Еще раз об аэродинамическом парадоксе

С.ТРАВИН

Я ОЧЕНЬ ЛЮБЛЮ ПЕРЕЧИТЫВАТЬ СТАРЫЕ КНИГИ. Когда по прошествии многих лет смотришь на еще незабытый текст новыми глазами – возникают интереснейшие наблюдения и размышления. Казалось бы, и раньше все было ясно и понятно, но иная расстановка акцентов может перевернуть картину вверх ногами.

Недавно мне попалась под руку книга Л.Д.Ландау и А.И.Китайгородского «Физика для всех» (М.: Наука, 1974). Открыл ее на первой попавшейся странице и прочел следующее:

«...маленькие искусственные небесные тела – спутники – не находятся в таком идеальном положении: силы трения, пусть сначала очень незначительные, но все же чувствительные, решительно вмешиваются в их движение».

И чуть ниже, после нескольких незатруднительных формул:

«При наличии трения полная энергия будет падать, т.е. (поскольку она отрицательна) расти по абсолютной величине; расстояние R начнет уменьшаться: спутник снижается. Что при этом произойдет со слагаемыми энергии? Потенциальная энергия убывает (растет по абсолютной величине), кинетическая энергия растет. Общий баланс все же отрицателен, так как потенциальная энергия убывает вдвое быстрее, чем возрастает кинетическая. Трение приводит к возрастанию скорости движения спутника, а не к его замедлению».

Сказать, что приведенное рассуждение, известное как «аэродинамический парадокс», явилось для меня откровением, было бы неправдой – в разных редакциях и формулировках оно попадалось мне не один десяток раз. И никогда раньше даже сомнений не вызывало. Ну, это как бы очевидно – в гравитационном поле стационарные орбиты тем и характеризуются, что полная энергия тела равна его кинетической энергии, но только с противоположным знаком:

$$E_{к} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{R} = -\frac{1}{2}E_{п} = -E_{полн}\,.$$

Значит, уменьшение полной энергии соответствует увеличению кинетической энергии, т.е. скорости тела.

Но что-то в этот раз «царапнуло» – такой явно претендующей на абсурд формулировки, как «трение приводит к возрастанию скорости», раньше не попадалось. Интуиция и весь накопленный жизненный опыт говорят о том, что вязкая среда – это враг скорости, она может только тормозить тело, останавливать движение, «съедать» кинетическую энергию, уменьшать скорость. С другой стороны, есть закон сохранения энергии – вещь весьма серьезная. Это своего рода священное писание для любого верящего в физику. Горе тому, кто в этой истине хотя бы усомнится. Если ваши экспериментальные данные противоречат закону сохранения энергии – выкиньте их немедленно и никому про это не рассказывайте. Поэтому если полная энергия падает (на это трение и работает!), то кинетической энергии ничего не остается, как возрастать.

Ну, и как тут быть? Как может увеличиваться модуль скорости, если сила трения *всегда* направлена противоположно скорости? В ситуации без трения небесные тела могут веками сохранять свою скорость. Но вот внесли крохотное возмущение в идеальную систему – и получили эффект, противоположный воздействию? Такое бывает в организованных системах и известно как принцип Ле Шателье: система всегда отрабатывает так, чтобы за счет смещения равновесия максимально более полно компенсировать возмущающее воздействие. Однако *равновесие* подразумевает наличие как минимум двух процессов, идущих с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях. С трением же игра всегда ведется «в одни ворота»: идет диссипация, т.е. рассеяние энергии, а взамен – ничего.

В ситуациях, когда разум отказывается служить верно и две половинки мозга готовы к непримиримой борьбе друг с другом, полезно начать с самых простых и несомненных аналогий, а затем постепенно наращивать сложность модели, постоянно проверяя себя на непротиворечивость.

Первая истина, которая вспоминается применительно к маневрированию при орбитальном движении, звучит так: «Хочешь быстрее – тормози». Именно так называется задача 22 из известного сборника П.В.Маковецкого «Смотри в корень» (М.: Наука, 1976). Там очень понятно и доступно объясняется, как, «притормозив», т.е. уменьшив орбитальную скорость спутника, можно добиться того, что он станет делать 12 оборотов в сутки вместо 10. Логика изложения настолько безупречна, что мы можем для себя «вбить первый гвоздь» и признать эти положения за безусловно истинные. Вот только досада – там речь идет о скорости в оборотах в сутки, а не в метрах в секунду. Иными словами, увеличивается угловая скорость, причем не просто угловая – а *средняя* угловая скорость. Сама же угловая скорость при этом, очевидно, непостоянна, поскольку спутник «сваливается» с круговой орбиты на эллиптическую. А его линейная скорость в перигелии будет в разы отличаться от минимального значения в афелии, и как ее усреднять – не очень понятно. Еще менее понятно – что дальше делать с такой «средней по витку» скоростью.

