 26$ Н. **10.** $\dfrac{V_2}{V_1} = 4$.

XXXIV ТУРНИР ГОРОДОВ

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Не всегда.

Контрпример: вершины и середины сторон произвольного треугольника.

2. Из любого.

Припишем к числу $A + 1$ слева 8 единиц. Полученное число B при делении на 9 дает тот же остаток, что и A, поэтому его можно получить из A прибавлением девяток. Стерев затем 8 единиц, получим число $A + 1$.

3. Упорядочим гири по весу: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$. Заметим, что веса соседних гирь отличаются не меньше чем на 1, поэтому $a_n \ge a_m + (n - m)$ при $m < n$. По условию,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 > a_7 + a_8 + \ldots + a_{11} \ge (a_2 + 5) + \ldots + (a_6 + 5),$$

откуда $a_1 > 25$. Значит, $a_{11} \ge a_1 + 10 > 35$.

5. $60°$.

Пусть M – середина BC, N – середина AD. Построим параллелограмм $ABMK$ и прямоугольник $CDLM$. Тогда $AKDL$ – тоже параллелограмм (стороны AK и LD равны и параллельны). Значит, N является и серединой диагонали KL. В треугольнике KML выполнено $\angle KML = \angle KMC - \angle LMC = 150° - 90° = 60°$, а $KM = ML$, следовательно, он равносторонний. Поэтому медиана MN служит и биссектрисой, т.е. , а $\angle BMN = 60°$.

10–11 классы

2. Из очевидного подобия треугольников AEC и ACB имеем $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{CM}{AL}$. Поэтому при повороте на $90°$ и последующей гомотетии с центром E и коэффициентом CE/CA отрезок EA переходит в EC, прямая AL – в прямую CM. Значит, отрезок AL переходит в CM, а EL – в EM. Следовательно, угол LEM прямой.

5. Каждому сносному трехчлену $x^2 + px + q$ с $p \ne 0$ соответствует *парный* сносный трехчлен $x^2 - px + q$. Их сумма равна $2x^2 + 2q$. Отсюда видно, что сумма *всех* сносных трехчленов имеет вид $Ax^2 + C$. Поэтому достаточно проверить, что сумма C всех *свободных членов* сносных трехчленов положительна. Посмотрим, какой вклад в C вносят разные группы сносных трехчленов.

Для каждой пары (a, b) целых чисел, где $0 \le a \le b \le 2013$, $ab \le 2013$, рассмотрим все сносные трехчлены с корнями, по модулю равными a и b. Рассмотрим несколько случаев.

0) $a = 0$. У таких трехчленов свободный член равен нулю.

1) $a = 1$, $b = 2013$. Соответствующих сносных трехчленов два: $x^2 \pm 2012x - 2013$; их вклад в C равен -4026.

2) $a = 1 < b < 2013$. Соответствующих трехчленов четыре: $x^2 \pm (b+1)x + b$, $x^2 \pm (b-1)x - b$; их вклад равен 0.

3) $1 < a < b \le 2013$. Тогда $a < b < 2013/2$, значит, $a + b < 2013$. Поэтому соответствующих трехчленов также четыре; как и в случае 2), их вклад равен 0.

4) $1 \le a = b$, $a^2 < 2013$. Соответствующих трехчленов три: $x^2 \pm 2a + a^2$, $x^2 - a^2$; их вклад в C составляет a^2.

Итак, $C = 1^2 + 2^2 + \ldots + 44^2 - 4026 > 0$.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Два.

Пусть a – наибольшее из чисел на доске. Оно находится между какими-то степенями двойки: $2^n \le a < 2^{n+1}$. Прибавив к a какое-нибудь другое из написанных чисел b, получим степень двойки $a + b$, для которой $2^n < a + b \le 2a < 2^{n+2}$. Значит, $a + b = 2^{n+1}$. Итак, все остальные числа равны $2^{n+1} - a$, т.е. различных среди написанных чисел не более двух. А два числа могут быть, например, 1 и 3.

2. Поменяем местами соседних мальчика и девочку. При этом указанные суммы одновременно либо увеличатся на 1, либо уменьшатся на 1. Действуя таким образом, мы можем получить любую расстановку детей. А в каждой расстановке, где мальчики стоят симметрично девочкам относительно центра, равенство указанных сумм очевидно.

3. Можно.

Отметим все клетки верхних девяти полос, а в центральной полосе отметим центральную клетку и все клетки слева от нее. Тогда в десяти самых нижних квадратах 10×10 будет отмечено от 1 до 10 клеток. Сдвигая квадрат на одну полосу вверх, мы выкидываем из него полосу неотмеченных клеток и добавляем полосу отмеченных клеток, увеличивая количество отмеченных клеток в нем на 10. Следовательно, в следующих снизу квадратах будет отмечено от 11 до 20 клеток, ..., а в самых верхних – от 91 до 100 клеток.

Замечание. Центральную клетку можно и не отмечать, тогда количество отмеченных в квадратах 10×10 клеток будет меняться от 0 до 99.

4. 375.

Возьмем черное число a и рядом с ним белое число ab. По этим числам следующие шесть восстанавливаются однозначно: b, $b - ab$, $1 - a$, $(1 - a)(1 - b)$, $1 - b$, $a(1 - b)$. Сумма этих 8 чисел равна 3. Имеющиеся 1000 чисел разбиваются на 125 таких восьмерок, отсюда получаем ответ.

Замечание. Следующими числами в выписанной строчке будут черное a и белое ab, поэтому числа по кругу повторяются с периодом 8.

5. *Первое решение.* **Лемма**. Пусть точки X, Y принадлежат треугольнику ABC, но не совпадают с его вершинами, и отрезок XY не параллелен ни одной из сторон треугольника. Тогда от одной из вершин треугольника ABC можно отложить отрезок, равный и параллельный XY, так, что второй его конец окажется внутри треугольника.

Доказательство. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные XY. Одна из этих прямых лежит между двумя другими. Если, например, эта прямая проходит через вершину A, то она пересечет сторону BC в некоторой точке D и разобьет ABC на треугольники ABD и ACD. Отрезок XY лежит в одном из них и параллелен стороне AD, поэтому он короче AD. Значит, если отложить от точки A внутрь треугольника отрезок AZ, параллельный и равный XY, его конец Z окажется внутри треугольника ABC.

Вернемся к задаче. Пусть X и Y – два узла внутри треугольника ABC. Если прямая XY параллельна одной из сторон треугольника, все в порядке. В противном случае точка Z, построенная согласно лемме, также является узлом. По условию она совпадает с одной из точек X или Y. Но тогда точки X и Y лежат на прямой, проходящей через соответствующую вершину треугольника.

Второе решение (для знатоков). Если прямая XY не проходит через вершины треугольника ABC, то она *не пересекает* одну из его сторон, например BC. Тогда по *формуле Пика* площади треугольников XBC и YBC равны. Значит, в них равны высоты, опущенные на BC, т.е. прямая XY параллельна BC.

6. Пусть $\angle IAC = \alpha$, $\angle IBC = \beta$. Очевидно, $\alpha + \beta = 45°$ и IA_0CB_0 – квадрат. Кроме того, $\angle PA_0C = \angle IAC = \alpha$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Аналогично, $\angle PB_0C = \beta$. Из треугольника A_0B_0P находим, что

$$\angle A_0PB_0 = 180° - (\alpha + 45°) - (\beta + 45°) = 45° .$$

Рассмотрим окружность Ω с центром C и радиусом CA_0. Вписанные углы, опирающиеся на дугу A_0B_0 этой окружности, равны $45°$, следовательно, точка P лежит на Ω. Поэтому $\angle PCB_0 = 2\angle PA_0B_0 = 2\alpha + 90°$, а смежный угол составляет $90° - 2\alpha = 90° - \angle CAB$. Это и значит, что $CP \perp AB$.

7. Пронумеруем отдельно гуманитариев и отдельно математиков в порядке, определенном исходной очередью (в первой партии играют $М_1$ и $Г_1$). Заметим, что математики (гуманитарии) отдельно (считая того, кто за столом) всегда находятся в очереди в том же циклическом порядке: никто друг друга не обгоняет. Математик может сместиться в очереди относительно гуманитария, но только за столом: например, математик М может выйти к столу *раньше* гуманитария Г, а выйти из-за стола *позже* него.

Разобьем все игры на *циклы* по $m + n - 2$ игры. За время первого цикла из-за стола выйдут $m + n - 2$ игрока, т.е. все стоящие в очереди, кроме $М_m$ и $Г_n$. Значит, они стоят за столом в начале второго цикла. По тем же соображениям, в начале третьего цикла за столом стоят $М_{m-1}$ и $Г_{n-1}$ и т.д.: с каждым циклом номера играющих в его первой партии смещаются «по кругу» на 1. Поэтому каждый математик за m циклов *выйдет из-за стола* ровно $m - 1$ раз, а за mn циклов – $n(m-1)$. Аналогично, каждый гуманитарий за mn циклов *выйдет из-за стола* ровно $m(n-1)$ раз.

Пусть, например, $m > n$. Тогда $n(m-1) - m(n-1) = m - n \geq 1$. Рассмотрим произвольных математика М и гуманитария Г. Как показано выше, за $2mn$ циклов М выходил из-за стола по крайней мере на 2 раза больше, чем Г. Отсюда следует, что между какими-то двумя «выходами» М у Г выходов из-за стола не было. Допустим, Г ни разу не сыграл с М. Тогда Г между этими выходами М оставался в очереди. Но после первого выхода он был впереди М, а когда М снова дошел до стола – позади него. Противоречие, так как Г не мог обогнать М в очереди.

Замечания. 1) На самом деле каждая пара противников сыграет между собой уже за mn циклов. Действительно, если m и n взаимно просты, то, как видно из вышеизложенного, они встретятся за столом в первой партии одного из циклов. В противном случае $|m - n| \geq 2$, и конец доказательства проходит уже для mn циклов.

2) При $n = m > 2$ утверждение неверно. Например, если математики будут чередоваться с гуманитариями, то каждый всегда будет играть только со своими соседями по кругу, порядок в котором меняться не будет.

10–11 классы

2. Можно.

Группы мальчиков чередуются с группами девочек. Изначально было две группы. Когда садился неотважный ребенок, то он подсаживался к группе, и количество групп не менялось. Когда садился отважный ребенок, он разбивал группу другого пола на две и составлял новую группу из самого себя, увеличивая общее количество групп на 2.

