# И снова задачи на сопротивления

Е.СОКОЛОВ

Прошла областная олимпиада, и на очередное заседание физического кружка ребята пришли невеселыми.

– Что стряслось? – поинтересовался я.

– Да снова на олимпиаде дали ваши любимые задачи на сопротивления. Причем на три параллели, для восьмого, девятого и десятого классов, дали вообще одну задачу. Вот ее условие:

**Задача.** *В новогоднюю ночь пришел к восьмикласснику Пете Дед Мороз с подарками. Обрадовался Петя, подбежал к нему, а тот протягивает ему листок с электрической схемой, состоящей из восьми белых сопротивлений по 1 Ом каждое, двух серых сопротивлений по 2 Ом и двух черных сопротивлений по 3 Ом (рис.1).*

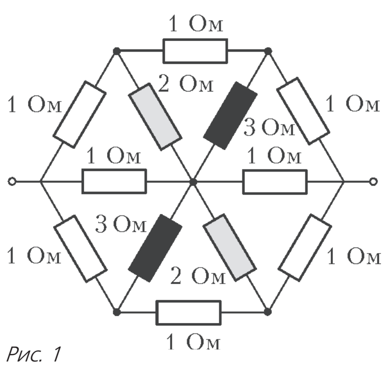


Рис. 1

*– Ой, а мы такие схемы в школе не решали, – огорчился Петя.*

*– Да мне не нужен точный ответ, – отвечает Дед Мороз. – Укажи просто интервал, в котором лежит значение общего сопротивления цепи, и ты здорово поможешь мне.*

*Подумал-подумал Петя и ответил на вопрос Деда Мороза. И получил много-много подарков.*

*Решите и вы, ребята, эту задачу. Только имейте в виду, что если вы укажете интервал шириной 2 Ом (например, 200 Ом $\le R_{общ} \le$ 202 Ом ), то получите за решение один балл, если вы укажете интервал шириной 1 Ом, то получите два балла, а если вам удастся получить интервал меньше чем 0,01 Ом, то жюри поставит вам максимальный балл.*

– Вот такая непривычная задача. Мы уже выяснили, что известными олимпиадными методами подсчитать сопротивление этой цепи не удается – ни метод склейки узлов, ни метод удаления здесь не работают, как будто специально так подобрали. А прямой расчет методами электротехники слишком громоздкий. Оказалось, что только один из семидесяти участников смог дойти до конца, да и то сделал ошибку под самый конец. Плохая задача!

– Ну, здесь я с вами не согласен. На мой взгляд, задача просто золотая. Правда, я, как автор этой задачи, могу и ошибаться. Но ничего страшного, давайте спорить.

– ...?

– Во-первых, почему вы решили, что надо вычислять точное значение сопротивления этой цепи? Ведь в условии прямо сказано, что искать его не обязательно, достаточно просто указать интервал, в котором лежит это значение. Так что вот вам первый толк от нашей задачи: она показала, насколько сильной бывает инерция мышления – семьдесят олимпиадников, как один, пошли привычной, но неправильной дорогой, вместо того чтобы остановиться и просто подумать.

А заработать баллы в этой задаче очень просто. Смотрите: если я перережу все боковые проводки так, чтобы остались только два центральных сопротивления (рис.2), то что произойдет с сопротивлением цепи?

– Так, ток в цепи, конечно, уменьшится, значит, сопротивление цепи возрастет.

– И станет равным 2 Ом. Поэтому вот вам уже один балл:

$$0 < R_{общ} < 2 \text{ Ом} .$$

Вы же не будете спорить, что сопротивление всегда больше нуля?

– И правда, все очень просто! Однако здесь и два балла заработать можно в одно действие – просто отрезаем лишь серые и черные сопротивления. Общее сопротивление цепи при этом возрастет, а в нашем распоряжении останется простая схема (рис.3), сопротивление которой равно 6/7 Ом. Ура, мы получили неравенство на два балла:

$$0 < R_{общ} \le \frac{6}{7} \text{ Ом} .$$

– Все правильно. Идею вы поняли, переходим к обоснованию общего метода.