Дальнейшие литературные «раскопки» приводят к наглядной визуализации сказанного в решении упомянутой задачи. В брошюре Е.И.Бутикова «Движения космических тел в компьютерных моделях» (http://faculty.ifmo.ru/butikov/Russian Motion_1.pdf) приведен восхитительный рисунок (см. рис.1) со следующим пояснением:

«Чтобы обеспечить приближение зонда к поверхности планеты на заданную малую высоту, перигей P его геоцентрической орбиты должен быть достаточно низким. Перевод зонда на такую орбиту может потребовать немалых затрат ракетного топлива. Наиболее экономичный способ получения орбиты с малой высотой перигея соответствует сообщению зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальной скорости станции».

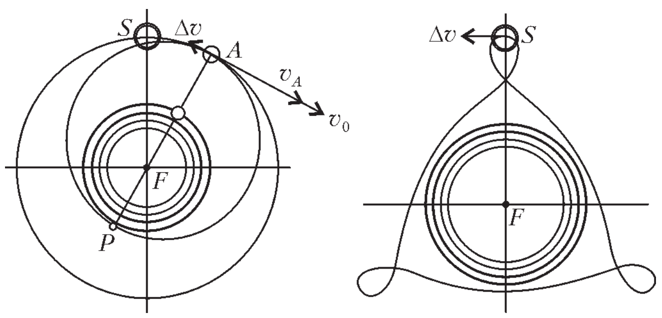

Рис.1. Космический зонд с периодом обращения, равным 2/3 периода станции: геоцентрическая эллиптическая орбита (слева) и замкнутая траектория движения зонда относительно станции (справа)

И опять никаких возражений здравого смысла и интуитивных ощущений против того, что следует из законов сохранения (на этот раз не только энергии, но и момента импульса). Среда рассматривается идеальной, невязкой. Зонд получает одномоментный «пинок» против скорости. Сохранив значения координат (в начальный момент они у зонда и у станции одинаковы), но потеряв в импульсе, зонд срывается с круговой орбиты на эллиптическую, ухитряется «нарезать» забавные загогулины вокруг станции, однако о систематическом *превышении* его скорости над скоростью станции никакой речи не идет. Разовый «пинок» против движения к увеличению кинетической энергии тела не приводит, а как же тогда постоянное трение о среду, которое можно рассматривать, как непрерывную череду «микропиночков», будет разгонять зонд? Что-то здесь не так!

Придется углубить литературные изыскания. Все-таки законы сохранения – инструмент мощный, но коварный. Может быть, даже избыточно мощный, чтобы быть наглядным и убедительным. Нам бы что-нибудь совсем простое, с разложением сил на нормальную и тангенциальную составляющие … И чтобы показать, *как* именно тело (зонд, спутник, станция) будет ускоряться в вязкой среде. И найти это ускорение по второму закону Ньютона:

$$\vec{R}'' = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{\vec{F}\left(\vec{R},t\right)}{m}.$$

Разумеется, необходимый информационный ресурс нашелся – в третьем номере журнала «Квант» за 1998 год опубликована статья А.Митрофанова «Аэродинамический парадокс спутника». В статье приведен весьма детальный анализ сил с тем самым разложением по составляющим, о котором мы только что возмечтали. Собственно, сил, действующих на спутник, всего две: сила тяготения, всегда направленная к центру Земли, и сила сопротивления со стороны воздуха, всегда направленная против вектора мгновенной скорости. А вот угол между вектором скорости и радиусом-вектором спутника, направленным от земного центра (центра вращения), отклоняется от прямого на некую малую величину, которая рассчитывается… *опять* из баланса потенциальной и кинетической энергий. Рассматривается движение спутника по плавно закручивающейся к Земле спирали и утверждается, что спутник движется таким образом, чтобы все время проекция силы тяжести на направление мгновенной скорости ровно в два раза превышала значение силы сопротивления о воздух. Приведем кратко эти рассуждения. По моему убеждению, в них сокрыто хотя и выглядящее очень правдоподобно, но небесспорное допущение. Несколько позже я постараюсь максимально «локализовать» источник сомнений, а пока приведу фрагмент текста, с которым не готов согласиться без обсуждения:

«Запишем баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка:

$$-\frac{mv^2}{2} - 2\pi R F_{\text{сопр}} = -\frac{m\left(v+\Delta v\right)^2}{2}.$$

Откуда, с учетом условия $\Delta v \ll v$*, следует*

$$\Delta v = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}}\sqrt{R}}{m\sqrt{g}},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}}}{mg}.$$

Поскольку продолжительность витка составляет $\Delta t = 2\pi R/v$*, тангенциальное ускорение пролетающего в разреженной атмосфере спутника равно*

$$a_{\text{т}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv}\frac{v}{2\pi R} = \frac{F_{\text{сопр}}}{m}.$$

Отсюда

$$F_{\text{т}} = m a_{\text{т}} = m\frac{F_{\text{сопр}}}{m} = F_{\text{сопр}},$$

что и требовалось установить. Итак, чем больше сопротивление, которое оказывает разреженный газ на спутник при его движении, тем быстрее увеличивается скорость спутника!»

