ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. Квант №2)

1. Нет, не все.

Клерков станет в два раза меньше (так как 50% – это $\frac{1}{2}$), а получать каждый будет в полтора раза больше (150% – это $\frac{3}{2}$). В итоге расходы будут составлять $\frac{3}{4}$ от того, что было до увольнения, т.е. общие расходы уменьшатся.

2. Да, могла.

По условию траектория космического корабля лежит на сфере радиуса $R = 10000$ км. Пусть корабль сначала полетит по меридиану от «северного полюса» сферы к «южному», немного не долетев, свернет на запад и почти сразу – на север (рис.1). Немного не долетев до северного полюса, снова свернет на запад, пролетит чуть-чуть и повернет на юг. К этому моменту корабль пролетит почти два меридиана (в нашем случае это $2\pi R \approx 62000$ км). Продолжая так летать туда-сюда от полюса до полюса, корабль будет понемногу смещаться на запад. Если сдвиги на запад очень маленькие, корабль успеет сделать очень много «зигзагов», не пересекая свою траекторию, и пролетит очень большое расстояние. В нашем случае уже после двадцатого подлета к северному полюсу длина пути корабля будет больше $20 \cdot 60000$ км = 1200000 км. После этого он сможет полететь прямо на северный полюс и замкнуть траекторию.

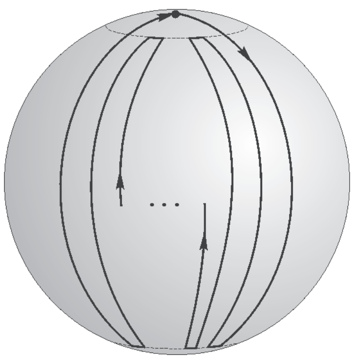
Рис. 1

3. Хотя поначалу кажется, что так не бывает, описанная в задаче ситуация возможна. Пусть на станции отправления ребята, войдя в метро, попадают к последнему вагону поезда, а выход на следующей станции находится у первого вагона. Вася садится в последний вагон поезда, а Петя, опоздав на несколько мгновений, идет вперед по платформе и как раз успевает сесть в первый вагон следующего поезда. Тогда он приедет ближе к выходу. Но ведь и Вася, приехав на следующую станцию раньше, пойдет к выходу и снова окажется впереди Пети? Да, но при условии, что Петин поезд будет столько же ехать от одной остановки до другой, сколько и Васин. На самом деле, поезда в метро ходят не с постоянной скоростью. Петин поезд мог потратить на перегон немного меньше времени, чем Васин, – и этого вполне могло хватить, чтобы Петя оказался в итоге ближе к выходу.

4. Можно.

Пример – на рисунке 2.

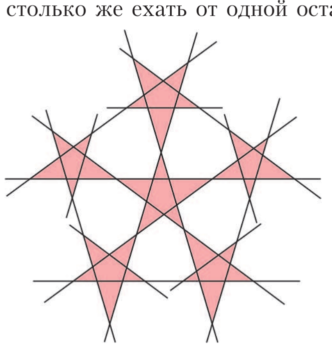
Рис. 2

5. В системе отсчета, связанной с автомобилем, все точки обода колеса и оторвавшиеся от него камушки движутся со скоростью, равной по величине скорости v автомобиля, но каждый камушек движется в свою сторону (рис.3). Чтобы найти скорость камушка в неподвижной системе отсчета, надо к скорости камушка векторно прибавить скорость автомобиля (рис. 4). В результате получится, что все камушки летят преимущественно вперед и поэтому могут попасть Саше в лицо даже еще до встречи его с автомобилем.

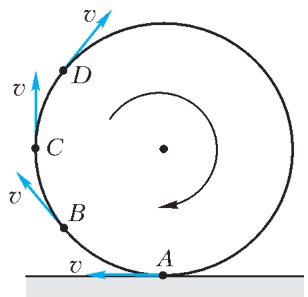

Рис. 3

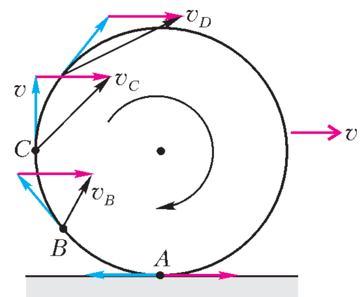

Рис. 4

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» №6 за 2010 г.)

11. а) 4 часа (дня или ночи).

Обе стрелки показывают на часовые деления, поэтому на часах целое число часов. Значит, минутная стрелка стоит на 12 часах, часовая – на 4 часах, а сами часы лежат на правом боку.

б) Такого момента нет (если, конечно, мы умеем отличать день от ночи).

Положение часовой стрелки в промежутке от одного часового деления до следующего однозначно определяет, на сколько сдвинулась минутная стрелка с деления, обозначающего 12 часов. Поэтому можно найти это деление, а значит, и узнать время, которое показывают часы.

12. Да, могло.

Например, если в бочках было 2, 2, 3, 4, …, 9, 10 литров воды.

13. Их поровну.

Напомним, что из трех отрезков можно построить треугольник тогда и только тогда, когда самый большой из отрезков короче суммы двух других.

Вырежем из зеленой бумаги всевозможные разносторонние треугольники с целыми длинами сторон от 1 до $N + 3$, а из красной – всевозможные треугольники с целыми длинами сторон от 1 до N. Для доказательства того, что зеленых и красных треугольников поровну, объясним, как можно разбить их на пары разноцветных.

Каждому красному треугольнику с длинами сторон a, b, c, где $a \le b \le c$, поставим в пару зеленый треугольник с длинами сторон $a + 1$, $b + 2$, $c + 3$. Такой зеленый треугольник есть, так как эти длины, очевидно, различны, не превышают $N + 3$ и большая сторона длиннее суммы двух других: $(a + 1) + (b + 2) > c + 3$, поскольку $a + b > c$.

Наоборот, рассмотрим теперь зеленый треугольник со сторонами $x < y < z$. Ему надо поставить в пару красный треугольник со сторонами $x - 1$, $y - 2$, $z - 3$. Проверим, что такой красный треугольник и вправду существует. Заметим сначала, что каждая сторона зеленого треугольника хотя бы на 1 короче следующей по длине (ведь длины сторон целые). Тогда длина x самой маленькой стороны больше 1 – иначе сумма $x + y$ будет равна $y + 1$, т.е. будет не больше z, а это противоречит неравенству треугольника. Значит, $y > 2$ и $z > 3$. Поэтому длины $x - 1$, $y - 2$, $z - 3$ натуральные. Они, очевидно, не превосходят N. Так как $x - 1 \le y - 2 \le z - 3$, осталось проверить, что $(x - 1) + (y - 2) > z - 3$, а это неравенство очевидно следует из неравенства $x + y > z$.

14. Выберем одного школьника – A и поставим его в первый ряд, напротив A (во второй ряд) поставим того, кто был с ним в паре в первый раз, – $Б$. Справа от A поставим в первый ряд того, кто был в паре с $Б$ во второй раз, $-В$, а напротив $В$ поставим того, кто был с ним в паре первый раз, – $Г$, и так далее (рис. 5). У нас получается цепочка, в которой каждый знаком со следующим и предыдущим и школьники поочередно стоят то в первом ряду, то во втором. В какой-то момент мы дойдем до школьника, который был в паре с A во второй раз, и наша цепочка замкнется. Если мы охватили еще не всех школьников, точно так же будем строить новую цепочку, добавив в первый ряд любого еще неохваченного школьника, и так далее.

