

Склейки многоугольников

Г. ШАБАТ, А. СГИБНЕВ

ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ ЧАШКУ, ВЫЛЕПЛЕННУЮ из пластилина. Эту чашку можно помять и вылепить из нее бублик (рис. 1). Поэтому с точки зрения геометрии непрерывных преобразований, когда

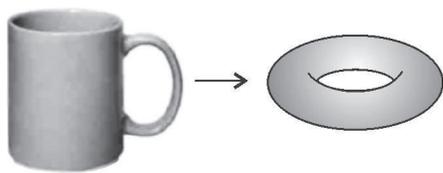


Рис. 1. Чашка и бублик

можно изменять расстояния, но без разрывов, оказывается, что эти объекты одинаковы. Это далеко от строго математического определения, но с общечеловеческой точки зрения понятно. Мы будем пользоваться топологическими терминами так, как будто они строго определены.

Так вот, в статье речь пойдет о фигурах и поверхностях, которые можно мять и деформировать как угодно (только без разрывов). На рисунках 2–4 приведены

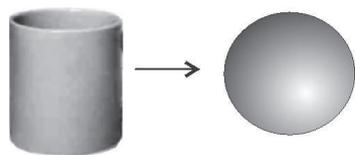


Рис. 2. Стакан и сфера

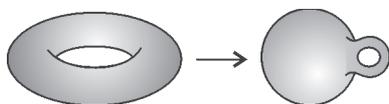


Рис. 3. Тор (бублик) и сфера с ручкой

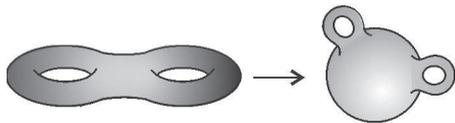


Рис. 4. Крендель и сфера с двумя ручками

изображения и названия некоторых других пар предметов, которые топологически эквивалентны, т.е. переводятся один в другой посредством непрерывных преобразований. В разных языках приняты термины «дырка» или «ручка». Мы будем пользоваться вторым из них.

Экскурс в историю

Давайте передвинемся в прошлое на несколько тысяч лет и подумаем: что знали древние люди о той поверхности, по которой они ходят? Они считали,

что Земля плоская. Какие у них были основания так считать? Мы ходим и передвигаемся на поездах и самолетах по участкам Земли. Если передвигаться только по Северному полушарию, то с топологической точки зрения оно не отличается от плоскости. И лишь рассмотрев Землю целиком (мысленно или из космоса), мы видим, что топология ее поверхности другая – если пренебречь мелкими деталями вроде пещер с двумя выходами. В древности у наших предков не было возможности объехать всю Землю. Поэтому из того, что доступный наблюдению кусок поверхности Земли плоский, делался вывод, что и вся поверхность Земли плоская.

Следы этой идеи остались в науке до сих пор. Давайте задумаемся в этимологию слова «геометрия». Это значит «измерение земли». А ведь в геометрии изучают бесконечную *плоскость*! Между тем, реальной геометрией поверхности Земли должна бы быть геометрия *сферическая* (она напоминает плоскую, но в определенных отношениях сложнее). А мы в школьном курсе имеем дело с бесконечной во все стороны плоскостью – абстракцией, за которой нет никаких физических подтверждений.

Перейдем от размерности 2 к размерности 3. Тут у нас ситуация с пониманием внешнего мира как раз такая же, как у наших далеких предков. Нам с нашими космическими кораблями доступна значительная часть Солнечной системы, мы немножко можем выйти за ее пределы, а самым мощным телескопам доступен еще больший кусок Вселенной. Но ничего похожего на возможность составить полный атлас Вселенной (аналогичный современным географическим атласам) у современной науки и техники нет и в помине. Некоторые из этого делают скороспелый вывод, что Вселенная лежит в трехмерном пространстве. Но никаких оснований для этого нет.

Как наши предки убедились, что поверхность Земли замкнута? Они совершили кругосветное путешествие. Магеллан плыл все время вперед, но вернулся на то же место, с которого стартовал. Теперь представьте себе, что вы сели на космический корабль и долго летели вперед... Может оказаться так, что вы тоже прилетите на то же место, с которого вылетели. Это будет означать, что наше пространство замкнуто.

