ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Каждое число таблицы Пифагора равно произведению номера строки и номера столбца, в которых оно находится. Так как ладьи не угрожают друг другу, то в каждой строке таблицы расположена одна ладья, и в каждом столбце расположена одна ладья. Поэтому в произведение девяти чисел, замаскированных ладьями, каждое число от 1 до 9 войдет дважды в качестве множителя: один раз – как номер строки, второй раз – как номер столбца. Значит, это произведение всегда равно $(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9)^2 = (9!)^2 = 131681894400$. Большое число получается!

2. 1:2.

Допустим, верным оказался прогноз **в** – «Север» выиграет. Тогда будут верны также прогнозы **а** – ничьей не будет, **б** – в ворота «Юга» забьют, и **г** – «Север» не проиграет. Таким образом, верны уже не меньше четырех прогнозов, а по условию должны быть верны только три. Значит, «Север» не выиграл. Если при этом сбылся прогноз **г** – «Север» не проиграет, – то матч закончился ничьей, и прогнозы **в** и **д** точно не сбылись. В таком случае верными оказываются не больше двух прогнозов. Поэтому остается заключить, что сбылись прогнозы **а**, **б** и **д** (они не противоречат друг другу). Получаем, что всего было забито три мяча, в ворота «Юга» забили, но он выиграл – значит, «Север» проиграл «Югу» со счетом 1:2.

3. Можно.

На рисунке 1 приведен один из способов.

4. 0 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 96.

Так как $8\cdot ОН < 100$, то $ОН \le 12$, т. е. О = 1, а Н равно 0 или 2. Но Н не может быть равно 0, так как тогда Я и Ы означали бы одну и ту же цифру. Значит, Н = 2. Таким образом, $8\cdot ОН = 96$, значит, МЫ может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как для них Я должно быть

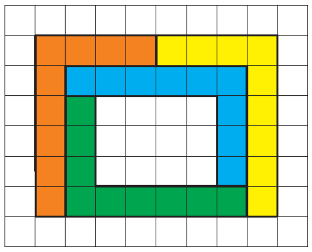

Рис. 1

равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Итого, МЫ = 96, а Я = 0.

5. Может.

Вася берет кубики по одному «за ход» слева направо из переднего ряда верхнего слоя. Когда в ряду останется два кубика, он за ход забирает оба. Аналогично он забирает кубики из следующих рядов верхнего слоя, пока не останется два задних ряда. Далее он берет кубики парами за ход, по одному из каждого ряда, слева направо. Когда от верхнего слоя останутся 4 кубика в правом заднем углу, он за ход берет все 4. Так Вася снимает слой за слоем. Когда он начинает брать кубики из предпоследнего слоя, то действует так же, но вместе с каждым кубиком из этого слоя берет и кубик строго под ним.

ЗАДАЧИ

(см. с. 25)

1. 1500 рублей должен взять Саша, а 2500 рублей – Валя. После покупки Саша остался должен Вале 500 рублей. Можно считать, что эти деньги он отдает из вырученных от продажи велосипеда. Значит, ему остается 1500 рублей, а Валя получит 2500 рублей.

2. 3, 4, 5, 6 или 7.

Поскольку все вершины Васиного многоугольника являются вершинами треугольника или четырехугольника, то в нем не более семи вершин. Примеры приведены на рисунке 2.

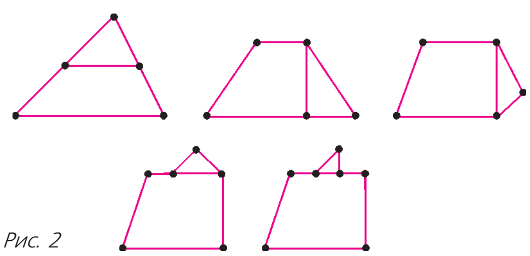

Рис. 2

3. 25 лжецов.

У каждого рыцаря количество друзей-рыцарей не меньше заявленной им разности. У каждого ученика не более 24 друзей, значит, 25-й – лжец. Поэтому у каждого из остальных не более 23 друзей-рыцарей, значит, 24-й – лжец. Аналогично, 23-й – лжец… Продолжая таким образом, получим, что все ученики этого класса – лжецы.

4. В 4 раза.

Пусть за 20 минут Вася проезжает расстояние s и догоняет Алешу в точке C. В этот момент Боря был в точке D (заметим, что $BD = AC = s$), а позже он встретил Васю в точке E, $CE = s$ (рис. 3). От C до D Вася ехал 25 минут (поскольку $CD = s + DE = BE$), а до E – 20 минут. Значит, $CE = 4DE$. За те же 20 минут Боря проехал как раз расстояние DE. Поэтому его скорость в 4 раза меньше, чем у Васи.

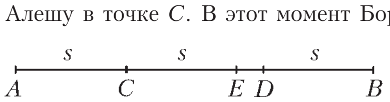

Рис. 3

5. Можно.

Сначала упорядочим яблоки по массе: $a \le b \le c \le d$. Пусть средняя масса a и b равна p, c и d – q, всех четырех – m. Тогда $m = \dfrac{p+q}{2}$ – середина отрезка $[p; q]$ – лежит правее p. Поэтому b ближе к m, чем a. Аналогично, c ближе к m, чем d. Чтобы выбрать между b и c, сравним $(a + d)$ и $(b + c)$. Пусть средняя масса a и d равна u, b и c – v, тогда m – середина отрезка с концами u и v. Если $a + d < b + c$, то $u < v$, и m лежит левее v, поэтому m ближе к b (рис. 4).

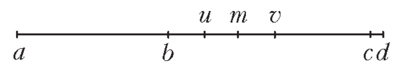

Рис. 4

Если $a + d > b + c$, то, аналогично, m ближе к c, а при $a + d = b + c$ массы b и c равноудалены от m.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Ломоносов имел в виду равноплечные рычажные весы с разными длинами подвесов. Так, при взвешивании у поверхности Земли грузов массой по одному килограмму разность показаний на высоте примерно три метра давала бы ошибку в один миллиграмм.

2. Этому препятствует не отсутствие тяготения между телами, а наличие сил трения, во много раз превосходящих силы притяжения.

3. Ломоносов объяснил это своим законом сохранения движения; сегодня же мы опираемся на закон сохранения импульса, из которого следует, что приближение человека к берегу вызывает удаление от берега лодки.

4. При упругом ударе покоящееся тело приобретет в два раза большую скорость, чем при неупругом.

5. Спиртовой, так как коэффициент объемного расширения спирта больше, чем у ртути.

6. По соображениям удобства за 0 градусов Ломоносов принял точку замерзания воды, а за 150 градусов – точку ее кипения.

7. Уменьшится, так как относительная влажность будет больше, а испарение воды станет менее интенсивным.

8. Плотно сложенные листы свинца образуют тонкие капиллярные каналы и щели, по которым ртуть, хорошо смачивающая чистый свинец, за счет сил поверхностного натяжения поднимается – подобно воде в капиллярных стеклянных трубках.

9. Растекание чернил происходит из-за наличия капилляров между образующими рыхлую бумагу волокнами – чернила втягиваются в них, и линии, проведенные пером по бумаге, получаются размытыми.

10. При наличии острых концов у проводников на них образуется настолько большая плотность зарядов, что окружающий воздух ионизируется и становится проводящим – заряды «стекают» с острия.

11. Световой поток по выходе из окуляра телескопа гораздо уже широкого потока, поступающего в объектив, т.е. происходит концентрация световой энергии на меньшей площади.

12. Перпендикуляры к зеркалам A_1 и A_2 должны составлять с падающими лучами углы $22°30'$, а перпендикуляры к зеркалам A_3 и A_5 – углы $67°30'$.

13. Коллега Ломоносова Леонард Эйлер, разделявший с ним представления о свете как о волновом процессе, считал, что световое ощущение зависит от частоты, а не от длины световой волны. Частота же при переходе света из одной среды в другую не меняется.

14. Это явление возникает в результате преломления солнечных лучей в протяженной и плотной атмосфере Венеры, открытой Ломоносовым.

Микроопыт

Роса образуется при охлаждении земной поверхности посредством излучения. Облака же препятствуют потере землей тепла таким способом.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ТОНКИЕ ЛИНЗЫ

1. Как рассеивающая линза. **2.** $F = 6$ см.
3. $x = 2$ см. **4.** $l = 80$ см. **5.** $F = 32$ см. **6.** $F_2 = 20$ см.
7. $a = 8$ см. **8.** $D = 9$ дптр. **9.** $F_2 = 16$ см.
10. $h = 6$ см. **11.** $\Gamma = 0{,}5$. **12.** $x'_{\max} = 15$ см .
13. $v' = 72$ мм/с .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Пусть t – общий корень данных многочленов. Тогда $0 = P(P(P(t))) = P(P(0))$. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$; тогда $P(0) = b$, $P(1) = a + b + 1$, а значит,

$$0 = P(P(0)) = P(b) = ab + b^2 + b = b(a + b + 1) = P(0)P(1),$$

что и требовалось доказать.