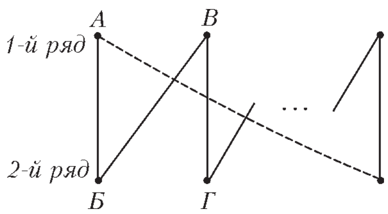

Рис. 5

В конце концов мы получим, что в первом ряду 30 человек и никто из них не был друг с другом в паре, аналогично – во втором ряду. Выберем тогда любых 10 человек из первого ряда. Во втором ряду с ними участвовали в парах 20 человек, а значит, 10 – не участвовали. Добавим этих 10 человек к уже выбранным десяти и получим группу из 20 человек, в которой никто не был друг с другом в паре. Оставшиеся 20 человек первого ряда и оставшиеся 20 человек второго ряда можно взять за вторую и третью искомые группы.

15. Отразим точки C, P и Q относительно прямой AB, получим точки D, P' и Q' соответственно (рис. 6). Четырехугольник $ACBD$ – ромб.

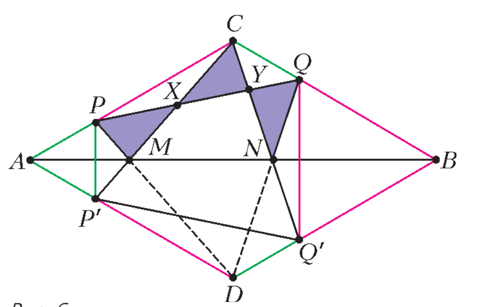

Рис. 6

Так как угол падения равен углу отражения, точка P' лежит на луче CM. Аналогично, точка Q' лежит на луче CN. Треугольник PAP' равнобедренный с углом $60°$ при вершине A, а значит, равносторонний. Аналогично, треугольник QBQ' равносторонний. Тогда все зеленые отрезки на рисунке равны, и все красные равны (так как сумма длин зеленого и красного отрезков равна длине стороны ромба).

Треугольники CPP', $Q'QC$ и $P'DQ'$ равны по первому признаку (углы между зеленой и красной стороной каждого из этих треугольников равны $120°$). Отсюда треугольник $P'CQ'$ равносторонний. Симметричный ему относительно прямой AB треугольник DPQ тоже равносторонний. Значит, углы при вершинах P, C и Q синих треугольников равны по $60°$.

Треугольники $P'PC$ и QCP также равны по первому признаку. Значит, углы XPC и XCP равны, т.е. треугольник PXC равнобедренный, откуда $XC = XP$. Тогда синие треугольники PXM и CXY равны по второму признаку.

Аналогично, из равенства треугольников PCQ и CQQ' получаем, что треугольник CYQ равнобедренный, а значит, равны синие треугольники XCY и NQY.

РАЗРЕЗАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

1. Решим сразу пункт б). Возьмем пример на рисунке 3 статьи, где стороны всех квадратов целые: например, можно взять разбиение, в котором прямоугольник, разбитый на квадраты, имеет размеры 33×32 (сначала указывается длина вертикальной стороны, потом – горизонтальной). Будем замощать плоскость далее по такому алгоритму. Приставляем к нашему прямоугольнику слева квадрат 33×33 (сторона к стороне), к получившемуся прямоугольнику размером 33×65 приставляем сверху квадрат 65×65 (сторона к стороне), к получившемуся прямоугольнику 98×65 приставляем справа квадрат 98×98, затем приставляем снизу квадрат 163×163, снова приставляем квадрат слева, и так далее. В результате мы заполняем плоскость «по спирали», и каждый новый квадрат имеет сторону, равную большей стороне прямоугольника, к которому он приставляется, – тем самым, он больше по размеру, чем все предыдущие квадраты.

(См. также: *F.V.Henle, J.M.Henle*. Squaring the plane. – Amer.Math.Monthly, 115:1 (2008), 3–12; http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.138.7633&rep=rep1&type=pdf.)

2. Нельзя.

Указание. Рассмотрите кубик наименьшего размера, примыкающий к одной из граней большого куба. Покажите, что к нему примыкает кубик еще меньшего размера, к тому – еще меньшего и т.д.

Подробное решение можно найти в статье Л.Курляндчика и Г.Розенблюма «Метод бесконечного спуска» в «Кванте» № 1 за 1978 год.

3. Нет.

Пусть это возможно. Из плана квартиры (см. рис. 8 статьи) видно, что сторона левой верхней комнаты длиннее, чем сторона правой верхней, та, в свою очередь, длиннее стороны правой нижней комнаты, та длиннее стороны левой нижней и, наконец, последняя длиннее стороны левой верхней. Получили, что сторона левой верхней комнаты длиннее самой себя, что невозможно.

4. Рассмотрим замкнутую цепочку ребер, не проходящую ни через какую вершину дважды (рис. 7). Она ограничивает некоторый многоугольник на плоскости. Запишем второе правило Кирхгофа для всех контуров, которые попали внутрь многоугольника, и сложим полученные уравнения. Тогда напряжения для всех ребер, не лежащих на границе многоугольника, сократятся. Действительно, каждое такое ребро входит в два контура: для одного из них направление стрелки на ребре совпадает с направлением обхода, для другого – противоположно направлению обхода. Для первого контура напряжение на ребре будет входить в уравнение со знаком плюс, а для второго – со знаком минус. Значит, сумма всех выписанных уравнений – это в точности второе правило Кирхгофа, только роль контура играет наша замкнутая цепочка.

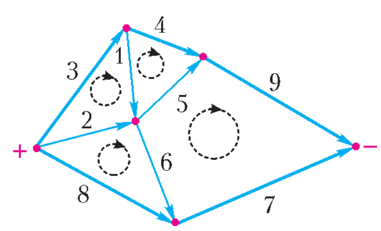

Рис. 7. Второе правило Кирхгофа для замкнутой цепочки ребер – это сумма вторых правил Кирхгофа для всех контуров внутри нее

5. Докажем сразу пункт б). Сначала заметим, что в цепи есть ненулевые токи. Действительно, запишем второе правило Кирхгофа для контура, содержащего батарейку. В правой части уравнения стоит напряжение батарейки – ненулевое число. Значит, одно из слагаемых в левой части не равно нулю, т.е. сила тока через одно из ребер ненулевая.

Теперь будем рассуждать, как в доказательстве принципа техники безопасности. Поменяем одновременно направление стрелки, знак силы тока и знак напряжения на каждом ребре с отрицательной силой тока. В частности, если ток через батарейку был отрицателен, то после нашей замены напряжение на ней станет отрицательно. Правила Кирхгофа по-прежнему будут выполняться. Начнем движение с ребра, на котором сила тока ненулевая, и будем двигаться в направлении стрелок, не заходя в ребра с нулевой силой тока. Мы можем неограниченно продолжать движение, и рано или поздно мы впервые получим замкнутую цепочку ребер.

Запишем второе правило Кирхгофа для этой цепочки (см. задачу 4 статьи). В левой части стоит положительное число. Значит, в правой части тоже должно стоять положительное число. Но это возможно, только если контур проходит через батарейку. Поскольку мы двигались по ребрам с положительной силой тока, то ток через батарейку положителен, в частности ненулевой. Как мы отметили выше, если бы мы меняли направление стрелки на батарейке, то напряжение на ней стало бы отрицательно, т. е. в правой части выписанного уравнения стояло бы отрицательное число. Значит, ток через батарейку с самого начала (до смены направлений стрелок) был положителен.

