Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2221» или «Ф2228». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2224 предлагалась на VII Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, задача М2228 – на международной олимпиаде Romanian Master of Mathematics.

Задачи М2221–М2228, Ф2228–Ф2234

М2221. Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках K, M. Через точку K проведены касательные к s_2 и s_1, которые вторично пересекают s_1 и s_2 в точках A и C соответственно. Прямая AM пересекает вторично s_2 в точке B, а прямая CM пересекает вторично s_1 в точке D. Докажите, что $AB = CD$.

И. Рудаков

М2222. Дан клетчатый прямоугольник $6 \times N$ $(N \ge 3)$, в котором изначально все клетки покрашены синим. За один ход можно покрасить в красный цвет все единичные квадратики некоторого клетчатого квадрата 2×2, в котором есть хотя бы три синие клетки (в процессе некоторые клетки могут быть покрашены в красный цвет больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?

Фольклор

М2223. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

В.Кириак

М2224. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

А.Акопян

М2225. Найдите все многочлены $f(x)$ такие, что для каждого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет хотя бы один: а) целый корень; б) рациональный корень.

П.Кожевников

М2226*. Докажите, что количество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| \le n$ равно количеству целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \le k$ для любых натуральных n и k.

В.Голубев (по мотивам Д.Пойа, Г.Сегё)

М2227*. Пусть a, b, c – натуральные взаимно простые в совокупности числа и

$$D_n = \text{НОД}\left(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^n+b^n+c^n\right).$$

а) Докажите, что при любом n, не делящемся на 3, число D_n может быть сколь угодно велико.
б) Найдите все возможные значения D_n при каждом n, делящемся на 3.

В.Сендеров

М2228*. Треугольник ABC вписан в окружность. На дуге AC (не содержащей B) взяты точки A' и C' так, что $AC \parallel A'C'$. Отрезки BA' и BC' пересекают отрезок AC в точках D и E соответственно. Окружности ω_a и ω_c вписаны в криволинейные треугольники ADA' и CEC' соответственно. Докажите, что точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_a и ω_c лежит на биссектрисе угла ABC.

В.Мокин

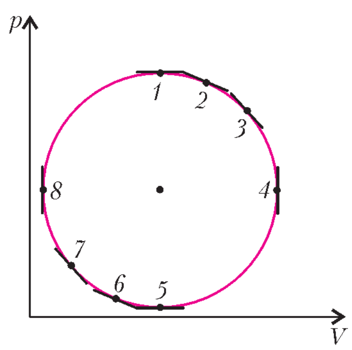
Ф2228. На гладкой безграничной горизонтальной поверхности нарисован квадрат с длиной ребра $2a$. Ребра квадрата ориентированы в направлениях север–юг и восток–запад. В углы квадрата вертикально вбиты четыре тонких гвоздя, которые выступают над поверхностью. К юго-восточному гвоздю с координатами относительно центра квадрата ($-1a$ на север; $+1a$ на восток) прикреплена тонкая невесомая нерастяжимая нить длиной $100a$, которая выдерживает максимальную силу растяжения F. Нить выпрямлена и вытянута в направлении от места крепления на восток. К свободному концу нити прикреплена шайба малых размеров массой m. Шайбе придали толчком скорость v в направлении на север. Какими будут координаты шайбы через время t после толчка? Числовые значения параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ см, $F = 1{,}18$ Н, $t = 20$ с, $v = 1$ м/с. При решении задачи рекомендуется пользоваться компьютером.

С.Дмитриев

Ф2229. Вокруг Земли летают с выключенными двигателями два спутника. Периоды обращения этих спутников одинаковы и составляют 12 часов. На какое максимальное расстояние могут удаляться друг от друга эти два спутника? Для справки: периоды обращения вокруг Земли всех спутников, летающих на «низких» орбитах, равны примерно 1,5 часа.

А.Полетаев

Ф2230. Фиксированная масса идеального газа участвовала в процессе, который в координатах $p-V$ выглядит почти окружностью (см. рисунок). В точках *1* и *5* этой почти окружности касаются изобары, в точках *2* и *6* – изотермы, в точках *3* и *7* – адиабаты и в точках *4* и *8* – изохоры. На разных участках цикла газ обменивался теплом с окружающей средой. Известны абсолютные величины количеств теплоты: $Q_{12} = 7$ Дж, $Q_{23} = 2$ Дж, $Q_{34} = 4$ Дж, $Q_{45} = 11$ Дж, $Q_{56} = 5$ Дж, $Q_{67} = 1$ Дж, $Q_{78} = 3$ Дж и $Q_{81} = 12$ Дж. Найдите КПД цикла.



С.Крюков

Ф2231. В тройной точке воды при температуре 273,16 К и давлении водяных паров 610 Па жидкая, твердая и газообразная фазы воды находятся в состоянии термодинамического равновесия. Молекулы газообразной фазы бьются о поверхность конденсированного вещества и создают одинаковые давления и на поверхность льда и на поверхность воды. Оцените отношение «коэффициентов прилипания» молекул к плоским поверхностям конденсированного твердого и конденсированного жидкого веществ при ударе о них молекул, находящихся в газовой фазе при этой температуре (или, что то же самое, оцените отношение скоростей испарения жидкой воды и твердого льда при температуре ≈273 К, если над ними вакуум).