2. Обозначим $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$; тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \alpha$. Поскольку четырехугольник $BPOQ$ вписан, $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle OQP = \gamma$. Пусть OO_1 – высота треугольника OPQ, а H – точка пересечения прямых OO_1 и AC (рис.5). Без ограничения общности, точка H лежит на луче CA. Угол POH – внешний для ΔPOO_1, поэтому $\angle POH = 90^\circ + \alpha = 180^\circ - \angle HCP$. Значит, четырехугольник $CHOP$ вписан, и $\angle PHO = \angle PCO = \gamma$. Пусть P_1 – точка пересечения прямых OQ и PH. Вновь по свойству внешних углов

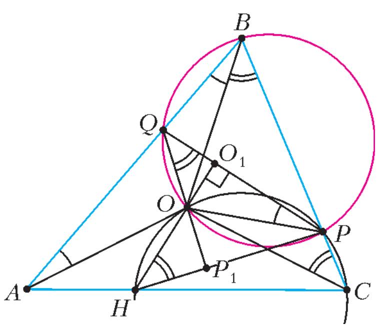

Рис. 5

$$\angle QP_1H = \angle QPH + \angle PQO = \angle QPH + \angle PHO_1 = \angle HO_1Q = 90^\circ.$$

Итак, $PH \perp OQ$, т.е. H – точка пересечения высот треугольника OPQ. При этом она лежит на прямой AC, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно показать, что треугольники ABC и PHQ подобны.

3. 4016.

Указание. Покажем, что в выпуклом n-угольнике максимальное количество диагоналей, которое можно провести указанным способом, равно $2n - 6$; при $n = 2011$ тогда получится указанный ответ. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – данный многоугольник. Тогда Петя может провести последовательно диагонали A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, … …, $A_{n-2}A_n$, а затем – диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5,… , A_1A_{n-1}, итого $2n - 6$ диагоналей. На рисунке 6 приведен пример при $n = 9$.

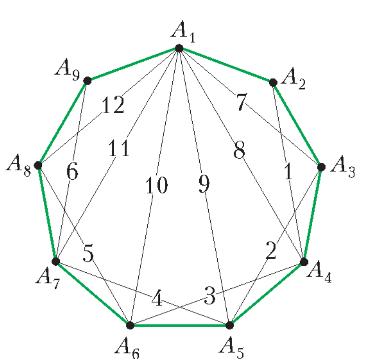

Рис. 6

Остается доказать, что в выпуклом n-угольнике нельзя провести больше $2n - 6$ диагоналей, чтобы выполнялось условие. Это несложно сделать по индукции.

4. Не существуют.

Предположим противное: пусть нашлись такие числа a, b, c. Заметим, что числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ попарно взаимно просты. В самом деле, пусть, скажем, числа $a + b$, $b + c$ делятся на некоторое простое p. Поскольку $c^2 \vdots (a + b)$, $a^2 \vdots (b + c)$, то числа c и a также делятся на p, а тогда и $b = (a + b) - a$ на него делится, что противоречит условию.

Далее, поскольку $a^2 \vdots (b + c)$, число $(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)(2a + b + c)$ делится на $b + c$. Аналогично, оно делится на $a + b$ и на $c + a$. Так как последние три числа попарно взаимно просты, $(a + b + c)^2$ делится на $(a + b)(a + c)(b + c)$; в частности, $(a + b + c)^2 \geq (a + b)(b + c)(c + a)$. С другой стороны, ясно, что все числа a, b, c не меньше 2, значит,

$$(a + b)(b + c)(c + a) =$$
$$= \left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 2abc >$$
$$> \left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2\right) + (2ab + 2bc + 2ca) > (a + b + c)^2.$$

Противоречие.

6. $\frac{14}{5}$.

Будем рядом с каждой парой писать какой-нибудь квадратный трехчлен, корнями которого являются числа этой пары. Пусть в некоторый момент у мальчиков записаны трехчлены $p(x)$ и $q(x)$. Тогда они решали уравнение вида $\alpha p(x) = \beta q(x)$, где α, β – какие-то ненулевые числа. Значит, полученные числа – корни трехчлена $\alpha p(x) - \beta q(x)$. Если теперь один из мальчиков заменяет свои числа на эти корни, то можно считать, что рядом с ними будет записан трехчлен $\alpha p(x) - \beta q(x)$.

Обозначим исходные два трехчлена $p_0(x) = (x - 1)(x - 2)$ и $q_0(x) = (x - 3)(x - 4)$. Из сказанного выше теперь следует, что на каждом шаге у каждого мальчика написан трехчлен вида $\alpha p_0(x) + \beta q_0(x)$.

Итак, если на Петином листке написано число 5, то у него записан трехчлен $a(x - 5)(x - x_2) = \alpha(x - 1)(x - 2) + \beta(x - 3)(x - 4)$. Подставляя $x = 5$, получаем $12\alpha + 2\beta = 0$, откуда

$$\alpha(x - 1)(x - 2) + \beta(x - 3)(x - 4) =$$
$$= \alpha\left(-5x^2 + 39x - 70\right) = -\alpha(x - 5)(5x - 14).$$

Значит, второе число равно $x_2 = \frac{14}{5}$.

Замечание. Описанную ситуацию можно получить даже за один ход, если, например, Петя запишет трехчлен $x^2 - 3x + 2$, а Вася – трехчлен $6x^2 - 42x + 72$.

7. Докажем следующую известную лемму.

Лемма. *Пусть PQR – правильный треугольник, и на меньшей дуге PR его описанной окружности выбрана точка W. Тогда $PW + RW = QW$.*

Доказательство. Отметим на отрезке QW точку V такую, что $VW = WR$ (рис.7). Имеем $\angle VWR = \angle QPR = 60^\circ$, значит, треугольник RVW – правильный. Далее, $RQ = RP$, $RV = RW$ и $\angle PRW = 60^\circ - \angle VRP = \angle QRV$, значит, треугольники RVQ и RWP равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $QV = PW$ и $QW = QV + VW = PW + RW$. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Из параллельности имеем $\angle ATX = \angle XTY = \angle CTY = 60^\circ$.

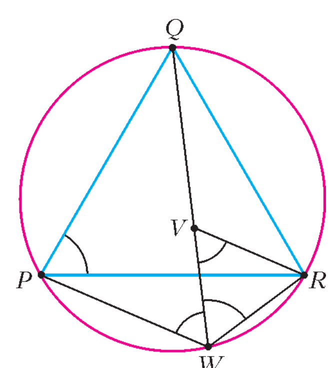

Рис. 7

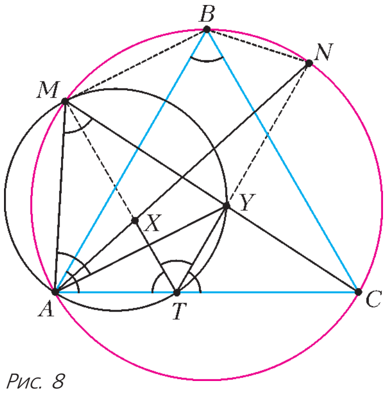

Рис. 8

Кроме того, $\angle AMY = \angle ABC = 60^\circ$. Тогда $\angle AMY + \angle ATY = 180^\circ$, значит, точки A, M, Y, T лежат на одной окружности (рис.8). Далее, $\angle MAY = \angle MTY = 60^\circ$, значит, треугольник MAY – правильный (два из его углов равны по 60°), T – точка на дуге AY его описанной окружности. Тогда по лемме $AT + TY = MX + TX$. Аналогично, $CT + TX = NY + TY$. Складывая эти два равенства, получаем $AC = AT + TC = MX + NY$.

Для треугольника ABC и точки M по лемме получаем $AM + MB = MY + YC$; поскольку $AM = MY$, получаем $CY = MB$. Аналогично, $AX = BN$.

В итоге,

$$P_{AXYC} = AC + AX + CY + XY = (MX + NY) + BN + BM + XY = P_{XMBNY},$$

что и требовалось доказать.

8. Не может.

Лемма. *Для любой клетки доски X существует множество S, состоящее из четного количества клеток и содержащее X, такое, что у каждой клетки доски четное число соседей лежит в S.*

Доказательство. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке; можно считать, что X – черная. Для начала рассмотрим одну из диагоналей, проходящих через X; пусть A и B – центры двух крайних клеток этой диагонали, а C и D – точки, симметричные им относительно центра доски. Тогда обозначим через S множество всех черных клеток, центры которых лежат внутри или на границе прямоугольника $ABCD$. На рисунке 9 показаны возможные виды множества S на доске 8×8 (прямоугольники $ABCD$ обозначены пунктиром).

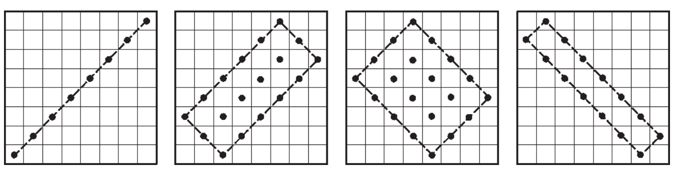
Рис. 9

Множество S состоит из четного числа клеток, поскольку количества центров клеток на сторонах AB и AD имеют разную четность. Далее, черные клетки не имеют соседей в S, каждая белая клетка внутри $ABCD$ граничит с четырьмя клетками из S, а каждая белая клетка вне него – либо с нулем, либо с двумя клетками из S. Итак, множество S удовлетворяет всем условиям. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Предположим, что существует ровно одна красивая клетка X. Рассмотрим для этой клетки множество S из леммы. Для каждой клетки этого множества посчитаем количество фишек в соседних с ней клетках; пусть g – сумма всех этих количеств. С одной стороны, в S четное число клеток, из которых ровно одна красива, а все остальные – нет; поэтому сумма g нечетна. С другой стороны, каждая клетка с фишкой имеет четное число соседей в S, поэтому она дает четный вклад в g; значит, и g должна быть четной. Противоречие.