6. Пусть силы тока в цепи до замены батарейки были $I_1, I_2, \ldots$ Тогда $I_1, I_2, \ldots$ – решение системы уравнений, построенной по правилам Кирхгофа. Умножим каждое уравнение на число n. Тогда $nI_1, nI_2, \ldots$ – решение системы уравнений, полученной из исходной системы увеличением напряжения батарейки в n раз. Новая система соответствует правилам Кирхгофа после замены батарейки. По теореме единственности новая система других решений не имеет. Значит, $nI_1, nI_2, \ldots$ и есть силы тока в новой цепи.

7. Предположим, что такое разрезание возможно. Растянем наш квадрат в $\sqrt{2}$ раз вдоль одной из его сторон, он превратится в прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{2}$. А прямоугольники, на которые он был разрезан, превратятся либо в квадраты, либо в прямоугольники с отношением сторон 2, каждый из которых можно разрезать на два квадрата! Получили, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон (наш растянутый квадрат) разрезается на квадраты, а это противоречит теореме Дена.

8. 5:3.

Конечно же, можно выписать уравнения стыковки и решить систему. Но можно просто угадать ответ: видно, что если взять прямоугольники 4 и 5 размером 1×3, прямоугольники 1 и 3 взять размером 2×2, а прямоугольник 2 взять размером 1×1, то мы получим разрезание, как на картинке, и искомое отношение сторон будет равно 5:3. По теореме единственности это и есть ответ.

9. Известное нам решение этой задачи очень сложное, и мы его не приводим.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Равновесие воздушных шаров. На перевернутом рисунке – равновесие сосудов с жидкостью.

2. Имея равный вес, цилиндры вытесняют одинаковые объемы ртути, а так как диаметры их равны, то одинаковы и глубины погружения.

3. Объем погруженной в воду части каждой коробочки меняется на одну и ту же величину. Поскольку сосуды одинаковы, то и уровень воды в каждом из них повысится одинаково.

4. Нет, так как вес вытесненной бруском воды равен весу бруска.

5. Нет, не выльется. Плотность материала кастрюли больше плотности воды, поэтому когда кастрюля утонет, она будет вытеснять меньший объем, нежели когда она плавала. Значит, уровень воды в ведре понизится.

6. На мелководье меньше действующая на человека выталкивающая сила.

7. Практически столько же, так как воду при погружении на такие глубины можно считать несжимаемой.

8. При нагревании ртуть расширяется сильнее, чем сталь, поэтому выталкивающая сила уменьшится, и шарик опустится глубже.

9. Да, может, если размеры тела близки к размерам сосуда.

10. Во втором сосуде пробковый цилиндр погрузился меньше, чем в первом, т.е. вытеснил меньше воды. Следовательно, второй сосуд тяжелее первого.

11. Допустим, что нить оборвалась. Тогда лед всплывет, и уровень воды в сосуде понизится. При дальнейшем таянии льда уровень воды уже меняться не будет.

12. Во втором, так как у бутылки внешний объем нижней части всегда больше объема верхней части.

13. Не изменяются, поскольку в весе одновременно теряют и судно, и вытесняемая им вода.

14. По мере поднятия увеличивается объем пузырька. Выталкивающая сила, пропорциональная объему пузырька, будет расти. На пузырек также будет действовать сила сопротивления, но она пропорциональна площади сечения пузырька и поэтому будет возрастать медленнее. Значит, движение пузырька будет ускоренным.

15. Гири нужно сделать из того же материала, что и взвешиваемое тело.

16. На одной и той же высоте над землей у шара из эластичной резины объем будет больше, чем у шара из прорезиненной ткани. Значит, выталкивающая сила, действующая на него, будет больше, и он поднимется выше.

17. Чем больше разница в плотностях воздуха и газа, заполняющего аэростат или дирижабль, тем больше подъемная сила. Следовательно, она возрастает при понижении температуры воздуха, когда он становится плотнее.

18. Дирижабль без газа внутри, конечно, стал бы легче, но его раздавило бы давление наружного воздуха.

19. Оболочка шара может не выдержать разности внутреннего и уменьшившегося внешнего давлений.

20. В принципе, можно – если сжимаемость газа больше сжимаемости тела.

Микроопыт

Можно. Для этого достаточно найти объем вытесненной телом воды, измерив сечение аквариума и изменение уровня воды при опускании в нее тела, и затем умножить этот объем на плотность воды.

И СНОВА ЗАДАЧИ НА СОПРОТИВЛЕНИЯ

1. а) Возрастет (или останется неизменным); б) уменьшится (или останется неизменным).

2. *Указание*: сопротивления верхней и нижней ветвей равны $2R + \frac{2Rr}{R+2r}$, а сопротивление средней ветви равно $2R$.

3. Должно выполняться соотношение $\frac{z}{2-z} = \frac{29}{12}$. Отсюда получаем $z = \frac{58}{41}$ Ом.

4. а) $\Delta R = 1\frac{7}{8}$ Ом $- 1\frac{13}{15}$ Ом $= \frac{1}{120}$ Ом (оценку сверху можно получить, вырезая по очереди каждое из пяти сопротивлений, а оценку снизу – закорачивая по очереди каждое из сопротивлений); б) $\Delta R = 6{,}994$ Ом $- 9{,}987$ Ом $= 0{,}007$ Ом

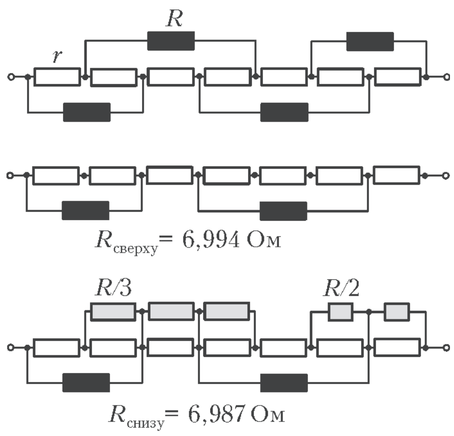

Рис. 8

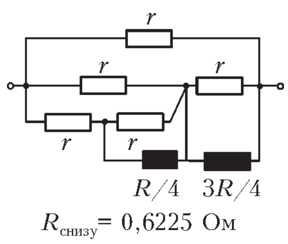

Рис. 9

(см. рис.8); в) $\Delta R = 0{,}625$ Ом $-$ $- 0{,}6225$ Ом $= 0{,}0025$ Ом (см. рис.9; для оценки сверху надо вырезать сопротивление R); г) $\Delta R = 0{,}7$ Ом $- 0{,}662$ Ом $= 0{,}038$ Ом (см. рис.10); д) $\Delta R = 0{,}55$ Ом $-$ $- 0{,}5$ Ом $= 0{,}05$ Ом (для оценки сверху увеличим сопротивления всех ребер сетки до R, а для оценки снизу уменьшим сопротивление

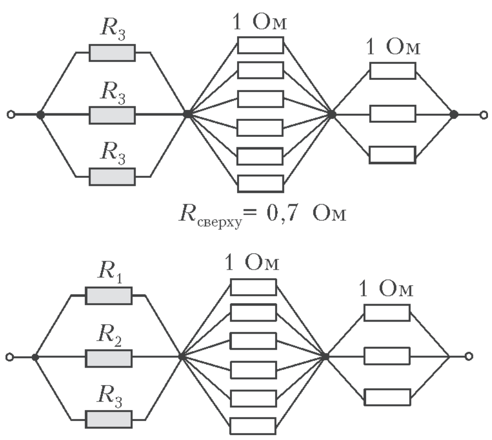

Рис. 10 $R_{\text{снизу}}$ = 0,662 Ом

R до r); е) $\Delta R = 0{,}55$ Ом $-$ 0,5 Ом = 0,05 Ом (для оценки сверху увеличим сопротивления всех ребер сетки до R_1, а для оценки снизу рассмотрим идеальную сетку с сопротивлением каждого ребра r).

XIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) 8811; б) 9.

Указание. Пусть $m = 1000a_1 + 100b_1 + 10c_1 + d_1$, $n = 1000a_2 + 100b_2 + 10c_2 + d_2$ – два четырехзначных числа ($m > n$). Тогда $m - n = 1000x + 100y + 10z + w$, где $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, $z = c_1 - c_2$, $w = d_1 - d_2$, причем $x + y + z + w = 0$ и $x \le 8$. Нетрудно видеть, что $y \le 9$. Если $x = 8$, а $y = 9$, то $z + w = -17$ и имеются две возможности: $z = -9$, $w = -8$ либо $z = -8$, $w = -9$.

2. 125 км.

Указание. Из условия следует, что оба велосипедиста находились в пути одинаковое время. До первой встречи оба они вместе проехали путь AB. Следовательно, первый велосипедист (выехавший из A) *каждый раз*, когда они вместе проезжают путь AB, проходит 70 км. Поскольку до второй встречи они вместе прошли путь $3AB$, первый за это время прошел 210 км, после чего ему осталось проехать еще 40 км. Отсюда следует, что $2AB = 210 + 40 = 250$, т.е. $AB = 125$ км.

3. 60°, 60°, 60°.

Пусть a, b, c – стороны треугольника, h_a, h_b, h_c – его высоты, p – его полупериметр, S – площадь, r – радиус вписанной окружности.

По известным формулам

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = rp .$$

Но тогда

$$3S = \frac{1}{2}(ah_a + bh_b + ch_c) = 3rp \qquad (*)$$

во всяком треугольнике.

Заметим, что высота треугольника больше диаметра вписанной окружности, т.е. все высоты больше чем 2 и потому не меньше чем 3. Если хотя бы одна из высот больше трех, то из (*) следует, что

$$3rp > \frac{3}{2}(a + b + c) = 3p ,$$

но тогда $r > 1$, что противоречит условию.

Итак, $h_a = h_b = h_c = 3$, и треугольник правильный.

4. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что

$$xy = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \ge 2\sqrt[4]{xy} .$$

Откуда $\sqrt[4]{x^3y^3} \ge 2$, т.е.

$$x^3y^3 \ge 16 . \qquad (*)$$

Аналогично,

$$8xy = x^5 + y^5 \ge 2\sqrt{x^5y^5} ,$$

т.е.

$$4xy \ge \sqrt{x^5y^5} , \quad x^5y^5 \le 16x^2y^2 ,$$

$$x^3y^3 \le 16. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что

$$x^3y^3 = 16, \quad \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad x^5 = y^5 ; \quad x^2 = \sqrt[3]{16} .$$

Окончательно получаем $x = y = \sqrt[3]{4}$.

5. 60°.

Заметим, что (рис.11) $\Delta ADF = \Delta EDC$ (ибо $FD = DC$, $ED = AD$, $\angle ADF = \angle EDC = 120°$). Поэтому $\angle AFD = \angle ECD$, а точки P, F, C и D лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle FPC = \angle FDC = 60°$.

6. Бесконечно.

Возьмем любое натуральное число p. Тогда числа $m = p! - 1$, $n = p$, $k = p!$ удовлетворяют равенству $m! \cdot n! = k!$.

7. а) Нет; б) да: $1 + 2 + 3 = 6$; в) да: 1, 2, 3, 6; г) да.

а) Если $x + y$ делится и на x, и на y, то будут целыми числа $1 + \frac{y}{x}$ и $1 + \frac{x}{y}$, что невозможно

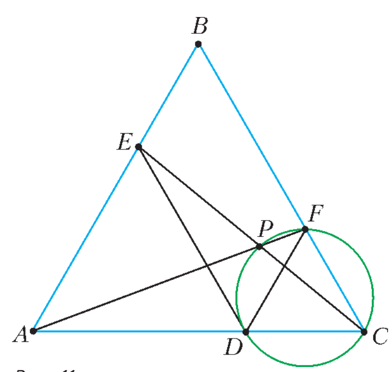

Рис. 11

при различных x и y. г) Если сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$ делится на каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то сумма $n+1$ числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, S делится на каждое из них.

ФИЗИКА

1. $A = mg\left(H - \dfrac{s}{2\sin 2\alpha}\right) = 12165$ Дж.

2. Понизится на $\Delta h = 1{,}5$ см; $V_{\text{п}} = 420$ см^3.

3. $Q = F_{\text{тр}}\left(\dfrac{3}{2}L + \dfrac{5}{2}x\right) - \dfrac{3}{2}pSL = 240$ Дж.

4. $\omega = 4$ рад/с.

5. $B = \dfrac{Mg}{2bI}$, рамка поворачивается относительно стороны AE.

6. $n = 2$.

7. $T = \pi\sqrt{\dfrac{2mL^3}{kQq}} = 0{,}52$ с.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 0.

Пусть $2n-3$, $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$ – четыре последовательных нечетных числа. Их произведение равно

$$\left(4n^2-1\right)\left(4n^2-9\right) = 16n^4 - 40n^2 + 9.$$

Если последняя цифра этого числа 9, то n делится на 5, и тогда в его десятичной записи перед девяткой стоит 0.

2. $\dfrac{ab}{c}$.

Пусть $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$ – уравнения прямых AB и CD соответственно (рис. 12). Числа a и b – корни уравнения $x^2 = k_1x + l_1$, а c и d – корни уравнения $x^2 = k_2x + l_2$. Так как $l_1 = l_2$, то по теореме Виета $ab = cd$.

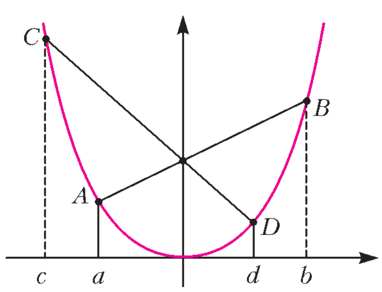

Рис. 12

3. Каждый из мудрецов, который видит четное число белых колпаков, поднимает правую руку, а видящий нечетное число белых колпаков – левую. Убедитесь в том, что мудрецы в белых (черных) колпаках поднимут одну и ту же руку.

4. $1/2$.

Указание. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник (рис. 13). По условию $AK \ge KB$, а потому $AO \ge OB$. Аналогично, $BL \ge LC$ и $OB \ge OC$; $MC \ge DM$ и $OC \ge OD$; $DN \ge AN$ и $OD \ge AO$. Откуда следует, что $AO = BO = CO = DO$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а точки K, L, M, N – середины его сторон. Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм, а площадь его равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

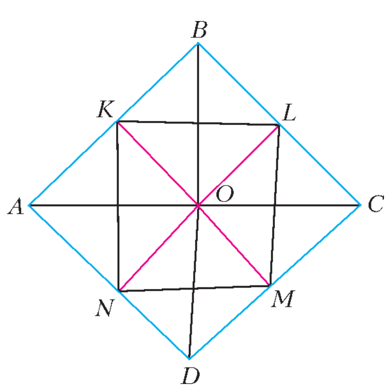

Рис. 13

5. Нет.

Квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1. Поэтому сумма квадратов шести нечетных чисел дает остаток 6. Однако число 2010 дает остаток 2.

6. Начинающий выигрывает.

Для этого ему нужно сначала получить два куска шоколадки размерами 50×99 и 50×99, после чего он применяет «симметричную» стратегию: если второй игрок ломает один из кусков, то первый точно так же ломает такой же кусок. Если в какой-то момент после хода второго первый может отломить кусочек 1×1, то он сделает это и выиграет.

7. Нет.

Если x, y – достаточно большие положительные числа, то все подмодульные выражения положительны и $x + a + x + y + b + y + c > x + x + y + y$, т.е. $a + b + c > 0$.

При достаточно больших по модулю отрицательных x и y имеем $-x - a - x - y - b - y - c > -x - x - y - y$, т.е. $a + b + c < 0$. Противоречие.

8. а) 12; б) 12.

Указание. а) Раскрасим доску 10×10 так, как показано на рисунке 14, *а*. Каждый прямоугольник 3×1 клетки обязательно пересекается с одним из закрашенных квадратиков 2×2. При этом «залезать» в каждый из этих квадратов может только один прямоугольник. Следовательно, число удовлетворяющих условию прямоугольников 3×1 не может быть больше 12. На рисунке 14, *б* показано одно из возможных расположений 12 прямоугольников.

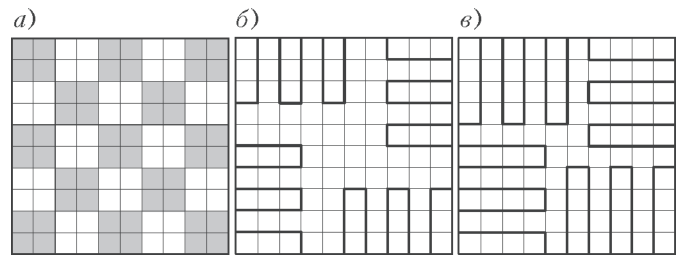

Рис. 14

б) Ясно, что прямоугольников 1×4 не может уместиться больше, чем прямоугольников 1×3, но мы приведем рассуждение, не опирающееся на пункт а). Квадрат 10×10 содержит 121 узел решетки, а прямоугольник 1×4 клетки – 10 узлов. Поэтому число прямоугольников 1×4, не имеющих общих точек, не больше чем $\left[\dfrac{121}{10}\right] = 12$.

А 12 прямоугольников закрасить можно (рис. 14, *в*).

9. $45°$.

Указание. Проведем лежащую внутри квадрата $ABCD$ четверть окружности с центром в точке A и радиусом 1 (рис. 15). Докажите, что MN касается этой окружности. Для этого проведите касательную $M'N'$ к дуге, параллельную MN, и докажите, что периметр треугольника $M'N'C$ равен 2. Так как подобный ему треугольник MNC также имеет периметр 2, треугольники $M'N'C$ и MNC совпадают независимо от расположения MN относительно дуги. Теперь уже легко понять, что угол MAN равен $45°$.

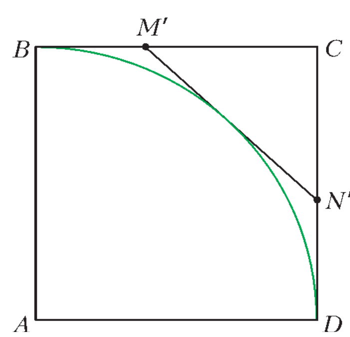

Рис. 15

10. 9.

Пусть k – количество грибов, собранных одним грибником. Тогда

$$(n+11)k = n^2 + 9n - 2,$$

и

$$k = \frac{n^2 + 9n - 2}{n + 11} = n - 2 + \frac{20}{n + 11},$$

откуда следует, что $n + 11 = 20$, $n = 9$.

11. $f(q) < 0$.

Из условия и свойств квадратного трехчлена следует, что $f(0) = q = x_1 x_2 > 0$, $f(1) = p + q + 1 < 0$. Поэтому

$$f(q) = q^2 + pq + q = q(p + q + 1) = f(0) f(1) < 0.$$

ФИЗИКА

1. 0.

2. $R_{ab} = 2R$.

3. $\alpha = 60\%$.

4. Металлический шарик будет втягиваться в область более сильного электрического поля.

5. $R_1' = 3$ Ом, $R_2' = 12$ Ом.

6. См. рис.16.

7. Указанные в условии температуры соответствуют брускам *D*, *B*, *C*, *A*.

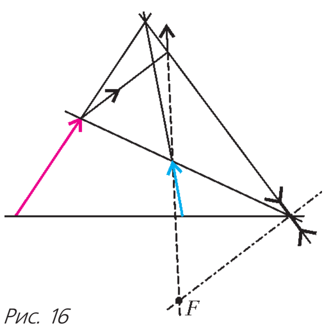

Рис. 16

8. Сначала от точки *1* до некоторой точки, обозначим ее *A*, температура газа растет, потом – падает. Точка *A* – это точка касания данного графика изотермой, соответствующей самой высокой температуре газа на участке *1–2*.

9. $v_0 = 8$ м/с.

10. Время падения увеличится.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. В Советском Союзе такими математиками были С.Л.Соболев, И.М.Гельфанд, М.В.Келдыш, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов и многие другие. В США это Дж. фон Нейман, С.Улам, Н.Винер и другие.

2. Для удобства воспользуемся символикой сравнений:

$$5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641} \Rightarrow 5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}.$$

Поскольку $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$, то $-2^{32} \equiv 1 \pmod{641}$ и, наконец, $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$.

3. $x^3 + 5x = 12$.

4. *Указание*. Предположим, что задача решена и *ABC* – искомый треугольник (рис. 17). Продолжим гипотенузу *AB* до точки *K* так, что *BK* = *BC*, и опустим перпендикуляр *KL* на *AC*. Тогда $\angle BCK = \angle BKC = \angle CKL$, т.е. *KC* – биссектриса угла *AKL* в треугольнике *AKL*. Отсюда легко следует построение. Строим равнобедренный прямоугольный треугольник *AKL*, проводим биссектрису угла *K*; *AC* – искомая сторона треугольника.

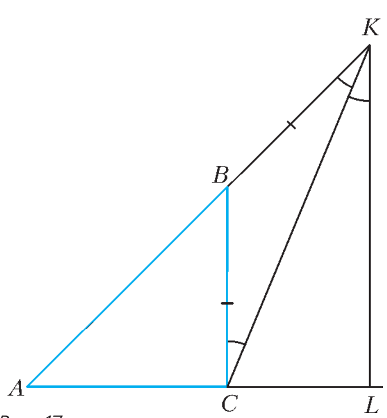

Рис. 17

5. а)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & \frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & \frac{0}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{1} & & & & \\
 & \frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1} & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{1}{1}
\end{array}$$

б) *Указание*. Рассмотрите разность

$$c(b + f) - d(a + e) = (cb - ad) + (cf - de) = 0.$$

ФИЗИКА

1. а) Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс. б) Нидерланды. в) Ввел конечный объем для каждой молекулы и силу притяжения между молекулами, не уточняя ее природы. Позже были выяснены детали, но слабое притяжение нехимической природы между молекулами до сих пор часто называют силами Ван-дер-Ваальса.