С.Тройнов

Ф2232. Средний срок службы ламп накаливания (с номиналами 100 Вт, 220В) и люминесцентных ламп с одинаковой производительностью по свету примерно один и тот же – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб. и 150 руб. за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт·ч электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

С.Варламов

Ф2233. Каждый сорт стекла характеризуется показателем преломления n_0 в середине оптического диапазона при длине волны $\lambda_0 = 0{,}55$ мкм и коэффициентом дисперсии β, который показывает, на сколько отличается показатель преломления данного сорта стекла при заданной длине волны λ от его значения при λ_0: $n_\lambda = n_0 + \beta(\lambda - \lambda_0)$. Имеются два сорта прозрачного стекла с характеристиками $n_{01} = n_{02}$ и $\beta_1 \neq \beta_2$. Нужно изготовить линзы для очков, у которых отсутствовала бы хроматическая аберрация, т.е. оптическая сила не зависела бы от длины волны и равнялась α диоптриям. Причем со стороны, обращенной к глазу, линза очков должна быть вогнутой с радиусом кривизны R_0, который выбирается примерно равным расстоянию от этой вогнутой поверхности (когда очки используются по назначению) до точки, вокруг которой глаз вращается.

В.Стеклов

Ф2234. Пучок быстрых (но нерелятивистских) нейтронов пересекает пучок медленно движущихся атомов водорода. При какой минимальной энергии нейтронов атомы водорода могут быть ионизованы? Столкновения протонов и нейтронов считайте абсолютно упругими.

А.Томов

Решения задач М2199–М2205, Ф2213–Ф2219

М2199. *Натуральное число, имеющее в десятичной записи n цифр, назовем n-драконом, если оно является точным квадратом и для любого k = 1, 2, …, n − 1 после вычеркивания k последних цифр (отрубаем хвост дракону) оно будет точным квадратом. Для какого наибольшего n существует n-дракон?*

Ответ: $n = 3$.

Существует 3-дракон – это число 169.

Предположим, что при $n \geq 4$ нашлось число N, являющееся n-драконом. Пусть $N = \overline{a\ldots bcd} = y^2$, $\overline{a\ldots b} = x^2$. Так как $\overline{a\ldots b} \geq 10$, то $x \geq 4$. Имеем $100x^2 + \overline{cd} = y^2$. Если $y \geq 10x + 2$, то $100x^2 + \overline{cd} \geq 100x^2 + 40x + 4$, значит, $\overline{cd} \geq 40x + 4 \geq 40 \cdot 4 = 160$. Следовательно, $y = 10x + 1$, $\overline{cd} = 20x + 1$. Видим, что $x \geq 5$ не подходит, значит, единственная возможность $x = 4$, $\overline{cd} = 81$. Но $N = 1681$ не является 4-драконом.

В.Сендеров

М2200. *Таблица 2×2010 (2 горизонтальных ряда по 2010 клеток) разделена на единичные клетки. Иван ставит горизонтальное домино, которое покрывает в точности две клетки таблицы; затем Петр ставит вертикальное домино, которое покрывает две клетки таблицы; потом Иван снова ставит горизонтальное домино, Петр снова ставит вертикальное домино, и т.д. (каждый раз домино можно ставить только на еще не покрытые клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.*

Попробуйте также изучить эту игру на таблице $2 \times n$ при различных значениях n.

Покажем, что в этой игре Иван имеет выигрышную стратегию.

Разобьем таблицу на 502 прямоугольника 2×4 и один прямоугольник 2×2. Пусть Иван первым ходом поставит свое горизонтальное домино в две клетки прямоугольника 2×2. Далее, Петр ставит домино в некоторый прямоугольник 2×4, Иван отвечает ходом в тот же прямоугольник. Легко видеть, что Иван всегда может ответить на ход Петра, и следовательно, он не проиграет.

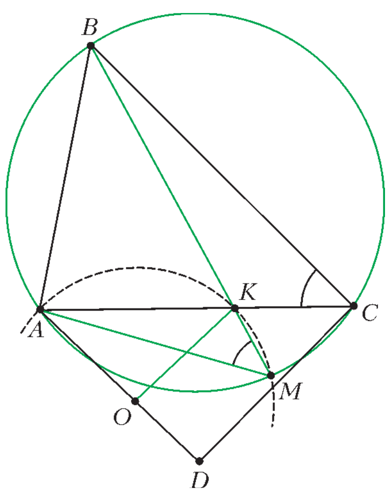
См. также статью «Обобщение задачи М2200» в этом номере журнала.

Э.Колев

М2201. *Рассматриваются прямые, проходящие через вершину B треугольника ABC, пересекающие сторону AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC – в точке M, отличной от B. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.*

Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMK.

Предположим, что в треугольнике ABC угол C нетупой (см. рисунок). Так как $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$, то $\angle AOK = 2\angle C$ и $\angle OAC = 90° - \angle C$, т.е. этот угол не зависит от прямой, проходящей через B. Следовательно, всевозможные точки O лежат на фиксированной прямой AD, где ADC – равнобедренный треугольник с основанием AC и углом $\angle CAD = 90° - \angle C$ такой, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Так как $OK \parallel CD$, то при движении точки K от A к C точки O заполняют отрезок AD – это и есть искомое ГМТ.



В случае $\angle C > 90°$ аналогичные рассуждения дают искомое ГМТ как боковую сторону AD равнобедренного треугольника ACD с основанием AC и углом $\angle CAD = \angle C - 90°$ такого, что точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC.