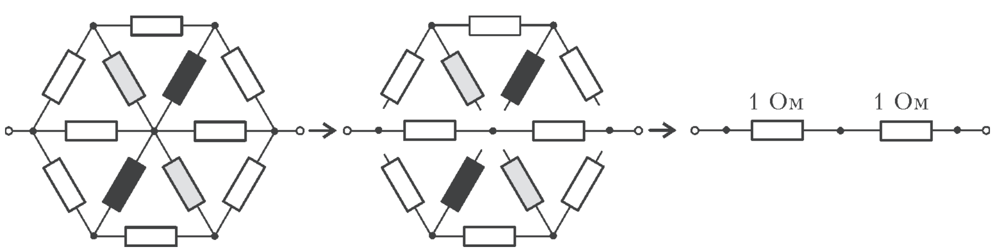


Рис. 2

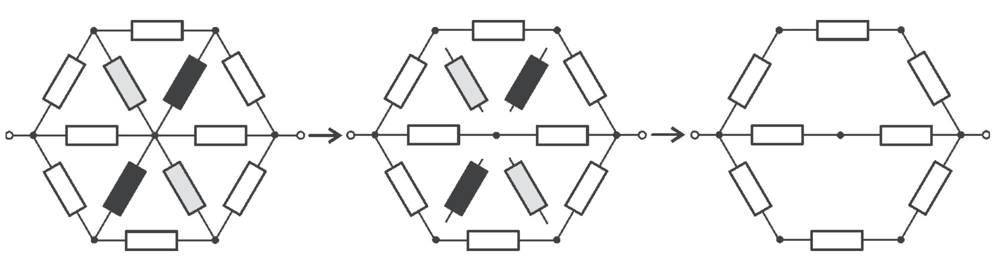

Рис. 3

В этой задаче предполагается, что вместо стандартного метода – перехода от одной эквивалентной схемы к другой – решающим будет переходит к *неэквивалентным* схемам, т.е. к схемам, у которых сопротивление больше или меньше, чем у исходной. Разумеется, такие переходы имеют смысл только тогда, когда мы точно знаем, увеличится или уменьшится при переходе общее сопротивление цепи. Поэтому при решении обязательно следует использовать следующие общие принципы[1]:

1) *если какое-либо сопротивление в цепи увеличить, то общее*

[1] *Доказательство этих принципов можно найти, например, в статье О.Ляшко «Почему не уменьшится сопротивление» («Квант» №1 за 1985 г.).*

*сопротивление цепи тоже увеличится (или останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток);*

2) *если какое-либо сопротивление в цепи уменьшить, то общее сопротивление цепи тоже уменьшится (или останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток).*

Особо эффектными бывают самые радикальные изменения. Когда, например, мы сразу увеличиваем сопротивление некоторого резистора до бесконечности. На обычном языке это означает, что мы просто вырезаем его из схемы. Именно так мы и поступили, когда получили два первых неравенства. А иногда бывает полезным поступить наоборот – уменьшить сопротивление резистора до нуля, т.е. заменить его идеальным проводником.

**Упражнение 1.** Как изменится общее сопротивление цепи, если: а) перерезать какой-нибудь проводок в цепи; б) впаять в цепь дополнительный идеальный проводник (соединить две точки схемы идеальным проводником)?

– А можно вопрос? Когда мы перерезали проводки в двух первых случаях, то всем нам, конечно, было очевидно, что сопротивление цепи при этом возрастает. А вот для общего случая сформулированные принципы, хотя и кажутся правдоподобными, но не являются совсем очевидными.

– Вопрос правильный. Поэтому даю объяснения.