Правильно будет сказать, что мы находимся не в трехмерном пространстве, а в куске *какого-то* трехмерного объекта (математики называют его *трехмерным многообразием*), и как оно устроено – мы сейчас не знаем (может быть, это и просто трехмерное пространство). Математика не приходит от этого в расте-

рянность, а задает вопрос: а как эта топология Вселенной *может быть* устроена? Иными словами какова классификация трехмерных многообразий?

Классификация двумерных поверхностей

На аналогичный вопрос для двумерных поверхностей наука дала полный ответ. Чтобы точно сформулировать соответствующую теорему, введем еще несколько понятий.

1. *Поверхность* – это то, что *локально* устроено как плоскость. Например, из поверхности глобуса можно вырезать маленький кусочек вокруг Москвы, топологически не отличимый от круга, и развернуть его на плоскость. Такой кусочек математики называют *картой*. Говорят, что поверхность Земли может быть покрыта картами, т.е. можно составить *атлас*.

2. *Компактность* поверхности – это возможность покрыть поверхность конечным количеством карт. Проверьте, что поверхности на рис. 1–4 – компактные. А на рисунке 5 приведен пример некомпактной поверхности.



Рис. 5. Некомпактная поверхность

3. Нам потребуется еще одно понятие – *ориентируемость* поверхности. Все слышали про лист Мёбиуса – он получается, если склеить две противоположные стороны квадрата «крест-накрест», так, как показано на рисунке 6,а. (Математики говорят про склейки

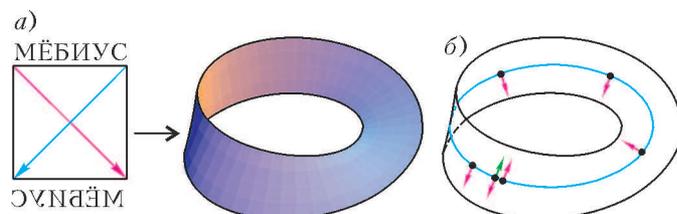


Рис. 6. Лист Мёбиуса

квадрата, но на практике удобнее склеивать вытянутые прямоугольники.) Так вот, поверхность называют ориентируемой, если из нее нельзя вырезать лист Мёбиуса, и неориентируемой, если можно.¹

¹ *Равносильные термины – двусторонние и односторонние поверхности. Смысл термина «ориентируемая» такой. Поместим на лист Мёбиуса два равных вектора, перпендикулярных краю листа (рис. 6,б; зеленый и красный векторы). Затем будем двигать один из векторов по листу (сохраняя перпендикулярность к краю) до тех пор, пока он обойдет весь лист и вернется ко второму. Теперь они направлены противоположно! Таким образом, ориентация на листе Мёбиуса не сохраняется. Проведем подобный мысленный эксперимент для нашего трехмерного пространства. Чтобы понять, что пространство замкнуто, надо совершить кругосветное путешествие. Представьте, что вы сели на космический корабль, долго летели вперед и прилетели на то же место. Теоретически может случиться так, что сердце у вас окажется справа, а не слева. (Вы встречаете такое существо каждое утро, когда смотрите в зеркало. Чтобы излечить эту беду, надо еще разок слетать в кругосветное путешествие.) Это будет означать, что наша Вселенная является неориентируемым многообразием.*

Упражнение 1. Что получится, если склеить противоположные стороны квадрата «соответственно» (т.е. если на нижней стороне квадрата написать тоже МЭБИУС)?

Теперь мы можем сформулировать утверждение, которое дает полную классификацию двумерных компактных ориентируемых поверхностей.

Теорема. *Любая компактная ориентируемая поверхность – это либо сфера, либо тор (сфера с ручкой), либо сфера с двумя ручками, либо сфера с тремя, четырьмя ... ручками.*

(Одно из доказательств см. в [1].)

Определение. Количество ручек называется *родом* поверхности. Будем его обозначать g (от лат. genus – род).

Итак, теорема утверждает, что компактная ориентируемая поверхность полностью определяется своим родом g .

Таким образом, в двумерной топологии достигнута полная ясность. А вот трехмерная топология пока очень далека от таких законченных результатов, она сейчас бурно развивается. (В частности, недавно была доказана знаменитая *гипотеза Пуанкаре* [2].)

