| Участник | Баллы по задачам | | | | | | Сумма баллов | Медаль |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| Пахарев Алексей | 7 | 1 | 7 | 5 | 7 | 1 | 28 | золотая |
| Циглер Александр | 7 | 2 | 3 | 7 | 7 | 0 | 26 | серебряная |

Руководители команды благодарны *Д.Ю.Дойхену*, много лет оказывающему содействие в подготовке и участии команды России в международных математических соревнованиях.

### Задачи олимпиады

**1.** Для множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, состоящего из четырех попарно различных целых положительных чисел, обозначим через $s_A$ сумму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через $n_A$ обозначим количество пар индексов $(i, j)$, $1 \le i < j \le 4$, для которых $s_A$ делится на $a_i + a_j$. Найдите все множества $A$, состоящие из четырех попарно различных целых положительных чисел, для которых $n_A$ принимает наибольшее возможное значение.

*Мексика*

**2.** См. задачу М2245,а «Задачника «Кванта».

**3.** Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что $f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$ для всех действительных $x$ и $y$. Докажите, что $f(x) = 0$ для всех $x \le 0$.

*Белоруссия*

**4.** Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и $n$ гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все $n$ гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, т.е. на каждом из $n$ шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

*Иран*

**5.** Пусть $f$ – функция, определенная на множестве целых чисел, принимающая целые положительные значения. Известно, что для любых целых $m$ и $n$ разность $f(m) - f(n)$ делится на $f(m-n)$. Докажите, что для любых целых $m$ и $n$ таких, что $f(m) \le f(n)$, число $f(n)$ делится на $f(m)$.

*Иран*

**6.** Пусть $ABC$ – остроугольный треугольник, и $\Gamma$ – описанная около него окружность. Пусть прямая $l$ – некоторая касательная к окружности $\Gamma$, и пусть $l_a$, $l_b$ и $l_c$ – прямые, симметричные прямой $l$ относительно прямых $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми $l_a$, $l_b$ и $l_c$, касается окружности $\Gamma$.

*Япония*

*Публикацию подготовили руководители команды России на LII ММО Н.Агаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин*

# XLII Международная физическая олимпиада

В 2011 году Международная физическая олимпиада школьников проходила в Таиланде с 10 по 18 июля. На олимпиаду приехали 380 школьников из 84 стран мира.

На олимпиаде Россию представляли:

*Арзамасский Лев* – Калининград, лицей 23, учителя физики Боронилов Борис Анатольевич и Пец Александр Васильевич,

*Сопенко Никита* – Тамбов, лицей 14, учитель физики Бирюков Валерий Владимирович,

*Паринов Данила* – Воронеж, гимназия 9, затем СУНЦ МГУ, учителя физики Голубков Андрей Александрович и Лукьянов Илья Владимирович (СУНЦ МГУ),

*Шель Егор* – Тюмень, школа 29, затем СУНЦ МГУ, учителя физики Голубков Андрей Александрович и Лукьянов Илья Владимирович (СУНЦ МГУ),

*Асташкин Роман* – Королев Московской обл., лицей научно-инженерного профиля, учитель физики Третьякова Галина Сергеевна.

Руководителями нашей команды были Станислав Миронович Козел и Валерий Павлович Слободянин.

По традиции, участникам олимпиады было предложено решить три теоретические задачи и выполнить два экспериментальных задания. Как и в прошлые годы, лидерство захватили команды, представляющие страны юго-восточной Азии: Тайвань, Китай, Сингапур, Корея (южная). В нашей команде расклад по медалям в точности совпал с результатами прошлого года – одна золотая, три серебряные и одна бронзовая медали. Члены сборной команды России показали следующие результаты:

| Участник команды | Медаль |
|---|---|
| Арзамасский Лев | золотая |
| Сопенко Никита | серебряная |
| Паринов Данила | серебряная |
| Шель Егор | серебряная |
| Асташкин Роман | бронзовая |

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

### Теоретический тур

**Задача 1. Проблема трех тел и LISA**

**1.1.** Два тела с массами $M$ и $m$ двигаются по круговым орбитам с радиусами $R$ и $r$ соответственно вокруг общего центра масс. Выразите угловую скорость вращения $\omega_0$ отрезка, соединяющего тела, через $R$, $r$, $M$, $m$ и гравитационную постоянную $G$. (1,5 балла)

