О современной математике и ее преподавании

Лекция на съезде учителей математики

С.СМИРНОВ

Дорогие коллеги, очень приятно выступать перед учителями математики, перед единомышленниками. Организаторы съезда попросили меня рассказать о связи современной математики со школой и университетом. Я подумал и решил, что немного поговорю о современной математике и совсем-совсем немножко о ее преподавании, потому что здесь сложно сказать что-то новое за отведенное время.

Мне повезло: меня очень хорошо учили математике и в школе, и в кружках, и потом в университете. И, пожалуй, единственное, что в школе мне не объяснили, – что математика – это такая же живая наука, как, скажем, физика или биология, что она продолжает развиваться. Потому что от школьных уроков часто создается впечатление, что Пифагор, Евклид, Эйлер все уже доказали, хотя это совсем не так. Математика бурно развивается и сегодня. Решаются очень старые задачи – совсем недавно были доказаны великая теорема Ферма и гипотеза Пуанкаре. При этом задач не становится меньше: решение старых ведет к постановке новых, часто не менее интересных. Появляются новые задачи на волне сотрудничества с физикой, которое исторически всегда было очень тесным, а теперь быстро растет сотрудничество и с другими науками – наверное, надо выделить экономику и биологию. И у математики по-прежнему очень много практических применений. Часто говорят, что математика – фундаментальная наука, поэтому ее нужно поддерживать, но практические применения приходят через десятки, а то и сотни лет. Действительно, математика очень важна как фундаментальная наука, однако и практические применения фундаментальных разработок часто не заставляют себя ждать. В обыденных предметах применяются многие новейшие математических исследования, просто мы редко задумываемся об этом.

Возьмем хотя бы мобильный телефон. В современных аппаратах часто внутри две или три антенны. Они находятся на расстоянии сантиметра друг от друга, поэтому принимают сигнал чуть по-разному. Сравнивая эти различия, удается уменьшать помехи и делать так, чтобы мобильный телефон лучше принимал, чем 10 лет назад. Эти разработки требуют решения математических задач про уравнения в частных производных, которые интересны и сами по себе. Или другая, более очевидная задача: в большинстве современных стандартов разговоры передаются не в аналоговом, а в цифровом режиме, где сигнал кодируется в последовательность нулей и единиц. Основная цель – даже не чтобы не смогли перехватить и раскодировать (это тоже важно, но пока с этим дело у мобильных телефонов обстоит не очень хорошо), а чтобы даже при наличии небольших помех на линии можно было восстановить изначальный сигнал без ошибок. И опять же – это чисто математическая задача, связанная с современными фундаментальными исследованиями.

То есть математика продолжает активно развиваться, и, будучи самой фундаментальной из наук, все равно (а может, именно поэтому) имеет много практических применений. Интересно, что, несмотря на бурное развитие в последние двести лет, задачи математики не стали более заумными. Ну... скажем так, – не все стали более заумными. Конечно, многое меняется, новые понятия вводятся на базе старых, все стало сложнее, чем в XIX веке. Но при этом по-прежнему есть задачи, которые можно объяснить на пальцах школьнику, если уж не решения, то формулировку.

И я решил, что немножечко поговорю об одной задаче, с которой я сам был связан, где действительно формулировку довольно-таки просто объяснить хорошему старшекласснику. Опять же, это хороший пример того, как работают современные математики и как проходит взаимодействие с другими науками.

История началась с нескольких задач, которые поставили перед нами физики-экспериментаторы, а именно – с того, что они действительно наблюдали в природе. На рисунке 1 изображена компьютерная модель эрозии, изначально же похожие формы наблюдали в реальных ситуациях. Вот, скажем, лесные пожары, – когда у вас выгорает кусок леса, то граница его становится фракталом[1], причем экспериментально (не волнуйтесь – лес никто специально не поджигал!) ученые обнаружили, что обычно это фракталы размерности 4/3. То же самое с фронтами эрозии или просачиванием жидкости через пористую среду. Дол-

Автор статьи – российский и швейцарский математик, лауреат премии Филдса 2010 года. Сейчас работает в Женевском университете и Санкт-Петербургском государственном университете.

