будет сложить N-угольник и из красных – тоже? Решите задачу:

а) (4) для $N = 3$;

б) (4) для произвольного натурального N, большего 3.

А. Грибалко

5 (8). Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф.Ивлев

6 (8). См. задачу 7 сложного варианта для 8–9 классов.

7 (11). См. задачу М2235 «Задачника «Кванта».

Устный тур для 11 класса

1. В ряд выложены n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают ее. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б.Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б.Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф.Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовем *идеальной компанией*, если:

1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;

2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.

В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А.Клячко, Б.Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a^{1000}+1$ делится на b^{619} и $b^{1000}+1$ делится на a^{619}.

М.Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И.Богданов

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

Избранные задачи LXXIV Московской математической олимпиады

1. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счетом закончился матч? (6) [1]

Л.Федулкин, Е.Федулкина

2. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? (6)

А.Шаповалов

3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рис.1). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. (7)

А.Хачатурян

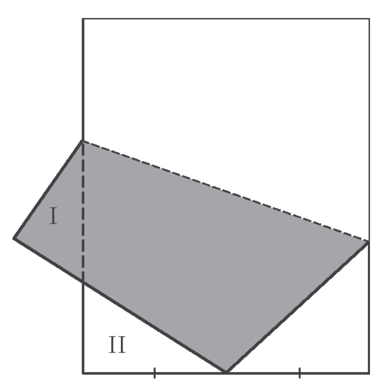

Рис. 1

4. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены:

а) все числа, кроме, быть может, двух;

б) все числа, кроме, быть может, одного;

в) все числа? (7)

А.Шаповалов

[1] *В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась*

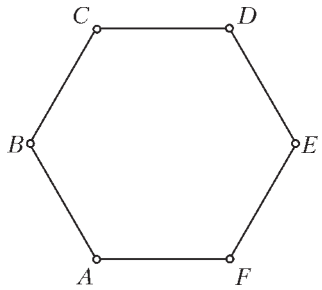

Рис. 2

5. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ (рис.2) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A – массой 1 г, в B – 2 г, …, в F – 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены? (8)

А.Шаповалов

6. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечетного числа сторон клеток квадрата 100×100 , соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток? (8)

А.Шаповалов

7. Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$. (8)

М.Волчкевич

8. Что больше:

$$2011^{2011} + 2009^{2009} \text{ или } 2011^{2009} + 2009^{2011}? \ (9)$$

Р.Федоров

9. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается? (9)

Б.Френкин

10. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен $30°$. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, D – точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны. (9)

Ю.Блинков

11. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011? (9)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын

12. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q – центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$. (9)

А.Акопян

13. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, …, $x_1 - x_n$, $x_2 - x_1$, $x_2 - x_3$, …, $x_2 - x_n$, … …, $x_n - x_{n-1}$, где $n \geq 3$. Леша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и так далее вплоть до суммы всех выражений. При этом Леша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые (например, вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)$ Леша запишет $x_1 - x_3$, а вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Леша записал в тетрадь ровно по одному разу? (9)

А.Лебедев

14. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10? (10)

Т.Караваева, Б.Френкин

15. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1 ; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые – вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет четную длину. (10)

Б.Френкин

16. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника. (10)

А.Заславский

17. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трех своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих – сможет? (10)

А.Грибалко

18. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (т.е. пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трех параллелепипедов найдется такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются. (10)

В.Гурвич, А.Гольберг

19. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвертый член геометрической прогрессии? (11)

О.Косухин

20. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$. (11)

О.Косухин

21. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB – точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$. (11)

П.Бородин

22. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции? (11)

О.Косухин

23. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a:(1-a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом промежутке длины 0,001 из интервала $(0;1)$ найдется значение a, при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов? (11)

А.Шаповалов

24. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат, и если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)? (11)

Фольклор, А.Канунников, И.Сергеев

25. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321? (11)

П.Бородин

26. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что

$$\angle ABO = \angle CAO,\quad \angle BAO = \angle BCO,\quad \angle BOC = 90°.$$

Найдите отношение $AC : OC$. (11)

И.Сергеев

27. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел 1, 2, … …, 2011 значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}}}$$

будет наибольшим? (11)

О.Косухин

28. По ребрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук все время остается только в одной грани (в каждой грани – свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили С.Дориченко, Е.Епифанов

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Красная Шапочка испекла 20 пирогов, сложила их в корзинку и отправилась через лес к больной бабушке. Когда до бабушки ей оставалось пройти 3 км, из кустов выскочил голодный волк с явным намерением съесть хоть что-нибудь. Увидев его, Красная Шапочка бросила на землю один пирог и побежала со скоростью 2,5 м/с. Волк съел пирог за 1 мин и побежал за Красной Шапочкой со скоростью 5 м/с. Тогда Красная Шапочка стала бросать пироги, как только волк начинал ее догонять, и так добежала до бабушкиного дома. Сколько пирогов досталось бабушке?

М.Семенов

2. Наблюдая за кокосом, свободно падающим с вершины пальмы, турист обнаружил, что пройденное кокосом расстояние s зависит от времени падения t как $s = \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10$ м/с^2. Турист также определил, что средняя скорость кокоса за время падения составляет $v_{ср} = 5$ м/с. Определите высоту пальмы.

М.Ромашка

3. Братья Коля и Саша ехали на автобусе из пункта A в пункт B. Дорога состояла из двух частей, на каждой из которых автобус ехал с постоянной скоростью. На первой части скорость автобуса была v_1, а на второй – v_2. Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$. Коля и Саша поспорили о том, как соотносятся длины этих частей пути и времена их прохождения. Коля считает, что автобус половину пути ехал со скоростью v_1, а другую половину пути – со скоростью v_2. Саша считает, что автобус половину времени ехал со скоростью v_1, а другую половину времени – со скоростью v_2. Можно ли из условия задачи определить, прав ли кто-нибудь из братьев, и если да, то кто именно?

М.Ромашка

4. В Интернете сейчас можно найти видеозаписи различных физических опытов, в частности такого: группа студентов напускает в большое корыто до краев какой-то тяжелый газ из баллона, а потом кладет на поверхность этого газа модель корабля, согнутую из алюминиевой фольги, и этот корабль плавает! Потом студенты зачерпывают ковшиком газ из корыта, переливают его внутрь корабля, и он тонет. Найдите, какой минимальной плотностью должен обладать этот тяжелый газ, чтобы в нем мог плавать корабль в форме прямоугольного параллелепипеда (с открытым верхом), согнутый из бытовой алюминиевой фольги толщиной 25 мкм. Размеры корабля: длина – 50 см, ширина – 20 см, высота бортов – 10 см. Считайте, что лишние куски, образовавшиеся при сгибании параллелепипеда из листа фольги, удалены. Плотность алюминия 2,7 г/см^3, плотность воздуха 1,3 кг/м^3.

М.Семенов

8 класс

1. Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м – со скоростью 9 м/с, следующие 10 м – со скоростью 8 м/с и так далее. Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью спортсмен пробежал первую половину дистанции?

С.Варламов

2. Металлическая плоская линейка имеет малую и всюду одинаковую толщину, одинаковую по всей длине ширину и длину 50 см. На концах линейки находятся отметки: 0 см и