В конце оказалось 22 группы. Значит, отважных ребят было $(22 - 2) : 2 = 10$.

3. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Возьмем два произвольных узла X и Y внутри треугольника. Пусть один из них лежит вне треугольника $A_1B_1C_1$ – например, X лежит внутри треугольника AB_1C_1. Построим отрезок AW, серединой которого является точка X. Тогда W – также узел, он находится внутри ABC, и прямая XW проходит через A.

Пусть теперь оба узла X и Y принадлежат треугольнику $A_1B_1C_1$. Если прямая XY параллельна одной из сторон треугольника, все в порядке. В противном случае применим лемму из решения задачи 5 для младших классов к треугольнику $A_1B_1C_1$. Пусть, например, конец Z_1 отрезка A_1Z_1, равного и параллельного XY, лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда отрезок AZ, симметричный A_1Z_1 относительно середины B_1C_1, также равен и параллелен XY. Поэтому Z – узел, лежащий внутри AB_1C_1. Как показано выше, на прямой AZ есть еще один узел.

4. Не может.

Предположим, условия выполнены. Назовем числа от 26 до 75 *средними*, а остальные – *крайними*. Два крайних числа подряд идти не могут (модуль их разности меньше 25 или больше 50). Но крайние числа составляют ровно половину общего количества чисел. Поэтому средние и крайние числа должны чередоваться. Но рядом со средним числом 26 может стоять только одно крайнее число – 76. Противоречие.

6. Запишем наши 5 чисел по кругу и обозначим их a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 в порядке обхода (мы считаем, что $a_{i+5} = a_i$). Докажем сначала, что найдутся три числа подряд: a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, для которых $a_i \geq a_{i+1} + a_{i+2}$ (и, значит, эти три числа не являются длинами сторон треугольника). Предположим противное – тогда при каждом i = 1, …, 5 должно выполняться неравенство $a_i < a_{i+1} + a_{i+2}$; умножая на a_i и складывая все пять этих неравенств, получаем противоречие с условием.

Заметим теперь, что есть всего 4! = 24 различных варианта записи исходных пяти чисел по кругу (с точностью до циклического сдвига). И в каждом таком варианте найдется упорядоченная тройка (a, b, c), числа в которой не являются длинами сторон треугольника. Каждая такая упорядоченная тройка может встретиться лишь при двух вариантах (отличающихся порядком оставшихся двух чисел). Значит, среди 24-х найденных упорядоченных троек встретятся хотя бы 12 разных.

С другой стороны, одной неупорядоченной тройке, в которую входят числа a, b и c, могут соответствовать лишь две найденные упорядоченные тройки: (a, b, c) и (a, c, b), где a – наибольшее число в тройке. Значит, различных неупорядоченных троек найдется хотя бы 6.

Замечание. Более шести «плохих» троек гарантировать нельзя. Возьмем a_1, a_2, a_3, a_4 близкими к 1, тогда a_5 найдется из квадратного уравнения (его свободный член близок к –2, поэтому оно имеет положительный корень). При этом каждая тройка чисел из набора $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – хорошая.

7. Могут (в обоих случаях).

а) Пусть задний мудрец назовет остаток от деления на 1001 суммы чисел, которые он видит (называя 1001, если остаток 0). Тогда следующий может вычислить свое число, отняв от названного сумму того, что видит. Так продолжается, пока чье-то вычисленное число не совпадет с тем, что назвал задний. Тогда этот *неудачник* вместо своего числа назовет число самого переднего мудреца. По договоренности остальные поймут, что он имел в виду число заднего, и будут далее действовать исходя из этого. В итоге ответят правильно все мудрецы, кроме, возможно, заднего, неудачника и переднего.

б) Пусть спрятанный колпак лежит за спиной заднего мудреца. Тогда номера колпаков образуют перестановку. Задний не видит двух номеров, и для них есть два варианта расположения. В одном из вариантов перестановка четная[1] (а в другом – нет). В соответствии с этим вариантом задний свой номер и называет (ошибаясь с вероятностью 50%). В полученной четной перестановке второй сзади не знает расположения только двух номеров: своего и того, который, по мнению первого, лежит позади. Есть два варианта расположения неизвестных номеров, и лишь в одном из них перестановка четна. В соответствии с этим второй правильно вычисляет свой номер. Точно так же все остальные последовательно вычисляют свои номера. В результате правильно ответят все, кроме, быть может, заднего.

Устный тур для 11 класса

1. Всегда.

Первое решение. Мы будем пользоваться тем фактом, что любой многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом принимает минимальное значение в некоторой точке.

Обозначим данные многочлены через $Q_i(x)$. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^{2n}$, где $2n > \deg Q_i$ для всех i. Покажем, что к P можно прибавить константу c так, что график $P + c$ не пересечет ни одного из графиков Q_i. Для этого заметим, что $P - Q_i$ – многочлены четной степени, а значит, достигают своих минимальных значений m_i. Но тогда, положив $c = \max_i(-m_i + 1)$, мы получим искомый многочлен.

Второе решение. В тех же обозначениях положим $P = Q_1^2 + \ldots + Q_n^2 + 1$. Заметим, что при любом i и любом x верно неравенство $Q_1^2(x) - Q_1(x) + 1 + Q_2^2(x) + \ldots + Q_n^2(x) > 0$, так как $a^2 - a + 1 > 0$ при любом a. Значит, $P(x) > Q_1(x)$. Аналогично, $P(x) > Q_i(x)$, и график P не пересекается ни с одним из графиков Q_i.

3. Пусть l – радикальная ось вписанной окружности ω треугольника ABC и точки K (рассматриваемой как окружность нулевого радиуса). Заметим, что l существует, поскольку K отлична от центра ω (в противном случае рассматриваемые перпендикуляры параллельны соответствующим сторонам). Тогда равенство $X_1X = X_1K$ означает, что X_1 лежит на l; аналогично, точки Y_1 и Z_1 также лежат на l.

4. Бесконечно.

При любом натуральном n положим $a_n = 7^n + 7^{n-1} + \ldots + 7 + 1$. Покажем, что к a_n можно прибавить несколько различных степеней семерки, не превосходящих 7^n, чтобы получилось число b_n без нулей в десятичной записи. Тогда семеричная запись b_n будет состоять из единиц и двоек. Ясно, что таким образом мы построим бесконечно много различных чисел b_n, удовлетворяющих условию.

Итак, рассмотрим десятичную запись числа a_n и первый *слева* ноль в ней (если он есть). Пусть он стоит в i-м разряде *справа* (разряд единиц считаем нулевым). Найдется степень семерки 7^k, лежащая между 10^i и $7 \cdot 10^i$; заметим, что она меньше a_n и поэтому меньше 7^{n+1}. После прибавления ее к a_n перехода из i-го разряда не произойдет (так как первая цифра 7^k меньше 9), при этом в i-м разряде окажется не ноль. Значит, в полученном числе первый слева ноль в десятичной записи (если он есть) расположен правее, чем в a_n; применим к этому нулю то же действие (при этом мы прибавим меньшую степень семерки, чем в предыдущий раз). Продолжая так дальше, в результате построим требуемое число b_n.

6. Пусть O – общая точка всех данных окружностей. Разобьем всю плоскость, кроме точки O, на такие кольца с центром в O, что отношение внешнего и внутреннего радиусов каждого кольца равно $\sqrt{2}$. Будем считать, что внешняя окружность каждого кольца принадлежит ему, а внутренняя – нет. Занумеруем все кольца последовательно целыми числами: $\ldots, R_{-1}, R_0, R_1 \ldots$ Также проведем через точку O четыре прямые, делящие плоскость на восемь равных углов и не проходящие через центры окружностей. Рассмотрим пару вертикальных углов и поместим в первую, вторую и третью группы все окружности, центры которых лежат в кольцах R_{3i+1}, R_{3i+2} и R_{3i} соответственно (при целых i) и в этой паре углов. Каждая из трех других пар вертикальных углов аналогичным образом дает еще по три группы. Мы утверждаем, что разбиение – искомое.

Пусть A и B – центры двух окружностей ω_A и ω_B, причем A лежит на ω_B, т.е. $OB = AB$ (рис. 3). В частности, это значит, что $\angle AOB$ острый, поэтому точки лежат в одном угле и $\angle AOB < 45°$. Значит, $\angle ABO = 180° - 2\angle AOB > 90°$. Отсюда $OA^2 > AB^2 + OB^2 = 2OB^2$, и точка A лежит в кольце с большим номером, чем B. С другой стороны, $OA \le OA + AB = \left(\sqrt{2}\right)^2 AB$; значит, эти номера различаются

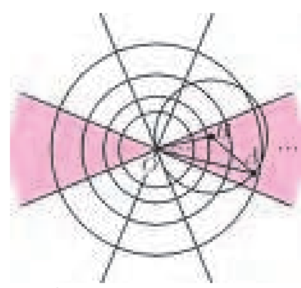


Рис. 3

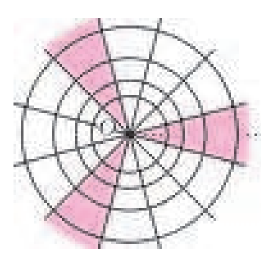


Рис. 4

не более чем на 2. Поэтому A и B попали в разные группы, что и требовалось.

Замечание. Можно проделать аналогичную процедуру, разбив плоскость на 12 углов по $30°$ и объединив их в группы по три, как показано на рисунке 4. В этом случае отношение радиусов колец может быть любым в пределах от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{3}$.

LXXVI МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

6 класс

1. Да.

Это могло быть число 0,2. В самом деле, и $0{,}2 \cdot 10 = 2$ и $0{,}2 \cdot 15 = 3$ – простые числа. Можно доказать, что приведенный пример единственный.

2. 150.

4. 7.

Понятно, что за столом были и мальчики, и девочки. За группой сидящих рядом мальчиков следует группа девочек, затем снова мальчики, снова девочки и так далее (группа может состоять и из одного человека). Группы мальчиков и девочек чередуются, поэтому их четное число. Неверные утверждения

[1] Перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ называется четной, если в ней четное число инверсий. Инверсия – это любая такая пара чисел a_i и a_j, что $i < j$, но $a_i > a_j$.