Ю.Блинков

М2202. *Дана арифметическая прогрессия из 22 различных натуральных чисел, каждое из которых является точной степенью (т.е. степенью натурального числа, большей 1). Докажите, что разность этой прогрессии больше 2010.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$ – данная прогрессия, d – ее разность. Докажем, что d делится на 2, 3, 5, 7 и 11. Тогда d делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$, и, значит, $d \geq 2310$.

Пусть p – одно из чисел 2, 3, 5, 7 и 11, и предположим, что d не делится на p.

Среди p первых членов прогрессии найдется делящийся на p. Действительно, иначе среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_p$ нашлись бы два числа с равными остатками при делении на p; пусть это a_k и a_l, где $1 \leq k < l \leq p$. Тогда $a_l - a_k = (l-k)d$ должно делиться на p, но это неверно, так как p – простое, а d и $l-k$ не делятся на p. Так, пусть, скажем, a_m делится на p, где $m \leq p$. Заметим, что $a_{m+p} = a_m + pd$ тоже делится на p $(m + p \leq 2p \leq 22)$. Разность $a_{m+p} - a_m = pd$ не делится на p^2. Таким образом, числа a_m и a_{m+p}, делящиеся на p, одновременно не могут делиться на p^2. Тем самым, хотя бы одно из них не является точной степенью. Противоречие.

Замечание. Можно доказать (с помощью китайской теоремы об остатках), что найдется сколь угодно длинный отрезок натурального ряда, не содержащий точных степеней (в частности, не существует бесконечной арифметической прогрессии из точных степеней); однако для любого N можно найти арифметическую прогрессию из N точных степеней.

Отметим, что идея решения сходна с решением задачи об оценке разности арифметической прогрессии, состоящей из простых чисел. Совсем недавно австралийский математик Теренс Тао и английский математик Бен Грин доказали, что для любого N можно найти арифметическую прогрессию из N простых чисел.

П.Кожевников

М2203. *Дан правильный (mn)-угольник. Среди его вершин m вершин покрашены красным, а n – синим (никакая вершина не покрашена дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.*

Опишем вокруг (mn)-угольника окружность, и будем считать, что длина дуги между соседними вершинами равна 1. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – красные вершины, а $B_1, \ldots, B_n$ – синие. Рассмотрим mn дуг вида A_iB_j, которые от A_i к B_j проходятся против часовой стрелки. Каждая такая дуга может быть равной по длине одному из чисел $1, 2, \ldots, mn-1$, поэтому найдутся две различные равные дуги $A_{i_1}B_{j_1}$ и $A_{i_2}B_{j_2}$. Тогда эти дуги совмещаются поворотом вокруг центра окружности. Это означает, что дуги $A_{i_1}A_{i_2}$ и $B_{j_1}B_{j_2}$ равны, значит, $A_{i_1}A_{i_2}$ и $B_{j_1}B_{j_2}$ – искомая пара равных отрезков.

Замечание. Интересно, что с помощью идеи решения этой задачи можно получить решение следующей непростой задачи (М463).

Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *такие, что*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = s < mn.$$

Докажите, что в равенстве

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

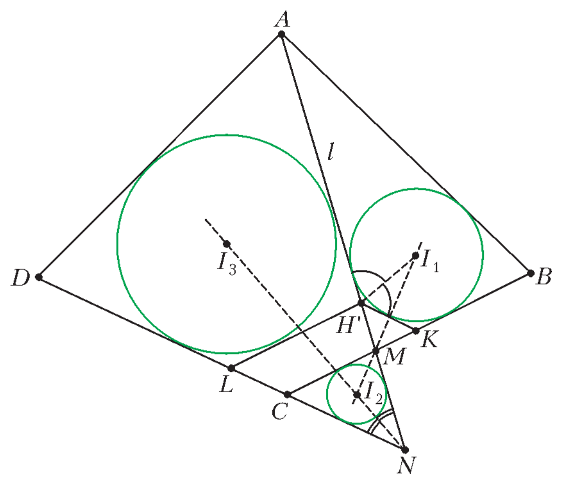
Действительно, можно разбить окружность длины s на s равных дуг длины 1, отметить красным m точек разбиения на дуги длиной $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и синим – n

точек разбиения на дуги длиной $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Из наличия дуги с красными концами, равной дуге с синими концами, вытекает нужное утверждение.

И.Богданов, С.Берлов, П.Кожевников

М2204. *Дан четырехугольник ABCD, описанный около окружности. Прямая l проходит через вершину A, пересекает отрезок BC в точке M и луч DC – в точке N. Пусть I_1, I_2, I_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA. Докажите, что прямая l проходит через точку пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$.*

Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 – окружности, вписанные в треугольники ABM, MNC, NDA соответственно, H – точка пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$. Пусть касательная к ω_1, параллельная CD (ближайшая к CD из двух таких касательных), пересекает BC в точке K и пересекает l в точке H' (см. рисунок). Пусть прямая,



проведенная через H' параллельно BC, пересекает DC в точке L. Так как четырехугольники $ABCD$ и $ABKH'$ описанные, то

$$AD + LH' = AD + CK = AD + CB - KB =$$
$$= CD + AB - KB = CD + AH' - H'K =$$
$$= CD + AH'CL = LD + AH'.$$

Мы получили равенство, показывающее, что четырехугольник $AH'LD$ также описанный, и, значит, LH' касается окружности ω_3.

Углы $AH'K$ и DNA имеют параллельные стороны, поэтому прямые $H'I_1$ и I_2I_3, являющиеся биссектрисами этих углов, перпендикулярны. Аналогично, $H'I_3 \perp I_1I_2$. Значит, $H'I_1$ и $H'I_3$ – высоты треугольника $I_1I_2I_3$, поэтому H' совпадает с H, что завершает доказательство.