Во-первых, я считаю, что здесь должно сработать то, что называется смекалкой, и на что обычно нацеливаются олимпиадные задачи. А во-вторых, настоящий будущий инженер или ученый должен интересоваться на уроках не только тем, как решить задачу, но и общими вопросами. Например: существует ли метод, с помощью которого можно рассчитать сопротивление цепи?[2] Или: как изменится общее сопротивление цепи при изменении величин отдельных сопротивлений?

Теперь давайте продолжим наши исследования и попробуем все-таки получить максимальный балл за эту задачу. Только не забывайте, что в мире неэквивалентных схем движение идет только в одну сторону. Нет никакого смысла на первом шаге перерезать один проводок, а на втором – впаивать другой. Ведь совершенно не понятно, как изменится общее сопротивление цепи в результате таких двух противоположных действий.

И еще, чтобы вы сразу видели, какое именно направление движения выбрано, мы решили изменять цвет рисунков. Схемы с сопротивлением большим, чем у исходной, мы будем изображать красным цветом, а схемы с сопротивлением меньшим, чем у исходной, – синим цветом.

Итак, жду идей.

– А идею здесь сразу видно! Смотрите, если бы серые и черные сопротивления были одинаковыми, то мы легко могли бы рассчитать схему, расщепив, например, средний узел. Поэтому давайте один раз увеличим сопротивление

[2] *О методе, с помощью которого можно рассчитать сопротивление любой цепи, рассказано, например, в статье «О простом и сложном» («Квант» №2 за 2002 г.).*

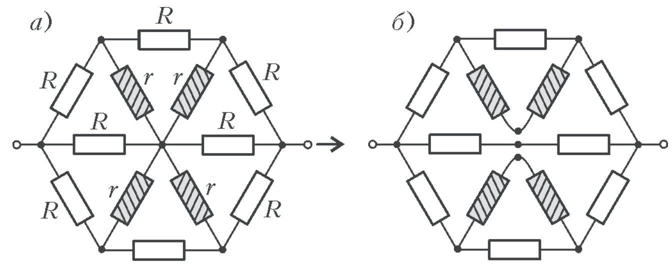

Рис. 4

серых резисторов до 3 Ом, а другой раз уменьшим сопротивление черных резисторов до 2 Ом. В первом случае мы получим оценку сверху, а во втором – оценку снизу. А чтобы не считать два раза, найдем сопротивление схемы в самом общем виде, полагая, что номиналы четырех заштрихованных на рисунке 4 сопротивлений одинаковы и равны $r$, а восьми белых сопротивлений равны $R$:

$$R_{\text{общ}} = \frac{2R(R+3r)}{3R+7r}.$$

**Упражнение 2.** Покажите это.

Подставляя в формулу для $R_{\text{общ}}$ первый раз $r$ = 3 Ом, а второй раз $r$ = 2 Ом ($R$ = 1 Ом в обоих случаях), получаем

$$\frac{14}{17}\ \text{Ом} \le R_{\text{общ}} \le \frac{5}{6}\ \text{Ом}.$$

Ширина диапазона равна

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{5}{6}\ \text{Ом} - \frac{14}{17}\ \text{Ом} = \frac{1}{102}\ \text{Ом} < 0{,}01\ \text{Ом}.$$

Вполне достаточно для получения максимального балла.

– Интересно, что если серые и черные сопротивления сделать одинаковыми и равными их среднему арифметическому значению 2,5 Ом, то наша схема тоже превратится в схему, изображенную на рисунке 4, и мы сможем подсчитать ее сопротивление, просто подставив в готовую формулу значение $r$ = 2,5 Ом:

$$R_{\text{общ}} = \frac{34}{41}\ \text{Ом}.$$

Правда, не очень понятно, что это такое: то ли оценка сверху, то ли оценка снизу, то ли само сопротивление.

– Да, толку от полученного числа пока никакого нет. И произошло это потому, что мы нарушили правила одностороннего движения. Мы одновременно одни сопротивления (черные) уменьшили, а другие (серые) увеличили. И, конечно, сообразить теперь, что при этом произошло с общим сопротивлением цепи, совершенно невозможно. Но не расстраивайтесь, сейчас мы найдем применение полученному вами числу. Только будем выполнять все преобразования по правилам.