звучали на переходах от группы к группе, т.е. их тоже четное число. Так как утверждений «большинство из нас мальчики» прозвучало семь, то неверны шесть утверждений «большинство из нас девочки», и групп тоже было шесть.
Чередование верных и неверных утверждений означает, что в группах было по двое детей. Лишь сидящие рядом первый и последний ребенок сказали одно и то же, поэтому в их группе три человека. Это мальчики, так как их большинство. Всего за столом сидели $2 + 2 + 2 = 6$ девочек и $2 + 2 + 3 = 7$ мальчиков.
На рисунке 5 показано, как именно ребята сидели за столом. Первый говорящий обведен в рамочку.

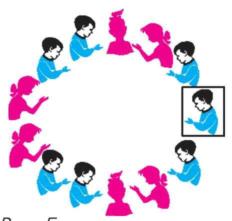


Рис. 5

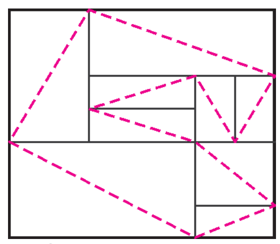


Рис. 6

5. На рисунке 6 приведен пример для 9 графств.
Замечание. Можно доказать, что для 7 графств (или меньше) примера не существует.
6. а) 31 монета; б) 30 монет.
С каждого отряда в N богатырей Черномор получит в лучшем случае $N - 1$ монету, так как остаток меньше делителя. Значит, всего он получит не более чем $33 - K$ монет, где K – число отрядов. Если отряд всего один, то $240 : 33 = 7$ (остаток 9), так что Черномору достанется лишь 9 монет. Он может попытаться получить 31 монету, разделив богатырей на два отряда.
а) Если деньги делить не обязательно поровну, то это вполне можно сделать. Например, пусть в первом отряде 32 богатыря, а во втором один. Тогда можно дать первому отряду 63 монеты (из которых Черномор и получит 31), а остальные 177 монет отдать единственному богатырю из второго отряда.
б) Однако если деньги делить поровну, то так сделать не удастся. Если, выдав отряду в N человек 120 монет, Черномор рассчитывает получить $N - 1$ монету, то число 121 должно делиться на N. Однако 121 делится только на 1, 11 и 121, а из двух таких чисел невозможно сложить 33. Но вот получить 30 монет удастся, если поделить богатырей на три отряда: два по 3 богатыря и один из 27 богатырей.

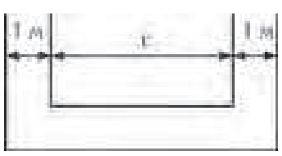


Рис. 7

7 класс

5. 4 м, 6 м, 8 м.
Длины сторон двух соседних дорожек отличаются на 2 м (рис.7). Поэтому в момент, когда Му добежал до угла, Ра пробежал по правой стороне дорожки 2 м и находился на расстоянии $2 + 1 = 3$ м от «нижней» стороны внешней дорожки. Поскольку Ра находится посередине между Му и Веем, Вей в этот момент находится на вдвое большем расстоянии от этой стороны, 6 м, так как два выделенных на рисунке 8 треугольника равны по гипотенузе и углам. Значит, Вею остается еще пробежать по боковой стороне $6 - 1 - 1 = 4$ м.

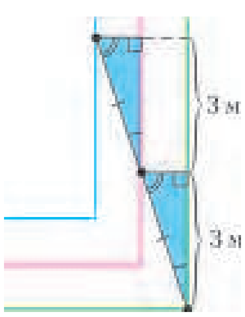


Рис. 8

Но если бы Вей бежал против часовой стрелки, то он пробежал бы всю нижнюю сторону и еще 4 м по правой стороне, т.е. оказался бы в той же точке. Раз Вей попадает в одну и ту же точку, двигаясь и по часовой стрелке, и против часовой стрелки, эта точка – правый верхний угол квадрата. Итак, сторона этого квадрата равна 4 м. Соответственно, стороны двух других квадратов равны $4 + 2 = 6$ м и $6 + 2 = 8$ м.

8 класс

1. Да, можно получить сумму 207.
Например, $207 = 2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89$, $207 = 2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89$ или $207 = 2 + 5 + 7 + 43 + 61 + 89$. Можно показать, что в остальных случаях сумма будет не меньше 225.
2. Пусть M' – середина стороны BC, точка N' делит сторону AB в отношении $3 : 1$, считая от вершины B (рис. 9). Треугольники BMN и $BM'N$ равны, так что $MN = M'N'$.
Теперь достаточно доказать, что четырехугольник $APM'N'$ – параллелограмм. Но действительно, его противоположные стороны PM' и AN' равны и параллельны: отрезок $M'P$ является средней линией треугольника CBM, поэтому он параллелен отрезку BM и равен его половине – т.е. отрезку AN'.

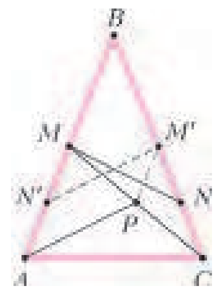


Рис. 9

3. Да.
Если бы школьников было 11 и они решили разное количество задач, то всего было бы решено $0 + 1 + \ldots + 10 = 55$ задач. Так как школьников десять, то отсутствует один из вариантов, и количество решений равно $55 - x$, где x – целое число от 0 до 10.
Каждая из 10 задач решена одинаковым количеством школьников, так что количество решений всех задач кратно 10. Поэтому $x = 5$, т.е. нет школьника, решившего ровно 5 задач. Значит, Боря не мог решить только задачи с первой по пятую.
6. При $N = 2$, $N = 17$, а также при всех составных N, кроме $N = 16$, $N = 34$ и $N = 289$.
Будем называть число *выигрышным*, если для соответствующего N выигрывает первый, и *проигрышным*, если второй. Число является выигрышным тогда и только тогда, когда существует ход из него в проигрышное число, а проигрышным – тогда и только тогда, когда любой ход из него ведет в выигрышное число.
Пользуясь этим утверждением, можно, рассматривая натуральные числа последовательно, выяснить про любое конкретное число, является оно выигрышным или проигрышным: число 1 проигрышное, число 2 выигрышное, число 3 проигрышное (так как единственный ход ведет из него в выигрышное число 2), число 4 выигрышное (так как из него есть ход в проигрышное число 3) и так далее. Когда мы дойдем до 17, то получим, что среди проверенных чисел все простые, кроме 2 и 17, являются проигрышными, а все составные, кроме 16, выигрышные. Также несложно убедиться в том, что 34 – проигрышное.
Докажем, что 2 и 17 – единственные выигрышные простые числа. Предположим, что это не так, и рассмотрим следующее выигрышное простое число p. В таком случае $p - 1$ – проигрышное составное число, поэтому среди делителей числа $p - 1$ не может быть проигрышных простых чисел, т.е. $p - 1 = 2^n \cdot 17^k$. Но
- если $p - 1 = 2^n \cdot 17^k$ (где хотя бы одно из чисел n, k больше 1), то от $p - 1$ можно перейти к 34 и выиграть;
- если $p - 1 = 2^n$, то от $p - 1$ можно перейти к 16 и выиграть;
- наконец, случай $p - 1 = 17^k$ невозможен, так как число $p - 1$ четно.

Осталось разобраться с составными числами. Если составное число N имеет простой делитель p, отличный от 2 и 17, то из него есть ход в проигрышное число p, т.е. число N является выигрышным. Если же $N = 2^n \cdot 17^k$, то

- если $N = 2 \cdot 17 = 34$, то число N проигрышное;
- если $N = 2^n \cdot 17^k$ (где хотя бы одно из чисел n, k больше 1), то от N можно перейти к 34 и выиграть;
- случаи $N = 2^n$ ($n \le 4$) разобраны выше;
- если $N = 2^n$ ($n > 4$), то от N можно перейти к 16 и выиграть;
- если $N = 17^2 = 289$, то число N проигрышное;
- если $N = 17^k$ ($k > 2$), то от N можно перейти к 17^2 и выиграть.

Итак, мы получили заявленный перед решением ответ.

9 класс

1. 9.

Указание. Убедитесь в том, что если пирожных 9, то кругов будет 7. (После первого круга останется 6 пирожных, после второго – 4 и т.д.) Теперь надо убедиться, что других решений нет. Если пирожных больше 9, то через некоторое время их будет 9, и после этого будет сделано еще 7 кругов, значит, всего кругов будет больше 7. Аналогично доказывается, что меньше 9 пирожных быть не может.

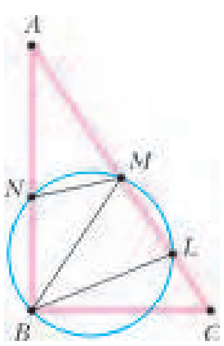


Рис. 10

2. Так как BM – медиана в прямоугольном треугольнике, то $BM = CM = AM$ (рис.10). Значит, треугольник AMB равнобедренный, т.е. $\angle ABM = \angle BAM$ и $AM = BM$.
По условию $\angle ABM = \angle MBL$, значит, $\angle MAN = \angle MBL$.
Во вписанном четырехугольнике $BLMN$ сумма углов MNB и MLB равна $180°$. Также сумма углов MNA и MNB равна $180°$, так как они смежные. Значит, $\angle MNA = \angle MLB$.
Таким образом, треугольники AMN и BML равны по двум углам и стороне. Отсюда $AN = BL$.

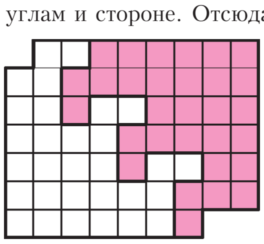


Рис. 11

3. См. решение задачи 6,а сложного варианта XXXIV Турнира городов для 10–11 классов.

4. См. рис. 11.

6. 82 мудреца.

Указание. По принципу Дирихле есть два вагона, в которых хотя бы 18 мудрецов, иначе всего их не более чем $(9+8)+8 \cdot 10 = 97 < 100$. Значит, контролеры смогут сразу же поймать 18 мудрецов. Все мудрецы, которые не будут пойманы сразу, не будут пойманы никогда. Доказать это можно в два этапа. Во-первых, надо показать, что за первые три остановки каждый мудрец может перебежать в вагон, в котором его не поймают в первый ход контролеров. При этом надо учитывать, что 1-й и 12-й вагоны также являются нежелательными – в большинстве случаев их также можно избежать. Во-вторых, надо показать, что в дальнейшем на каждой остановке каждый мудрец может перебежать так, что он не будет пойман на следующем ходу контролеров и не окажется в крайних вагонах. Случаи, когда мудрец после 4-й остановки оказался в крайнем вагоне, разбираются отдельно.