Комментарии. Имеются и другие красивые решения задачи.

Например, можно использовать тот факт, что вторая общая внутренняя касательная окружностей ω_1 и ω_2 проходит через C (см. статью «Описанные четырехугольники и ломаные», в «Кванте» № 1 за 2010 г.). В условии нашей задачи при отражении прямой l относительно сторон треугольника $I_1I_2I_3$ получаются прямые BC, DC и вторая общая внутренняя касательная окружностей ω_1 и ω_2. Теперь достаточно воспользоваться известным критерием: прямая проходит через ортоцентр треугольника тогда и только тогда, когда три прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

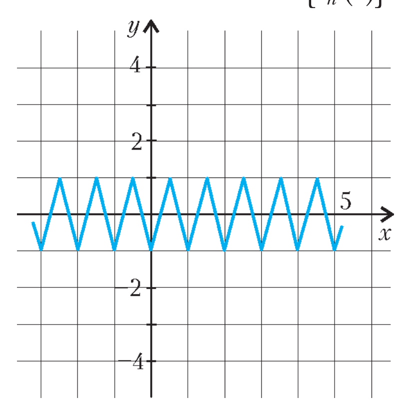
Можно рассуждать и по-другому. Подсчетом углов доказывается, что C лежит на описанной окружности треугольника $I_1I_2I_3$. Легко видеть, что точки, симметричные C относительно прямых I_1I_2 и I_2I_3, лежат на прямой l. Остается воспользоваться известным фактом: при отражении точки, лежащей на описанной окружности треугольника, относительно его сторон, полученные три точки лежат на одной прямой, содержащей ортоцентр.

Н.Белухов, П.Кожевников, В.Мокин

М2205*. *На рисунке изображен график функции $g(x)$, т.е. $g(x)$ – периодическая функция с периодом 1 такая, что*

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{если } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -4x - 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \le x \le 0. \end{cases}$$

Положим $f(x) = x + g(x)$. Для данного действительного числа t определим последовательность $\{s_n(t)\}$ следующим правилом: $s_0(t) = t$, $s_{n+1}(t) = f(s_n(t))$ при $n \ge 0$. Докажите, что для некоторого числа t_0 последовательность $\{s_n(t_0)\}$ всюду плотна, т.е. для любых чисел $a < b$ найдется номер n такой, что $a < s_n(t_0) < b$.



Как нетрудно видеть, график функции $f(x)$ состоит из отрезков прямых: на отрезках $\left[k; k+\frac{1}{2}\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$ это линейная функция с угловым коэффициентом 5, а на отрезках $\left[k+\frac{1}{2}; k+1\right]$ это линейная функция с угловым коэффициентом -3.

Для некоторого множества X числовой прямой и неотрицательного целого n обозначим через $f^n(X)$ множество $\{s_n(t) | t \in X\}$. В частности, $s_n(t) = f^n(t)$. Если X – это отрезок числовой прямой, то $f^n(X)$ – также отрезок.

Докажем следующую **лемму**:

Для любых отрезков $[a; b]$ и $[c; d]$ найдется целое неотрицательное число n такое, что $[a; b] \subset f^n([c; d])$.

Доказательство. Пусть длина отрезка $[c; d]$ меньше 1. Тогда некоторый его подотрезок $[c'; d']$ длины не меньше $\frac{d-c}{2}$ принадлежит одному отрезку вида $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ для некоторого целого k. Тогда длина отрезка $f([c'; d'])$ не менее $3(d'-c') \geq \frac{3}{2}(d-c)$ (так как на отрезке $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ угловой коэффициент прямой, задающей $f(x)$, по абсолютной величине не меньше 3). Таким образом, длина отрезка $f([c; d])$ больше, чем длина отрезка $[c; d]$, по крайней мере в $\frac{3}{2}$ раза. Значит, для некоторого натурального n длина отрезка $f^n([c; d])$ станет не меньше 1. Тогда отрезок $f^n([c; d])$ содержит целиком отрезок $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ для некоторого целого k, значит, $f^{n+1}([c; d])$ содержит целиком отрезок вида $\left[m; m+\frac{1}{2}\right]$ для некоторого целого m. Далее легко видеть, что $f^n\left(\left[m; m+\frac{1}{2}\right]\right) = \left[m-n; m+n+\frac{1}{2}\right]$, поэтому при достаточно большом n отрезок $f^n\left(\left[m; m+\frac{1}{2}\right]\right)$ будет покрывать данный отрезок $[a; b]$. Лемма доказана.

Для натурального n положим $f^{-n}(X) = \{t \mid f^n(t) \in X\}$. Нетрудно видеть, что если X – отрезок, то $f^{-n}(X)$ – объединение конечного числа отрезков (ненулевой длины) и, возможно, конечного числа точек.

Занумеруем $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ все отрезки вида $[a;\ b]$, где $a < b$ – рациональные числа. Достаточно доказать, что для некоторого t_0 последовательность $\{f^n(t_0)\}$ имеет непустое пересечение с каждым отрезком Δ_i.

Рассмотрим произвольный отрезок $[c_1; d_1]$. Найдем номер n_1 такой, что $\Delta_1 \subset f^{n_1}([c_1; d_1])$. Тогда найдется отрезок $[c_2; d_2] \subset f^{-n_1}(\Delta_1) \cap [c_1; d_1]$. Продолжаем так далее: имея отрезок $[c_k; d_k]$, найдем номер n_k такой, что $\Delta_k \subset f^{n_k}([c_k; d_k])$. Тогда найдется отрезок $[c_{k+1}; d_{k+1}] \subset f^{-n_k}(\Delta_k) \cap [c_k; d_k]$.