10 класс

1. Пусть R_0 – первая строка таблицы. Рассмотрим любой набор из четного количества столбцов и пронумеруем их слева направо: $C_1,\ldots,C_{2m}$. Тогда в таблице есть строка R_1, отличающаяся от R_0 ровно в столбцах C_1 и C_2; далее, есть строка R_2, отличающаяся от R_1 ровно в столбцах C_3 и C_4; …; наконец, есть строка R_m, отличающаяся от R_{m-1} ровно в столбцах C_{2m-1} и C_{2m} (если $m = 0$, то $R_m = R_0$). Итак, строка R_m отличается от R_0 ровно в столбцах $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$. Значит, строки R_m, построенные по различным наборам столбцов, различны. Поскольку количество наборов из четного числа столбцов равно $2^{10}/2 = 512$, то и количество строк в таблице не меньше 512.

Замечание. В таблице может быть ровно 512 строк – например, если в ее строках записаны все 512 последовательностей из 10 нулей и единиц, среди которых четное число нулей.

3. Предположим противное. Рассмотрим граф G, в котором люди являются вершинами, а два человека соединены ребром, если они знакомы. Тогда граф k-разбиваем, если его вершины можно правильно окрасить в k цветов (т.е. окрасить так, чтобы соседние вершины имели разные цвета). Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечетной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. Расстоянием между двумя вершинами X и Y назовем наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A, и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины – в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска – искомая. Предположим противное – имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечетной длины $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, C_{2m-2} \ldots, C_i = B_i$. Противоречие.

По лемме, в нашем графе G есть нечетный цикл – иначе его вершины можно окрасить даже в два цвета. Выберем в G нечетный цикл C минимальной длины n. Тогда не существует ребер, соединяющих вершины этого цикла, кроме ребер самого цикла. Действительно, любое такое ребро разбивает цикл на два меньших по длине, причем один из них нечетен. Значит, в этом случае нашелся бы нечетный цикл меньшей длины.

Далее, покажем, что любая вершина x, не принадлежащая C, соединена не более чем с двумя вершинами C. Если C содержит три вершины, то утверждение верно, иначе x вместе с вершинами C образует компанию из 4 попарно знакомых человек.

Пусть теперь в C больше трех вершин. Предположим, что x соединена с вершинами v_1, v_2, v_3 этого цикла. Участок цикла между какими-то двумя из них (скажем, между v_1 и v_2) содержит нечетное количество ребер d. Если $d < n-2$, то этот участок вместе с вершиной x образует нечетный цикл длины $d + 2 < n$, что невозможно. Значит, $d \ge n-2$, а это значит, что вершины v_1, v_2, v_3 идут в цикле подряд. Но тогда найдется цикл v_1, v_3, x длины 3, что невозможно.

Теперь мы можем предъявить требуемое разбиение: поместим в одну группу вершины цикла C, а в другую (назовем ее D)– все остальные. Вершины цикла C, очевидно, нельзя правильно окрасить в два цвета. Осталось показать, что между вершинами группы D есть ребро (тогда она 1-неразбиваема).

Предполагая противное, покажем, что G можно окрасить в три цвета. Сначала окрасим все вершины C, кроме одной, попеременно в цвета 1 и 2, а оставшуюся окрасим в цвет 3; поскольку между этими вершинами нет других ребер, раскраска этого цикла – правильная. Окрасим теперь вершины группы D по очереди. Каждая очередная вершина соединена не более чем с двумя вершинами из C, и не соединена с вершинами из D; значит, можно выбрать для нее цвет, отличный от цветов ее соседей. Итого, граф G можно правильно окрасить в три цвета, что противоречит условию.

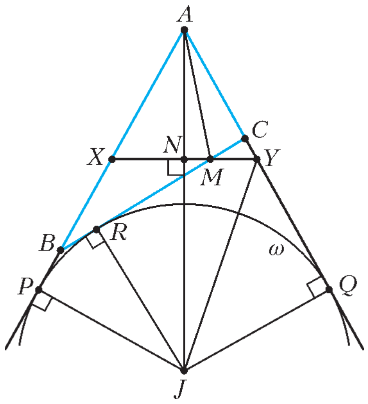

Рис. 10

4. Поскольку отрезки BC и XY пересекаются, без ограничения общности можно считать, что $AB > AX$ и $AC < AY$.

Пусть (рис.10) вневписанная окружность ω исходного треугольника касается стороны BC в точке R, а продолжений сторон AB и AC – в точках P и Q соответственно. Пусть J – центр ω, а r – ее радиус. Пусть также N – середина XY; из симметрии N лежит на AJ, и $AN \perp XY$. Имеем

$$AP = AQ = \frac{1}{2}(AP + AQ) = \frac{1}{2}(AB + BP + AC + CQ) =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BR + AC + CR) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 2.$$

Отсюда $AY = YQ = 1$.

Теперь по теореме Пифагора получаем

$$MR^2 = MJ^2 - JR^2 = \left(MN^2 + NJ^2\right) - r^2 =$$

$$= MN^2 + \left(YJ^2 - YN^2 - r^2\right) =$$

$$= MN^2 + \left(YQ^2 + r^2\right) - \left(YA^2 - AN^2\right) - r^2 = MN^2 + AN^2 = AM^2,$$

ибо $YA = YQ$.

Отсюда $AM = MR$, и периметр треугольника ACM равен $AC + CM + AM = AC + CM + MR = AC + CR = AC + CQ = AQ = 2$.

Замечание. Вычисления можно сократить, заметив, что прямая XY – радикальная ось окружности ω и точки A. Поскольку M лежит на этой прямой, получаем $MR = MA$.

5. Не могли.

Предположим противное. Если среди исходных чисел есть ноль, то для любого другого числа a имеем $a^2 - 0^2 = (a-0)^2$. Значит, если вычеркнуть ноль, то останутся 9 чисел, также удовлетворяющих условию.

Итак, можно считать, что исходных чисел 9 или 10, и все они ненулевые. Пусть среди них есть числа разных знаков; рассмотрим минимальное и максимальное из них – обозначим их $a < 0 < b$. Тогда у Васи присутствует число $(b-a)^2$, которое больше как a^2, так и b^2; у Пети же любое число не превосходит $\max\left(a^2, b^2\right)$. Противоречие.

Значит, все исходные числа – одного знака; заменив, если надо, все числа на противоположные, можно считать, что все они положительны. Опять обозначив через a и b соответственно минимальное и максимальное из этих чисел, имеем $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > (a-b)^2 \geq (c-d)^2$, где c и d – произвольные два исходных числа. Тогда число $b^2 - a^2$ не встретится на листке у Пети, но встретится у Васи – противоречие.

11 класс

1. Поскольку числа $f = n/d$ и $f' = n/d'$ целые, а $f > f'$, имеем $f - f' \geq 1$, или

$$1 \leq \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d'-d)n}{dd'} < \frac{(d'-d)n}{d^2}.$$

Домножая на $\frac{d^2}{n}$, получаем $d' - d > \frac{d^2}{n}$, что и требовалось доказать.

2. Докажем сначала следующий известный факт.

Лемма. *Ортоцентр треугольника после отражения относительно стороны попадает на описанную окружность.*

Доказательство. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (рис.11; остальные случаи аналогичны). Имеем $\angle H'C = \angle AHC = \angle A_1HC_1 = 180° - \angle ABC$; это и означает, что точки A, B, C, H' лежат на одной окружности.

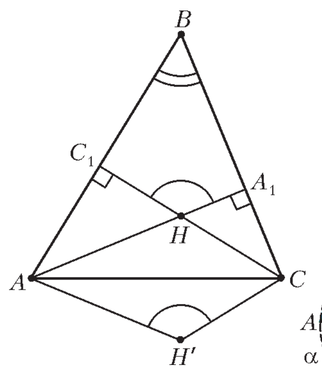

Рис. 11

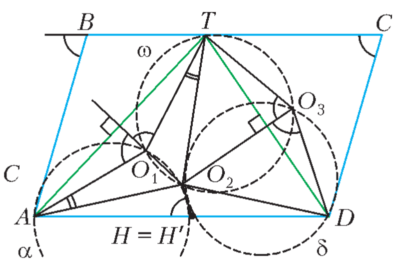

Рис. 12

Перейдем к решению задачи. Заметим, что O_1O_2 и O_3O_2 – серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT (рис.12). Значит, $\angle AO_1O_2 = \angle TO_1O_2 = \angle TBA$ (поскольку угол TO_1A – центральный для описанной окружности треугольника ABT). Аналогично,

$$\angle DO_3O_2 = \angle TO_3O_2 = \angle TCD.$$

Отсюда

$$\angle TO_1O_2 + \angle TO_3O_2 = 180°.$$

Итак, точки T, O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности ω. Из симметрии, $\angle O_1TO_2 = \angle O_1AO_2$. Значит, окружность α, описанная около треугольника AO_1O_2, равна ω. Аналогично, окружность δ, описанная около треугольника DO_2O_3, также равна ω.

По лемме, ортоцентр H треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на окружностях α и δ, т.е. является второй точкой их пересечения. Пусть H' – вторая точка пересечения α с прямой AD. Тогда $\angle AH'O_2 = 180° - \angle AO_1O_2 = \angle DO_3O_2$, поэтому H' лежит на δ. Значит, $H' = H$, и H лежит на AD.

3. Будем говорить, что две темы *пересекаются* по академику, если он интересуется обеими этими темами. Выберем наибольшее возможное количество непересекающихся тем; пусть это темы $T_1, \ldots, T_k$. Предположим, что $k \leq 249$. Обозначим через S множество всех академиков, не интересующихся этими темами; тогда их ровно $s = 999 - 3k \geq 252$.