10 класс

1. Обозначим координаты точек: $M(x_0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. Тогда трехчлены равны $(x - x_0)(x - x_1)$ и $(x - x_0)(x - x_2)$ соответственно. Ордината точки C равна значению первого трехчлена в нуле, т.е. $x_0 x_1$. Аналогично, ордината точки D равна $x_0 x_2$. Теперь заметим, что

$$\frac{AO}{BO} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_0 x_1|}{|x_0 x_2|} = \frac{CO}{DO},$$

также $\angle AOC = 90° = \angle BOD$, следовательно, треугольники AOC и BOD подобны по двум сторонам и углу между ними.

3. $\dfrac{S}{2n}$.

Обозначим центр нашего многоугольника через O. Тогда площадь всего многоугольника равна

$$S(OA_1A_2) + S(OA_2A_3) + \ldots + S(OA_{4n-1}A_{4n}) + \\ + S(OA_{4n}A_1) = 4nS(OA_1A_2),$$

где через $S(P)$ мы обозначили площадь многоугольника P. Значит, если обозначить площадь треугольника вида OA_iA_{i+1} через x, имеем $S = 4nx$, иными словами, $x = \dfrac{S}{4n}$. Покажем, что площадь искомого четырехугольника равна

$$2x = 2\left(\frac{S}{4n}\right) = \frac{S}{2n}.$$

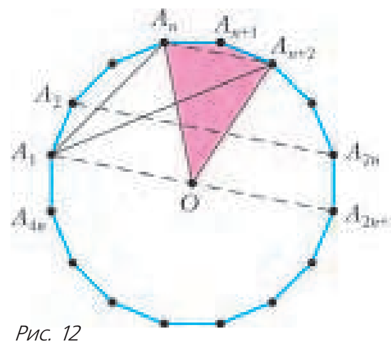


Рис. 12

Точки A_1 и A_{2n+1} – противоположные вершины многоугольника. Следовательно, диагональ A_1A_{2n+1} проходит через O (рис.12). Очевидно, что

$$A_1A_{2n+1} \parallel A_2A_{2n} \parallel A_3A_{2n-2} \parallel \ldots \parallel A_{1+(n-1)}A_{2n+1-(n-1)} = A_nA_{n+2}.$$

Значит, площади треугольников $A_1A_nA_{n+2}$ и OA_nA_{n+2} равны, так как у них совпадают основания и высоты. Отсюда имеем

$$S(A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}) = S(A_1A_nA_{n+2}) + S(A_nA_{n+1}A_{n+2}) = \\ = S(OA_nA_{n+2}) + S(A_nA_{n+1}A_{n+2}) = S(OA_nA_{n+1}A_{n+2}) = \\ = S(OA_nA_{n+1}) + S(OA_{n+1}A_{n+2}) = 2S(OA_nA_{n+1}) = 2x,$$

что и требовалось.

5. Верно.

Попробуем приблизиться к решению задачи: найдем многочлен $f_0(x)$ степени не выше 2013, который совпадает с $f(x)$ в точках 1, 2, …, 2014. Такой многочлен известен и называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*, в нашем случае он задается формулой

$$f_0(x) = f(1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-2014)}{(1-2)(1-3)\ldots(1-2014)} + \ldots \\ \ldots + f(i) \cdot \frac{(x-1)\ldots(x-(i-1))(x-(i+1))\ldots(x-2014)}{(i-1)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-2014)} + \ldots \\ \ldots + f(2014) \cdot \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2013)}{(2014-1)(2014-2)\ldots(2014-2013)}.$$

Видно, что в выражении для $f_0(i)$ равны нулю все слагаемые суммы, кроме i-го, которое, в свою очередь, равно $f(i)$. Поэтому многочлен $f_0(x)$ удовлетворяет желаемым требованиям.

Пусть $c = (2013!)^2$. Тогда коэффициенты многочлена $cf_0(x)$ – целые числа. Пусть p – простое число, большее c. Тогда многочлен $cQ_p(x) - cf_0(x)$ имеет степень не выше 2013 и имеет 2014 различных корней по модулю p – это числа 1, 2, … …, 2014 (поскольку $cQ_p(i) - cf_0(i) = c(Q_p(i) - f(i))$ при $1 \le i \le 2014$). Поэтому этот многочлен тождественно равен нулю по модулю p. Значит, число

$$c(f(x) - Q_p(x)) + (cQ_p(x) - cf_0(x)) = cf(x) - cf_0(x)$$

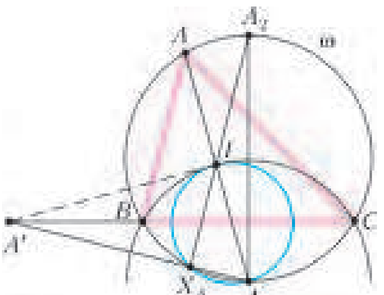


Рис. 13

делится на любое достаточно большое простое p при любом целом x. Следовательно, $f(x) = f_0(x)$ при всех целых x.

6. Обозначим точку пересечения прямой A_1A' с прямой A_2I через X_A, а описанную окружность ΔABC – через ω (рис.13). По условию, $\angle A_2X_AA_1 = 90°$. Так как A_2A_1 – диаметр ω, точка X_A лежит на ω. Рассмотрим теперь описанные окружности треугольников ABC, BIC и IX_AA_1. Радикальная ось [1] первой и второй окружностей есть прямая BC, а первой и третьей – X_AA_1 (это прямые, содержащие общие хорды этих окружностей). Значит, радикальным центром [2] всех этих трех окружностей является точка A'. Заметим, что

$$\angle IBA_1 = \angle IBC + \angle CBA_1 = \angle IBA + \angle A_1AC =$$
$$= \angle IBA + \angle BAA_1 = \angle BIA_1 .$$

Следовательно, $A_1I = A_1B = A_1C$, или, иными словами, точка A_1 является центром описанной окружности треугольника BIC. [3] Так как угол IX_AA_1 прямой, то IX_A – диаметр описанной окружности треугольника A_1IX_A. Следовательно, описанные окружности треугольников BIC и X_AIA_1 касаются в точке I. Значит, касательная к этим окружностям, проведенная в точке I, проходит через A'. Причем по свойству степени точки A' относительно описанной окружности ΔBIC верно $A'I^2 = A'B \cdot A'C$.

Рассмотрим ω и точку I как вырожденную в точку окружность. Из последнего равенства следует, что точка A' лежит на радикальной оси этих двух окружностей. По аналогичным причинам на этой радикальной оси лежат и точки B' и C'. Так как радикальная ось двух окружностей – прямая, то все эти три точки лежат на одной прямой, перпендикулярной линии центров этих окружностей, т.е. прямой OI.

11 класс, первый день

1. Заметим, что дискриминант приведенного квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ не меняется при сдвиге переменной, т.е. при замене x на $x + h$ (проверьте!). Значит, можно считать, что общим корнем заданных в условии квадратных трехчленов является $x_0 = 0$. Тогда трехчлены имеют вид $x^2 + p_1x$, $x^2 + p_2x$, а их сумма равна $2x^2 + (p_1 + p_2)x$. По условию их дискриминанты связаны равенством $(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2$, откуда $2p_1p_2 = 0$, что и означает равенство нулю p_1 или p_2, а значит, и дискриминанта одного из трехчленов.

2. 2 и 3, 2 и 5, 3 и 11.

3. Обозначим векторы $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{HA}$ и $\overline{HC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ соответственно (рис.14). Заметим, что

$$\overline{KL} = \overline{KB} + \vec{a} + \overline{CL} = \overline{KA} + \vec{b} + \overline{DL} .$$

Отсюда получаем, что $2\overline{KL} = \vec{a} + \vec{b}$. Заметим также, что $2\overline{HM} = \vec{c} + \vec{d}$.

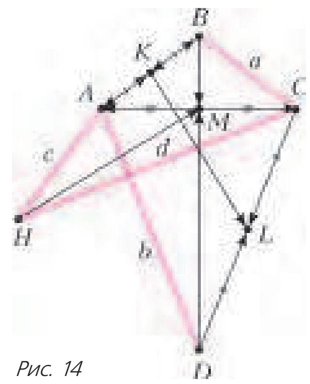


Рис. 14

Следовательно, прямые KL и HM перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = 0 .$$

Так как по условию $AB = BC$ и $AD = DC$, то прямая BD – серединный перпендикуляр к отрезку AC. Следовательно, точка M лежит на прямой BD и $BD \perp AC$. Рассмотрим вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \overline{BM} + \overline{MC} + \overline{DM} + \overline{MA} =$$
$$= \overline{BM} + \overline{DM} \perp \overline{AC} = \vec{d} - \vec{c} .$$

Таким образом, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0$.

Поскольку по условию $HA \perp BC$ и $HC \perp AD$, то $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$. Следовательно,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} =$$
$$= -\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

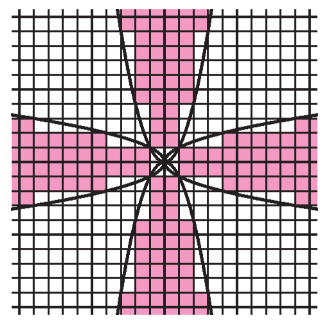


Рис. 15

4. Можно (рис.15).

Покрасим в красный цвет те клетки, все точки которых удовлетворяют одному из четырех неравенств $y \ge x^2$, $y \le -x^2$, $x \ge y^2$ или $x \le -y^2$, все остальные клетки покрасим в белый цвет.

5. Нет.

Указание. Заметим, что для любых трех заданных точек на прямой существует единственная точка, сумма расстояний от которой до заданных будет минимальной, – это средняя из трех заданных точек. Следовательно, тренер всегда будет находиться рядом со спортсменом, который находился между двумя другими. Нарисуем графики движения спортсменов (рис.16). Тогда график движения тренера описывается ломаной $OPRQT$, а длина l его пути равна сумме длин отрезков OP', $P'R'$, $R'Q'$, $Q'O$.