Для цепочки вложенных отрезков $[c_1; d_1] \supset [c_2; d_2] \supset \ldots$ существует точка t_0, которая принадлежат им всем. Тогда t_0 – искомое число: в самом деле, $f^{n_k}(t_0) \in \Delta_k$, так как $t_0 \in [c_{k+1}; d_{k+1}]$.

Д.Фон-Дер-Флаасс

Ф2213. *После удара первого натуралиста палкой по стволу дерева пчелы вылетают из дупла, расположенного высоко – на высоте H = 30 м – на дереве, и разлетаются во все стороны со скоростями 1 м/с в поисках нарушителей их спокойствия. Каждую секунду наружу выбираются 1000 пчел. Второй натуралист (участник эксперимента) с очень чувствительным микрофоном расположился на соседнем дереве на расстоянии 30 м от «пчелиного» дерева на той же высоте, что и пчелиное гнездо. Он записывает жужжание, производимое пчелами. Почва под деревьями покрыта старой листвой и практически не отражает звук. Как менялась со временем громкость звука до того момента, пока «чистота» эксперимента не была нарушена воплями натуралистов?*

Учтем, что имеется явная симметрия распределения мощности звука по направлениям. Частота взмахов крыльями у пчел составляет величину порядка 100 Гц. Это означает, что характерные длины волн звуков имеют порядок 3 м, что во много раз больше размеров пчелы. Концентрация пчел заметно убывает с расстоянием от гнезда, поэтому поглощением звука самими пчелами можно пренебречь. Если каждая пчела производит звук мощностью W, то к моменту времени t общая энергия звуков, производимая всеми пчелами, равна NWt, где N = 1000 1/с. (Скорость звука во много раз больше скорости полета пчел, поэтому задержку во времени $\sim 0{,}1$ с можно не учитывать.) Эта звуковая энергия равномерно распределяется по всем направлениям. Таким образом, получается, что до того момента, когда пчелы доберутся до натуралистов, громкость звука, регистрируемая микрофоном, нарастает со временем линейно.

Ж.Фарб

Ф2214. *Найдите минимальную скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли во время солнечного затмения. Считайте, что орбита Луны при ее движении вокруг Земли круговая и лежит в плоскости орбиты, по которой Земля движется вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Луны примерно в 60 раз больше радиуса Земли.*

Свяжем систему отсчета с Землей и назовем ее «системой отсчета Птолемея» – СОП. За сутки, т.е. за время T одного оборота Земли вокруг своей оси, Солнце в СОП совершает полный оборот вокруг Земли, при этом угловая скорость движения Солнца составляет $\omega_С = 2\pi/T$. Луна же за сутки совершает чуть меньше полного оборота, и ее угловая скорость $\omega_Л$ тоже соответственно меньше. Среднее расстояние от Земли до Луны равно $r = 60R_З \approx 384$ тыс. км, и оно во много раз (~ 400) меньше расстояния R от Земли до Солнца, которое в таком случае можно считать бесконечно большим.

Известно, что фазы Луны повторяются через 29, 5 суток – это так называемый синодический период. Следовательно, угловые скорости $\omega_С$ и $\omega_Л$ связаны соотношением

$$\omega_С - \omega_Л = \Delta\omega = \frac{2\pi}{29{,}5T}.$$

Если лучи Солнца, закрываемые Луной, падают на Землю не перпендикулярно ее поверхности, то скорость движения тени будет тем больше, чем больший угол образуют падающие лучи с вертикалью. Поэтому скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли будет минимальной, когда затмение Солнца наблюдается в момент нахождения Солнца в зените, т.е. прямо над головой наблюдателя.

Если бы в СОП угловые скорости движения Солнца и Луны совпадали и Луна находилась между Землей и Солнцем, то тень Луны перемещалась бы с востока на запад со скоростью

$$\omega_С R_З = \frac{2\pi R_З}{T} \approx 463 \text{ м/с} .$$

А поскольку Луна вращается медленнее Солнца, скорость движения тени будет направлена в противоположную сторону, т.е. с запада на восток, и равна

$$\Delta\omega r - \omega_С R_З = \frac{2\pi\cdot 60 R_З}{29{,}5T} - \frac{2\pi R_З}{T} \approx 469 \text{ м/с} .$$

Например, во время солнечного затмения 1 августа 2008 года Солнце не находилось в зените, и минимальная скорость движения тени составляла 507 м/с.

В.Славутинский

Ф2215. *Куб с ребром A и с равномерно распределенной по объему массой M, начальная скорость которого v направлена вдоль четырех ребер куба, движется в разреженном газе с концентрацией n молекул с массами $m \ll M$ и температурой T. Удары молекул о гладкие стенки куба абсолютно упругие. Длина свободного пробега молекул много больше ребра куба, т.е. $\lambda \gg A$, а $n \gg 1/A^3$. Каково ускорение куба? Рассмотрите только два крайних случая: а) $v^2 \gg kT/m$; б) $v^2 \ll kT/m$.*

Поскольку газ разрежен, после удара какой-либо молекулы о стенку куба они – куб и молекула – потом долго не встречаются. Скорости молекул имеют составляющие вдоль и поперек скорости куба $\vec{v}$. Поперечные составляющие скоростей молекул после ударов о стенки куба по величине не изменяются, так как стенки куба гладкие и удары абсолютно упругие. По отношению к направлению движения куба естественно назвать одну из его граней передней, а противоположную ей – задней. Удары молекул о переднюю грань тормозят куб, а удары о заднюю грань подгоняют его.