Все бы хорошо, известно даже, как парусная яхта может лавировать галсами и двигаться, набирая скорость против ветра. Но ей необходим широкий киль и вода, в тысячу раз более плотная, чем воздух, чтобы обеспечить противодействие боковому сносу судна и выделить только «соскальзывание» вдоль киля – примерно по биссектрисе между направлением ветра и направлением паруса. Но вот как ухитряется в невесомости и почти в вакууме обеспечить необходимую пропорцию сил искусственный спутник – по-прежнему неясно! Ну, если верить рассуждению, что в период всего снижения приведенные «балансы» сохраняются, – то ясно. А если мысленно поставить себя на место спутника – то нет. Разумеется, возражать против сохранения энергии не приходится. Однако откуда взялось равенство (с точностью до знака) кинетической и полной энергий? Сформулируем по-другому: почему модуль кинетической энергии *ровно* в два раза меньше, чем модуль потенциальной энергии? Иными словами, верно ли, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{GmM}{R},$$

или что центростремительная гравитационная сила равна центробежной:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}\ ?$$

Вот здесь-то и происходит подмена понятий: сохранение энергии и баланс энергии. Одно дело – «священная корова», утверждающая, что работа сил трения за виток (или за любой иной удобный промежуток времени) *в точности* равна уменьшению полной энергии системы. Совсем другое – полагать, что эта работа равна удвоенному значению спада потенциальной энергии.

Итак, есть сильное подозрение, что центробежная сила *не обязательно* равна силе гравитации. Если допустить их равенство, то вылезает и «половинность» кинетической энергии по отношению к потенциальной и даже пресловутое двукратное превышение «стягивающей», т.е. направленной вдоль скорости, составляющей силы тяготения по отношению к силе трения. Естественно, если в модель заложить предположение, что лишь половина уменьшения гравитационной потенциальной энергии идет на компенсацию «вредной» работы сил трения, а вторая половина тратится на *противоестественный* (с житейской точки зрения) разгон тормозимого тела, тогда и все остальное придется признать истинным. Таким образом, мы вернулись в исходную точку: для того чтобы доказать увеличение скорости по мере *торможения*, необходимо и достаточно предположить, что центробежная сила равна центростремительной и что $Rv^2 = \text{const}$. Ну да, наши недостатки являются продолжением наших достоинств и наоборот. Сила предложенного рассуждения – в его неуязвимости. Слабость – в том, что на веру равно легко (или трудно) принять как исходный посыл, так и конечный результат, поскольку между ними есть прямая и нерушимая, глазу заметная связь.

Если внимательно присмотреться к тому, чем именно режим медленного сползания спутника в атмосфере отличается от его вечного движения в вакууме на больших высотах, то постулат о равенстве центробежной (или, если кому-то приятнее, центростремительной) силы и силы гравитационной перестает казаться столь уж очевидным. Для идеальной круговой орбиты – да, нет вопросов. Для эллиптической же орбиты (и тоже без вопросов) центробежная сила в афелии может во сколько угодно раз отличаться от силы гравитации. Разумеется, в меньшую сторону. Поэтому спутник и «клюет» вниз по сравнению с круговой орбитой. Потом он действительно разгоняется, и в перигелии требуется многократное превышение гравитационной силы над «средним по орбите» значением. Не будем забывать, что гравитационная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Посмотрим (мысленно), на постоянно уменьшающиеся в радиусе витки падающего из-за трения спутника. Они больше похожи на сдвинутые относительно центра окружности или на набор эллипсов (точнее, эллиптических дуг), где каждая текущая точка является афелием для мгновенной кривизны траектории, а в перигелий так никогда и не удастся долететь, поскольку даже противоположная по диаметру точка, с меньшим расстоянием для центра притяжения, будет *новым* афелием для продолжающегося сужения радиуса. Как именно аппроксимировать спиральное падение спутника в атмосфере – набором окружностей постепенно уменьшающегося радиуса или эллиптическими дугами, дело вкуса. Хотя выбор сильно неочевиден. Но в любом случае нужно постоянно помнить, что мгновенный радиус кривизны сужающейся траектории не равен расстоянию до центра притяжения, более того – направление на мгновенный центр вращения отличается от направления силы тяжести. Так что движение в поле центральных сил – это приятно и понятно, но с нашей задачей имеет лишь отдаленное сходство.