Прежде всего, расщепим центральную точку $O$ на три точки (рис.5). А затем – внимание! – перережем проводки $OO_1$ и $OO_2$. Что при этом произошло с общим сопротивлением цепи?

– Оно увеличилось.

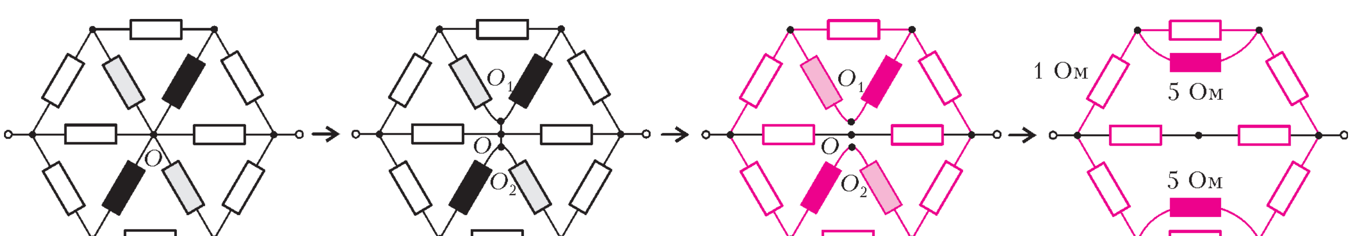

Рис. 5

– Да, мы перешли к неэквивалентной схеме с бо́льшим сопротивлением. Наша новая схема в точности эквивалентна схеме на рисунке 4,*б* со значениями заштрихованных сопротивлений, равными среднему арифметическому значению $r$ = 2,5 Ом. Таким образом, уравнивание серых и черных сопротивлений приводит все-таки к увеличению сопротивления цепи.

– Значит, полученное нами число 34/41 Ом есть оценка сверху?

– Да, и мы смело наносим его на карту наших исследований (рис.6). С учетом последнего достижения найденный

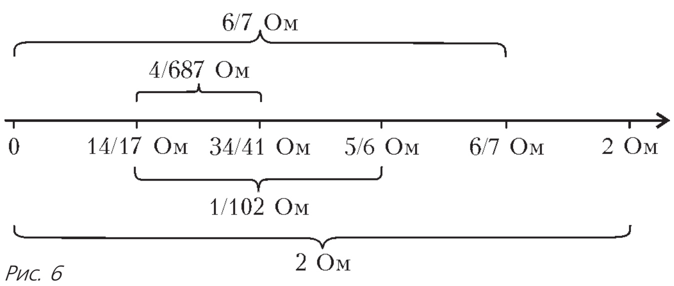

*Рис. 6*

нами интервал сжался уже до величины

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{34}{41}\ \text{Ом} - \frac{14}{17}\ \text{Ом} = \frac{4}{687}\ \text{Ом} < 0{,}006\ \text{Ом}\,.$$

Прогресс налицо.

– Плохо только то, что заранее не ясно, окажется новая оценка лучше или хуже старой и насколько серьезное она даст улучшение.

– Да, это так. И поэтому всегда поиски улучшающих оценок идут интуитивно, наугад. Но у меня есть для вас хорошая новость. Дед Мороз по секрету сообщил мне, что того, кто сможет сжать интервал до 0,001 Ом, ждет специальный приз. И есть еще подсказка от меня: попробуйте улучшить нижнюю оценку, впаяв куда-нибудь полезные проводки.

– ...?

– Давайте рассуждать вместе. Берем левое центральное белое сопротивление и делим его на два сопротивления: $x$ и $1-x$, то же самое проделываем и с правым центральным сопротивлением, только делим его части $1-y$ и $y$ (рис.7). При этом у нас появляются на центральной линии две новые точки $A$ и $B$. Давайте соединим их идеальными проводниками с точками $A_1$, $A_2$ и $B_1$, $B_2$ соответственно (рис.8,*а*). Что при этом случится?