2. а) Архимед. б) Сиракузы в Сицилии. в) Римской армией командовал Марцелл.

3. а) Большой адронный коллайдер. б) Расположен на территории Швейцарии и Франции. в) Рассчитан на энергию частиц порядка 14 ТэВ.

4. а) Эрнст Мах. б) Ударные волны. Число Маха, конус Маха.

5. а) Роберт Гук. б) Портреты Гука не сохранились. Они были уничтожены по указанию Ньютона, как президента Королевского общества, сразу после смерти Гука.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Да.

Если указанное заявление произнес рыцарь, то у него среди рыцарей друзей больше, чем среди лжецов. Если указанное заявление произнес лжец, то оно неверно, а верно противоположное, т.е. то, что у этого лжеца среди рыцарей друзей не меньше, чем среди лжецов.

Итак, у каждого жителя острова среди рыцарей друзей не меньше, чем среди лжецов. Может ли при этом рыцарей оказаться меньше, чем лжецов? Да, может! Видимо, рыцари на этом острове дружелюбные (да и вообще дружить с рыцарем приятнее, чем с лжецом). В качестве примера подходит ситуация, когда на острове живут 2 рыцаря, которые дружат только друг с другом, и 4 лжеца, которые вообще ни с кем не дружат.

2. 600 отрезков.

Пример: возьмем прямоугольный лист бумаги и проведем 100 синих, 100 зеленых и 100 красных вертикальных отрезков, идущих от верхней стороны листа до нижней; кроме того, проведем столько же горизонтальных отрезков каждого цвета, идущих от левой стороны до правой.

Докажем, что должно быть проведено не меньше 600 отрезков. Рассмотрим какой-нибудь красный отрезок, можно считать, что он вертикальный (в противном случае повернем картинку на 90°). Этот отрезок пересекает 100 синих отрезков.

Очевидно, они должны быть горизонтальными. Возьмем один горизонтальный синий отрезок. Он пересекает 100 зеленых отрезков, которые должны быть вертикальными. Возьмем один вертикальный зеленый отрезок. Он пересекает 100 красных отрезков, и эти отрезки – горизонтальные. Продолжая рассуждать таким образом, мы обнаружим, что на картинке еще заведомо нарисованы 100 вертикальных синих, 100 горизонтальных зеленых и 100 вертикальных красных (возможно, один из этих красных отрезков – тот, с которого мы начали свои рассуждения). Итак, имеется не меньше 100 вертикальных и не меньше 100 горизонтальных отрезков каждого цвета, т.е. всего не меньше 600 отрезков.

3. Нет.

Покрасим вершины правильного 777-угольника поочередно в 3 цвета: белый, синий, красный, белый, синий, красный и т.д. Заметим, что если последовательно расставить в вершинах 777-угольника числа от 1 до 777, то числа a и b будут стоять в вершинах одного цвета тогда и только тогда, когда $(a-b)\vdots 3$.

Лемма 1. *Если треугольник XYZ с вершинами в вершинах 777-угольника равнобедренный, то числа в его вершинах дают либо одинаковые, либо попарно разные остатки от деления на 3.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $XY = YZ$, в вершине X стоит число 1, в вершине Y стоит число $m + 1$, а в вершине Z – число $2m + 1$. Если m делится на 3, то у всех трех чисел остатки от деления на 3 одинаковы, а если не делится, то все три числа дают попарно разные остатки.

Лемма 2. *Если для вершин A и B вершины C и D таковы, что треугольники ABC и ABD равнобедренные, то вершины C и D одного цвета.*

Доказательство. Если точки A и B одного цвета, то по лемме 1 точки C и D того же цвета. Если точки A и B разного цвета – не умаляя общности, будем считать, что A синего цвета, B красного, – то по лемме 1 точки C и D белого цвета.

Заметим, что по лемме 2 после первого хода фишки попадут в вершины одинакового цвета и после каждого последующего хода будут находиться в вершинах одного цвета. Так как вершины, расположенные через одну, разного цвета, такую позицию мы никогда не получим, что и требовалось доказать.

4. Пусть прямая CD пересекает периметр треугольника в точках K и L (рис.18). Проверим, что одна из них удовлетворяет условию. Пусть это не так, тогда

$$KA + KB < KC + KD,$$

$$LA + LB < LC + LD.$$

Сложив, получаем $KA + KB + LA + LB < KC + KD + LC + LD = 2KL$. С другой стороны, складывая неравенства треугольника $KA + LA \geq KL$ и $KB + LB \geq KL$, получаем противоречие.

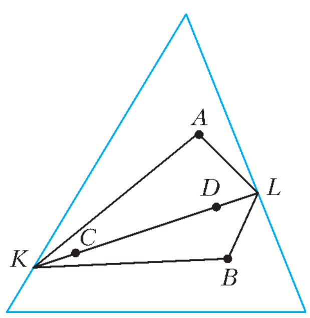

Рис. 18

5. Автор этого решения – участник олимпиады Д.Клюев.

Поскольку $2011201120112011 \equiv 3 \pmod 4$, то у этого числа есть простой делитель $p = 4k + 3$. Рассмотрим первое равенство по модулю p: $c \equiv -a$. С учетом этого второе равенство по модулю p можно записать в виде $(5a-b)(b-a) \equiv b^2$. Раскрывая скобки, имеем $5a^2 - 6ab + 2b^2 \equiv 0$. Умножая на 2, получаем, что $(3a-2b)^2 + a^2$ делится на p. Поскольку $p = 4k + 3$, оба слагаемых должны быть кратны p. Отсюда a, b, c кратны p.

Замечание. Такие a, b, c существуют. Например, $a = 11k$, $c = 6k$, $b = 30k$, где $k = 2011201120112011/17$.

6. Не может.

Пару клеток, граничащих по углу, в которых стоят фишки, назовем *отличной*. Назовем клетку *восхитительной*, если она граничит по стороне с обеими клетками хотя бы одной отличной пары. Заметим, что для каждой отличной пары есть ровно две граничащие с ней восхитительные клетки. Для каждой отличной пары поставим в граничащие с ней восхитительные клетки по единице. После этого сложим в каждой клетке все поставленные числа. Заметим, что в каждой хорошей клетке получится число 1. Во всех остальных клетках результат равен либо 0, либо 2, либо 4 (рис.19). Если хороших клеток было ровно 2011, то сумма всех чисел должна быть нечетной. С другой стороны, сумма всех чисел в 2 раза больше, чем количество отличных пар, т.е. число четное. Значит, хороших клеток не может быть 2011.

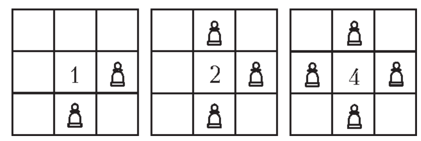

Рис. 19

7. Обозначим выписанное число через N. Пусть $\overline{cd}$ – это остаток от деления N на p (цифры c, d могут быть нулями). Тогда будем рассматривать 100 фрагментов десятичной записи числа N, соответствующие пятизначным числам вида $\overline{9cdyz}$. Эти фрагменты расположены в записи числа N подряд, причем для каждого из фрагментов количество знаков после $\overline{cd}$ кратно пяти, так как после $\overline{cd}$ в записи числа N идут две цифры x и y рассматриваемого фрагмента, потом идет много групп по 5 цифр, соответствующих пятизначным числам, а потом – еще три шестизначных числа (100000, 100001 и 100002).