Видеозапись лекции доступна в Интернете по адресу http://www.youtube.com/watch?v=T41khOsiJwU

[1] *Подробнее о фракталах можно прочитать в статьях И.М.Соколова «Фракталы» («Квант» № 5 за 1989 год) и Н.П.Долбилина «Игра «Хаос» и фракталы» («Квант» №4 за 1997 год). (Прим. ред.)*

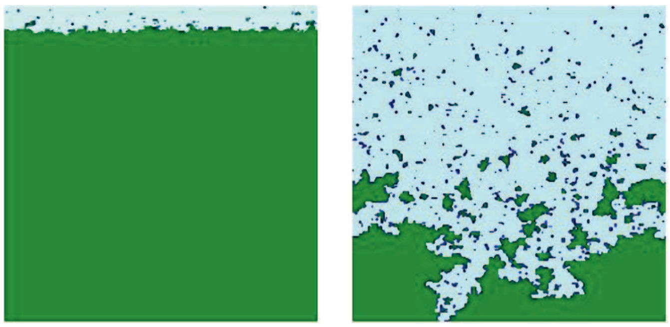


Рис. 1. Компьютерное моделирование эрозии, выполненное физиками Б.Саповалом, А.Балдассари и А.Габриэлле

гое время оставалось загадкой – почему именно так, почему число $4/3$ появляется и в природе, и в численных экспериментах на компьютере. Совсем недавно ряд наших с коллегами работ привел к строгому доказательству: последняя статья на эту тему была написана в прошлом году и вышла в этом.

Но прежде чем доказывать теоремы, надо попытаться сформулировать правдоподобную математическую модель наблюдаемого явления и понять, будет ли она достаточно близка к природной – скажем, проведя численные эксперименты. В случае с эрозией физиками и математиками было предложено несколько связанных между собой моделей. Я опишу, пожалуй, самую простую.

Нам нужна модель какой-то случайной пористой среды, чтобы обсуждать, как через нее будет просачиваться жидкость (или как лес будет гореть). Скажем, можно считать, что на рисунке 2 белые шестиугольники – это дырки в желтом камне. Дырки распределены случайно: для каждого шестиугольника мы подкидываем монетку; выпал орел – красим в желтый цвет, выпала решка – красим в белый. Вода может просачиваться по дыркам, перетекая из белого шестиугольника в соседние белые шестиугольники, и т.д. Эту модель называют *перколяцией*, она была предложена и с успехом использовалась для моделирования многих явлений – от просачивания воды через пористый камень до распространения эпидемий или информации. Самый простой вопрос: с какой вероятностью вода сможет протечь, т.е. каков процент картинок с «пробоем» из белых шестиугольников, идущим сверху вниз через прямоугольник? Или как в среднем выглядит участок, в который может протечь вода? Как может выглядеть регион леса, который сгорит?

Даже рассматривая одну картинку, видишь, что задача не так проста. Например, на рисунке 2,*а* довольно-таки просто заметить, что вода сверху вниз проте-

а)

б)