Теорема Эйлера

Представьте, что вы живете на планете, на которой небо всегда затянуто облаками и космические путешествия невозможны. Как, находясь на поверхности

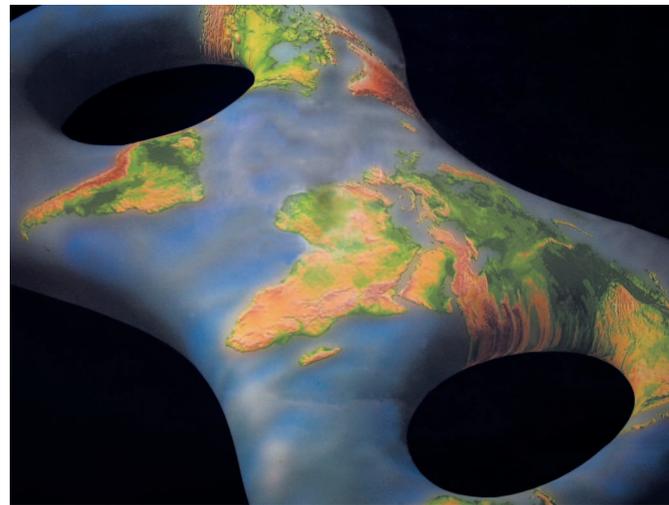


Рис. 7. Планета-крендель

планеты, определить род этой поверхности? Сфера это, тор, крендель или что-то еще? Ведь если дырки гораздо больше нас, то непосредственно мы их видеть не можем (рис. 7).

Топология помогает решить эту задачу.

Разобьем поверхность планеты на карты, например многоугольные. Получим атлас (рис. 8). Подсчитаем все вершины атласа. Обозначим их количество V . Участки границ карт называются ребрами, их количество обозна-

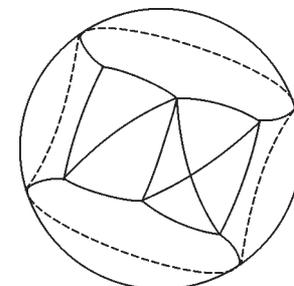


Рис. 8. Атлас

чим P . Каждая карта называется гранью, пусть Γ – количество граней.

Теперь подсчитаем величину, называемую *эйлеровой характеристикой*²:

$$\mathcal{E} = V - P + \Gamma.$$

Приведем два примера. Впишем в сферу куб. Спроектируем ребра куба из центра сферы на ее поверхность. Получится разбиение сферы на четырехугольные карты (рис.9,а). Поступив аналогично с тетраэдром, получим разбиение сферы на треугольные карты (рис.9,б). Подсчитаем эйлеровы характеристики: $\mathcal{E}_{\text{куба}} = 8 - 12 + 6 = 2$, $\mathcal{E}_{\text{тетраэдра}} = 4 - 6 + 4 = 2$.

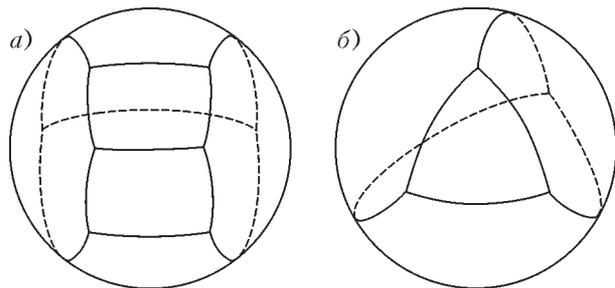


Рис. 9. Примеры разбиений сферы на карты

Характеристики совпали. Оказывается, это не случайно – эйлерова характеристика не зависит от того, какой атлас на планете рассматривается! Попробуем объяснить, почему это так. Главная идея – это *совместное измельчение* атласов.

Что происходит с атласом при измельчении? Рассмотрим произвольную грань, пусть это будет n -угольник.