Для каждых двух академиков $a, b \in S$ существует единственная тема $T(a,b)$, интересующая обоих. При этом третий академик, заинтересованный ею, не должен принадлежать S, иначе $T(a,b)$ можно добавить к исходным k темам. Значит, его интересует какая-то тема T_i. Сопоставим эту тему (и этого академика) паре (a,b).

Итак, каждой из $\frac{s(s-1)}{2}$ пар академиков из S сопоставлена одна из k тем $T_1,\ldots,T_k$; значит, какая-то тема T_i сопоставлена не менее чем $\frac{s(s-1)}{2k}$ парам. Обозначим эти пары $(a_1,b_1),\ldots,(a_d,b_d)$; пусть T_i интересует академиков x, y, z. Поскольку $d > \frac{s}{2} > 6$, один из x, y, z сопоставлен хотя бы трем парам (a_j,b_j); пусть, скажем, x сопоставлен парам $(a_1,b_1),\ldots,(a_p,b_p)$ $(p \ge 3)$, а остальным парам сопоставлены y или z.

Заметим, что все пары $(a_1,b_1),\ldots,(a_p,b_p)$ не пересекаются: если бы академик a находился в двух из них, то академиков a и x интересовали бы две общих темы. Значит, $p \le \frac{s}{2} < d$, и паре (a_{p+1},b_{p+1}) сопоставлен, скажем, академик y. Но тогда (a_{p+1},b_{p+1}) не пересекается с одной из пар (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), скажем, с (a_1,b_1). Значит, можно из нашего набора тем выбросить T_i и добавить непересекающиеся темы $T(a_1,b_1)$ и $T(a_{p+1},b_{p+1})$, увеличив количество непересекающихся тем.

Противоречие с исходным выбором.

5. Заметим, что у многочленов $F(x)$ и $G(x)$ не более чем по три корня, а у многочлена $F(x)-G(x)$ (имеющего степень не превосходящую 2) не больше двух корней. Поскольку у них в совокупности 8 корней, то у $F(x)$ и $G(x)$ ровно по три корня, а у $F(x)-G(x)$ ровно два, причем все они имеют кратность 1.

Предположим, что утверждение задачи неверно; пусть a и b – минимальное и максимальное из выписанных чисел, и $F(a)=F(b)=0$. Поскольку все корни $G(x)$ лежат в интервале (a,b), имеем $G(a)<0$, $G(b)>0$. С другой стороны, квадратный трехчлен $F(x)-G(x)$ имеет два корня на этом интервале, поэтому значения $F(a)-G(a)=-G(a)$ и $F(b)-G(b)=-G(b)$ должны иметь одинаковый знак. Противоречие.

7. Сделаем сначала замечание, общее для всех трех решений. Пусть p – нечетное простое число, а $a < p$ – натуральное число такое, что $a^2+1 \vdots p$; тогда числа a и $p-a$ различны, и $P(a)=P(p-a)=p$. Действительно, числа a^2+1 и $(p-a)^2+1=(a^2+1)+p(p-2a)$ делятся на p и меньше p^2; значит, они не могут делиться на простые числа, большие p.

Первое решение. Предположим противное. Тогда существует лишь конечное число простых чисел p, для которых уравнение $P(x)=p$ имеет хотя бы три натуральных решения. Обозначим через s максимальное такое простое число (если таких простых не существует, положим $s = 2$), а через S –произведение всех простых чисел, не превосходящих s.

Пусть $p=P(S)$; тогда p взаимно просто с S и потому $p > s$. Пусть a – остаток от деления S на p; тогда $a^2+1 \vdots p$, значит, $P(a)=P(p-a)=p$. Одно из чисел a и $p-a$ четно; обозначим его через b.

Далее, число $(b+p)^2+1$ делится на $2p$ (ибо b четно, а p – нет), поэтому $P(b+p) \ge p$. Если $P(b+p)=p$, то уравнение $P(x)=p$ имеет три решения – b, $p-b$, $p+b$; это невозможно по предположению. Значит, $P(b+p)=q>p$, число $(b+p)^2+1$ делится на $2pq$ и потому не меньше, чем $2pq$. Это означает, что $q < b + p$ (в противном случае

$$(b+p)^2+1 \le (2p-1)q+1 < 2pq\,.$$

Наконец, обозначая через c остаток от деления числа $b + p$ на q, получаем $P(c)=P(q-c)=P(b+p)=q>p>s$, что противоречит выбору s.

Второе решение. Мы будем использовать тождество

$$\left(m^2+1\right)\left((m-1)^2+1\right)=\left(m^2-m+1\right)^2+1\,, \qquad (*)$$

которое можно проверить, например, раскрытием скобок. Из него следует, что $P\left(m^2-m+1\right)=\max\left(P(m),P(m+1)\right)$.

Предположим противное. Пусть N – наибольшее число, встречающееся в описанных тройках; если таких троек нет, то положим $N = 3$. Последовательность натуральных чисел $P(N+1), P(N+2),\ldots$ не может строго убывать. Значит, найдется число $n > N + 1$, для которого $P(n-1) \le P(n)$. Тогда $P\left(n^2-n+1\right)=\max\left(P(n),P(n-1)\right)=P(n)$. Поэтому найдется число $m \in \left[n; n^2-n+1\right]$ такое, что $P(m) \ge P(m+1)$; иначе $P(n-1) \le P(n) < P(n+1) < \ldots < P\left(n^2-n+1\right)$, что не так.

Теперь из $(*)$ имеем

$$P\left(m^2-m+1\right)=\max\left(P(m),P(m-1)\right)=P(m)$$

и

$$P\left(m^2+m+1\right)=\max\left(P(m),P(m+1)\right)=P(m)\,.$$

Таким образом, тройка m, m^2-m+1, m^2+m+1 удовлетворяет условию, и $m > N$; противоречие с выбором числа N.

Третье решение. Для любого натурального $n \ge 1$ рассмотрим число $\left(2+\sqrt5\right)^{2n+1}$; оно имеет вид $a_n+b_n\sqrt5$ при некоторых натуральных a_n, b_n (ясно, что $a_n < a_{n+1}$). Заметим, что тогда $\left(2-\sqrt5\right)^{2n+1}=a_n-b_n\sqrt5$, откуда

$$a_n^2-5b_n^2=\left(a_n+b_n\sqrt5\right)\left(a_n-b_n\sqrt5\right)=\left(\left(2+\sqrt5\right)\left(2-\sqrt5\right)\right)^{2n+1}=-1\,.$$

Тогда $a_n^2+1=5b_n^2$; ясно, что $b_n<a_n$ и $a_n \ge 2^{2n+1} \ge 8$, поэтому все простые делители числа a_n^2+1 не превосходят $\max(5,b_n)<a_n$.

Итак, $p_n=P(a_n)<a_n$. С другой стороны, $a_n^2+1 \vdots 5$, значит, $p_n \ge 5$. Обозначим теперь через c_n остаток от деления a_n на p_n. Тогда числа c_n, p_n-c_n, a_n различны и $P(c_n)=P(p_n-c_n)=P(a_n)$. Мы предъявили бесконечно много различных троек требуемого вида.

Замечание. Уравнение вида $x^2-Dy^2=a$ называется *уравнением Пелля*. Известно, что, если D не является квадратом и это уравнение имеет хотя бы одно решение в натуральных числах, то оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. $L = 5{,}3$ условных единиц.

2. 1) $M_г=3m_ш$; 2) $\frac{E_п}{E_к}=\frac34$.

3. 1) $n_{\min}=8$; 2) $t=\frac{2t_1+3t_2}{5}$.

4. 1) $I_{AB}=\frac{11}{3}\frac{U}{R}$, $R_{AB}=\frac{3}{11}R$; 2) сила тока максимальна в ребре 1–5 и равна $I_{\max}=2\frac{U}{R}$; 3) мощность максимальна в ребрах 8–7, 5–6, 4–3 и равна $P_{\max}=\frac{U^2}{R}$; 4) $I_{AC}=\frac{11}{5}\frac{U}{R}$, $R_{AC}=\frac{5}{11}R$.

5. 1) $S_1:S_2=3:1$; 2) $L_1:L_2=3:5$.

10 класс

1. 1) $\beta=\alpha$; 2) $\frac{T_в}{T_н}=\frac{19}{8}$.

2. 1) $A_{\max} = mq\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = 2{,}45 \cdot 10^{13}$ Дж ;

2) $m_в = \frac{A_{\max}}{\lambda(1 - T_1/T_0)} = 5{,}12 \cdot 10^7$ кг .

3. $T = \frac{5}{4}T_0$.

4. 1) $\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d(1+\lambda_1/\lambda_2)}$, $\sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d(1+\lambda_2/\lambda_1)}$;

2) $\sigma = -\frac{2\varepsilon_0\mathscr{E}}{d}\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

5. 1) C = 1 мкФ; 2) $U_\infty = \frac{9U_1 + 10U_2}{19} = 136$ В ;

3) Q = 0,062 Дж.

11 класс

1. 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; 2) период уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

2. 1) q < 0; 2) $R = \sqrt{3}\,r = 17{,}3$ см ; 3) $\frac{|q|}{m} \approx 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Кл/кг .

3. При $h = h_1$ равновесие устойчивое, при $h = h_2 = 360$ мм равновесие неустойчивое.

4. 1) $I = \frac{U_0C_0}{2\rho_0\varepsilon_0}$; 2) $q_1 = \frac{C_0U_0}{2}$, $q_2 = -\frac{3C_0U_0}{2}$; 3) $q = C_0U_0$;

4) $W_э = \frac{13}{24}C_0U_0^2$.

5. 1) $N_1 = 71$, $N_2 = 83$; 2) во втором случае.