Будем считать, что я достиг промежуточной цели своего изложения, если хотя бы поколебал веру читателя в то, что центростремительное ускорение это и есть сила гравитации, деленная на массу спутника. Для круговых орбит это действительно так. Собственно, вращение по орбите и есть бесконечное падение в поле тяжести. Кривизна орбиты так и подбирается, чтобы за промежуток времени Δt «просадка» на величину $\Delta h = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$ в точности соответствовала отклонению окружности от прямой линии. Иными словами, падение в неинерциальной системе координат (а именно такой является система, привязанная к спутнику, движущемуся по круговой орбите) не приводит к уменьшению радиуса вращения. Если же мы хотим (хотя бы постепенно) «сползти» к меньшим радиусам, нам придется допустить наличие ненулевой радиальной скорости, а значит, и радиального ускорения. А для этого нужна результирующая сила, направленная к центру. Центробежная сила должна быть *меньше*, чем центростремительная (гравитационная). Пусть даже разница между ними мала, но она значима. Как будет видно из дальнейшего, эта поправка ровно той же степени малости, что и возмущающее воздействие силы трения о разреженную атмосферу. Поэтому пренебрегать ею ни в коем случае нельзя.

На рисунке 2 представлены силы, действующие на спутник, и их результирующая. Этих сил ровно две: гравитационная сила $\vec{G}$ и сила сопротивления атмосферы $\vec{F}_{\text{трен}}$. Можно сделать следующие заключения,

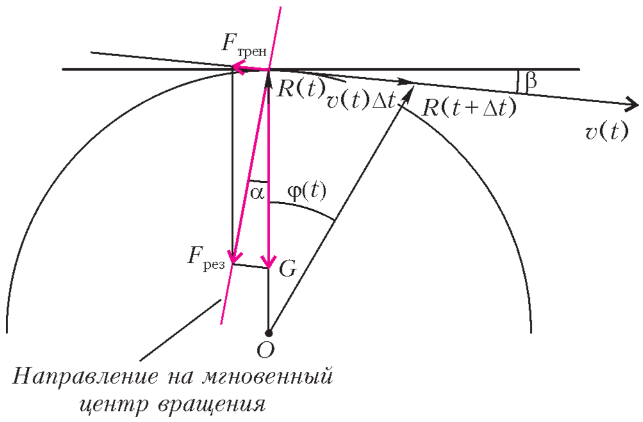

Рис.2. Кинематическая (черный цвет) и динамическая (красный цвет) схемы орбитального движения спутника

которые не требуют никаких дополнительных предположений и допущений:

1) гравитационная сила всегда направлена к центру Земли и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него;

2) сила сопротивления всегда направлена против вектора мгновенной скорости;

3) результирующая сила направлена под углом α к вертикали (к направлению гравитации);

4) вектор скорости направлен под углом β к горизонту (перпендикуляру к вертикали), причем в общем случае $\alpha \neq \beta$.

Как именно будет вести себя спутник в разреженной атмосфере, определяется как раз значением угла β, под которым он «соскальзывает» относительно плоскости текущего горизонта. Понятно, что при $\beta = 0$, т.е. при отсутствии торможения в предельно разреженном воздухе, скорость спутника, равно как радиус его орбиты, кинетическая энергия, полная энергия и все остальные параметры изменяться не будут. Понятно также, что при $\beta = \pi/2$ спутник будет отвесно, «колом» наращивать свою скорость, разменивая гравитационную потенциальную энергию на кинетическую. При этом никакое даже самое сильное трение об атмосферу вертикальному падению не помеха, правда в таком случае придется принять начальную скорость орбитального движения равной нулю. Между этими двумя предельными случаями – все богатство вариантов реального торможения: от плавного снижения и приземления искусственного спускаемого аппарата до перехода в неуправляемый режим и сгорания в верхних слоях атмосферы.

Как будут развиваться реальные события? Беглый анализ показывает, что при $\beta > \alpha$ следует ожидать разгона, а при $\beta < \alpha$ – торможения. Поскольку мы подвергли сомнению баланс кинетической и потенциальной энергий (а до сих пор он был единственным источником наших суждений для расчета значения β), нам ничего не остается делать, как решать динамическую задачу «в лоб», т.е. написать уравнения движения и проинтегрировать их.

Прежде чем приступать к численному моделированию, необходимо сделать дополнительные предположения относительно величины силы сопротивления, т.е. трения о разреженный газ атмосферы. В общем случае сила сопротивления, действующая со стороны разреженного газа на спутник в верхних слоях атмосферы, определяется формулой

$$F_{\text{трен}} = c_x S \frac{\rho v^2}{2},$$

где v – модуль значения скорости спутника, ρ – зависящая от высоты орбиты плотность атмосферы, S – площадь поперечного по отношению к направлению вектора скорости сечения спутника, c_x – безразмерный коэффициент сопротивления, который отражает степень передачи импульса от налетающей молекулы воздуха спутнику. Учитывая относительную редкость столкновения молекул воздуха с телом на орбите и то, что скорость собственного теплового движения молекул много меньше первой космической, этот коэффициент должен находиться в диапазоне от 2 (для неупругих столкновений) до 4 (для упругих). Обычно принимают, что в верхних слоях атмосферы $c_x = 2 - 2{,}5$. Большая точность обычно не требуется, поскольку ее влияние перекрывается воздействием других возмущающих факторов – таких, например, как солнечная активность, которая может в разы изменять плотность космического газа.