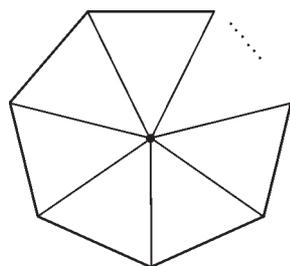


Рис. 10. Измельчение грани

Поместим внутрь него новую вершину и соединим ее ребрами со всеми n вершинами грани (рис. 10). Тогда количество вершин увеличится на 1: $V' = V + 1$. Количество ребер увеличится на n : $P' = P + n$. А что произойдет с количеством граней? Добавится n граней, но исчезнет одна большая, поэтому $\Gamma' = \Gamma + n - 1$. Тем самым, $V' - P' + \Gamma' = V + 1 - (P + n) + \Gamma + n - 1 = V - P + \Gamma$. Поэтому $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$, т.е. от одного такого измельчения эйлерова характеристика не изменится. Немного подумав и внося необходимые уточнения, можно убедиться, что такими ходами любые две разные карты можно измельчить до общей карты. Поскольку на каждом шаге величины эйлеровых характеристик у атласов не изменялись, а в конце оказались равны, то, значит, они были равны изначально.

Мы убедились, что эйлерова характеристика не зависит от атласа (говорят, что она топологически инвариантна). На самом деле она определяется родом поверх-

ности. Следующая знаменитая теорема показывает, каким образом.

Теорема Эйлера. Для атласа с V вершинами, P ребрами и Γ гранями на поверхности рода g справедливо равенство

$$V - P + \Gamma = 2 - 2g.$$

Это – одна из самых замечательных формул в математике, у нее есть много обобщений и приложений (возможно, найдены еще не все). Доказательство см., например, в [3, 4, 5] (с этими книгами полезно познакомиться и вне связи с теоремой Эйлера).

Вернемся к нашей задаче о планете с облаками. После разбиения поверхности планеты на карты и подсчета чисел V, P, Γ возможны следующие ситуации:

$$V - P + \Gamma = 2 \Rightarrow g = 0, \text{ планета – сфера};$$

$$V - P + \Gamma = 0 \Rightarrow g = 1, \text{ планета – тор};$$

$$V - P + \Gamma = -2 \Rightarrow g = 2, \text{ планета – крендель}$$

и так далее.

Как мы видели, одна и та же поверхность может быть описана многими разными атласами. Следующий сюжет показывает, что уже изучение атласов из одной карты содержательно.

Склейки 2n-угольников

До сих пор мы разбивали поверхность на многоугольники, а теперь будем, наоборот, склеивать из многоугольников поверхность. Точнее, каждая поверхность будет склеиваться из одного многоугольника.

Задача. Будем рассматривать многоугольники с четным числом сторон, одна из которых выделена. Разобьем стороны на пары и склеим стороны из одной пары. Склеивать будем так, чтобы получалась ориентируемая поверхность. Сколько склеек получится? Какого рода?

Договоримся, что выделенная сторона – нижняя, и будем рисовать ее жирнее остальных. Начнем с четырехугольников ($n = 2$). Будем помечать склеиваемые стороны одинаковыми буквами, а не склеиваемые – разными.

Начнем с нижней стороны, обозначив ее a . Ясно, что ее можно склеить либо с правой, либо с левой, либо с верхней. При этом оставшиеся две стороны однозначно склеиваются друг с другом. Поэтому есть три варианта склейки:

1) См. рис. 11. Получится сфера ($g = 0$). Изобразим на ней вершины и ребра склеенного четырехугольника – получится дерево (рис. 12).

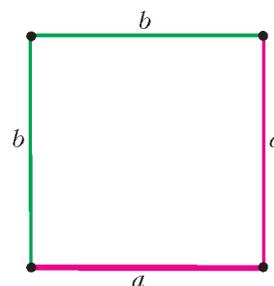


Рис. 11. abba

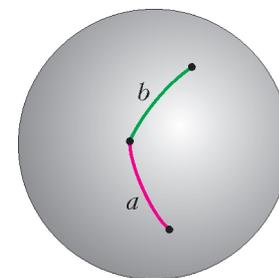


Рис. 12. Сфера с ребрами a и b

² Формулу легко запомнить так: это знакпеременная сумма характеристик нульмерных, одномерных и двумерных объектов.