LII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1 (Д.Крачун). *Ответ*: $\{a, 5a, 7a, 11a\}$, $\{a, 11a, 19a, 29a\}$, где a – натуральное.

Пусть для определенности $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Положим $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Заметим, что $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$, значит, $s > a_2 + a_4 > \frac{s}{2}$, поэтому s не делится на $a_2 + a_4$. Аналогично, s не делится на $a_3 + a_4$. Значит, из шести пар индексов не более четырех пар $i < j$, для которых s делится на $a_i + a_j$. Значит, $n_A \le 4$.

Пусть $n_A = 4$, тогда s должно делиться на $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$. Тогда $a_1 + a_4 \le \frac{s}{2}$ и $a_2 + a_3 \le \frac{s}{2}$, откуда $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{s}{2}$, и $a_4 = a_2 + a_3 - a_1$.

Далее, $s = 2(a_2 + a_3)$ делится на $x = a_1 + a_2$ и на $y = a_1 + a_3$. Имеем $s = 2(a_2 + a_3) < 2(x + y) < 4y$, поэтому $\frac{s}{y}$ равно либо 2, либо 3. В первом случае $y = a_1 + a_3 = \frac{s}{2}$, что неверно (на самом деле $a_1 + a_3 < \frac{s}{2}$), значит, $y = \frac{s}{3} = \frac{2x + 2y - 4a_1}{3}$, отсюда $y = 2x - 4a_1$. Заметим, что $y > x$, откуда $2x - 4a_1 > x$ и $x > 4a_1$. Но $s = 2x + 2y - 4a_1 = 2x + 2(2x - 4a_1) - 4a_1 = 6x - 12a_1$ должно делиться на x, поэтому $12a_1$ делится на $x > 4a_1$. Частное $\frac{12a_1}{x}$ может равняться 1 или 2.

В первом случае $x = 12a_1$, откуда $a_2 = 11a_1$, $y = 20a_1$, $a_3 = 19a_1$, $a_4 = a_2 + a_3 - a_1 = 29a_1$.

Во втором случае $x = 6a_1$, откуда $a_2 = 5a_1$, $y = 8a_1$, $a_3 = 7a_1$, $a_4 = 11a_1$.

Непосредственная проверка (или обращение предыдущих рассуждений) показывает, что найденные четверки удовлетворяют условию задачи.

3 (А.Пахарев). Подставив $y = z - x$ (очевидно, z может принимать любые значения), имеем

$$f(z) \le f(x)z + (f(f(x)) - xf(x)). \qquad (*)$$

Предположим, что нашлось x_0 такое, что $f(x_0) > 0$. Тогда, подставив в (*) $x = x_0$, получаем, что $f(z)$ ограничена сверху линейной функций от z с положительным угловым коэффициентом.

Это означает, что для любого числа c найдется x_1 такое, что $f(x) < c$ при $x < x_1$. В частности, найдется x_2 , для которого $f(x_2) < 0$; тогда, подставив в (*) $x = x_2$, получаем, что $f(z)$ ограничена сверху линейной функций от z с отрицательным угловым коэффициентом. Отсюда получаем, что найдется некоторое d такое, что $f(x) \le d$ при любых значениях x.

Найдем $x_3 < 0$ такое, что при $x < x_3$ выполнено $f(x) < 0$. Подставив $x < x_3$ в (*), получаем $f(z) < f(x)z + d$ (так как $f(f(x)) < d$ и $xf(x) > 0$). Зафиксируем некоторое $z_0 > 0$ и подберем $x < x_3$ такое, чтобы неравенство $f(z) < f(x)z + d$ нарушалось (достаточно взять x такое, что $f(x) < \frac{f(z_0) - d}{z_0}$).

Получено противоречие. Наше предположение оказалось неверным, поэтому $f(x) \le 0$ для всех x.

Положив в неравенстве из условия задачи $y = -x$, получаем $xf(x) + f(0) \le f(f(x))$. Так как $f(f(x)) \le 0$, то $xf(x) \le -f(0)$. При x < 0 тогда имеем $f(x) \ge \frac{-f(0)}{x}$. Если $f(0) = 0$, то утверждение задачи доказано (из доказанного для отрицательных x имеем $0 \le f(x) \le 0$).

Предположим теперь, что $f(0) < 0$. Пусть нашлось такое $x_4 < 0$, что $f(x_4) = 0$. Подставив $x = x_4$ в (*), имеем $f(z) \le f(0)$. При $z < -1$ это противоречит доказанному неравенству $f(z) \ge \frac{-f(0)}{z}$.

Наконец, предположим, что для всех $x \le 0$ выполнено $f(x) < 0$. Подставив в равенство из условия задачи y = 0, имеем $f(x) \le f(f(x))$. Подставив x = 0 в (*), имеем $f(z) \le zf(0) + f(f(0))$. Положив $z = f(x)$, имеем $f(f(x)) \le f(0)f(x) + f(f(0))$, откуда $f(x) \le f(0)f(x) + f(f(0))$ или $(1 - f(0))f(x) \le f(f(0))$. Так как $f(0) < 0$ и $f(f(0)) < 0$, то $f(x) \le \frac{f(f(0))}{(1 - f(0))}$. В правой части последнего неравенства стоит фиксированное отрицательное число. Но при достаточно малых x это противоречит доказанному неравенству $f(x) \ge \frac{-f(0)}{x}$.

4 (М.Григорьев). *Ответ*: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ (что также равно $\frac{(2n)!}{2^n n!}$).

Докажем индукцией по n следующий общий факт: пусть имеются гири массами $0 < x_1 < \ldots < x_n$ такие, что каждая гиря весит больше, чем сумма всех гирь, которые легче нее; тогда количество способов f_n разложить гири по правилам из условия задачи равно $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

База индукции верна: для n = 1 имеется ровно 1 способ.

Предположим, что $n \ge 2$, и для $(n-1)$ гирь утверждение верно, т.е. $f_{n-1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$. Выделим одну из гирь – массой x_k , – которую будем класть на весы последней. Набор из всех гирь без гири массой x_k удовлетворяет условию (по-прежнему каждая гиря весит больше, чем сумма всех гирь, которые легче нее), поэтому имеется f_{n-1} способов разложить на весы эти $(n-1)$ гирь. Если $k \ne n$, то последнюю гирю массой x_k можно положить на любую чашу весов, если же $k = n$, то последнюю (самую тяжелую) гирю массой x_n можно положить только на левую чашу весов. Таким образом для каждого k = 1, 2, …, $n - 1$ имеется $2f_{n-1}$ способов разложить гири так, чтобы последней была гиря массой x_k , а также имеется f_{n-1} способов разложить гири так, чтобы последней была гиря массой x_n. Итого общее количество способов

$$f_n = (n-1)\cdot 2f_{n-1} + f_{n-1} = (2n-1)f_{n-1} =$$

$$= (2n-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-3) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

5. (А.Циглер). Положив $n = 0$, имеем $f(m) - f(0) \vdots f(m)$, значит, $f(0) \vdots f(m)$; таким образом, функция f может принимать лишь конечное множество значений – все они делители $f(0)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, и имеются пары целых чисел (t,k) со следующим *свойством*:
$f(t) > f(k)$, но $f(t)$ не делится на $f(k)$. Среди всех пар с указанным свойством выберем пару (t,k), для которой $f(t)$ наибольшее. Положив $m = k + t$, $n = k$, получаем, что $f(k+t) - f(k) \vdots f(t)$. Так как $f(k)$ не делится на $f(t)$ (ибо $f(t) > f(k)$), то $f(k+t)$ также не делится на $f(t)$. Имеем $f(t) \ge f(k+t)$, иначе пара $(k+t,t)$ удовлетворяла бы указанному свойству в противоречие с выбором пары (t,k).
Итак, $f(t) \ge f(k+t)$, $f(t) > f(k)$, поэтому $|f(k+t) - f(k)| < f(t)$, значит, из делимости $f(k+t) - f(k) \vdots f(t)$ следует равенство $f(k+t) = f(k)$. Теперь, полагая в условии задачи $m = k + t$, $n = t$, имеем $f(k+t) - f(t) \vdots f(k)$, или $f(k) - f(t) \vdots f(k) \Leftrightarrow f(t) \vdots f(k)$. Получено противоречие, которое завершает доказательство.

6. Пусть T – точка касания l и Γ. Обозначим $A' = l_b \cap l_c$, $B' = l_c \cap l_a$, $C' = l_a \cap l_b$. Обозначим через X, Y, Z точки, симметричные точке T относительно прямых BC, CA, AB соответственно. Проекции точки T на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой (прямая Симсона), поэтому точки X, Y, Z лежат на одной прямой (гомотетичной прямой Симсона с центром T и коэффициентом 2). Имеем $X \in B'C'$, $Y \in C'A'$, $Z \in A'B'$ (рис.13).