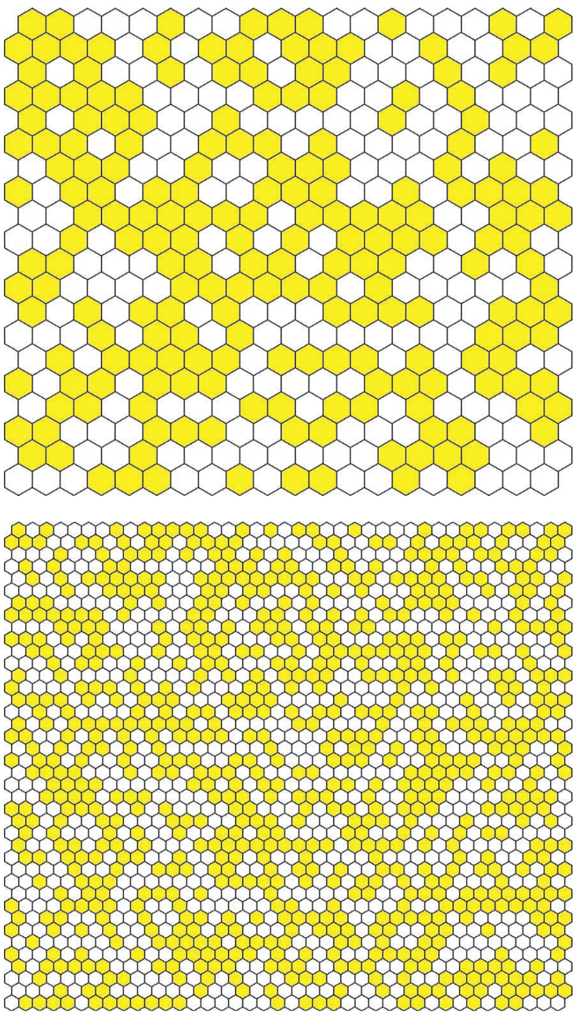


Рис. 2

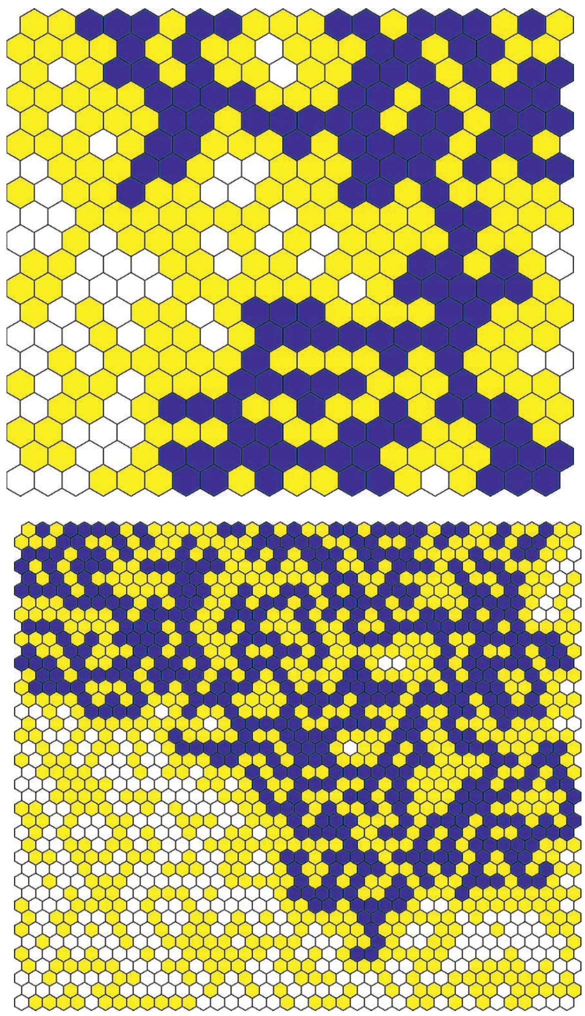


Рис. 3

чет. А на картинке 2,*б*? Немножко посмотрите, и станет ясно, что это гораздо сложнее, даже если у вас хорошие глаза. Почему? Посмотрите на рисунок 3 – здесь в синий цвет окрашены шестиугольники, куда вода может дотечь сверху. Оказывается, что траектории воды – тропинки из белых шестиугольников, окрашенные теперь в синий, – это очень сложные множества, фракталы размерности $4/3$.

У слова *фрактал* нет строгого определения, обычно их определяют как множества дробной размерности с дополнительными свойствами самоподобия (т.е. маленький кусок похож на гомотетичную копию всего множества). Что такое фракталы размерности $4/3$ в этой дискретной ситуации? Если множество размерности 1 (скажем, гладкая кривая) проходит через квадрат или куб со стороной 1000, то оно пересекает примерно 1000 квадратиков 1×1. Множество размерности 2 (например, гладкая поверхность) – примерно 1000^2 квадратиков. А размерности $4/3$ – примерно $1000^{4/3}$. То есть в нашем случае кривая, по которой вода сможет пересечь квадрат шириной 1000, будет состоять в среднем из примерно $1000^{4/3} = 10000$ шестиугольников. Значит, если вода может протечь, то ее траектория будет в 10 раз длиннее стороны квадрата. Таким образом, ее путь будет очень, очень извилистым, и поэтому его сложно отследить. В строгом определении надо брать квадрат со стороной N, брать все возможные раскраски шестиугольников и смотреть, сколько в среднем шестиугольников в самом левом пробое: оказывается, примерно $N^{4/3}$. То есть пробой будет отличаться от прямого пути в $N^{1/3}$ раз – с увеличением размера квадрата все больше и больше, и увидеть его будет становиться еще сложнее и сложнее (рис. 4). И это строгая теорема, которую мы доказали с коллегой из Франции Венделеном Вернером, лауреатом премии Филдса 2006 года. Мы решили задачу, поставленную физиками, но оказалось, что первыми ее поставили математики, просто про это успели забыть! Более того, ее поставили в журнале для школьников и учителей математики, американском родственнике «Кванта» – в журнале «American Mathematical Monthly», в первый год ее издания – 1894, более века назад. Этот журнал и сейчас популярен, его издает Математическая ассоциация Америки – объединение учителей и просто любителей математики. Там есть примерно такая же серия, как «Задачник «Кванта», только иногда предлагаются задачи, где решение неизвестно. Порой они оказываются очень сложными и ведут к интересным математическим теориям – так, например, случилось и с задачей о росте групп, поставленной Джоном Милнором в 1968 году и решенной Р.И. Григорчуком в 1984 году.