Наиболее «крутая» зависимость от высоты у плотности атмосферы. Строго говоря, необходимо вести интегрирование по высоте известной барометрической формулы

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{g(h)\mathrm{M}(h)}{\Re T(h)}\,dh\right).$$

Здесь М – средняя молярная масса смеси газов, составляющих атмосферу, T – абсолютная температура, g – ускорение силы тяжести, $\Re$ – универсальная газовая постоянная, обозначенная готической буквой, чтобы не путать с радиусом орбиты. Поскольку все входящие в подынтегральное выражение переменные имеют весьма сложный профиль по высоте (особенно температура), численное интегрирование по этой формуле представляет собой довольно канительное занятие. По счастью, в большинстве приложений практической космонавтики и, тем более, в нашем рассмотрении можно использовать уже «усредненную» формулу, использующую понятие характерной толщины однородной атмосферы $H = \dfrac{\Re T_{\text{ср}}}{\mathrm{M}_{\text{ср}} g_{\text{ср}}}$, т.е. высоты подъема, на которой давление падало бы в e раз:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right).$$

Удивительно, что характерная толщина атмосферы заметно увеличивается с высотой. Если в приземных слоях с подъемом на каждые 5 км давление и плотность воздуха падают вдвое, что соответствует

$H \approx 7$ км, то выше 120 км скорость убывания давления с высотой заметно уменьшается, главным образом из-за подъема температуры почти до полутора тысяч кельвинов. На высотах практической космонавтики порядка 300–500 км характерная толщина атмосферы составляет 30–50 км, причем, как покажут модельные расчеты, результат почти не зависит от выбора точного значения этого параметра.

Осталась самая малость – выписать уравнения динамики спутника в ближнем космосе. Поскольку нам нет надобности проводить привязку к конкретным координатам старта и финиша и мы хотим лишь проанализировать изменение скорости в ходе «торможения», можно позволить себе не следовать каноническим расчетам, описанным в учебниках по теории полета, а рассмотреть простейший случай вращения в центрально симметричном ньютоновом поле с малым возмущением в виде трения и провести все расчеты в двумерной (плоской) системе в полярных координатах. С учетом разложения сил и скоростей, изображенных на рисунке 2, уравнения движения примут вид

$$R'' = R\varphi'^2 - \frac{GM}{R^2} + \frac{F_{\text{трен}} \sin\beta}{m},$$

$$\varphi'' = \frac{1}{R}\left(\frac{F_{\text{трен}} \cos\beta}{m} - 2\varphi' R'\right),$$

где сила трения рассчитывается по указанной раньше формуле с учетом зависимости плотности атмосферы от высоты.[1]

Дальше совсем просто. Задаем постоянные (или условно постоянные) параметры – массу и радиус Земли, характерную толщину ее атмосферы, гравитационную постоянную, массу спутника и его поперечное сечение. Задаем также начальные условия: $t = 0$, $R = R_З + h_0$, $\varphi = 0$, скорость v равна первой космической для начального значения радиуса орбиты. Наконец, значения ρ_0 и H, необходимые для выбранной высоты, берем из справочника.

Теперь можно приступать к численному интегрированию. Эта задача почти не содержит в себе алгоритмических сложностей, поэтому ее можно считать без «изысков» – методом конечных разностей. Надо только взять шаг интегрирования Δt помельче, чтобы в окружности уместилось не менее 180 точек, т.е. чтобы за каждый шаг приращение угла не превышало двух градусов. Процедура счета в Excel включала последовательный расчет сначала вторых производных, затем первых производных, потом самих величин, исходя из приращений и значений на предыдущем шаге по времени. Такую табличку легко может составить даже начинающий пользователь Excel – единственное, за чем надо следить, это чтобы не было циклических ссылок. Еще одна маленькая тонкость – следует еще мельче дробить шаг непосредственно перед срывом спутника «в штопор», если такой момент будет достигнут.

Приведем собственно результаты моделирования. На больших высотах (т.е. при низких плотностях) и (или) малых значениях парусности спутника ($S/m < 0{,}001$) спутник совершает циклическое движение и его траектория практически не отличается в пределах толщины линии на графике от первоначальной (неважно – круговой или эллиптической). Этот результат тривиален и может служить лишь для подтверждения того, что в алгоритм счета не вкралась ошибка. Более интересны результаты моделирования последних двух витков спутника. На рисунке 3 представлено движение очень «парусного» спутника, $S/m = 1$, начиная с высоты траектории 500 км. Мало реалистичное отношение площади к массе выбрано