В случае а) молекулы никогда не ударяются о заднюю грань куба, и движением газа вообще можно пренебречь. Тогда каждая молекула, столкнувшись с передней гранью куба, приобретает скорость $2\vec{v}$, т.е. получает от куба импульс $2m\vec{v}$. За время t с передней гранью столкнутся $N = vtA^2n$ молекул. Поэтому ускорение куба будет равно

$$\vec{a} = -\vec{v}\frac{2Nm}{Mt} = -\vec{v}\frac{2mvA^2n}{M} .$$

В случае б) молекулы ударяются и о переднюю и о заднюю грани куба. Величины составляющих скоростей молекул при таких ударах изменяются: на передней грани возрастают на $2v$, а на задней убывают на $2v$. За время t на передней грани происходит примерно $tA^2n\left(v + \sqrt{kT/(2m)}\right)/2$ ударов, а на задней – примерно $tA^2n\left(-v + \sqrt{kT/(2m)}\right)/2$ ударов. В результате ускорение куба будет равно

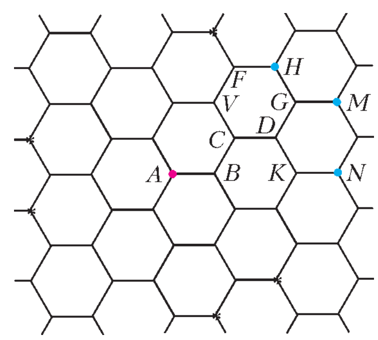
$$\vec{a} = -\vec{v}\frac{2mvA^2n}{M} .$$

Заметим, что формулы для ускорений в обоих частных случаях получились одинаковыми. Попробуйте самостоятельно рассмотреть общий случай, когда не выполняется ни условия а), ни условие б).

А.Кубов

Ф2216. *Имеется гексагональная бесконечная сетка. Каждые два узла сетки характеризуются минимальным количеством «мостиков», которые нужно преодолеть, чтобы из одного узла перебраться в другой. Каждое звено такой сетки, расположенное между двумя соседними узлами, имеет сопротивление R. К каждому узлу сетки подключены три таких звена. От узла A можно вдоль проволочек (звеньев) сетки передвинуться к трем ближайшим узлам B сетки. От этих трех узлов по другим проволочкам можно перебраться к следующим по удаленности от точки A шести узлам C. Начиная с этих узлов C, симметрия перемещения по мостикам нарушается. Если батарейка подключена к двум узлам сетки, расположенным очень далеко друг от друга, то от каждого узла C токи, уходящие по двум проволочкам к следующим по удаленности от A узлам, имеют два разных значения, и их отношение неизвестно. Предположим, что отношение токов равно k. Найдите сопротивления сетки между узлом A и некоторыми узлами сетки, которые отстоят от A на 5 проволочек-мостиков.*

На рисунке изображен участок бесконечной гексагональной сетки и на нем отмечены несколько узлов.



Будем вести отсчет от узла A. Пятью (минимум) мостиками с узлом A связаны узлы, обозначенные буквами H, N, M. Конечно, есть и другие узлы с таким же минимальным количеством мостиков от них до узла A, но они по расположению эквивалентны отмеченным трем узлам.

Согласно условию задачи, отношение токов, разбегающихся от узла C, в мостиках CV и CD равно k. В мостике CV течет ток $I_{CV} = k\mathcal{E}/(6R)$, где $\mathcal{E}$ – напряжение батарейки, а в мостике CD течет ток $I_{CD} = (1-k)\mathcal{E}/(6R)$. Тогда на участке VF течет ток $2k\mathcal{E}/(6R)$, а на участке FH течет ток такой же, как на участке CV, т.е. $k\mathcal{E}/(6R)$. Узлы, эквивалентные узлу H, отмечены на рисунке звездочками.

Итак, нашлись пять мостиков, соединяющих узел A с другими узлами сетки, на которых можно найти падения напряжения. До узлов, отмеченных буквами M и N, нельзя добраться по мостикам, падения напряжения на которых известны.

Если в узел A с помощью батарейки «запустить» ток I, а из узла H «вынуть» такой же ток с помощью другой такой же батарейки, то падения напряжения на мостиках будут такими:

$$U_{AB}=\frac{IR}{3}+\frac{kIR}{6},\quad U_{BC}=\frac{IR}{6}+\frac{2kIR}{6},\quad U_{CV}=\frac{2kIR}{6},$$

$$U_{VF}=\frac{2kIR}{6}+\frac{IR}{6},\quad U_{FH}=\frac{kIR}{6}+\frac{IR}{3}.$$

В результате получаем, что при токе I напряжение между точками A и H равно

$$U_{AH}=U_{AB}+U_{BC}+U_{CV}+U_{VF}+U_{FH}=IR\left(1+\frac{4k}{3}\right).$$

А сопротивление между этими точками составляет

$$R_{AH}=\frac{U_{AH}}{I}=R\left(1+\frac{4k}{3}\right).$$

С.Узлов

Ф2217. *На длинных невесомых и нерастяжимых нитях, прикрепленных к потолку, висят три стальных сплошных шара диаметрами 3D, 2D и D. В равновесном положении все нити вертикальны, центры шаров находятся на одинаковых расстояниях $L \gg D$ от потолка и на одной горизонтальной линии, причем шары почти касаются друг друга. Посередине находится шар диаметром 2D. Шар диаметром 3D отводят от положения равновесия так, что нить, к которой он прикреплен, остается выпрямленной, находится в той же плоскости, что и две другие нити, и образует с вертикалью угол $\alpha \ll 1$. Шар отпускают. Найдите максимальный угол β отклонения нити, удерживающей шар диаметром D, после первой серии ударов шаров. Считайте все удары абсолютно упругими.*