На рисунке 5 воспроизведены две страницы «American Mathematical Monthly» из выпуска 1894 года с задачей про перколяцию и предложенным решением. Наверху первой страницы – предыдущая задача со страшными повторными интегралами, и немного странно ее видеть в журнале для учителей, но в XIX веке мода была другая. А в середине страницы начинается задача: если в коробку положить случайным образом шары двух

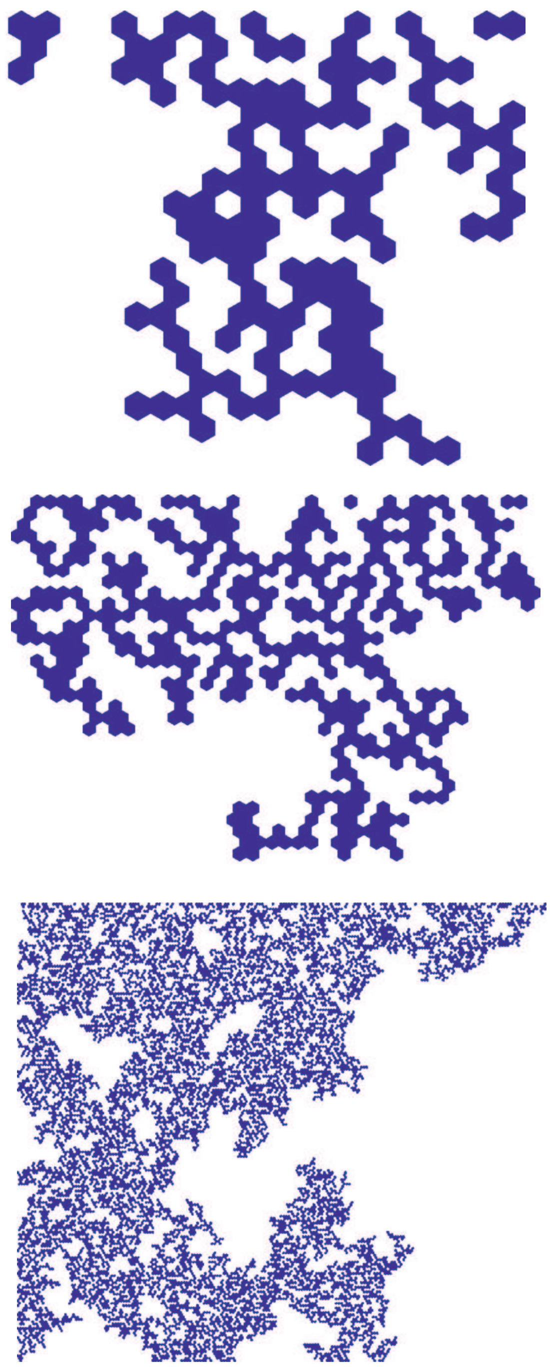


Рис. 4

цветов... – звучит как обычная задача из теории вероятности про двух мудрецов, которые их оттуда таскают. Но спрашивают в ней то же, что и раньше: какова тогда вероятность, что есть цепочка шаров от одной границы до другой? Интересно, что было опубликовано решение, которое считало вероятность существования прямой цепочки, – а я уже сказал, что если цепочка есть, то она обычно извилистая, – и даже это было сделано неправильно. Но зато редактор написал: если кто-то предложит верное решение, то даже если оно длинное, мы его опубликуем в следующем номере. К сожалению, верное решение пока есть только для двумерной коробки, и то нам понадобилось сто лет, чтобы его придумать!