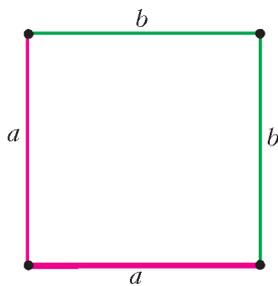


Рис. 13. $aabb$

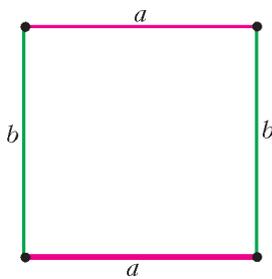


Рис. 14. $abab$

2) См. рис. 13. Получится также сфера ($g = 0$).

3) См. рис. 14. Получится тор ($g = 1$). (Чтобы не возникли листы Мёбиуса, одноименные стороны надо склеивать соответственными концами, а не противоположными!) Нарисуем на нем вершины и ребра склеенного многоугольника – получатся два разрезающих тор цикла a и b (рис. 15).

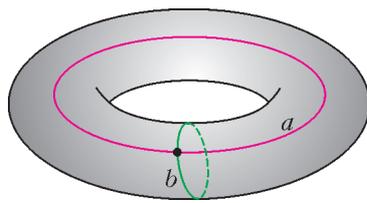


Рис. 15. Тор с ребрами a и b

Очевидно, если нижнюю сторону обозначить буквой b , то мы получим те же самые склейки после переименования a в b и b в a . Поэтому достаточно рассмотреть склейки, в которых выделенной стороне соответствует буква a .

Теперь перейдем к шестиугольникам ($n = 3$).³

Сначала давайте поймем, сколько склеек получится. Их число равно количеству разбиений на пары сторон шестиугольника. Зафиксируем нижнюю сторону шестиугольника a . Парную ей сторону можно выбрать 5 способами. Если зафиксировать какую-либо из оставшихся четырех сторон b , то парную ей можно выбрать 3 способами. Наконец, для одной из двух последних сторон с парная выбирается 1 способом. Итого, $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ вариантов.

Упражнение 2. Докажите, что число склеек для $2n$ -угольника равно

$$(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 \cdot 1 \equiv (2n-1)!!$$

Упражнение 3. Нарисуйте все 15 разбиений сторон шестиугольника на пары.

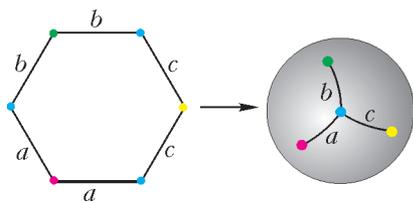


Рис. 16. $aabbcc$

Рассмотрим склейку шестиугольника $aabbcc$. Сейчас нам будет удобнее следить не за сторонами, а за вершинами. Обозначим вершины,

которые склеятся, одним и тем же цветом (рис. 16). Получится сфера ($g = 0$).

Теперь рассмотрим склейку шестиугольника $abcabc$. Тут уже топологического воображения может не хватить. Давайте сначала поймем, какие вершины склеятся (рис. 17). Это однозначно определяется из требования ориентируемости поверхности.

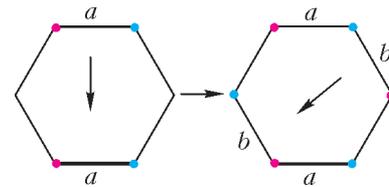


Рис. 17. $abcabc$

Итак, у склейки две вершины, три ребра и одна грань: $B = 2$, $P = 3$, $\Gamma = 1$. Какая это будет поверхность? По теореме Эйлера, $\mathcal{E} = 2 - 3 + 1 = 0 = 2 - 2g$. Отсюда $g = 1$,

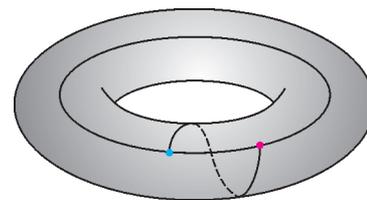


Рис. 18. Скрутка

т.е. склейка является тором. На рисунке 18 показано, как эта склейка выглядит.⁴

А как из такой склейки получить исходный шестиугольник, подробно показано на рисунке 19 (снова одинаковыми цветами отмечены склеиваемые стороны).

Упражнение 4. Определите непосредственно или с помощью теоремы Эйлера род остальных 13 склеек шестиугольника (многие из них повторяются). Нарисуйте склейки с ребрами и вершинами. Ответ для самоконтроля: всего должно получиться 5 сфер и 10 торов.