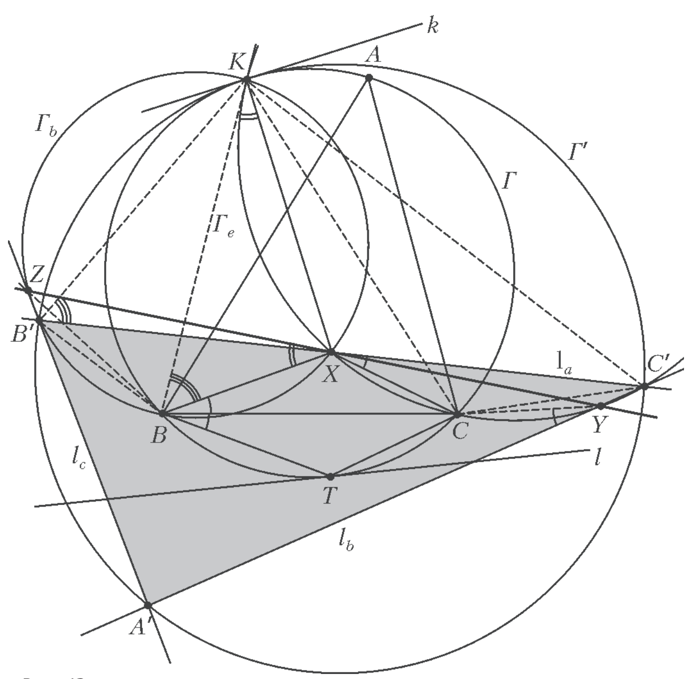

Рис. 13

Обозначим угол $\alpha = \angle(l,TC) = \angle CBT$. Из симметрии $\angle CBX = \angle CBT = \alpha$ и $\angle CXC' = \angle(l,TC) = \angle CYC' = \alpha$, отсюда следует, что точки X, Y, C, C' лежат на одной окружности Γ_c. Аналогично определим окружности Γ_a и Γ_b. Описанную окружность треугольника $A'B'C'$ обозначим Γ'. Окружности Γ_a, Γ_b, Γ_c и Γ' пересекаются в точке K – *точке Микеля* четверки прямых $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ и XY. Покажем, что K лежит на окружности Γ, причем касательные, проведенные к Γ и Γ' в точке K, совпадают. Отсюда последует утверждение задачи.
Из симметрии $XB = TB = ZB$, значит, точка B – середина дуги XZ окружности Γ_b. Отсюда $\angle BKX = \angle BXZ$. Аналогично $\angle CKX = \angle CXY$. Складывая эти равенства углов и еще раз используя симметрию относительно BC, получаем $\angle BKC = \angle BXZ + \angle CXZ = \angle BXC = BTC$. Значит, K лежит на окружности Γ.
Пусть k – касательная к окружности Γ, проведенная через K. Тогда

$$\angle(k,KC') = \angle(k,KC) + \angle CKC' = \angle KBC + \angle CXC' =$$

$$= \angle KBX - \angle CBX + \alpha = \angle KB'X - \alpha + \alpha = \angle KB'C'.$$

Итак, $\angle(k,KC') = \angle KB'C'$, а это означает, что k касается Γ'.
Замечание. Рассматриваемая конструкция находится в согласии с теоремой о пятерке точек Микеля (для данных пяти прямых точки Микеля всевозможных четверок из данных прямых лежат на одной окружности). Как известно, прямая XY проходит через ортоцентр H треугольника ABC. Тогда точки A, B, C, K, K являются пятеркой точек Микеля для всевозможных четверок из пяти прямых $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, XY, XY (здесь считаем XY, XY парой прямых, пересекающихся в H). Тогда A, B, C, K, K лежат на одной окружности, причем двукратное появление точки K соответствует касанию окружностей Γ и Γ'.

XLII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

1.1. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{Gm}{R(R+r)^2}} = \sqrt{\dfrac{GM}{r(R+r)^2}} = \sqrt{\dfrac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$.

1.2. $r_1 = r_2 = R + r$ (три тела расположены в вершинах правильного треугольника), $\rho = \sqrt{r^2 + rR + R^2}$.

1.3. $\omega = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$.

1.4. $v_{\text{отн}} = \sqrt{3}v = \sqrt{3}\omega\dfrac{L}{2\cos 20^\circ} = \sqrt{3}\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{L}{2\cos 20^\circ} \approx 1{,}7$ км/с.

Задача 2

2.1. $\dfrac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2} = 1 + \dfrac{4\sigma}{pR_0}$. **2.2.** $\dfrac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2} - 1 = 0{,}0001$.

2.3. $T_{1\min} = \dfrac{R_0\rho_1 T_1}{R_0\rho_1 - 3\rho_2 l}\left(1 + \dfrac{4\sigma}{R_0 p}\right) = 300{,}04$ К.

2.4. $u = \dfrac{2R_0\rho l g}{3\eta} + \dfrac{8}{9}\dfrac{R_0\rho_1 g\sigma}{\eta p}$. **2.5.** $u = 0{,}36$ м/с.

2.6. $\left(\dfrac{R_1}{R_0}\right)^4 - \dfrac{R_1}{R_0} - \dfrac{q^2}{32\pi^2 R_0^4 p} = 0$. **2.7.** $\Delta R = \dfrac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 R_0^3 p}$.

2.8. $q = \sqrt{\dfrac{36R_0^3\pi^2\rho\varepsilon_0 p}{\rho_2}} = 256$ нКл.

Задача 3

3.1. $E_p = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. **3.2.** $f = -\dfrac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}$.

3.3. $U = -\dfrac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}$. **3.4.** $r_{\min} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}$.

3.5. $S = \pi\sqrt{\dfrac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2}}$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2011 ГОДА

1. $v_{\text{ст}} = \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\alpha} - u\cos\alpha$.

2. $F\Delta t = \dfrac{\sqrt{2}Mv_0}{3}$. **3.** $h = \dfrac{v_0^2(\cos\alpha + 1/2)^2}{3g}$.

4. $W = \dfrac{\rho L^2 H}{2}\left(\dfrac{\mathcal{E}^2L^2}{B^2s^2} - gH\right) + m\left(\dfrac{\mathcal{E}^2}{2B^2L^2} - gH\right)$ (здесь ρ – плотность воды).

5. $\eta = \dfrac{1}{\dfrac{1}{1-n^{2/5}} + \dfrac{5}{2\ln n}}$.

6. $E = -\dfrac{\sigma\sin\delta}{\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{\sin\delta\cos\delta\ln(1-\cos\delta)}{1+\cos\delta}$.

7. $F = \dfrac{10qQ - 3Q^2 - 3q^2}{32\varepsilon_0\pi R^2}$. **8.** $L = \sqrt{\dfrac{\mu_0 qpmv}{\pi}}$.

9. $a = \dfrac{l}{3}$; $a = \dfrac{2l}{3}$.

XXXII ТУРНИР ГОРОДОВ

(см. «Квант» №4)

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

2. Назовем клетки, про периметры которых известно, что они целочислены, *известными*, а остальные клетки – *неизвестными*. Поскольку строк и столбцов в получившейся таблице – по 11, а неизвестных клеток всего 10, мы можем отметить строку и столбец, в которых все клетки – известные. Возьмем неизвестную клетку K. Легко проверить, что ее периметр P равен $P_1 + P_2 - P_0$, где P_1 – периметр клетки отмеченного столбца, стоящей в одной строке с K, P_1 – периметр клетки отмеченной строки, стоящей в одном столбце с K, а P_0 – периметр клетки, стоящей на пересечении отмеченных строки и столбца. Так как все числа P_1, P_2 и P_0 – целые, число P – тоже целое.

3. Можно.

В момент $\dfrac{1}{2^{10}}$ (часа) от начала процедуры отрежем от червяка $\dfrac{1}{2^{10}}$ метра. В момент $\dfrac{1}{2^9}$ от выросшей длинной части отрежем $\dfrac{1}{2^9}$ метра. В момент $\dfrac{1}{2^8}$ отрежем $\dfrac{1}{2^8}$ метра, ... в момент $\dfrac{1}{2}$ разрежем взрослого червяка пополам. К исходу часа все отрезанные куски станут взрослыми червями. При этом от первого разрезания прошло только $1 - \dfrac{1}{2^{10}}$ часа.

Замечание. Покажем, что быстрее, чем за $1 - 1/2^k$ часов получить k + 1 взрослых червяков нельзя. Понятно, что нет смысла делать больше k отрезаний. Пусть после какого-то разрезания мы хотим дождаться взросления меньшей части, чтобы ее разрезать. Тогда все время составит хотя бы час: полчаса на ее взросление и полчаса после ее разрезания на взросление новой меньшей части. Следовательно, мы всегда будем резать одну и ту же часть червя — большую. Сейчас докажем наше утверждение индукцией по k. База очевидна. Переход. Если при первом отрезании меньшая часть будет не больше $1/2^k$, то на ее взросление уйдет не меньше $1 - 1/2^k$ часов. Если же она будет больше $1/2^k$, то на взросление большей части потребуется больше $1/2^k$ часов, плюс время на получение из нее k взрослых червяков, которое по предположению не меньше $1 - 1/2^{k-1}$, т.е. всего больше $1 - 1/2^k$ часов. Утверждение доказано. Из него также следует, что для получения оптимального времени резать надо именно так, как указано в решении.

4. Не обязательно.

Всем условиям задачи удовлетворяет равнобедренная трапеция с меньшим основанием, равным боковой стороне, и углами в 72° при большем основании (рис.14). Такая трапеция получается, если отсечь диагональю треугольник от правильного пятиугольника.

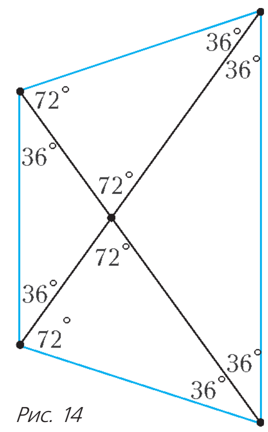

Рис. 14

5. б) Сможет.