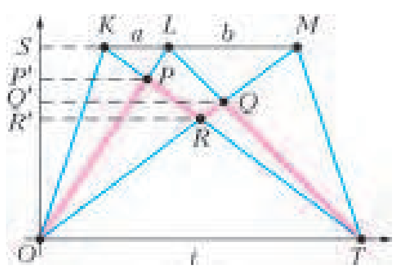


Рис. 16

Из подобия треугольников и теоремы о пропорциональных отрезках можно вывести, что

$$l = OP' + P'R' + R'Q' + Q'O = 120t\left(\frac{1}{a+l} + \frac{1}{b+l} - \frac{1}{a+b+l}\right).$$

Осталось заметить, что наименьшее значение это выражение принимает при $b = t - a$, $a = \frac{t}{2}$, откуда

$$l > 120t\left(\frac{2}{3t} + \frac{2}{3t} - \frac{1}{2t}\right) = 100 \text{ м} .$$

6. б) Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ количество баллов, полученное шахматистами первой команды в порядке убывания, а через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – количество баллов, полученное шахматистами второй команды в порядке убывания. Так как было сыграно n^2 матчей, то сумма всех этих $2n$ чисел равна n^2. Предположим, что все эти числа различны. Тогда среди них встречаются все числа $0, \frac{1}{2}, \ldots, n$, кроме одного. Поскольку

---

[1] *Степенью точки P* относительно окружности ω с центром в точке O и радиусом R называется величина $|OP|^2 - R^2$. *Радикальной осью* двух окружностей называется ГМТ, степени которых относительно обеих окружностей равны.

[2] *Радикальным центром* трех окружностей называется точка, степень которой относительно всех трех окружностей одинакова.

[3] Этот факт иногда называют *леммой о трезубце*.

$0+\frac{1}{2}+\dots+n=n^2+\frac{n}{2}$, то среди полученных шахматистами баллов отсутствует число $n/2$.

Рассмотрим p наибольших чисел среди $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$. Это наилучшие результаты $a_1, a_2, \dots, a_k$ шахматистов первой команды и наилучшие результаты $b_1, b_2, \dots, b_m$ шахматистов второй команды, где $k=k(p)$ и $m=m(p)$ зависят от p, $k+m=p$.

Предположим, $p \le n$, $k=m$. Количество матчей, в каждом из которых участвовал хотя бы один из этих шахматистов, равно $k^2+2k(n-k)=2kn-k^2$. С другой стороны, по нашему предположению, вместе они набрали очков

$$n+\left(n-\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)=2nk-k^2+\frac{k}{2}.$$

Но это больше, чем количество сыгранных ими матчей. Получаем противоречие, т.е. при $p \le n$ верно $k \ne m$.

Случай для $n < p < 2n$ доказывается аналогично.

Заметим, что при увеличении p на 1 одно из чисел k и m также увеличивается на 1, а другое не меняется. При этом при $0 < p < 2n$ эти числа не равны. Значит, по дискретной непрерывности одно из них всегда больше другого. Пусть $k(p) > m(p)$. Это неравенство означает, что $a_i > b_i$ для любого i от 1 до n. Но тогда и суммарное количество баллов, набранных первой командой, больше, чем у второй. Противоречие.

11 класс, второй день

1. Три других слитка могли иметь массы 1, 1 и 1 кг; 1, 2 и 2 кг; 3, 3 и 3 кг.

2. $a=e^{1/e}$.

Узнать, как решаются такие уравнения, можно из статьи Ю.Сидорова «Об одном замечательном уравнении» («Квант» №5 за 1990 г.).

3. Первое число меньше.

Обозначим первое число через A, а второе – через B. Тогда

$$A^2=\left(1+\frac{2}{3^3}\right)^2\left(1+\frac{2}{5^3}\right)^2\dots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right)^2<$$

$$<\left(1+\frac{2}{2^3}\right)\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{4^3}\right)\dots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right)<$$

$$<\left(1+\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1+\frac{2}{3^3-1}\right)\dots\left(1+\frac{2}{2013^3-1}\right)=$$

$$=\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2013^3+1}{2013^3-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{n^3+1}{n^3-1}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)},$$

$$(n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1.$$

Поэтому после такого разложения на множители числителей и знаменателей можно произвести сокращение дробей:

$$A^2<\frac{3\cdot 3}{1\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot 7}{2\cdot 13}\cdot\frac{5\cdot 13}{3\cdot 21}\cdot\ldots\cdot\frac{2014\cdot\left(2013^2-2013+1\right)}{2012\cdot\left(2013^2+2013+1\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2013\cdot 2014}{2013^2+2013+1}<\frac{3}{2}=B^2.$$

Следовательно, $A < B$.

4. Да, найдется. Например, из треугольника ABC со сторонами $AB=AC=3$ и $BC=2$ можно свернуть сразу два таких многогранника (рис.17 и 18).

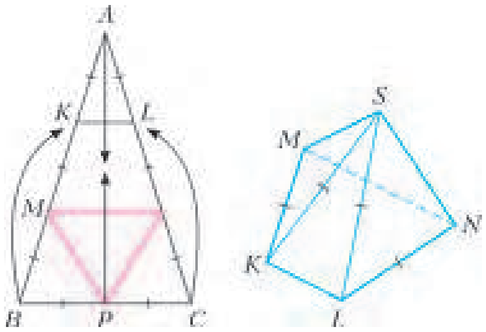


Рис. 17

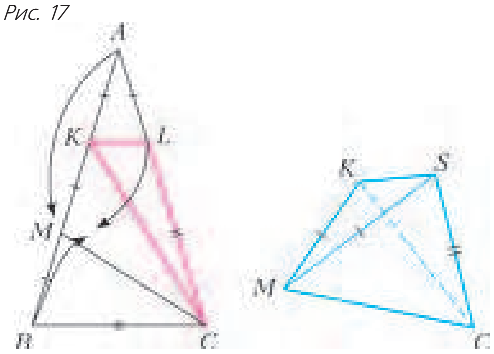


Рис. 18

5. а) Да; б) да.

а) Пусть Дима сообщил Саше следующие 17 номеров: 1, 2,… …, 10, 40, 50, …, 100. Если числа, стоящие под номерами m и n ($n > m$), совпали, то количество написанных Сашей чисел является делителем числа $n-m$. Разность $n-m$ для названных Димой номеров может равняться 1, 2, …, 10, 30, 31, …, 99.

Будем перебирать по очереди все возможные варианты количества написанных Сашей чисел от 1 до 100. Если Саша написал одно число, то Дима узнает это, сравнив первое и второе числа. Предположим, что Дима уже знает, что Саша написал не меньше k чисел, где $k=2, 3, \dots, 99$. Покажем, как Дима сможет определить, написал ли Саша ровно k чисел. Если $k=2, 3, \dots, 9$, то Дима сравнивает первое число и число с номером $k+1$. Их совпадение будет означать, что количество написанных Сашей чисел является делителем k. Учитывая, что по нашему предположению Дима уже знает, что этих чисел не меньше k, он получит, что k и есть искомое количество. Аналогично, если $k=10, 30, 31, 32, \dots, 99$, он сравнит два известных ему числа с разностью номеров, равной k, и точно узнает, является ли k количеством написанных Сашей чисел. Если же $k=11, 12, \dots, 29$, то Дима сможет подобрать среди известных ему чисел такие две пары, разность номеров первой из которых равна $2k$, а второй $3k$. Если в каждой из пар числа совпадут, то k – непременно искомое количество чисел, ведь это единственное число, не меньшее k, которое делит и $2k$, и $3k$. Наконец, если $k=100$, то Дима сможет заключить, что Саша написал ровно 100 чисел.

б) Пусть n – количество написанных Сашей чисел. Покажем, как Дима сможет узнать его разложение на простые множители, сообщив Саше 15 номеров.

Обозначим через N наименьшее общее кратное всех чисел от 1 до 100. Это число равно произведению следующих чисел: 2^6, 3^4, 5^2, 7^2, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97. Каждому из чисел 2^k ($k=1, 2, \dots, 6$) сопоставим число 2^{7-k}, каждому из чисел 3^l ($l=1, 2, \dots, 4$) – число 3^{5-l}, каждому из чисел 5^m и 7^m ($m=1, 2$) – числа 5^{3-m} и 7^{3-m} соответственно, каждому простому числу от 11 до 97 – само это число. Заметим, что число с номером $1+\frac{N}{s}$, где s – делитель N, будет совпадать с первым числом тогда и только тогда, когда $\frac{N}{s}$ делится на

n. Заметим также, что $\frac{N}{s}$ делится на n тогда и только тогда, когда для любого делителя числа n вида 2^k, 3^l, 5^m, 7^m, 11, …, 97 сопоставленное ему число не является делителем числа s.

Перечислим номера, которые должен назвать Дима. Пусть первым Дима назовет номер 1. Нетрудно видеть, что никакие два из 25 чисел 2^5, 3^3, 5^2, 7^2, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97 не могут одновременно быть делителями числа n. Присвоим каждому из этих чисел свой код от 00001 до 11001, состоящий из пяти цифр 0 или 1. Пусть со второго по шестой номера Дима назовет

$$1+\frac{N}{s_1},\ 1+\frac{N}{s_2},\ \ldots,\ 1+\frac{N}{s_5},$$

где s_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$) – число, равное произведению всех чисел, сопоставленных каждому из упомянутых 25 чисел, код которых содержит единицу на месте j.

Эти номера позволят Диме определить, является ли одно из упомянутых 25 чисел делителем числа n. Для этого ему понадобится сравнить числа с номерами 1 и $1+\frac{N}{s_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, 5$) и составить новый код, где на месте j будет 0, если числа совпали, и 1 в противном случае. Если получится код 00000, то ни одно из упомянутых 25 чисел делителем n не является. Если же получился другой код, то Дима определит, что делителем n будет то самое число, код которого получится. Никакие два из трех чисел 2^6, 3^4 и 5 не могут одновременно являться делителями числа n. Присвоим каждому из этих чисел свой код от 01 до 11, состоящий из двух цифр 0 или 1.

Пусть седьмым и восьмым Дима назовет номера $1+\frac{N}{s_6}$, $1+\frac{N}{s_7}$, где s_{j+5} ($j = 1, 2$) – число, равное произведению всех чисел, сопоставленных каждому из упомянутых трех чисел, код которых содержит единицу на месте j. Как и ранее, эти номера позволят Диме определить, является ли одно из упомянутых трех чисел делителем числа n, и если да, то какое.