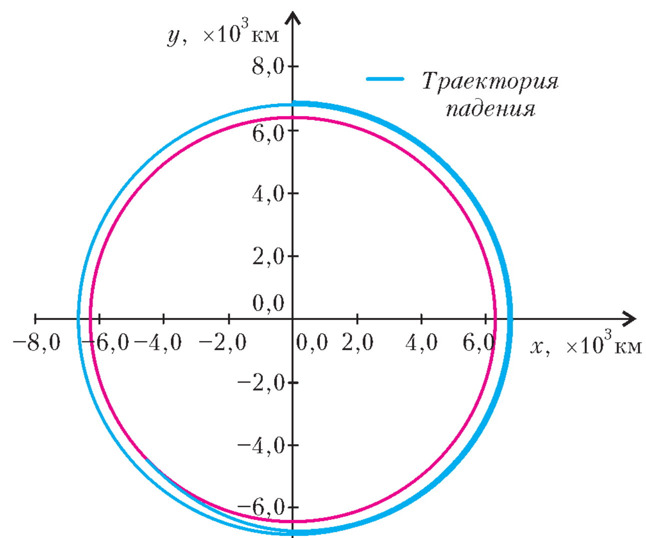

Рис.3. Моделирование последних витков падения спутника с 500 км

исключительно из соображений наглядности. Реальный спутник на выбранной высоте будет крутиться не менее 10 лет, совершая по 15 оборотов в сутки. Падать же – но по-прежнему за полтора витка! – он будет на существенно меньших высотах. Графическое представление такого падения не слишком наглядно, поскольку относительное уменьшение радиуса составит всего полпроцента ($h/R_З \approx 0{,}005$). В нашем случае «сужение» орбиты достаточно наглядно. Движение начинается в верхней точке синей окружности и завершается через полтора витка в третьем квадранте, красным цветом показана поверхность Земли, $R = 6371$ км.

Теперь, наконец, мы можем удовлетворить свое любопытство – а что будет со скоростью? На рисунках 4 и 5 показана зависимость скорости спутника от времени и от высоты. Если не вглядываться в мелкие детали хода графиков, то наблюдается следующее: после практически неизменного по скорости снижения до высоты 330 км спутник начинает катастрофически терять скорость, при этом угол траектории к горизонту начинает стремительно нарастать. Заканчивает свою жизнь такой спутник практически в отвесном пике, растеряв как потенциальную, так и кинетическую

[1] *Уравнения записаны в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\omega = \varphi'$. Для тех читателей, что знаком с этой системой, понятно, что в правой части первого уравнения присутствует центробежная сила инерции, а в правой части второго уравнения – сила Кориолиса. (Прим. ред.)*

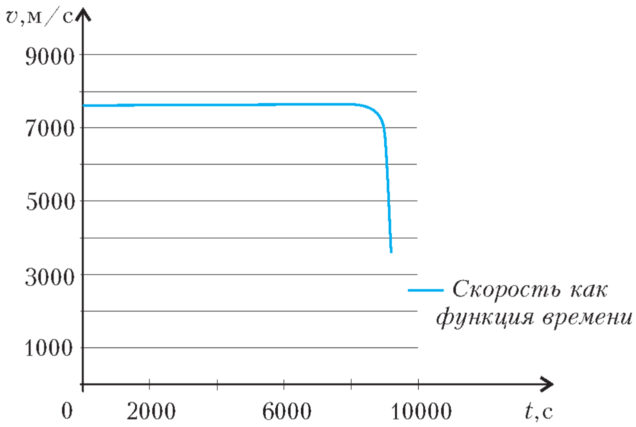

Рис.4. Скорость спутника как функция времени

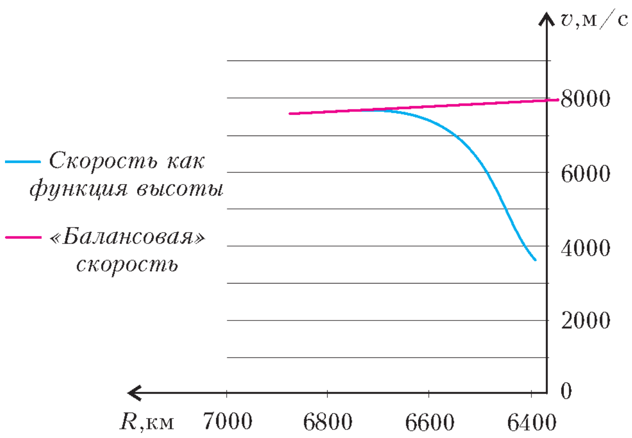

Рис.5. Скорость спутника как функция расстояния до центра Земли

энергию. Так же можно сказать и о перегрузках, которые к концу торможения (если только раньше спутник не сгорит от перегрева) достигают тысячекратного значения. Справедливости ради, следует отметить, что более пристальное разглядывание графиков показывает: перед более чем двукратным падением скорости имел место ее незначительный подъем – примерно на 46 м/с, или на 0,6%. Заметим, что если бы все происходило по «балансу энергий», то падение с высоты 500 км должно было бы привести к увеличению скорости спутника на 330 м/с. Расчет показывает потерю скорости примерно на 3300 м/с. Иными словами, наблюдаемый эффект «разгона за счет торможения» не совпадает с модельными данными ни по значению, ни по знаку.