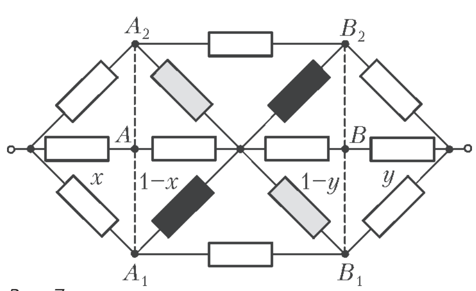

*Рис. 7*

– Общее сопротивление цепи уменьшится.

– Правильно! Наша новая схема дает оценку снизу. На рисунке 8,*б* мы изобразили ее как можно проще – «склеили» тройки точек $A_1$, $A$, $A_2$ и $B_1$, $B$, $B_2$ (на предыдущем шаге мы соединили их идеальными проводниками) и заменили пары параллельно включенных сопротивлений одним. А заодно подготовились к следующему прыжку в неизвестное – сгруппировали вместе части с $x$ и $y$.

– А какие значения брать при расчетах для свободных параметров $x$ и $y$?

– Давайте подумаем. Какие бы значения для $x$ и $y$ мы ни брали, рассчитав сопротивление новой схемы, мы всегда будем получать оценку снизу для общего сопротивления нашей исходной цепи. Только вот если мы хотим, чтобы наша оценка снизу была как можно лучше, желательно подобрать значения для этих величин такими, чтобы...

– Чтобы сопротивление новой схемы было как можно больше.

– Совершенно верно!

– Так что же нам теперь решать задачу на экстремум? Вычислять сопротивление схемы в общем виде, брать производные, приравнивать их к нулю...?

– Можно поступить и так. Это – стандартный метод решения задач на максимальные и минимальные значения, и он всегда приведет к ответу, если, разумеется, хватит времени и сил. Но я предлагаю решить задачу методом размышлений.

– Согласны. Правда не верится, что такую сложную задачу можно решить без формул.

– Попробуем. Все внимание – на рисунок 9. Слева на нем изображена схема, представленная раньше на рисунке 8,*б*, с расщепленными точками $K$ и $L$, а справа – некоторая новая схема. Есть между ними что-нибудь общее?

– Конечно, есть. Правая схема получается из левой, если перерезать проводки $K_1K_2$ и $L_1L_2$.

– А теперь посмотрите на рисунок 10. Слева на нем изображена схема, представленная раньше на рисунке 9,*б*, в которой пары последовательно включенных сопротивлений мы заменили одним. А в центре и справа...

– В центре та же схема, что и слева, только с расщепленной точкой $M$. А справа – центральная схема с перерезанным проводком $M_1M_2$.

– Ну, вот вам и ответ: если сопротивление 41/29 Ом включено параллельно с сопротивлением 2 Ом, то их общее сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{82}{99}\ \text{Ом}\,.$$

Это и есть наша новая оценка снизу общего сопротивления цепи. Она улучшает прежнее достижение ($\frac{82}{99} > \frac{14}{17}$). Теперь ширина найденного нами интервала равна

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{34}{41}\ \text{Ом} - \frac{82}{99}\ \text{Ом} = \frac{4}{4059}\ \text{Ом} < 0{,}001\ \text{Ом}\,.$$

У нас все получилось! Мы сжали интервал до одной тысячной ома.

– Нет, я протестую! Это никуда не годное решение. Смотрите, мы же вначале впаяли полезные проводки, и сопротивление при этом уменьшилось, а затем перерезали проводки, и сопротивление при этом увеличилось!