Пусть также Дима назовет номера

$$1+\frac{N}{2^3},\ 1+\frac{N}{2^4},\ 1+\frac{N}{2^5},\ 1+\frac{N}{2^6},\ 1+\frac{N}{3^3},\ 1+\frac{N}{3^4},\ 1+\frac{N}{7^2}.$$

Как и ранее, эти номера позволят Диме определить, являются ли числа 2^4, 2^3, 2^2, 2, 3^2, 3 и 7 делителями числа n.

Таким образом, Дима сможет определить разложение числа n на простые сомножители, а значит, и само число n.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. 21. **2.** $\rho = \frac{(\rho_1-\rho_2)r^2}{R^2}+\rho_2 \approx 806$ г/см^3.

3. $S = \frac{0{,}00125m}{\rho l} \approx 0{,}0037$ мм^2.

4. «Наш общий вес по сравнению с Луной увеличился на 3 см».

8 класс

1. Через 1,5 ч на расстоянии 2,5 км от пункта A (воспользуйтесь рисунком19).

2. $\frac{m_2}{m_1} = 0{,}99$ (задача наглядно демонстрирует, что плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха).

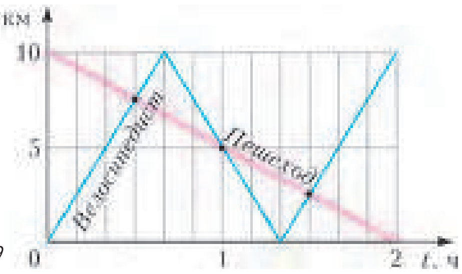


Рис. 19

3. $m_1 = \frac{2}{3}M = 2$ кг, $m_2 = \frac{1}{3}M = 1$ кг. **4.** $t_0 = -30$ °С.

9 класс

1. Начальная скорость могла находиться в интервале от 9 м/с до 12 м/с; максимальная высота могла достигаться в момент времени от 0,9 с до 1,2 с; камень мог подняться на максимальную высоту от 4,05 м до 7,2 м.

2. $S \approx 0{,}0037$ мм^2.

3. $m_2 = 3m_3 - 2m_1 = 4$ кг, $m_4 = 2m_3 - m_1 = 3$ кг.

4. $I_1' = 0$, $I_2' = I_2 - I_1 = 2$ мА.

10 класс

1. $\frac{v_в}{v_п} = \frac{t_1+t_2}{t_2-3t_1} = 5$; $\Delta t = \frac{(t_1+t_2)(t_2-3t_1)}{8t_1} = 5$ мин.

2. а) $m \approx \frac{0{,}04F_0}{g} = 16$ кг; б) $m \approx \frac{0{,}176F_0}{g} = 70{,}4$ кг.

3. $\tau_1 = 9$ мин; $\tau_2 = 8$ ч.

4. $T \approx \frac{Mv^2}{2R} \approx 5\cdot 10^6$ К (правильными считаются ответы вида $T \sim \frac{Mv^2}{R}$ с любым безразмерным коэффициентом пропорциональности порядка единицы).

5. В вершине D параллелограмма $ABDC$.

11 класс

1. $u = \frac{v_1v_2\sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha} \approx 50$ км/ч (удобно перейти в систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с лайнером «Второй»).

2. $v_1 = \sqrt{2gL\frac{(1-\sin\beta)(9-5\sin^2\beta)}{9-3\sin^2\beta}}$, $v_2 = \sqrt{2gL\frac{1-\sin\beta}{9-3\sin^2\beta}}\sin\beta$ (движение гантели можно представить как совокупность поступательного движения центра масс системы по вертикали и вращательного движения вокруг цента масса).

3. $\eta = \frac{1}{4}$. **4.** $F = \frac{5}{18\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}$. **5.** $W_L = \frac{2}{3}W$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $v = \frac{v_1\rho_1 - v_2\rho_2}{\rho_2-\rho_1} \approx 3{,}6$ км/ч. **2.** $t = \frac{4m_{02}-m_1}{4v\rho} = 30$ мин.

3. $\rho_2 = 2{,}45\rho_1 = 1{,}96$ г/см^3. **4.** $N = 125$ Вт, $\Delta m = 0{,}125$ кг.

9 класс

1. $v = \frac{2\pi R}{t}\left(1+\frac{r}{R}\right) \approx 1{,}57$ м/с; рабочий выигрывает в силе в $10\left(1+\frac{r}{R}\right) = \frac{50}{3}$ раза; $F = \frac{mg}{10(1+(r/R))} = 60$ Н; $N = Fv \approx 94$ Вт.

2. а) $\rho = \frac{3}{4}\rho_в = 750$ кг/м^3 ; б) граница будет находиться над поверхностью воды на высоте $h = \frac{5}{16} l \approx 3{,}1$ см .

3. 9:30:2,25.

4. Через резисторы текут токи $I_{12} = 25$ мА , $I_{23} = 40$ мА , $I_{34} = -45$ мА , $I_{45} = 50$ мА , $I_{56} = 20$ мА , $I_{67} = -90$ мА , $I_{78} = 25$ мА , $I_{89} = 40$ мА ; через перемычки текут токи $I_{52} = 15$ мА , $I_{58} = 15$ мА , $I_{36} = 85$ мА , $I_{69} = 195$ мА , $I_{47} = 115$ мА , $I_{14} = 210$ мА ; ток через источник равен $I_{91} = 235$ мА .

10 класс

1. $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4$ г/с . **2.** $v_2 = \sqrt{\frac{2gL\beta}{\sin\beta}}$ (β – в радианах).

3. $\varphi = \frac{2}{11} \approx 18\%$.

4. $C_{AB} = \frac{\varepsilon_0(5\varepsilon + 3)S}{2d}$ (эквивалентная схема изображена на рисунке 20, где $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

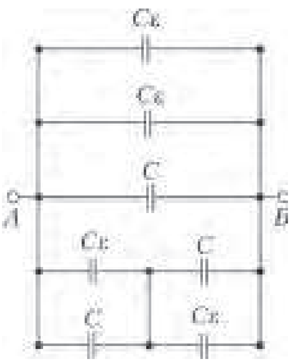


Рис. 20

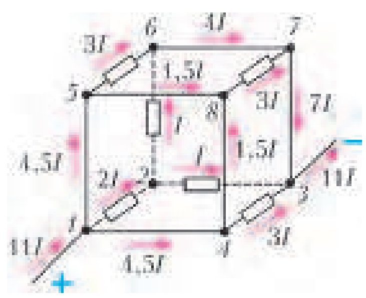


Рис. 21

5. Силы тока показаны на рисунке 21, где $I = \frac{U}{3R}$; $R_{общ} = \frac{3}{11}R$.

11 класс

1. 1) $s_{max} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$; 2) $\omega_1 = \omega_0 - \frac{v_0}{R}$, где $v_0 < \omega_0 R$;

3) $v_к = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}$; 4) $v_0 = \frac{\omega_0 R}{3}$.

2. 1) $x_{max} = \frac{2}{k}$; 2) $v_{max} = \sqrt{\frac{g}{2k}}$; 3) $T_{max} = \frac{3}{2}mg$;

4) см. рис.22 и 23.

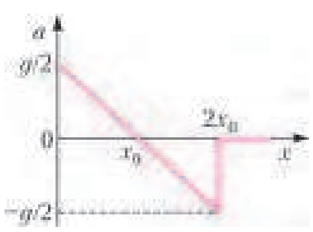


Рис. 22

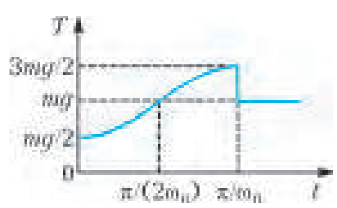


Рис. 23

3. 1) $I_{R_0} = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2}{3}$ А , $I_{R_1} = \frac{2I_0U_0}{I_0R_1 + U_0} = \frac{4}{3}$ А ;

2) $C = \frac{2Q_0}{U_0^2} = 0{,}24$ мкФ ;

3) $Q_1 = Q_0 \frac{I_0R_1(3U_0 - I_0R_1)}{U_0(U_0 + I_0R_1)} = \frac{5}{6}Q_0 = 10$ мкДж .

XX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

1. Рассмотрим однородный стержень, имеющий длину L, площадь поперечного сечения S, плотность ρ и модуль Юнга E. Если такой стержень подвесить за один конец и приложить ко второму концу силу F, направленную вниз, то сила натяжения будет линейно расти вдоль стержня от значения $F_1 = F$ вблизи нижнего конца до значения $F_2 = F + \rho SLg$ около точки подвеса. Поскольку сила натяжения линейно зависит от координаты, можно найти общее удлинение Δx , подставив среднюю силу $F_{ср} = (F_1 + F_2)/2$ в закон Гука:

$$\Delta x = \frac{F_{ср}L}{ES} = \frac{FL}{ES} + \frac{\rho g L^2}{2E}.$$

1) При поочередном подвешивании стержней дополнительная сила F отсутствует, поэтому получаем

$$\Delta L_1 = \frac{\rho_1 g L_1^2}{2E_1}, \quad \Delta L_2 = \frac{\rho_2 g L_2^2}{2E_2}, \text{ и } \frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{E_1}{E_2}\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2}} = 3 .$$

2) Соединить два стержня в один составной можно двумя способами. Пусть первый стержень находится сверху, а второй – снизу. Тогда общее удлинение составного стержня складывается из увеличенного за счет веса второго стержня $F = \rho_2 SL_2 g$ удлинения ΔL_1 первого стержня и прежнего значения удлинения ΔL_2 второго стержня:

$$\Delta L = \Delta L_1 + 2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{E_2}{E_1}\Delta L_1 \Delta L_2} + \Delta L_2 = 13 \text{ мм} .$$

Пусть теперь первый стержень находится снизу, а второй – сверху. Тогда для получения ответа достаточно заменить индексы в предыдущей формуле:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 2\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{E_1}{E_2}\Delta L_1 \Delta L_2} = 20 \text{ мм} .$$