Перейдем к восьмиугольникам ($n = 4$). Всего их $(2 \cdot 4 - 1)!! = 105$. Конечно, одному сделать их все нелегко, но дружный коллектив школьников вполне может с ними справиться.⁵

Коллективный проект. Нарисуйте все 105 склеек восьмиугольников, определите род каждой склейки.

Ход работы тот же – рисуем восьмиугольник с разбиением сторон на пары, определяем, какая вершина склеивается с какой, находим число вершин B (а с гранями и ребрами все понятно: $\Gamma = 1$, $P = 4$) и по теореме Эйлера находим род поверхности.

Есть и другой подход – подключить к работе компьютер. Для этого введем новое определение.

Определение. Гауссово слово – это слово, в котором все буквы встречаются ровно два раза. При этом вначале идет буква a , первая непарная ей – b , следующая непарная им – c , и так далее.

Договоримся, что у многоугольника выделена нижняя горизонтальная сторона, которой соответствует первая буква. Дальше идем по часовой стрелке. Тогда

³ Для полноты перечня надо не забыть и случай $n = 1$. Ему соответствуют «двуугольники»:



При их склейке получится поверхность рода $g = 0$.

⁴ Те, кому трудно представить происходящее, могут вырезать из полиэтилена большие шестиугольники и склеивать их.

⁵ Например, это сделала группа 7- и 8-классниц на Летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал» 2010 года (см. их отчет: <http://www.mcsme.ru/nir/uir/poster.jpg>).

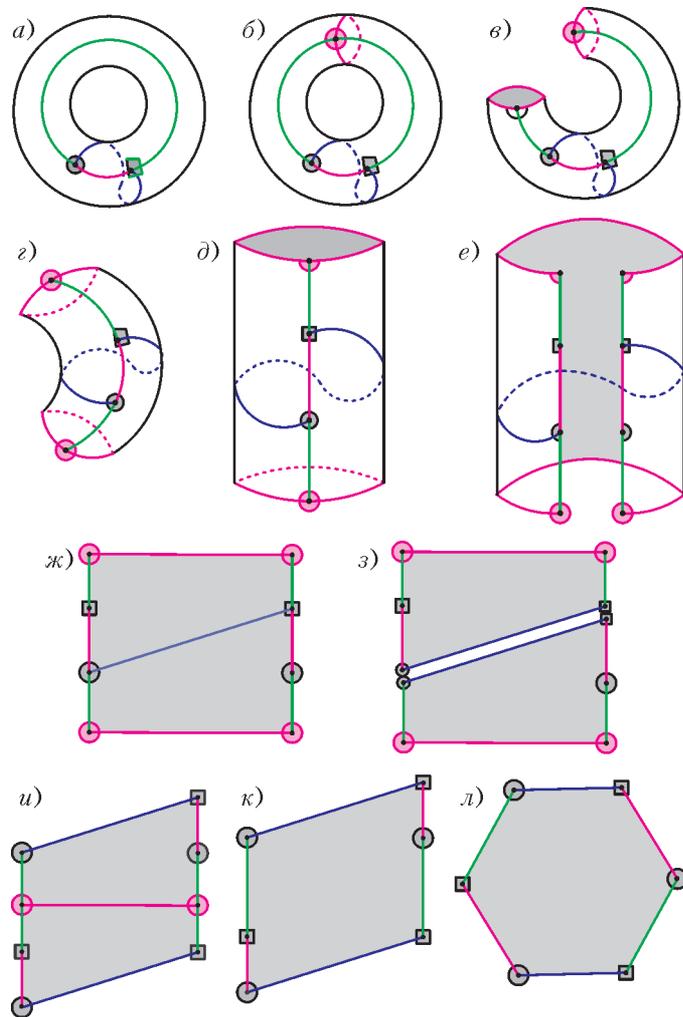


Рис. 19. Получаем шестиугольник из склейки

каждое гауссово слово длины $2n$ определяет одну и только одну склейку $2n$ -угольника.

Упражнение 5. Напишите компьютерную программу, перечисляющую гауссовы слова заданной длины.