– Отлично! Очень правильное замечание. Действительно, на первый взгляд может показаться, что иногда мы двигались с нарушением правил одностороннего движения. Но на самом деле мы не нарушали их, а буквально прошли по краешку дозволенного. Да, мы перерезали проводки, но при этом не увеличивали общего сопротивления цепи. Мы использовали наш единственный шанс – перерезали проводки, по которым ток не идет. Дело в том, что, при произвольных значениях параметров $x$, $y$ и $z = x + y$ в проводках $K_1K_2$, $L_1L_2$ и $M_1M_2$, конечно, токи есть. Но при значениях этих параметров, дающих максимальное значение сопротивления цепи, изображенной на рисунке 9,*а*, токов в этих проводках нет. Для того чтобы вы обратили внимание на эти тонкие места наших рассуждений, я даже специально немного изменял цвет рисунков. Но, к сожалению, только один человек заметил мои намеки и задал правильный и нужный вопрос.

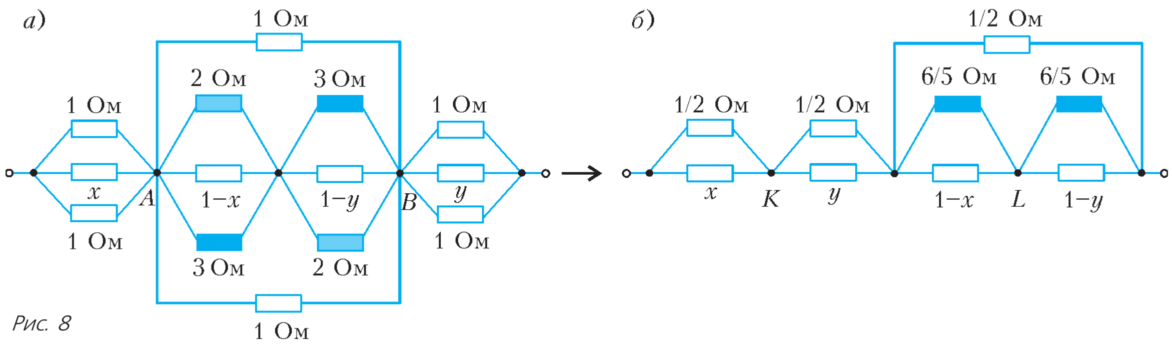


Рис. 8

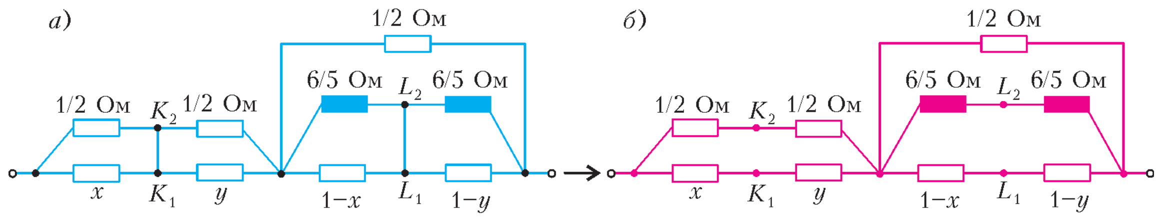


Рис. 9

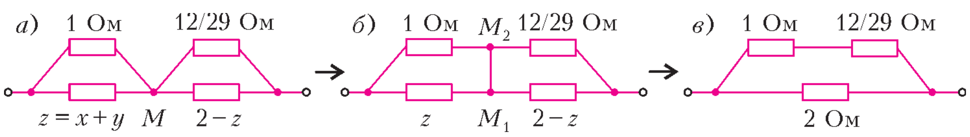


Рис. 10

Ну а теперь, чтобы наше решение приняли все, докажем его правильность. Для этого пройдем по нашим схемам в обратном порядке.

Итак, сопротивление схемы на рисунке 10,*б* не может быть больше, чем сопротивление схемы на рисунке 10,*в*. А равным ему может быть? Да, может, если мы распорядимся величиной $z$ так, чтобы в точках $M_1$ и $M_2$ потенциал был один и тот же.

**Упражнение 3.** Каким же должно быть сопротивление $z$?

Так давайте именно так и распорядимся. Тогда сопротивление цепей на рисунках 10,*а* и 9,*б* будет иметь наибольшее значение, равное 82/99 Ом.