Сначала разложим монеты на две кучки: в первой 49 монет, в второй – 51 монета. Затем каждый день будем перекладывать по монете из первой кучки во вторую. На 25-й день в первой кучке будет 25 монет, во второй – 75. Стало быть, на 25-й день в первой кучке будет не больше 25 фальшивых и не больше 25 настоящих монет. Если такая же ситуация была и в первый день, то либо фальшивых, либо настоящих монет в первой кучке было ровно 25 штук (иначе всего монет там было бы не больше 48), и рыцарь освободился сразу. Иначе в первый день в первой кучке было больше 25 фальшивых или больше 25 настоящих монет. Заметим, что число как фальшивых, так и настоящих монет в первой кучке каждый день может измениться не больше, чем на 1, по сравнению с предыдущим днем. Поэтому в какой-то из дней между первым и 51-м число фальшивых или настоящих монет в первой кучке будет равно 25, что и требуется.

10–11 классы

3. При $k = 1$, а также при k, для которых $k - 1$ не делится на 4.

Пусть $k > 1$. Пометим любой камень. Затем пометим камень, $(k-1)$-й по часовой стрелке после помеченного, и будем повторять эту процедуру, пока не вернемся к исходному камню. Любые два соседних помеченных камня будут концами ряда из k подряд идущих камней. Поэтому отмеченные камни можно перекрашивать только в паре с отмеченными. Стало быть, их удастся перекрасить тогда и только тогда, когда их четное число, и это число, как нетрудно проверить, равно $\dfrac{100}{\text{НОД}(100, k-1)}$. А четность этого числа равносильна неделимости $k - 1$ на 4. Осталось заметить, что все 100 камней разбиваются на $\text{НОД}(100, k-1)$ наборов помеченных.

4. Пусть O – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D пятиугольника $ABCDE$ на противолежащие стороны. Нетрудно убедиться, что точка O не может совпадать с вершиной пятиугольника. Так как $OA \perp CD$, то $\overline{OA}\cdot(\overline{OC} - \overline{OD}) = 0$, т.е. $\overline{OA}\cdot\overline{OC} = \overline{OA}\cdot\overline{OD}$. Аналогично из $OB \perp DE$, $OC \perp EA$, $OD \perp AB$ получаем равенства $\overline{OB}\cdot\overline{OD} = \overline{OB}\cdot\overline{OE}$, $\overline{OC}\cdot\overline{OE} = \overline{OC}\cdot\overline{OA}$, $\overline{OD}\cdot\overline{OA} = \overline{OD}\cdot\overline{OB}$. Но тогда и $\overline{OC}\cdot\overline{OE} = \overline{OB}\cdot\overline{OE}$, т.е. $\overline{OE}\cdot\overline{CB} = 0$. Значит, $OE \perp BC$.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

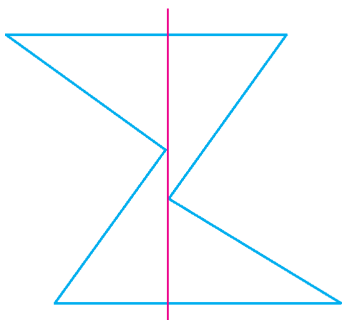

Рис. 15

1. Можно. См. рисунок 15.

2. 8950.

Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через начало координат проведено 180 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 179 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 17900, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

3. Могут.

Пусть у барона гири всех четных весов – от 2 до 100. Допустим, нам удалось разложить все и получить равновесие. Тогда равенство сохранится, если все веса разделить на 2. Однако гири весами 1, 2, …, 50 так разложить нельзя, поскольку сумма их весов нечетна.

4. Например, подойдут пары $(4N-2, 1)$ и $(2N, 2N-1)$ или $(N^2+N, 1)$ и $(N^2, N+1)$.

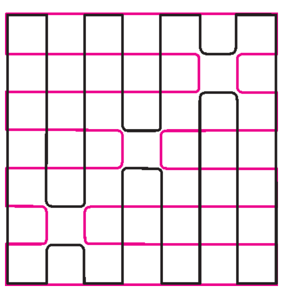

Рис. 16

6. 16 сторон.

Пример приведен на рисунке 16 (один маршрут черный, другой – красный).

Оценка. Каждый из муравьев посетил по 64 разные стороны. Всего сторон $7 \cdot 8 \cdot 2 = 112$. Следовательно, дважды посещенных сторон хотя бы $64 + 64 - 112 = 16$.

7. *Первое решение.* Пусть в таблице n строк. Возьмем в каждой строке пару наибольших чисел и выпишем эти $2n$ чисел в порядке возрастания. Ввиду равенства сумм в пары входят первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д. Отметим в таблице $n + 1$ наибольших из выписанных чисел. По принципу Дирихле найдутся два отмеченных числа в одном столбце; их сумму обозначим через s. По условию, $s \le b$. С другой стороны, s не меньше суммы двух наименьших из отмеченных чисел, а это как раз центральная пара из выписанных чисел, и ее сумма равна a. Значит, $a \le s \le b$. Аналогично доказывается, что $b \le a$.

Второе решение. Пусть $a > b$. Числа в таблице, не меньшие $a/2$, назовем *большими*. В каждом столбце не больше одного большого числа. В каждой строке не меньше одного большого числа. Тогда всего в ней не больше и не меньше, чем n больших чисел, т.е. их ровно n, причем в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному большому числу. Пусть x – наименьшее большое число. В его строке найдется число $a - x$, которое не является большим. В столбце последнего найдется большое число, оно не меньше x. Мы нашли столбец и два числа в нем, сумма которых не меньше a, т.е. больше b. Противоречие.

10–11 классы

3. *а)* Могут.

Возьмем неравносторонний треугольник T и выберем в нем две различные стороны a и b. Возьмем также треугольник U, подобный T с коэффициентом a/b. Приставим их друг к другу сторонами длины a так, чтобы они не лежали в одной плоскости. Две свободные вершины этих треугольников задают направление бокового ребра призмы, которое сделаем достаточно большим, чтобы призма имела непересекающиеся сечения, равные T и U.

б) Не может.

Предположим, что такие спилы получились. Расстояния между боковыми ребрами призмы не превышают длины стороны треугольника, соединяющей точки на этих ребрах, т.е. не больше 1. Будем считать, что боковые ребра идут вертикально. Проведем через вершины большего спила три горизонтальные плоскости. Пусть вторая плоскость лежит между первой и третьей, и расстояния от нее до двух других равны a и b. Тогда стороны большого треугольника станут диагоналями прямоугольников ширины, равной расстоянию между соответствующими боковыми ребрами, а высоты равны a, b и $a + b$. Но если ширина прямоугольника с высотой a не больше 1, а длина диагонали равна 2, то $a \ge \sqrt{3}$. Аналогично $b \ge \sqrt{3}$. Но тогда высота третьего прямоугольника $a + b \ge 2\sqrt{3} > 2$, тем более его диагональ больше 2. Противоречие.

4. *а)* Не всегда.

Пусть длины синих палочек 12, 17, 20, а красных – 2, 23, 24. Поскольку единственная пара с разностью меньше 2 – это (23, 24), а после перекрашивания палочка 2 попадет в другую по составу тройку, то в ней разность наибольших сторон будет больше 2, и треугольник сложить будет нельзя.

б) Не всегда.

Пусть $k = N - 2$. Пусть длины двух синих палочек равны $12k + 5$ и $24k - 4$, а длины остальных k равны 12; длины двух красных палочек равны $24k - 1$ и $24k$, а длины остальных равны $2/k$. Если перекрашена одна из длинных красных палочек, то разность между получившимися длинными красными палочками больше 2, и палочками длины $2/k$ ее не покрыть.

Пусть синей стала палочка $2/k$. Если палочка длины $24k - 5$ осталась синей, то сумма остальных синих не превосходит $2/k + 12(k-1) + 12k + 5 < 24k - 4$. Если палочка длины $24k - 4$ стала красной, то наибольшей синей стала палочка длины $12k + 5$, но сумма остальных синих равна $12k + 2/k < 12k + 5$. В обоих случаях синий многоугольник не складывается.

5. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD, Ω_1 и Ω_2 – окружности, симметричные ω_1 и ω_2 относительно биссектрисы угла AOD. Рассмотрим окружности Ω_4 и Ω_3, полученные из Ω_1 и Ω_2 инверсией относительно окружности с центром O и радиусом $R = \sqrt{OA \cdot OC} = \sqrt{OB \cdot OD}$. Они, очевидно, касаются. При этом Ω_4 проходит через точки C и D и может быть получена из Ω_1 не только инверсией, но и гомотетией с центром и коэффициентом $OD : OA = OC : OB$. Поэтому градусная мера дуги CD в Ω_4 равна α. Следовательно, Ω_4 совпадает с ω_4. Аналогично, Ω_3 совпадает с ω_3.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. Первый игрок.

Пусть первый игрок всегда перекладывает одну и ту же монету. Тогда он всегда сможет сделать ход и, значит, выиграет. Действительно, назовем расположение орлов и решек четным или нечетным в зависимости от того, в скольких позициях оно отличается от начального. Первый игрок всегда переходит от четного расположения к нечетному, второй – наоборот. Если первый игрок переходит к расположению, которое уже появлялось, то получить его раньше мог только он сам, причем переворачивая ту же монету. Значит, уже появлялось и расположение, из которого он делает ход, – противоречие.

2. Все 49 чисел различны, иначе суммы двух из них с третьим одинаковы вопреки условию. Пусть $a_1, \ldots, a_{49}$ – числа на доске, занумерованные в порядке возрастания. Если

$a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$ при каких-то $i < j$, то $a_{i+1} + a_j = a_{j+1} + a_i$, что возможно лишь в случае $j = i + 1$ (тогда сумма слева не является попарной суммой). Таким образом, среди разностей соседних по величине чисел на доске одинаковыми могут быть лишь две соседних. Значит, сумма всех этих разностей (т.е. разность между наибольшим и наименьшим числом) не меньше $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 24) = 600$. Так как наименьшее из чисел на доске не меньше 1, то наибольшее не меньше 601.