Перед первым ударом скорость шара массой M_3 будет равна

$$v_{M_3}=\sqrt{2Lg(1-\cos\alpha)}.$$

Известно, что если до встречи двух шаров один из них массой M_1 покоился, а второй массой M_2 двигался со скоростью v, то после лобового абсолютно упругого удара скорость шара, который до встречи покоился, равна $2vM_2/(M_1+M_2)$. В рассматриваемом случае происходят последовательно два таких события, причем массы шаров пропорциональны кубам их диаметров, поэтому скорость шара массой M_1 после серии двух ударов будет равна

$$v_{M_1}=$$
$$=v_{M_3}\frac{2(3D)^3}{(3D)^3+(2D)^3}\frac{2(2D)^3}{D^3+(2D)^3}=\frac{76}{35}\sqrt{2Lg(1-\cos\alpha)}.$$

При этом нить, на которой подвешен этот шар, отклонится от вертикали на угол β, связанный с углом α соотношением

$$\left(\frac{76}{35}\right)^2(1-\cos\alpha)=1-\cos\beta.$$

Поскольку углы α и β небольшие, воспользуемся приближенными формулами для расчета тригонометрических функций и получим

$$\beta\approx\frac{76}{35}\alpha.$$

Д.Шаров

Ф2218. *Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента при напряжениях, не превышающих по модулю некоторой величины U_0, имеет вид $I=\alpha U^3$. Два диода, включенные параллельно друг другу так, что «плюс» одного соединен с «минусом» другого, имеют похожую характеристику. При подаче на такой элемент напряжения, изменяющегося по гармоническому закону $u=U_0\cos\omega t$, в частотном спектре тока присутствуют первая и третья гармоники. Каково отношение их амплитуд?*

Известно, что куб косинуса угла α можно представить в виде суммы гармонических функций, изменяющихся со временем по законам $\cos\alpha$ и $\cos 3\alpha$. В нашем случае

$$\cos^3\omega t=\frac{\cos 3\omega t}{4}+\frac{3\cos\omega t}{4}.$$

Следовательно, отношение амплитуд первой и третьей гармоник равно 3.

В.Поляков

Ф2219. *В неблизком будущем на уроке физики в школе на Луне проводится такой эксперимент. Сплошной плоский стальной лист большой площади и одинаковой по всей площади толщиной – плиту – окунают в расплавленный парафин, вынимают и дожидаются, когда он остынет. Плита покрывается тонкой пленкой парафина, который не смачивается водой. Плиту аккуратно опускают на поверхность воды в сосуде, и она не тонет. Какова максимальная толщина используемой в эксперименте плиты? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно 1,6 м/с^2. Сталь, парафин и вода на Луне такие же, как и на Земле.*

Часть плиты, находящаяся на глубине по отношению к уровню свободной поверхности воды в сосуде, испытывает выталкивающее действие, поэтому чем больше эта глубина, тем больше может быть толщина плиты. Самая большая глубина соответствует случаю, когда вода вот-вот начнет растекаться по поверхности плиты. Поскольку парафин не смачивается водой, плоскость, касательная к поверхности воды в месте, где она соприкасается с парафином, является также касательной плоскостью и к плите. Тогда глубину h, на которой находится верхняя поверхность плиты по отношению к горизонтальной поверхности воды в сосуде вдали от плиты, можно найти из соотношения

$$2\sigma=\frac{\rho_в g h^2}{2},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды, $\rho_в$ – плотность воды. Отсюда следует, что

$$h=2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}}.$$

Если толщина стальной плиты d, а плотность $\rho_{ст}$, то условие ее плавания в воде таково:

$$\rho_в(d+h)=\rho_{ст}d,\ \text{или}\ d+h=7{,}8d.$$

Отсюда легко найти максимальную толщину плиты:

$$d=\frac{h}{6{,}8}=\frac{1}{3{,}4}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}}\approx 1{,}9\ \text{мм}.$$

Д.Ломов

Обобщение задачи М2200

Задача М2200 была предложена Эмилом Колевым на Болгарской национальной олимпиаде в 2010 году.

Авторское решение использует парную стратегию. С помощью вариаций такой стратегии задача решается для таблицы размерами $2\times n$, где n не дает остаток 1 при делении на 4.

Мы докажем, что при любом достаточно большом n (покажем это для $n \geq 300$) при игре на таблице $2\times n$ Иван имеет выигрышную стратегию, причем независимо от того, кто делает первый ход.[1]

Опишем возможную стратегию Ивана.

Вся таблица состоит из n вертикалей. Скажем, что Иван своим ходом занимает вертикаль, если до хода обе клетки вертикали были свободны и своим ходом Иван ставит доминошку на одну из клеток этой вертикали. Тем самым, после того как Иван занимает вертикаль, Петр не может поставить домино в эту вертикаль. Выделим в таблице подряд слева $k=\left[\frac{n}{4}\right]$ прямоугольников 2×4 (здесь, как обычно, $[x]$ означает целую часть числа x).