А теперь – второе тонкое место. Мы уже знаем, что сопротивление схемы на рисунке 9,*а* не может быть больше чем 82/99 Ом. А равным ему может быть? Да, может, если мы положим $x = y$. В этом случае, в силу симметрии, по проводкам $K_1K_2$ и $L_1L_2$ ток не течет, и мы можем перерезать их без всяких последствий для общего сопротивления цепи. И наша цепь на рисунке 9,*а* превратится в цепь на рисунке 9,*б*. Доказательство закончено.

В заключение – еще одно, более сложное, упражнение.

**Упражнение 4.** Для каждой цепи, изображенной на рисунке 11, найдите интервал указанной ширины, в котором лежит значение общего сопротивления. Дополнительные условия: а) все ясно из рисунка; б) «змейка» из белых сопротивлений $r$ = 1 Ом сшита черными сопротивлениями номиналом $R$ = 2000 Ом; в) сопротивление выделенного ребра тетраэдра равно $R$ = 100 Ом, остальных пяти – $r$ = 1 Ом; г) сопротивления трех выделенных ребер куба равны $R_1$ = 0,4 Ом, $R_2$ = 0,5 Ом, $R_3$ = 0,6 Ом, остальных девяти – $r$ = = 1 Ом; д) в бесконечной сетке сопротивление каждого ребра, кроме выделенного, равно $r$ = 1 Ом, а выделенного – $R$ = 1,1 Ом; е) в бесконечной сетке сопротивление каждого ребра, кроме двух выделенных, равно $r$ = 1 Ом, сопротивление серого выделенного ребра равно $R_1$ = 1,1 Ом, белого – $R_2$ = 0,92 Ом.

Подсказка к случаям д и е: сопротивление идеальной сетки между соседними точками $A$ и $B$ равно $R_{\text{ид}} = \frac{r}{2} = 0{,}5$ Ом.

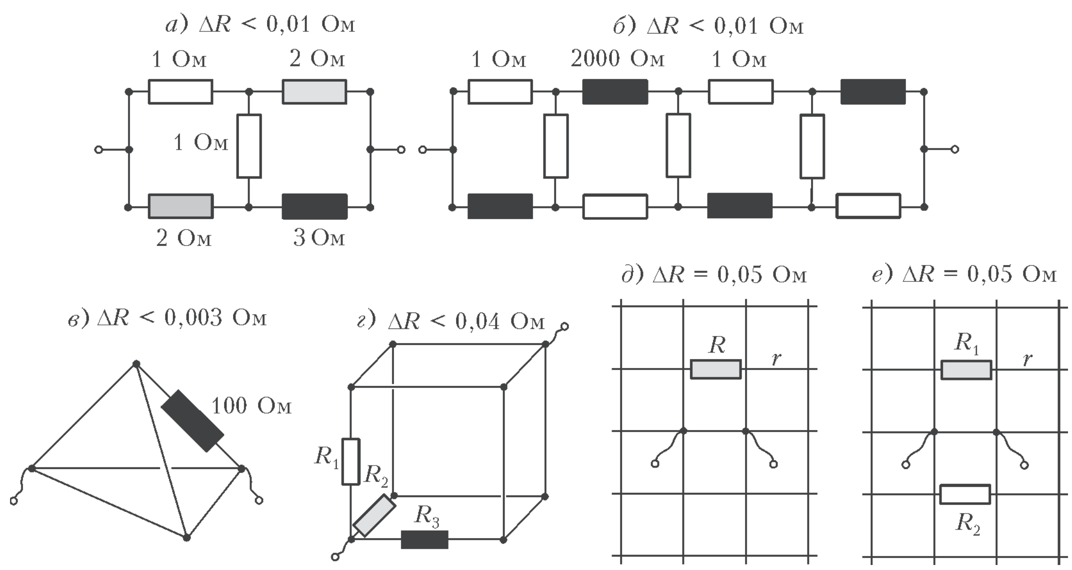


Рис. 11