3. Верно.

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром O описанной окружности треугольника ABC. В этой системе точки A, B, C также движутся прямолинейно и равномерно; значит, если одна из них покоится, то и все три покоятся (иначе расстояния до них от O не будут все время равны), и задача решена. Итак, можно считать, что все три точки движутся по прямым a, b, c.

Квадрат расстояния от точки, движущейся со скоростью v по прямой, находящейся на расстоянии d от O, в момент времени t равен $v^2 (t + m)^2 + d^2$ (где m – некая константа). Так как расстояния от точек A, B, C до O одинаковы в каждый момент времени, соответствующие квадратные трехчлены для них равны в бесконечном числе точек – а значит, равны покоэффицентно. Приравнивая последовательно коэффициенты при t^2, t и 1, получаем, что величины v, m и d для всех трех точек равны. Тогда, если «продолжить» движение точек на отрицательное время, то опять же расстояния от O до всех трех точек будут равны.

Поскольку значения d и m для всех точек равны, все точки одновременно оказываются в основаниях перпендикуляров из O на прямые a, b, c соответственно. Если затем все лучи, проведенные из O в наши три точки, вращаются в одном направлении, то все треугольники поворотно-гомотетичны, а значит, подобны. Иначе, скажем, лучи в точки A и B вращаются в одну сторону, а луч в точку C – в другую.

Пусть одна из прямых a, b, скажем, a, пересекает прямую c; из симметрии, точки A и C одновременно приходят в точку пересечения a и c. Но это значит, что в исходной системе отсчета они тоже должны были встретиться; поскольку лучи, по которым они двигались, пересекаются (а дополнительные к ним – нет), то это произошло в положительный момент времени. Но это противоречит условию. Наконец, если прямые a, b, c параллельны, то две из них совпадают. Тогда точки, двигавшиеся по ним, встречались в основании перпендикуляра из точки O, что невозможно по тем же причинам.

4. Заметим сначала, что идеальных компаний не больше, чем количество различных подмножеств девушек – каждое такое подмножество если и дает идеальную компанию (вместе с какими-то парнями), то только одну (надо просто добавить всех парней, которым нравятся все эти девушки). Значит, компаний не больше $2^9 = 512$.

Приведем пример, когда компаний ровно 512. Пусть шести юношам из пятнадцати не нравится ни одна девушка. Оставшихся девять юношей занумеруем числами от 1 до 9, и девушек тоже.

Пусть юноше с номером i нравятся все девушки, кроме i-й. Тогда любой непустой набор девушек дает идеальную компанию из девяти человек (надо добавить юношей с номерами, отличными от номеров девушек), в частности, все девушки образуют идеальную компанию; пустой набор девушек тоже дает идеальную компанию – это все 15 юношей.

5. Если $a = 1$, то, очевидно, $b = 1$; при этом пара $(1, 1)$ подходит. Осталось разобрать случай $a, b > 1$. Заметим сразу, что a и b взаимно просты; пусть $a > b$.

Число $A = a^{1000} + b^{1000} + 1 = a^{1000} + \left(b^{1000} + 1\right)$ делится на a^{619}; аналогично, A делится на b^{619}, а из взаимной простоты – и на их произведение. Итак, $a^{1000} + b^{1000} + 1 \geq a^{619} b^{619}$, а значит, $a^{1001} \geq 2a^{1000} \geq a^{619} b^{619}$, или $a^{382} \geq b^{619}$. С другой стороны, $b^{1001} > b^{1000} + 1 \geq a^{619}$. Итак, $b^{1001 \cdot 382} > a^{619 \cdot 382} \geq b^{619 \cdot 619}$. Но $1001 \cdot 382 < 619^2$ – противоречие.

6. Обозначим данные многоугольники через M_1, M_2, M_3, их центры – O_1, O_2, O_3; также обозначим через T_{ij} пересечение многоугольников M_i и M_j (ясно, что многоугольники T_{ij} попарно не пересекаются). Тогда середина O_{12} отрезка O_1O_2 является центром симметрии, переводящей M_1 в M_2; значит, эта точка – центр симметрии многоугольника T_{12}.

Утверждение задачи равносильно тому, что сумма площадей многоугольников T_{ij} не превосходит 1. Если один из них, скажем, T_{23}, пуст, то утверждение очевидно, ибо T_{13} и T_{12} расположены внутри M_1 и не пересекаются.

В противном случае рассмотрим многоугольник T'_{23}, полученный из T_{23} симметрией относительно O_{12}. Поскольку эта симметрия переводит M_2 в M_1, а T_{12} – в себя, многоугольник T'_{23} лежит в M_1 и не пересекается с T_{12}.

Заметим, что многоугольник M_3 не пересекается с многоугольником M'_3, симметричным ему относительно O_{12}; иначе этому пересечению принадлежали бы две симметричные точки A и A', а значит, и середина отрезка между ними, т.е. O_{12}. Но O_{12} лежит в T_{12} и, значит, не лежит в M_3. Итак, M_3 и M'_3 не пересекаются, а значит, не пересекаются и лежащие в них многоугольники T_{13} и T'_{23}.

Итак, все три непересекающихся многоугольника T_{12}, T_{13}, T'_{23} лежат в M_1, поэтому сумма их площадей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

(см. «Квант» №4)

Где ошибка?

1. Раскрыв скобки, мы получим уравнение вида $px^2 + qx + r = 0$, где p, q и r – некоторые числа. Если $p \neq 0$, то уравнение квадратное и имеет не более двух корней. Но мы знаем по крайней мере три корня (a, b и c). Значит, $p = 0$. Тогда получаем уравнение $qx + r = 0$, и если $q \neq 0$, у него один корень. Значит, $q = 0$. Но тогда и $r = 0$, иначе корней вообще нет. Мы доказали, что наше уравнение – это на самом деле тождество, и любое число x будет его корнем. Желающие могут раскрыть скобки и убедиться, что все сокращается.

2. Попробуем решить задачу «в лоб» – без теоремы Виета. Так как p и q – корни уравнения, то $p^2 + p^2 + q = 0$ и $q^2 + pq + q = 0$. Из второго равенства либо $q = 0$ – и тогда $p = 0$, либо $q + p + 1 = 0$ – и тогда, выражая q через p и подставляя в первое равенство, находим $p = 1$ или $p = -\frac{1}{2}$ (соответственно, $q = -2$, $q = -\frac{1}{2}$). Почему же третий ответ $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ потерялся при решении задачи с помощью теоремы Виета? Потому что в этом случае числа p и q не являются обоими корнями уравнения – они равны друг другу и совпадают с одним из корней уравнения.

3. Ошибка в шаге индукции. Для доказательства шага мы должны рассмотреть произвольное разбиение треугольника на $n + 1$ треугольник. Если бы удалось *удалить* один из отрезков так, чтобы получить разбиение на n треугольников, утверждение было бы доказано: восстановив этот отрезок, мы нашли бы тупой угол. Но удалить так отрезок не всегда возможно, как показывает пример на рисунке к задаче. В приведенном же решении отрезок *добавляется* к разбиению на n треугольников, но так получаются не все разбиения на $n + 1$ треугольник.

4. Все зависит от того, какой толщины слой краски, которую мы наносим на стены. Если он какой-то определенный (скажем, 1 мм), то краски, конечно, не хватит, если поверхность имеет бесконечную площадь.

Но посмотрим, какова будет толщина слоя краски на стенах, если просто залить всю башню краской. В каждой комнате слой будет, уж конечно, не толще, чем максимум из высоты, длины и ширины комнаты. Но размеры верхних комнат становятся все меньше и меньше (стремятся к нулю), так что и слой краски в верхних комнатах становится все тоньше и тоньше (тоже стремится к нулю). И итоговый объем нужной краски (при указанных в условии размерах комнат) оказывается конечным. Это и спасает слугу.

5. На самом деле угол *CAN* будет больше развернутого (сделайте точный рисунок!).

6. В первой цепочке равенств ошибки нет (заметьте, что $(\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = 0 + \ln x = \ln x$). Ошибка в первом равенстве второй цепочки: второй знак производной по-прежнему означает дифференцирование по x, а не по u, но интерпретируется как дифференцирование по u. Чтобы второй знак означал дифференцирование по u, необходимо домножить подинтегральное выражение на производную u по x, т.е. на 2.

Правильная цепочка равенств такова:

$$\int_1^2 (\ln 2x)'\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 2(\ln u)'\,du = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2\,.$$

7. Справочники не врут. Ошибка в том, что интеграл вычисляется не от той величины. Под интегралом должен стоять квадрат длины вектора, проведенного под углом φ к оси абсцисс из O в соответствующую точку эллипса. Но этой точкой вовсе не будет точка $R(\varphi)$ с координатами $(a\cos\varphi; b\sin\varphi)$ – тангенс угла наклона $OR(\varphi)$ равен $\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi$ и отличен от $\operatorname{tg}\varphi$ (при $a \neq b$).

Нас ввело в заблуждение то, что $R(\varphi)$ тоже пробегает весь эллипс при изменении угла φ от 0 до 2π, но это не та параметризация, которая нам нужна.

Найти площадь эллипса легко из геометрических соображений. Так как он получается из круга радиуса 1 растяжением – вдоль оси абсцисс в a раз и вдоль оси ординат в b раз, – то его площадь равна площади этого круга, умноженной на ab, т.е. как раз $ab\pi$.