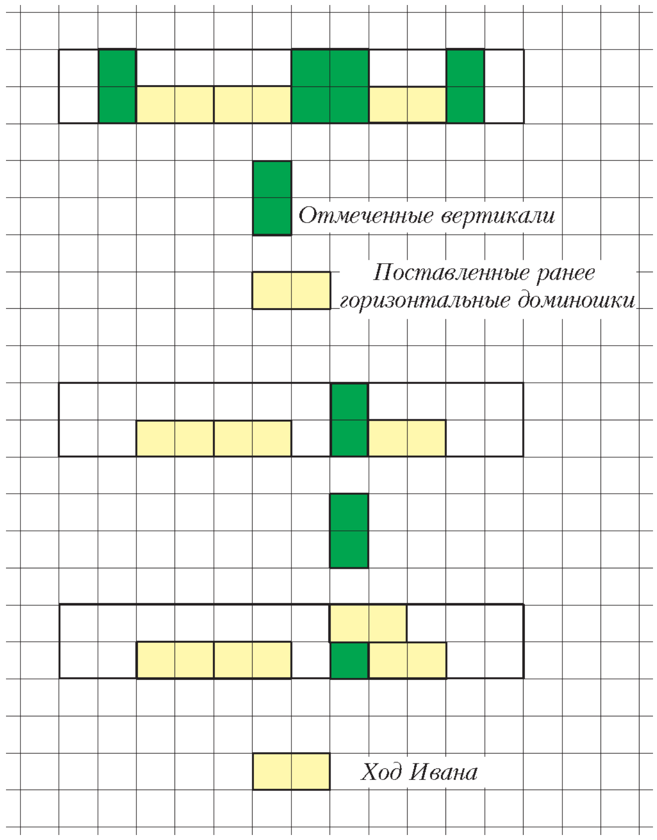
1 этап. В свои первые k ходов Иван ставит по одной доминошке в каждом из k прямоугольников 2×4 (если Петр ставит домино в некоторый прямоугольник 2×4, в котором еще нет горизонтального домино, Иван отвечает ходом в тот же прямоугольник; иначе Иван ставит свое горизонтальное домино в свободный прямоугольник 2×4). Тем самым, после k своих ходов Иван уже занял $2k$ вертикалей (по две вертикали в каждом прямоугольнике 2×4). Будем считать, что на 1 этапе Иван ставит свои доминошки в нижнюю горизонталь.

2 этап. Далее, объединим прямоугольники 2×4 в $m=\left[\frac{k}{3}\right]$ прямоугольников 2×12. Назовем прямоугольник 2×12 *хорошим*, если в нем поставлено не более трех вертикальных доминошек и в каждом из трех прямоугольников 2×4, на которые он разбивается, поставлено ровно по одной горизонтальной доминошке.

Рассмотрим некоторый хороший прямоугольник и отметим в нем вертикали, не содержащие клеток горизонтальных доминошек, но которые примыкают к горизонтальным доминошкам (см. рисунок). Нетрудно видеть (простой перебор), что отмеченных вертикалей всегда не меньше 4, значит, хотя бы одна из них свободна. Если в этот момент Иван должен делать ход, то он может занять эту вертикаль.

Таким образом, если Иван занял в хорошем прямоугольнике 2×12 еще одну (седьмую из двенадцати) вертикаль, то за всю игру Петр поставит в нем не более 5 вертикальных доминошек, а Иван сможет поставить не менее 6 горизонтальных доминошек.

[1] *При желании из приведенного решения можно оценить цену игры, т.е. разность количеств поставленных горизонтальных и вертикальных доминошек при правильной игре обоих партнеров.*



Далее Иван может действовать следующим образом: если в данный момент хотя бы один из прямоугольников 2×12 хороший, то Иван ставит в нем горизонтальную доминошку так, чтобы занять новую вертикаль; так Иван займет вертикаль хотя бы в $l=\left[\frac{m}{5}\right]$ хороших прямоугольниках 2×12. Действительно, пусть Иван сделал $t \leq l-1$ ходов на втором этапе. Тогда остается еще $m-t$ прямоугольников 2×12, в которых Иван на втором этапе еще не ставил доминошек. Петр к этому моменту игры поставил всего не более $k+t+1$ доминошек. Но $4(m-t) > k+t+1$ (так как $5t \leq 5l - 5 \leq m-5 \leq 4m-k-2$), поэтому из рассматриваемых $m-t$ прямоугольников хотя бы один хороший.

3 этап. Иван заполняет последовательно свободные места над поставленными ранее им горизонтальными доминошками. Всего Иван сделал не менее $I=6m+2(k-3m)$ ходов (не менее 6 ходов в каждом из m прямоугольников 2×12 и не менее 2 ходов в каждом из оставшихся прямоугольников 2×4). Всего Петр сделает не более $P=5l+6(m-l)+2(k-3m)+(n-4k)$ ходов (не более 5 ходов в каждом из l хороших прямоугольников 2×12, не более 6 ходов в каждом из оставшихся прямоугольников 2×12, не более 2 ходов в каждом из оставшихся $k-3m$ прямоугольников 2×4, не более $n-4k$ ходов вне выделенных вначале прямоугольников 2×4). При $n \geq 300$ имеем $l=\left[\frac{n}{60}\right] \geq 5$, отсюда $I-P=l-(n-4k) \geq l-3 \geq 2$. Это означает, что у Петра раньше кончатся ходы.

П.Кожевников