Если мы заменим один из фрагментов $\overline{cd}$ двумя нулями, число N в результате этой замены уменьшится на $\overline{cd}\cdot 10^{5k}$. Осталось выбрать тот фрагмент $\overline{cd}$, для которого множитель $\left(10^5\right)^k$ дает остаток 1 при делении на p, – тогда разность $N - \overline{cd}\cdot 10^{5k}$ будет делиться на p, что нам и требуется. Этот выбор возможен, так как мы выбираем из 100 подряд идущих значений показателя степени k, а остатки 10^5 по модулю p образуют чисто периодическую последовательность с периодом не больше $p - 1 < 100$.

8. Отметим на отрезке AC такую точку F, что $AE = CF$ (рис.20). Тогда равенство из условия задачи можно записать в виде $BD{:}BE = CF{:}CE$, откуда $DF \parallel BC$ и треугольники FDE и CBE подобны. Но треугольники ADE и CDF равны, значит, $DE = DF$, треугольник FDE равнобедренный, а вместе с ним и треугольник CBE равнобедренный, что и требовалось доказать.

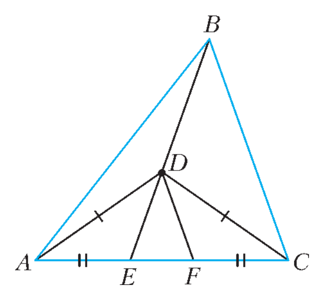

Рис. 20

9. Предположим противное. Если найдется угрюмовитянин X, имеющий хотя бы 2000 знакомых, то по условию среди его знакомых найдутся три попарно знакомых человека. Тогда они вместе с X образуют четверку попарно знакомых друг с другом жителей. Следовательно, у каждого угрюмовитянина не более 1999 знакомых. Возьмем жителя A_1 и удалим его из города вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Из оставшихся выберем жителя A_2 и тоже удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Так последовательно мы выберем жителей A_1, A_2, …, A_{1000}, не знакомых друг с другом. Рассмотрим теперь всех угрюмовитян, кроме этой тысячи.

Возьмем жителя B_1 и удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Из оставшихся выберем жителя B_2 и удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми и т.д. После того как мы последовательно выберем жителей B_1, B_2,… …, B_{999}, в качестве B_{1000} возьмем любого из еще оставшейся тысячи жителей. Найденные жители также не знакомы друг с другом. Теперь рассмотрим 2000 угрюмовитян A_1, A_2, … …, A_{1000} и B_1, B_2, …, B_{1000}. Среди них есть трое попарно знакомых. Но тогда двое из этих трех либо жители A_i и A_j, либо жители B_i и B_j. Но ни те, ни другие между собой не знакомы. Противоречие.

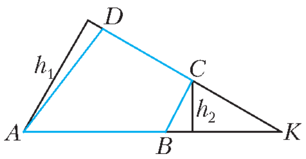

Рис. 21

10. Продолжим стороны AB и CD до точки их пересечения и назовем ее K (рис.21). Поскольку сумма углов A и D равна 150°, то $\angle BKC = 30^\circ$. А так как при этом углы в четырехугольнике $ABCD$ меньше 150°, то в треугольнике BKC угол K наименьший. Действительно,

$$\angle KBC = 180° - \angle ABC > 180° - 150° = 30°$$

и

$$\angle KCB = 180° - \angle BCD > 180° - 150° = 30° .$$

Следовательно, наименьшая сторона в треугольнике KBC – это BC.

Опустим перпендикуляры из точек A и C на прямые CD и AB соответственно. Обозначим длины этих перпендикуляров через h_1 и h_2 соответственно. Поскольку $\angle K = 30°$, то

$$h_1 = \frac{1}{2}(AB + BK) > \frac{1}{2}(AB + BC) \text{ и } h_2 = \frac{1}{2}KC > \frac{1}{2}BC .$$

Поэтому

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) =$$

$$= \frac{1}{2}(AB \cdot h_2 + CD \cdot h_1) > \frac{1}{4}(AB \cdot BC + CD \cdot (AB + BC)) =$$

$$= \frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD) .$$

11. $a_1 = 37^2 = 1369$.

Заметим, что $p_n = 37$ при всех n. Действительно, если $p_n \neq 37$ для некоторого n, то число $a_{n+1} = a_n - p_n + \dfrac{a_n}{p_n}$ не делится на 37, так как a_n и $\dfrac{a_n}{p_n}$ делятся на 37, а вычитаемое p_n не делится. Таким образом, $a_{n+1} = a_n - 37 + \dfrac{a_n}{37} = \dfrac{38}{37}a_n - 37$ при всех n.

Положим $b_n = a_n - 37^2$, тогда

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 37^2 = \frac{38}{37}a_n - 37 - 37^2 =$$

$$= \frac{38}{37}\left(b_n + 37^2\right) - 37 \cdot 38 = \frac{38}{37}b_n .$$

Отсюда по индукции следует, что

$$b_n = \frac{38^{n-1}}{37^{n-1}}b_1$$

при всех n. Дробь $\dfrac{38^{n-1}}{37^{n-1}}$ несократима и ее знаменатель неограниченно растет с ростом n, поэтому число $b_n = \dfrac{38^{n-1}}{37^{n-1}}b_1$ может оставаться целым при всех n только в случае, когда $b_1 = 0$. Следовательно, $a_1 = b_1 + 37^2 = 37^2$.

Осталось заметить, что число $a_1 = 37^2$ удовлетворяет условию, так как в этом случае все члены a_n равны 37^2.

12. 27 нечетных чисел.

Сначала покажем, как действовать Саше, чтобы среди чисел никогда не оказалось больше 27 нечетных. Разобьем все вершины на четверки, каждая из которых содержит две соседние вершины и две противоположные им (в первую четверку включим вершины номер 1, 2, 51 и 52, считая по часовой стрелке, во вторую – вершины номер 3, 4, 53 и 54 и т.д.). Пусть Саша в начале игры поставит в каждую четверку одно нечетное число и три четных. Тогда он сможет восстанавливать такую ситуацию после каждого своего хода. Действительно, Сережа своим ходом изменит четность у каких-то двух чисел из одной четверки, после чего в этой четверке окажется либо одно, либо три нечетных числа. Если их станет три, то среди них найдутся два соседних и Саша своим ходом сможет превратить их в четные. Если же в четверке останется одно нечетное число, то Саша прибавит по единице к нему и его соседу из той же четверки и в четверке по-прежнему будет ровно одно нечетное число. Таким образом, после каждого хода Саши в каждой четверке будет ровно одно нечетное число, а всего будет ровно 25 нечетных чисел. Своим ходом Сережа может изменить это количество не более чем на 2, поэтому после каждого его хода среди чисел будет не более 27 нечетных.

Теперь покажем, как следует действовать Сереже, чтобы в какой-то момент после своего хода он получил не менее 27 нечетных чисел. Ему достаточно добиться того, чтобы перед каким-то его ходом образовалось не менее 25 нечетных чисел. Действительно, если в этот момент количество нечетных чисел меньше 50, то найдется пара противоположных вершин, в которых стоят четные числа (так как вершины разбиваются на 50 пар противоположных). Прибавив по единице к числам в этих вершинах, Сережа увеличит количество нечетных чисел на 2, и в результате их окажется хотя бы 27. Если же нечетных чисел 50 или больше, то Сережа может сделать любой ход и после этого останется не менее 48 нечетных чисел.