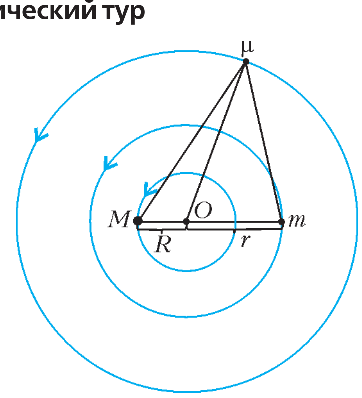


*Рис.1. Концентрические орбиты трех тел в одной плоскости*

**1.2.** Третье тело с пренебрежимо малой массой $\mu$ вращается в той же плоскости по круговой орбите вокруг того же центра масс так, что остается неподвижным относительно тел с массами $M$ и $m$ (рис.1). Считайте, что третье тело не лежит на прямой, соединяющей первые два тела. Выразите следующие параметры через $R$ и $r$: расстояние $r_1$ от третьего тела ($\mu$) до первого тела ($M$); расстояние $r_2$ от третьего тела ($\mu$) до второго тела ($m$); расстояние $\rho$ от третьего тела ($\mu$) до центра масс системы. (3,5 балла)

**1.3.** Рассмотрите случай $M = m$. Тело массой $\mu$ выводят из положения равновесия в радиальном направлении (вдоль радиуса). Выразите циклическую частоту радиальных колебаний этого тела через $\omega_0$. Считайте, что момент импульса тела массой $\mu$ не изменяется. (3,2 балла)

Лазерная интерферометрическая космическая антенна LISA (Laser Interferometry Space Antenna) представляет собой три одинаковых космических аппарата и предназначена для детектирования низкочастотных гравитационных волн. Каждый из аппаратов располагается в вершине равностороннего треугольника, как показано на рисунках 2 и 3. Длина сторон

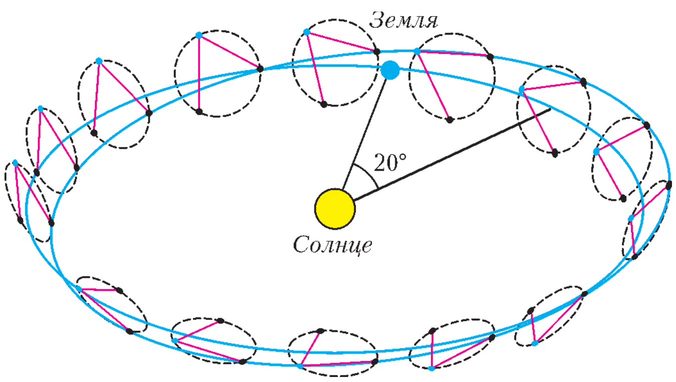


*Рис.2. Изображение орбиты LISA. Три аппарата вращаются с периодом 1 год. Угол Земля–Солнце–LISA составляет 20°*

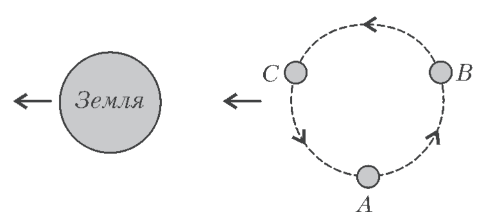


*Рис.3. Увеличенное изображение трех аппаратов LISA, двигающихся вслед за Землей; A, B и C – три аппарата, находящихся в вершинах равностороннего треугольника*

треугольника – плеч интерферометра – около 5,0 млн км. Система LISA находится на земной орбите так, что угол Земля–Солнце–LISA составляет $20°$. Каждый аппарат движется по слегка наклоненной орбите вокруг Солнца. Фактически в системе отсчета, связанной с LISA, аппараты вращаются вокруг центра антенны с периодом 1 год.

Аппараты непрерывно посылают лазерные сигналы друг другу и принимают их. Таким образом они детектируют гравитационные волны, измеряя небольшие изменения длин плеч интерферометра интерференционным методом. Столкновение массивных объектов, таких как черные дыры, в соседних галактиках является источником гравитационных волн.

**1.4.** Определите относительную скорость движения одного из аппаратов относительно другого в плоскости LISA. (1,8 балла)

**Задача 2. Заряженный мыльный пузырь**

Сферический мыльный пузырь радиусом $R_0$, наполненный воздухом с плотностью $\rho_1$ при температуре $T_1$, находится в воздухе с плотностью $\rho_2$ при температуре $T_2$ и атмосферном давлении $p$. Мыльная пленка характеризуется поверхностным натяжением $\sigma$, плотностью $\rho$ и толщиной $l$. Поверхностное натяжение и масса мыльной пленки не изменяются с температурой. Считается, что $R_0 \gg l$.

Увеличение энергии $dE$, требуемое для увеличения площади поверхности границы между мыльной пленкой и воздухом на величину $dS$, дается соотношением $dE/dS = \sigma$, где $\sigma$ – поверхностное натяжение пленки.