2. Зависимость доли η диссоциировавших молекул водорода от температуры T имеет линейный вид:

$$\eta = aT + b ,$$

где коэффициенты a и b определяются по двум точкам:

$$a = \frac{\eta_1 - \eta_2}{T_1 - T_2} = 6{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}, \quad b = \frac{\eta_2 T_1 - \eta_1 T_2}{T_1 - T_2} = -1{,}9 .$$

Суммарная внутренняя энергия U рассматриваемой части облака складывается из энергий двух идеальных газов (одноатомного и двухатомного) и энергии диссоциировавших молекул, поэтому, обозначив через ν общее количество пар атомов водорода в любом состоянии, можно записать

$$U = \frac{3}{2}\cdot 2\nu\eta RT + \frac{5}{2}\nu(1-\eta)RT + WN_А\nu\eta =$$

$$= \frac{\nu RaT^2}{2} + \nu\left(\frac{(b+5)R}{2} + WN_Аa\right)T + \nu WN_Аb.$$

С помощью дифференцирования находим изменение внутренней энергии при малом расширении:

$$dU = \nu R\left(aT + \frac{b+5}{2} + \frac{WN_Аa}{R}\right)dT .$$

Пусть V – объем рассматриваемой части облака при некоторой температуре T, тогда с помощью закона Менделеева–Клапейрона выражаем давление p газа и находим его работу δA при малом расширении:

$$p = \frac{\nu(1+\eta)RT}{V}, \quad \delta A = pdV = \nu R\left(aT^2 + (b+1)T\right)\frac{dV}{V} .$$

Согласно первому началу термодинамики, в адиабатическом процессе справедливо равенство $U = -A$, из дифференциальной формы $dU = -\delta A$ которого после подстановки формул для dU и δA получаем уравнение

$$\frac{T+x}{T(T+y)}dT=-\frac{dV}{V},$$

где

$$x=\frac{b+5}{2a}+\frac{WN_A}{R}=\frac{(\eta_2+5)T_1-(\eta_1+5)T_2}{2(\eta_1-\eta_2)}+\frac{WN_A}{R}\approx 5{,}5\cdot 10^4 \text{ К},$$

$$y=\frac{b+1}{a}=\frac{(\eta_2+1)T_1-(\eta_1+1)T_2}{\eta_1-\eta_2}=-1{,}5\cdot 10^3 \text{ К}.$$

Вычислим неопределенный интеграл от левой части нашего уравнения, затем проинтегрируем его целиком от (T_1, V_1) до (T_2, V_2). Получим

$$\frac{x}{y}\ln\left|\frac{T_2}{T_1}\right|+\frac{y-x}{y}\ln\left|\frac{T_2+y}{T_1+y}\right|=-\ln\left|\frac{V_2}{V_1}\right|,$$

или

$$\ln\frac{V_2}{V_1}=\ln\frac{T_1+y}{T_2+y}+\frac{x}{y}\ln\frac{T_1(T_2+y)}{T_2(T_1+y)},$$

откуда найдем искомый конечный объем:

$$V_2=V_1\frac{T_1+y}{T_2+y}\left(\frac{T_1(T_2+y)}{T_2(T_1+y)}\right)^{x/y}\approx 411{,}5 \text{ км}^3.$$

3. Если сместить заряд q из положения равновесия в центре кольца на малое расстояние x в плоскости кольца, то на этот заряд будет действовать возвращающая электрическая сила $F=qE$, где E – напряженность поля, создаваемого кольцом на расстоянии x от центра. Для расчета E рассмотрим цилиндр малой высотой h и радиусом x, нижнее основание которого лежит в плоскости кольца, а центр этого основания совпадает с центром кольца (рис.24). В силу симметрии кольца

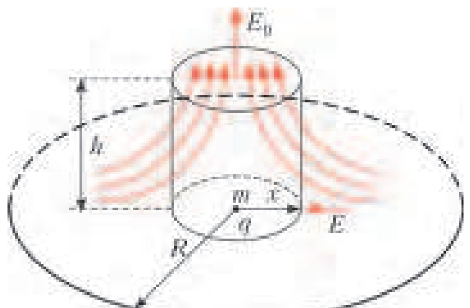


Рис. 24

поле в центре верхнего основания направлено вдоль оси цилиндра, а напряженность E_0 этого поля можно найти по принципу суперпозиции, разбив кольцо на множество точечных зарядов:

$$E_0=\frac{\rho\cdot 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+h^2\right)}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\approx\frac{\rho h}{2\varepsilon_0 R^2}.$$

Из условия малости h и x по сравнению с R следует, что во всех точках боковой поверхности цилиндра перпендикулярная составляющая поля примерно равна E, а во всех точках верхнего основания она примерно равна E_0. Отсюда находим потоки поля Φ_1 и Φ_2 через боковую поверхность и через верхнее основание цилиндра соответственно:

$$\Phi_1\approx -E\cdot 2\pi xh, \quad \Phi_2\approx E_0\cdot\pi x^2.$$

Поток поля через нижнее основание отсутствует, а внутри цилиндра зарядов нет, поэтому из теоремы Гаусса следует, что

$$\Phi_1+\Phi_2=0,$$

откуда получаем

$$E=\frac{\rho x}{4\varepsilon_0 R^2}, \text{ и } F=qE=\frac{q\rho x}{4\varepsilon_0 R^2}.$$

Сила F прямо пропорциональна смещению x, поэтому можно определить эффективную жесткость $k=F/x$ и найти период колебаний по формуле для пружинного маятника:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=4\pi R\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{\rho q}}.$$

4. Для выражения скорости v «массивного» фотона через длину λ соответствующей ему световой волны запишем энергию фотона двумя способами:

$$E=\frac{hc}{\lambda}, \quad E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2c^2}},$$

и найдем

$$v=c\sqrt{1-\frac{m^2c^2\lambda^2}{h^2}}.$$

Пусть v_1 и v_2 – скорости фотонов с длинами волн λ_1 и λ_2 соответственно, тогда

$$\tau=\frac{cT}{v_1}-\frac{cT}{v_2},$$

и

$$\frac{\tau}{T}=\left(1-\frac{m^2c^2\lambda_1^2}{h^2}\right)^{-1/2}-\left(1-\frac{m^2c^2\lambda_2^2}{h^2}\right)^{-1/2}.$$

Обе дроби в скобках малы, поэтому воспользуемся приведенным в условии приближением и запишем

$$\frac{\tau}{T}\approx\frac{m^2c^2}{2h^2}\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right),$$

откуда найдем искомую массу фотона по мнению Глюка:

$$m\approx\sqrt{\frac{2h^2\tau}{c^2T\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}}\approx 1{,}6\cdot 10^{-40} \text{ кг}.$$

5. 1) Соединяем шарик S, манометр M и насос N с помощью тройника T и трубок (рис.25). Постепенно накачивая шарик, измеряем манометром избыточное давление Δp в зависимости от объема шарика V, который можно определить через параметры насоса или из геометрических соображений. На этом же этапе измеряем размеры шарика в сдутом состоянии и непосредственно перед взрывом, так как эти величины потребуются для расчетов параметров резины, описанных в последнем пункте.

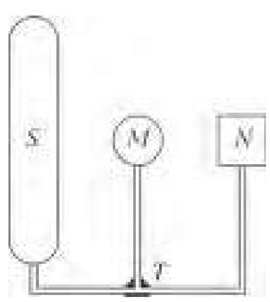


Рис. 25

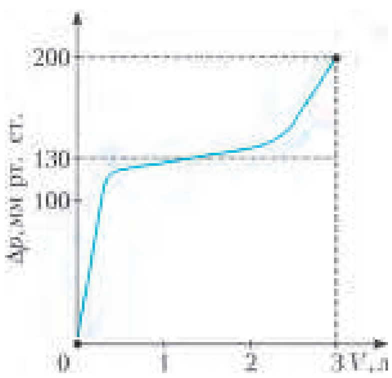


Рис. 26

Качественный график зависимости $\Delta p(V)$, полученной после усреднения результатов измерений нескольких однотипных шариков, приведен на рисунке 26.

2) По приведенному графику находим критические параметры:

$$\Delta p_{\max}=200 \text{ мм рт.ст.}\approx 26{,}3 \text{ кПа},$$

$$V_{\max}=3 \text{ л}=3\cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

3) Из графика находим среднее избыточное давление:

$$\Delta p_{\text{ср}}\approx 130 \text{ мм рт.ст.}\approx 17{,}1 \text{ кПа}.$$

Работа газа по растяжению оболочки пропорциональна площади под графиком:

$$A = \Delta p_{\text{ср}} V_{\max} \approx 51 \text{ Дж}.$$

Из закона сохранения энергии, получаем искомую энергию:

$$W_{\text{упр}} = A \approx 51 \text{ Дж}.$$

4) Далее для ясности будем называть воздух в шарике газом, а воздух вне шарика – атмосферой. Во время взрыва расширение газа происходит очень быстро, поэтому теплообменом пренебречь можно, но использовать уравнение адиабаты и считать работу газа как площадь под ее графиком $p(V)$ нельзя, так как процесс является существенно неравновесным. Пусть V_0 – объем газа в конце взрыва, когда его давление снизится от $p_{\max} = p_0 + \Delta p_{\max}$ до p_0, тогда изменение внутренней энергии газа составит

$$\Delta U = \frac{5}{2} p_0 V_0 - \frac{5}{2} p_{\max} V_{\max},$$

а работа против атмосферы будет равна

$$A = p_0 (V_0 - V_{\max}).$$

Согласно первому началу термодинамики, справедливо равенство $\Delta U = -A$, из которого находим

$$V_0 = V_{\max}\left(1 + \frac{5\Delta p}{7p_0}\right).$$

Ударная волна получает энергию за счет работы против атмосферы, поэтому искомая энергия равна

$$W_{\text{воз}} = A = p_0 (V_0 - V_{\max}) = \frac{5}{7}\Delta p_{\max} V_{\max} \approx 56 \text{ Дж}.$$

5) Общая мощность взрыва равна

$$W = W_{\text{упр}} + W_{\text{воз}} \approx 107 \text{ Дж},$$

или 26 мг в тротиловом эквиваленте. Искомые доли составляют

$$\eta_{\text{упр}} = \frac{W_{\text{упр}}}{W} \approx 48\%, \quad \eta_{\text{воз}} = \frac{W_{\text{воз}}}{W} \approx 52\%,$$

т.е. оба вклада примерно одинаковы.