Осталось показать, как Сереже добиться того, чтобы перед каким-то его ходом образовалось не менее 25 нечетных чисел. Раскрасим вершины через одну в черный и белый цвета и заметим, что противоположные вершины окрашены одинаково, а соседние – по-разному. Сережа может следить только за количеством нечетных чисел в белых вершинах. Если перед очередным его ходом количество нечетных чисел в белых вершинах меньше 25, то найдется пара противоположных белых вершин, в которых стоят четные числа (так как белые вершины разбиваются на 25 пар противоположных). Пусть Сережа прибавит по единице к такой паре вершин – в результате количество нечетных чисел в белых вершинах увеличится на 2. Следующий ход Саши затронет только одну из белых вершин, поэтому в результате пары ходов количество нечетных чисел в белых вершинах увеличится. Действуя таким образом, Сережа добьется того, что перед каким-то его ходом нечетных чисел в белых вершинах (а значит, и всего) будет не менее 25. После этого, как объяснено выше, он получит не менее 27 нечетных чисел после своего хода.

13. По отношению к описанной окружности треугольника ABC угол ABC, равный 30°, является вписанным, следовательно, центральный угол AOC равен 60° (рис.22). Таким образом, треугольник AOC равносторонний. Значит, четырехугольник $AOLC$ составлен из равностороннего и равнобедренного треугольников, линия AL – его ось симметрии, следовательно, AL – биссектриса угла OAC. Пусть $\angle OBA = \angle BAO = \alpha$. Тогда $\angle BAL = 30° + \alpha$. Далее, $\angle KOA = 2\alpha$, $\angle OKC = 60° + 2\alpha$ (в обоих случаях мы подсчитывали величину внешнего угла

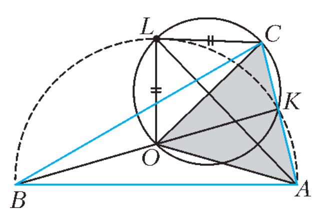

Рис. 22

треугольника). Наконец,

$$\angle BKL = \frac{1}{2}\angle OKC = 30^\circ + \alpha = \angle BAL .$$

Следовательно, точки A, B, L, K лежат на одной окружности.

14. Положим $N = 10^{300}$. Заметим, что расстояние между любыми двумя соседними квадратами, большими N, больше 10^{100}. Действительно, расстояние между числами k^2 и $(k+1)^2$ равно $2k + 1$, и это число больше 10^{100} при $k \geq \sqrt{N} = 10^{150}$. Аналогично, расстояние между соседними кубами, большими N, больше 10^{100}, так как расстояние между k^3 и $(k+1)^3$ равно $3k^2+3k+1$, что больше 10^{100} при $k \geq \sqrt[3]{N} = 10^{100}$.

Рассмотрим любое натуральное n, для которого число 2^n больше N и не является ни квадратом, ни кубом (для выполнения второго условия достаточно выбрать n не делящимся ни на 2, ни на 3). Докажем, что хотя бы одно из чисел 2^n, 2^{n+30} или 2^{n+60} далеко от квадратов и кубов.

Рассмотрим случай, когда число 2^n близко к квадратам, т.е. $\left|2^n - k^2\right| \leq 10^6$ для некоторого k. Так как 2^n не может быть равно k^2, имеем

$$1 \leq \left|2^n - k^2\right| \leq 10^6 .$$

Умножая это неравенство на 2^{30} и 2^{60}, получаем

$$2^{30} \leq \left|2^{n+30} - \left(2^{15}k\right)^2\right| \leq 10^6 \cdot 2^{30}$$

и

$$2^{60} \leq \left|2^{n+60} - \left(2^{30}k\right)^2\right| \leq 10^6 \cdot 2^{60} .$$

Так как $2^{60} > 2^{30} > 10^6$, расстояния от чисел 2^{n+30} и 2^{n+60} до соответствующих квадратов $\left(2^{15}k\right)^2$ и $\left(2^{30}k\right)^2$ больше 10^6.

С другой стороны, расстояния от чисел 2^{n+30} и 2^{n+60} до квадратов, соседних с рассматриваемыми, не меньше чем

$$10^{100} - 10^6 \cdot 2^{60} > \frac{1}{2} \cdot 10^{100} > 10^6 ,$$

$$\text{так как } 10^6 \cdot 2^{30} < 10^6 \cdot 2^{60} < \frac{1}{2} \cdot 10^{100} .$$

Таким образом, если число 2^n близко к квадратам, то 2^{n+30} и 2^{n+60} далеки от квадратов. Применяя это утверждение к числу $n + 30$ вместо n, получаем, что если 2^{n+30} близко к квадратам, то 2^{n+60} далеко от квадратов. Итак, среди чисел 2^n, 2^{n+30} и 2^{n+60} имеется не более одного числа, близкого к квадратам.

Аналогично доказывается, что не более одного из чисел 2^n, 2^{n+30} и 2^{n+60} близко к кубам (при умножении числа k^3 на 2^{30} и 2^{60} получаются тоже кубы: $\left(2^{10}k\right)^3$ и $\left(2^{20}k\right)^3$ соответственно). Следовательно, хотя бы одно из чисел 2^n, 2^{n+30} или 2^{n+60} далеко и от квадратов, и от кубов. Поскольку n можно выбрать сколь угодно большим, отсюда следует, что искомых степеней двойки бесконечно много.

15. Рассмотрим граф, вершинами которого являются члены общества, а ребрами соединены пары друзей. Докажем, что этот граф является деревом. Ясно, что граф связен, иначе невозможно было бы перемещать средства между компонентами связности. Осталось доказать, что в графе нет циклов.

Предположим противное: пусть вершины A_1, A_2, …, A_n образуют цикл. Для краткости введем обозначения $A = A_1$ и $B = A_2$. По условию несколькими переводами можно переместить 1 рубль из A в B, т.е. добиться того, что счет вершины A уменьшится на 1, счет вершины B увеличится на 1, а счета остальных вершин не изменятся. Рассмотрим такой способ, в котором суммарное количество переводов – наименьшее из возможных. Ясно, что порядок переводов не важен: результат определяется тем, сколько переводов сделано из каждой вершины.

Заметим, что найдется хотя бы одна вершина, из которой переводов не делалось. Действительно, в противном случае можно было бы уменьшить на 1 количество переводов из каждой вершины, от чего результат, как легко видеть, не изменился бы. Назовем вершины, из которых не делалось переводов, *нулевыми*. Вершина A не может быть нулевой, так как ее счет должен в итоге уменьшиться, а уменьшение счета происходит только при переводах из этой вершины. Рассмотрим любую нулевую вершину C. Если она отлична от B, то все ее соседи – тоже нулевые, иначе счет в этой вершине увеличился бы. Если эти соседи отличны от B, то, аналогично, их соседи тоже нулевые, и так далее. Поскольку C можно соединить путем с B, отсюда следует, что вершина B тоже нулевая. В результате всех переводов счет в вершине B должен увеличиться на 1 и это увеличение уже достигается переводом из A. Значит, все остальные соседи вершины B должны быть нулевыми. В частности, вершина A_3 – нулевая. Поскольку A_3 отлична от B, все ее соседи тоже нулевые, в том числе A_4. Применяя это рассуждение к вершинам цикла по очереди, в итоге получаем, что и вершина A должна быть нулевой. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что в графе нет циклов, а так как он связной, то он является деревом. В любом дереве количество ребер на 1 меньше, чем количество вершин, следовательно, в нашем графе ровно 2010 ребер, что и требовалось.