**2.1.** Запишите отношение $\rho_1 T_1/\rho_2 T_2$ через $\sigma$, $p$ и $R_0$. (1,7 балла)

**2.2.** Найдите численное значение величины $(\rho_1 T_1/\rho_2 T_2) - 1$, используя значения $\sigma$ = 0,0250 Н/м, $R_0$ = 1,00 см и $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$. (0,4 балла)

**2.3.** Воздух внутри пузыря первоначально теплее атмосферного. Найдите значение минимальной температуры $T_{1\min}$, необходимой для того, чтобы пузырь мог парить в воздухе не падая. Используйте значения $T_2$ = 300 К, $\rho = 1000$ кг/м$^3$, $\rho_2 = 1{,}3$ кг/м$^3$, $l$ = 100 нм и $g$ = 9,80 м/с$^2$. (2,0 балла)

Через некоторое время после образования мыльного пузыря установится тепловое равновесие между ним и окружающим воздухом. Поэтому в неподвижном воздухе мыльный пузырь опустится на землю.

**2.4.** Найдите минимальную скорость $u$ поднимающегося вверх воздуха, при которой мыльный пузырь, находящийся в тепловом равновесии с воздухом, не опускается. Выразите ответ через $\rho$, $R_0$, $g$, $l$ и коэффициент вязкости воздуха $\eta$. Сила сопротивления определяется законом Стокса: $F = 6\pi\eta R_0 u$. (1,6 балла)

**2.5.** Рассчитайте численно величину $u$, используя значение $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). (0,4 балла)

Проведенные расчеты показывают, что слагаемые, включающие поверхностное натяжение $\sigma$, не оказывают существенного влияния на результат. Поэтому во всех последующих пунктах поверхностным натяжением можно пренебречь.

**2.6.** Предположим теперь, что пузырь заряжен равномерно с общим зарядом $q$. Выведите уравнение для определения радиуса $R_1$ пузыря после его зарядки через $R_0$, $p$, $q$ и электрическую постоянную $\varepsilon_0$. (2,0 балла)

**2.7.** Предположим, что заряд пузыря $q$ не очень велик $\left(q^2/\left(\varepsilon_0 R_0^4\right) \ll p\right)$, так что зарядка пузыря увеличивает его радиус на малую величину $\Delta R$ $(\Delta R = R_1 - R_0)$. Найдите $\Delta R$. Известно, что $(1+x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$. (0,7 балла)

**2.8.** Найдите такой заряд $q$, выраженный через $l$, $\rho_2$, $\rho$, $\varepsilon_0$, $R_0$, $p$, при котором пузырь будет неподвижно висеть в воздухе. Вычислите величину этого заряда. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. (1,2 балла)

**Задача 3. Рассеяние иона на нейтральном атоме** (в честь столетия модели атома Резерфорда)

Ион массой $m$ и зарядом $Q$ движется с начальной скоростью $v_0$ из бесконечности к окрестности нейтрального атома массой $M \gg m$ и электрической поляризуемостью $\alpha$. Прицельный параметр равен $b$ (рис.4). Атом мгновенно поляри-

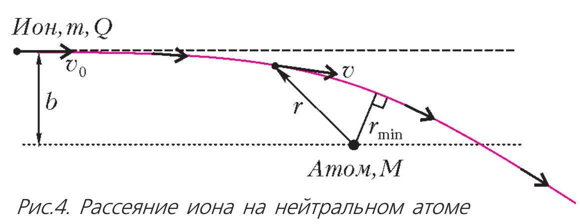


*Рис.4. Рассеяние иона на нейтральном атоме*

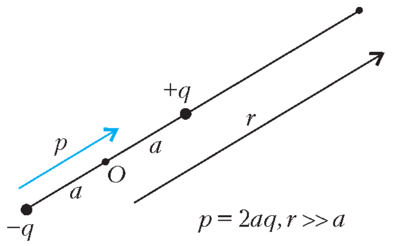


*Рис.5. Дипольный момент поляризованного атома*

зуется электрическим полем $\vec{E}$ приближающегося иона. В результате у него появляется электрический дипольный момент $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. Релятивистские эффекты не учитывайте.