После столь впечатляющего отклонения расчетных данных от предсказания модели «баланса энергий» наступило самое время проверить себя – а с какими-нибудь данными наш расчет сходится? Оказывается, да. В качестве хрестоматийного источника истины в последней инстанции возьмем по-прежнему актуальную (хотя и ставшую библиографической редкостью) книгу П.Е.Эльясберга «Введение в теорию полета искусственных спутников Земли» (1965 года издания). В ней атмосферному торможению спутников посвящено целых две главы, причем, к моему удивлению (и радости), в этих главах нет апелляции к балансу потенциальной и кинетической энергий. Напротив – приводятся весьма сложные расчеты, основанные на уравнениях движения и не избегающие численного решения. На рисунке 6, взятом из книги

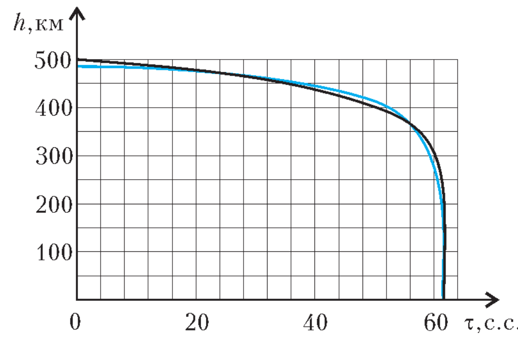

Рис.6. Зависимость высоты спутника от приведенного времени

Эльясберга, приведена зависимость (черная линия) высоты спутника h от приведенного времени τ, выраженного в средних солнечных сутках. Характерно, что после относительно спокойного существования спутнику предстоит резкий срыв с орбиты и падение. На этот же рисунок мы нанесли результаты своих расчетов – синяя линия. Видно хорошее совпадение данных нашей расчетной модели с данными из классической книги. В частности, совпадает высота «срыва» – примерно 330 км. Такое совпадение позволяет нам надеяться на то, что в нашей численной модели не слишком много грубых допущений.

Вернемся теперь к «атмосферному парадоксу». Его, оказывается, можно промоделировать (в том числе и с помощью нашей расчетной модели), если только предположить независимость трения от высоты (рис.7). Как бы трения нет, а есть слабенький маневровый реактивный двигатель, направленный против движения спутника. При этом мы также не обращаем внимания на такие «мелочи», как проникновение спиральной

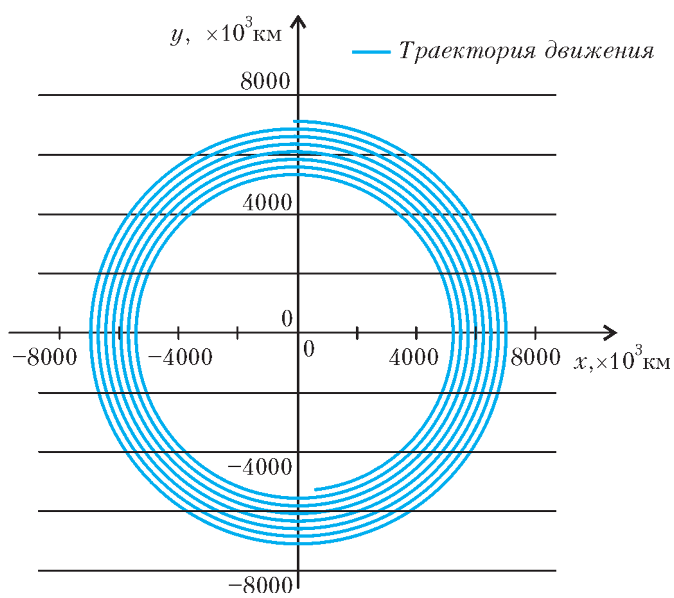

Рис.7. Спиральное движение спутника при постоянном трении

траектории ниже поверхности Земли. Тогда мы ощутимо можем разглядеть ускорение падающего спутника (рис.8). Для того чтобы заметно, в разы, увеличить

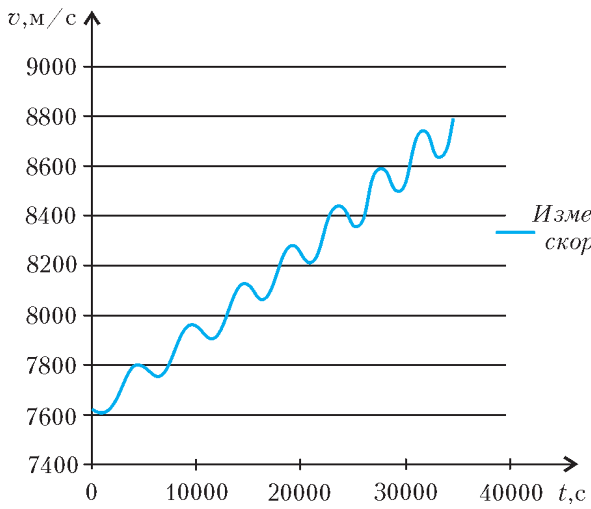

Рис.8. Нарастание скорости спутника во времени

скорость, нужно тоже в разы уменьшить радиус. Периодическая пульсация, соответствующая эллиптическому искажению первоначально круговой орбиты, возникает из-за того, что трение «включается» внезапно.