6) Воздушный шарик, имеющий форму сосиски, можно рассматривать как полый цилиндр. Размеры цилиндра в сдутом состоянии: высота $H_0 = 32$ см, длина окружности поперечного сечения $L_0 = 23$ мм, толщина стенок $d_0 = 0{,}25$ мм. Размеры цилиндра непосредственно перед взрывом: высота $H = 135$ см, длина окружности поперечного сечения $L = 160$ мм. При этом относительные деформации резины в поперечном и продольном направлениях составляют

$$\varepsilon_L = \frac{L}{L_0} - 1 \approx 6{,}0 \text{ и } \varepsilon_H = \frac{H}{H_0} - 1 \approx 3{,}2.$$

При взрыве шарик рвется вдоль, а не поперек, что полностью согласуется с теоретическим расчетом деформаций ($\varepsilon_L > \varepsilon_H$). Таким образом, искомая максимальная относительная деформация равна

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_L = 600\%.$$

Пусть d – толщина оболочки шарика непосредственно перед взрывом, тогда из условия постоянства объема резины $H_0 L_0 d_0 = HLd$ находим

$$d = \frac{H_0 L_0 d_0}{HL} = 8{,}5 \text{ мкм}.$$

Радиус поперечного сечения цилиндра равен $R = L/(2\pi)$. Мысленно разрежем цилиндр осевым сечением на два равных полуцилиндра и запишем условие равновесия для одного из них непосредственно перед взрывом, когда механическое напряжение в резине достигает максимального значения σ:

$$\Delta p_{\max} \cdot 2R \cdot H = \sigma \cdot 2d \cdot H,$$

откуда находим

$$\sigma = \Delta p_{\max} \frac{R}{d} = \frac{L \Delta p_{\max}}{2\pi d} \approx 80 \text{ МПа}.$$

Полученные результаты превосходят параметры обычной резины, имеющей, согласно справочным данным, максимальную относительную деформацию до 500% и максимальное механическое напряжение (прочность) до 25 МПа.

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ПАСКАЛЯ

Кратко изложим доказательство равенства Х.Бразерса. Так как $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, то

$$s_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{(n!)^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} (k!)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{((n+1)!)^{n+2}}{((n)!)^{n+1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{n}(k!)^2}{\prod_{k=0}^{n+1}(k!)^2} = \frac{(n+1)^{n+2}\, n!}{1} \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Откуда

$$\frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2} = \frac{s_{n-1}}{s_n} \cdot \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

что в пределе и дает число e.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

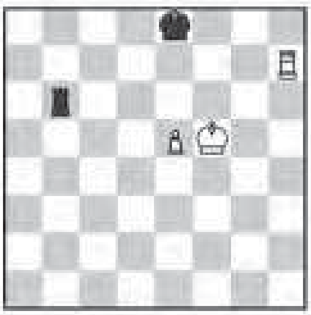
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru

ГеометриЯ ладейных окончаний

К ладейным окончаниям относят такие, в которых у каждой стороны имеется по одной или две ладьи и несколько пешек. Для простейшего эндшпиля *ладья и пешка против ладьи* разработаны вполне математические (геометрические) правила.

Центральная пешка дает сильнейшей стороне больше шансов на успех, чем крайняя. Но при короле, стоящем перед пешкой, часто получается ничейная позиция Филидора.



Пока пешка на е5, черная ладья перемещается по шестой линии, а на е5-е6 она немедленно спускается вниз, и белому королю не уйти от шахов.

Оттеснение короля слабейшей стороны на две вертикали от пешки (если она не крайняя) обычно обеспечивает победу. При этом цель часто достигается построением моста (его также называют заслоном).

Белые: ♔d8, ♖f1, ♙d7; черные: ♔g7, ♖c2.

1. ♖f4 ♖c1 2. ♔e7 ♖e1+ 3. ♔d6 ♖d1+ 4. ♔e6 ♖e1+ 5. ♔d5 ♖d1+ 6. ♖d4. Мост построен, и пешка проходит в ферзи.

В эндшпиле с крайней пешкой для выигрыша иногда требуются весьма серьезные усилия.

Белые: ♔b8, ♖g7, ♙a7; черные: ♔c6, ♖c2.

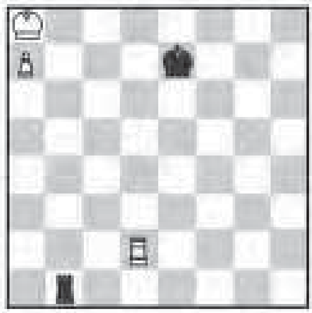
1... ♖b2+ 2. ♔c8! ♖a2 3. ♖g6+ ♔c5 4. ♔b7 ♖b2+ 5. ♔c7 ♖a2 6. ♖g5+! ♔c4 7. ♔b7 ♖b2+ 8. ♔c6 ♖a2 9. ♖g4+ ♔d3 10. ♔b6 ♖b2+ 11. ♔c5 ♖a2 12. ♖g3+ ♔c2 13. ♖g2+ с разменом ладей.

Белые: ♔h8, ♖g4, ♙h7; черные: ♔f8, ♖h2.

1. ♖f4+ ♔e8 2. ♔g7 ♖g2+ 3. ♔h6 ♖h2+ 4. ♔g6 ♖g2+ 5. ♔h5 ♖h2+ 6. ♖h4. Белые соорудили мост и берут верх.

Рассмотренные примеры с крайней пешкой, скорее, исключение из правила.

В следующем стандартном положении черный король отрезан от пешки



на три линии, и тем не менее белому королю не выбраться на свободу. Пока ладья перескочит на b8, король успеет попасть на c7: 1. ♖b2 ♔d7 2. ♖b8 ♔c7 и т.д. Возникает вопрос, на сколько же должен быть удален король от пешки, чтобы сильнейшей стороне была гарантирована победа?

Оказывается, только в том случае, если король отрезан на четыре вертикали, его оппоненту удается выйти из заточения.

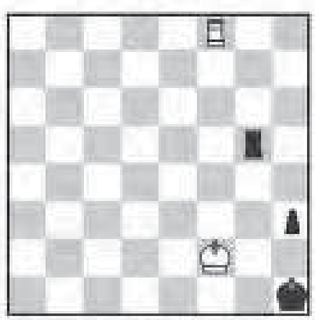
Белые: ♔a8, ♖e2, ♙a7; черные: ♔f7, ♖b1.

1. ♖c2 ♔e7 2. ♖c8 ♔d7 3. ♖b8 ♖a1 4. ♔b7 ♖b1+ 5. ♔a6 ♖a1+ 6. ♔b6 ♖b1+ 7. ♔c5.

Следующий курьезный случай показывает, как можно проиграть ничейное положение, имея... шансы на выигрыш.

Дример – Чокылтя

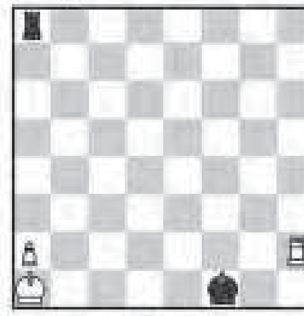
Румыния, 1955



Убедившись, что лишнюю пешку не реализовать, черные решили завершить дело красивой ничьей: **1... ♖g8?**, полагая, что пат неизбежен. Самое удивительное, что здесь был заключен мир, хотя после **2. ♖:g8 h2 3. ♔g3! ♔g1 4. ♔h3+ ♔h1 5. ♖a8** белые сразу брали верх.

Если кому-то ладейные окончания с одной пешкой по-прежнему кажутся несложными, приведем один удивительный пример.

Как установил на своем компьютере английский гроссмейстер Джон Нанн, это позиция взаимного цугцванга: при своем ходе черные проигрывают, а при ходе белых – ничья. Конечно, поверить в это на слово довольно трудно. Для доказательства приведем по два варианта при вступительном ходе каждой из сторон.



Ход белых. Первый вариант. **1. ♔b2 ♖b8+ 2. ♔c3 ♖c8+ 3. ♔b4 ♖b8+ 4. ♔c5 ♖c8+ 5. ♔b6 ♖a8 6. ♖c2** (6. ♔b7 ♖a3) **6... ♔e1!** с ничьей.

Второй вариант. **1. ♖h4** (с идеей двинуть вперед пешку) **1... ♔e2 2. ♔b2 ♔d3! 3. a4 ♖b8+ 4. ♔a3 ♔c3 5. a5 ♖b1 6. ♔a4 ♖g1.** Ключевая ничейная позиция. На 7. a6 последует 7... ♖g6! 8. ♔b5 ♖g5+, и белому королю не спрятаться.

Ход черных. Первый вариант. **1... ♔g1 2. ♖h4.** Теперь у белых лишний темп по сравнению со вторым из рассмотренных вариантов. **2... ♔f2 3. a4 ♔e3 4. ♔b2 ♔d3 5. ♔b3 ♖b8+ 6. ♖b4 ♖a8 7. ♖b5 ♖c8 8. a5 ♖c1 9. ♖d5+! ♔e4 10. ♖d8! ♔e5 11. ♔b4 ♖a1 12. ♔b5! ♖b1+ 13. ♔c6 ♖c1+ 14. ♔b6 ♖b1+ 15. ♔a7! ♔e6 16. a6 ♔e7 17. ♖b8!**

Второй вариант. **1... ♔e1.** Наиболее естественный ход. И не сразу догадаешься, что после него позиция черных ослабляется. **2. ♔b2 ♖b8+ 3. ♔c3 ♖c8+ 4. ♔b4 ♖b8+ 5. ♔c5 ♖c8+ 6. ♔b6 ♖a8.** Эта позиция нам уже знакома: она возникла после пяти ходов в самом первом из вариантов, правда при черном короле на f1. **7. ♖h4!!** Именно из-за этого хода положение черного короля на e1 крайне неудачно. Изящный тактический ресурс позволяет белым обеспечить продвижение пешки (7... ♖:a2 8. ♖h1+ и 9. ♖h2+ с выигрышем ладьи) **7... ♖a3 8. ♔b5 ♔d1 9. ♖h2 ♖g3 10. a4** и т.д.

Е.Гик

Индекс 90964

Поляризация на носу

Современные солнцезащитные очки – это поляризационные очки. С их помощью можно определить направление поляризации света от различных участков неба и увидеть необычную радугу...

(Продолжение – на с. 28 внутри журнала)