**3.1.** Рассчитайте напряженность $E_p$ электрического поля на расстоянии $r$ на оси диполя с дипольным моментом $\vec{p}$, расположенного в начале координат (точка $O$ на рисунке 5). (1,2 балла)

**3.2.** Найдите выражение для силы $\vec{f}$, действующей на ион со стороны поляризованного им атома. Покажите, что эта сила есть сила притяжения независимо от знака заряда иона. (3,0 балла)

**3.3.** Найдите электрическую потенциальную энергию взаимодействия атома и иона, выразив ее через $\alpha, Q$ и $r$. (0,9 балла)

**3.4.** Получите выражение для минимального расстояния $r_{\min}$ между ионом и атомом (см. рис. 4). (2,4 балла)

**3.5.** Если прицельный параметр $b$ меньше критического значения $b_0$, то ион упадет по спиральной траектории на атом. В этом случае ион окажется нейтрализованным, а атом – заряженным. Этот процесс известен как «перезарядка». Чему равна площадь сечения $S = \pi b_0^2$ этой перезарядки атома «с точки зрения» налетающего иона? (2,5 балла)

*Публикацию подготовили*
*С.Козел, В.Слободянин*

# Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2011 года

Заключительный тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 15 ноября 2011 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПГПУ), набравшая 120 баллов, второе место заняла команда Национального исследовательского технологического университета (НИТУ) «МИСиС» (59 баллов), третье место – команда Московского института электронной техники (53 балла).

Победителями в личном зачете стали Антон Соболев (СПГПУ) – первое место, Петр Кравчук (СПГПУ) – второе место, Петр Карпов (НИТУ «МИСиС») – третье место.

### Задачи олимпиады

**1.** Ракета $A$ и цель $B$ движутся с постоянными по модулю скоростями $v$ и $u$ соответственно ($v > u$). Цель $B$ уходит от ракеты, сохраняя угол между векторами $\overline{AB}$ и $\vec{u}$ равным $\alpha$. Определите скорость столкновения ракеты и цели, если известно, что максимальное ускорение, которое может развить ракета, равно $a$, а ее траектория выбирается из условия минимального времени.

**2**. Космическое тело массой $M$ движется вокруг Земли по круговой орбите с первой космической скоростью $v_0$. Тело при взрыве разваливается на две части, массы которых относятся как 1:2. Определите минимальный импульс силы, получаемый каждой частью при взрыве, необходимый для того, чтобы обе части удалились от Земли на бесконечность.

**3.** Сплошной цилиндр, двигаясь по горизонтальной поверхности, накатывается со скоростью $v_0$ на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha$. Определите, на какую высоту закатится цилиндр, если проскальзывание отсутствует, а удар о наклонную плоскость абсолютно неупругий.

**4.** Сосуд квадратного сечения размером $L \times L$ заполнен водой до высоты $H$ и накрыт сверху металлическим поршнем массой $m$. На противоположных стенках сосуда проложены вертикальные токоподводящие шины, касающиеся поршня. Сосуд находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B$ и перпендикулярна плоскости, образованной шинами. К шинам подключен внешний источник тока с ЭДС, равной $\mathcal{E}$. Определите затраты энергии в источнике при полном вытеснении воды через отверстие в дне сосуда сечением $s$. Магнитным полем возникающих токов пренебречь.

**5.** Полный термодинамический цикл, совершаемый с одноатомным газом, состоит из изотермы *1–2*, изобары *2–3*, изотермы *3–4* и изобары *4–1*. Точки *1* и *3* находятся на адиабате. Определите КПД цикла, если известно, что максимальное давление отличается от минимального в $n$ раз.

**6.** Два соосных одинаково ориентированных бесконечных конуса с полууглом при вершине $\delta$ заряжены равномерно по поверхности зарядами противоположных знаков с поверхностной плотностью $\pm\sigma$. Найдите распределение электрического поля на оси системы, если конусы сдвинуты относительно друг друга на расстояние $a$.

**7.** Сплошной металлический шар радиусом $R$ разделен по диаметральной плоскости пополам, и половинки изолированы друг от друга тонким слоем диэлектрика. Определите силу взаимодействия между половинками, если они заряжены зарядами $q$ и $Q$.

**8.** Заряд $q$ массой $m$ летит в плоскости симметрии, перпендикулярной оси магнитного диполя $p$, со скоростью $v$ на расстоянии $r \gg \sqrt{\dfrac{\mu_0 q p}{4\pi m v}}$. Определите момент импульса заряда относительно оси диполя, если известно, что возможен захват заряда магнитным полем диполя на круговую орбиту.

**9.** Расстояние между точечным источником монохроматического света с длиной волны $\lambda$ и точкой наблюдения $P$ равно $l$. На каком расстоянии от источника следует поместить непроницаемый экран с отверстием радиусом $r = \sqrt{\dfrac{2l\lambda}{9}}$, чтобы интенсивность света в точке наблюдения была максимальной?

*Публикацию подготовили*
*В.Голубев, В.Глушков*