Теперь давайте разберемся, как по данному слову вычислять род склейки, не рисуя саму склейку. Каждый $2n$ -угольник дает склейку с одной гранью и n ребрами. Если мы сможем по гауссову слову найти количество вершин, то далее по формуле Эйлера легко определить род поверхности g (т.е. решить задачу, не пользуясь пространственным воображением).

Проект. Напишите компьютерную программу, вычисляющую род склейки, соответствующей заданному гауссову слову. Для этого можно представить вершины многоугольника в виде массива и при каждом склеивании сторон следить, какие вершины склеятся.

Упражнение 6 (для тех, кто знает, что такое граф и дерево). Докажите, что склейка сторон многоугольника дает сферу, если граф, образованный сторонами многоугольника на склеиваемой поверхности, является деревом. Проверьте обратное утверждение.

Упражнение 7. Найдите максимальный род поверхности, которую можно склеить из $2n$ -угольника.

Решение задачи

Теперь введем главную численную характеристику обсуждаемых объектов.

Определение. Количество склеек $2n$ -угольников в ориентируемую поверхность рода g называются *числами Харера-Цагира (Harer-Zagier)* и обозначаются $\epsilon_{g,n}$.

Мы уже находили числа Харера-Цагира $\epsilon_{g,1}$, $\epsilon_{g,2}$, $\epsilon_{g,3}$ (в упражнении 4) и $\epsilon_{g,4}$ (в коллективном проекте). Соберем данные в таблицу, строки которой отвечают значениям n , а столбцы – значениям g :

| $n \backslash g$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 1 | – | – | – |
| 1 | 1 | – | – | – |
| 2 | 2 | 1 | – | – |
| 3 | 5 | 10 | – | – |
| 4 | 14 | 70 | 21 | – |
| ... | ... | ... | ... | ... |

(Договоримся считать по определению, что $\epsilon_{0,0} := 1$, т.е. есть одна нульреберная поверхность рода 0.)

Следствие из упражнения 2. Сумма чисел в каждой строке таблицы равна

$$\epsilon_{0,n} + \epsilon_{1,n} + \epsilon_{2,n} + \dots = (2n - 1)!!$$

Рассмотрим числа первого столбца: 1, 1, 2, 5, 14, ... Опытный читатель узнает в них начало последовательности чисел Каталана (см., например, [6, 7]). Давайте докажем, что это действительно они. Выберем из многочисленных определений чисел Каталана то, которое кажется ближе всего к нашей задаче:

Определение. Числом Каталана c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок. (Другие определения см. в [6].)

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

()
 ()() (())
 ()()() ()()() ((()))

А вот пример неправильной скобочной структуры:

((()))(

Упражнение 8. Постройте взаимно однозначное соответствие между скобочными структурами из трех пар скобок и гауссовыми словами длины 6, порождающими сферу.

Упражнение 9. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что гауссово слово длины $2n$ определяет склейку, порождающую сферу. *Указание.* Найдите критерий того, что склейка имеет положительный род.

Упражнение 10. Докажите, что числа $c_n := \epsilon_{0,n}$ – это числа Каталана.

Упражнение 11. Докажите для чисел Каталана рекуррентную формулу

$$c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1}. \quad (**)$$

(Идея наглядного доказательства есть в [6].)

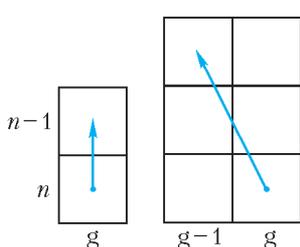


Рис. 20. Ходы

рис. 20):

$$\epsilon_{g,n} = \frac{4n-2}{n+1} \epsilon_{g,n-1} + \frac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{n+1} \epsilon_{g-1,n-2}. \quad (***)$$

В тех случаях, когда числа не определены, они полагаются равными 0. Например, $\epsilon_{g,-1} := 0$. Нетрудно сообразить, что если $g = 0$, то мы получим уже доказанную нами формулу (*) для чисел первого столбца.

Упражнение 12. Проверьте формулу Харера-Цагира в пределах таблицы чисел $\epsilon_{g,n}$ при $n \leq 4$.

Итак, мы умеем выражать число склеек из первого столбца через предыдущее число.