На самом деле не следует забывать, что у спутников, летающих на небольших высотах, величины угловой скорости и периода обращения меняются в сравнительно узких пределах. Так, при $h < 2000$ км период обращения не превосходит 2 ч 7 мин, а круговая скорость не убывает ниже значения 6,9 км/с. С другой стороны, длительное движение спутника на высоте $h < 100-150$ км практически неосуществимо из-за резкого возрастания влияния сопротивления воздуха. Этим высотам полета соответствуют минимально возможное значение периода обращения спутника по круговой орбите порядка 87 мин и максимальное значение круговой скорости полета приблизительно 7,85 км/с. Таким образом, у спутников, летающих на высотах $h < 2000$ км, период обращения колеблется в пределах от 1 ч 27 мин до 2 ч 7 мин, а скорость полета – от 6,9 км/с до 7,85 км/с.

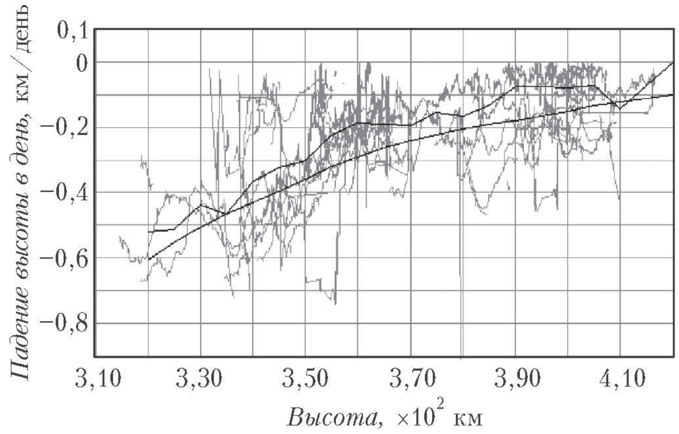

Рис.9. Реальные данные, полученные МКС «Мир»

В заключение нашего экскурса в мир искусственных спутников совершенно необходимо помимо расчетно-модельных данных привести «настоящие», фактические. На рисунке 9 представлены данные, полученные незадолго до затопления Международной космической станции «Мир» (www.whiteworld.ru/rubriki/000108/01030501.pdf). По вертикали отложено реальное падение высоты за день за все время наблюдения станции «Мир», по горизонтали – высота. Ломаная черная линия – результат проведенного усреднения, гладкая черная линия – расчет темпа падения станции по стандарту атмосферы (с «узаконенными» профилями температуры и плотности по высоте). Видно, что фактическое поведение тормозящегося объекта значительно сложнее предсказаний любой модели и подвержено воздействию большого количества случайных, а значит, несогласованных факторов. Разброс экспериментальных данных относительно среднего значения превышает двукратный. Тем самым, даже модель, основанная на общепринятом стандарте атмосферы, выглядит несколько упрощенной по сравнению с реальным поведением объекта.

Так как же быть с «аэродинамическим парадоксом»? Он есть или его нет? Разумеется, он есть! Он реально существует в массовом сознании всех, изучающих небесную механику.

Язык симметрии

(Начало см. на с. 2)

Шаг 3. Докажите, что если $\vec{v}$ – вектор, отложенный от начала координат, то $R(t\vec{v}) = tR(\vec{v})$ для любого вещественного числа t.

Шаг 4. Докажите, что если $\vec{v}$ и $\vec{w}$ – векторы, отложенные от начала координат, то

$$R(\vec{v}+\vec{w}) = R(\vec{v}) + R(\vec{w}).$$

Шаг 5. Объедините результаты, полученные в шагах 1–4, и выведите из них искомую формулу.

На первых двух шагах мы проследили за тем, что происходит с двумя базисными векторами $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Результат шага 3 говорит нам, что точка, лежащая на расстоянии t от начала координат в направлении вектора $\vec{v}$, под действием отображения R переходит в точку, лежащую на том же расстоянии t от начала координат в направлении повернутого вектора $R(\vec{v})$, а результат шага 4 – что диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$, переходит в диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов $R(\vec{v})$ и $R(\vec{w})$. Эти два факта означают, что поворот R есть **линейное** отображение, т.е. R переводит прямые в прямые. Шаг 4 наглядно проиллюстрирован на рисунке 13.

(Окончание следует)