Оказывается, есть рекуррентная формула для всех чисел Харера-Цагира (см. [8]). Она определяет число $\epsilon_{g,n}$ через числа $\epsilon_{g,n-1}$ и $\epsilon_{g-1,n-2}$ (соответственно «ход пешки» и «ход коня»,

Таким образом, современная наука умеет решать задачу о числе склеек $2n$ -угольника. Формула (***) впервые была доказана в 1986 году. Теперь известны несколько ее доказательств, все они используют неэлементарную математику. Например, доказательство [7] использует производящие функции. Но пока неизвестно доказательство, доступное школьникам. Авторам кажется, что его можно получить, продумывая обобщения чисел Каталана из [6]. Возможно, это смогут сделать читатели статьи.

Литература

1. А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. Математические образы реального мира. – М.: Издательство МГУ, ЧеРо, 1998.
2. St.Ornes. What is The Poincare' conjecture? – Seed Magazine, 25 aug. 2006. http://seedmagazine.com/content/article/what_is_the_poincare_conjecture/
3. Р.Курант, Г.Роббинс. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2004. – Гл. 5.
4. И.Лакатос. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.
5. С.Г.Смирнов. Прогулки по замкнутым поверхностям. – М.: МЦНМО, 2003.
6. Г.Б.Шабат. Несколько взглядов на числа Каталана. <http://www.mccme.ru/nir/uir/Catalan.pdf>
7. С.К.Ландо. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2004. – Пп. 8.5–8.7.
8. J.Harer, D.Zagier. The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves. – Inv. Math., 1986. – V. 85, pp. 457–485.

НАША ОБЛОЖКА

Как рисовать по небу?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

... Фейерверки появились в Китае почти две тысячи лет тому назад. Однако тогда их использовали в основном для устрашения злых духов. Считается, что источником первого фейерверка была хлопущка из бамбуковой палки – ее клали в огонь, воздух внутри секций бамбука нагревался, расширялся и разносил в щепки эту палку, производя при этом громкий звук и летящие во все стороны искры. Затем фейерверки стали получать, набивая бумажный цилиндр порохом и поджигая его, что сделало фейерверк еще более впечатляющим. Сейчас фейерверки возникают при сжигании различных пороховых пиротехнических изделий и являются неотъемлемой частью всевозможных праздников.

Цветовая палитра фейерверков зависит от химической формулы сгорающего вещества. Красным цветом вспыхивают соли стронция (SrCO_3) и лития (Li_2CO_3 или LiCl), желтым – соли натрия (NaNO_3), зеленым – соли бария (BaCl_2), синим – соли меди (CuCl_2), а белым – пудра титана или алюминия. В том, что разные металлы по-разному расцветивают фейерверки, можно убедиться на уроках химии или физики, попросив преподавателя «посыпать» пламя газовой горелки солями этих металлов. На рисунке 1 видно, какой цвет придают пламени горелки медь (слева), литий (в центре) и натрий (справа).

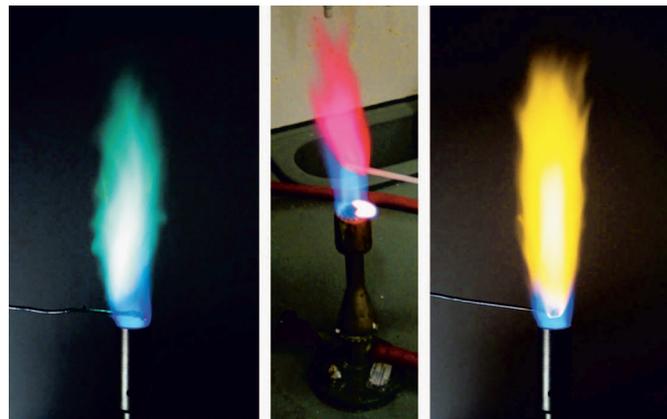


Рис. 1

Когда металлическую пудру нагревают, каждый из ее атомов тоже «нагревается», а их электроны на очень короткое время (около 10 нс) перескакивают на орбиты, более отдаленные от ядра и поэтому соответствующие большей энергии. Возвращаясь на свою обычную орбиту, электрон излучает свет, частота и цвет которого зависят от устройства атома данного металла, точнее – от разности энергий на возбужденной орбите и на основной. При уменьшении этой

(Продолжение см. на с. 42)