211

$$\Delta=\frac{2^{14}3^2}{\pi^8 b^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\psi\int_0^\pi\int_0^\mu\int_0^\nu\int_0^\omega\int_0^{x'}\int_0^{w'}\int_0^{y'}\int_0^{z'}\int_0^{s'}\int_0^{t'}\int_0^{u'}\int_0^{v'} A\sin\theta\sin\phi$$
$$\times\sin\psi\sin\rho\sin\mu\sin\nu\sin\omega\sin\lambda\, d\theta d\phi d\psi d\rho d\mu d\nu d\omega d\lambda dx dw dy dz ds dt du dv$$
$$=\frac{2^{12}3^2ab}{\pi^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\psi\int_0^\pi\int_0^\mu\int_0^\nu\int_0^\omega[\sin(\theta-\phi)+\sin(\phi-\psi)+\sin(\psi-\rho)$$
$$+\sin(\mu-\nu)+\sin(\nu-\omega)+\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\rho)-\sin(\theta+\mu)]\sin^2\theta\sin^2\phi\sin^2\psi\sin^2\rho$$
$$\times\sin^2\mu\sin^2\nu\sin^2\omega\sin^2\lambda\, d\theta d\phi d\psi d\rho d\mu d\nu dd\omega\lambda,$$
$$=\frac{2^6 3ab}{\pi^4}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_\theta^\psi[\sin(\theta-\phi)+\sin(\phi-\psi)+\sin(\psi-\rho)]\sin^2\theta\sin^2\phi\sin^2\psi\sin^2\rho$$
$$d\theta d\phi d\phi d\rho\quad+\frac{2^{12}3^2ab}{\pi^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\Phi\left\{\left(\frac{\pi^2}{45}-\frac{43264}{496125}\right)\sin\theta+\left(\frac{\pi^2}{45}-\frac{43264}{496125}\right)\sin\rho\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\pi^3}{72}-\frac{352\pi}{4725}\right)\cos\rho-\left(\frac{\pi^3}{72}-\frac{352\pi}{4725}\right)\cos\theta\right\}\sin^2\theta\sin^2\phi$$
$$x\sin^2\psi\sin^2\rho\, d\theta d\phi d\psi d\rho$$
$$=\frac{ab}{\pi}\left\{5-\frac{7667}{240\pi^2}\right\}+\frac{2^{14}ab}{45\pi^7}\left\{\frac{\pi^2}{8}-\frac{352}{525}\right\}\left\{\pi^2-\frac{43264}{11025}\right\}.$$

A partial solution was received from *Professor F. P. Matz.*

5. Proposed by DE VOLSON WOOD. M. A., C. E., Professor of Mechanical Engineering. Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey.

An actual case suggested the following:

An equal number of white and black balls of equal size are thrown into a rectangular box, what is the probability that there will be contiguous contact of white balls from one end of the box to the opposite end? As a special example, suppose there are 30 balls in the length of the box, 10 in the width, and 5 (or 10) layers deep.

Solution by Professor P. H. PHILBRICK, M. S., C. E., Lake Charles, Louisiana.

There are $5.10=50$ rows and $50\times30=1500$ balls. The probability will be found by supposing the balls to be drawn singly and at random and the rows formed by the balls as drawn one after another.

The total number of ways of drawing the balls$=\lfloor 1500=a$. To find the number of ways of drawing the balls so that 30 white balls may form a row, 30 white balls may be selected out of 750 in $\frac{750.749\ldots.721}{1.2.3\ldots.30}=b$ ways. The remaining 1470 balls can be drawn in $\lfloor 1470=c$ ways. In order that a given selection of 30 white balls may form a row they must be drawn either before or after the other 49 rows, or between some of them, giving 50 positions.

The number of favorable cases is equal to the product of the last three quantities$=50bc$. Hence the probability is, $\frac{50bc}{a}$.

Also solved by *Professor W. H Draughon.*

[Note.—This solution is not entirely satisfactory, since the white balls may be contiguous from one side of the box to the other without being in longitudinal lines. The problem is as if it were required to find the probability of passing from one side of the box to the other by passing through white balls, and white balls only, under the conditions named. The problem is a pretty good one and if any one will furnish a complete solution to it, we will publish it in the next issue of the MONTHLY. ED.]

212

PROBLEMS.

9. Proposed by H. C. WHITAKER, B. S., M. E., Professor of Mathematics, Manual Training School, Philadelphia, Pennsylvania.

Four numbers taken at random are multiplied together. What is the probability that the last digit will be 0?

10. Proposed by F. P. MATZ, M. Sc., Ph. D., Professor of Mathematics and Astronomy in New Windsor College. New Windsor, Maryland.

Upon a surface one foot square, a coin one inch in diameter is thrown; what is the chance the coin *touches* or *intersects* both diagonals?

11. Proposed by ARTEMAS MARTIN, A. M., Ph. D., LL. D., U. S. Coast and Geodetic Survey Office, Washington, D. C.

Find the average area of a triangle formed by joining a corner of cube with any two points within the cube.

12. Proposed by Professor G. B M. ZERR, A. M., Principal of High School, Staunton, Virginia.

A large plane area is ruled by two sets of parallel eqidistant straight lines, the one set perpendicular to the other. The distance between any two lines of the first set is a; the distance between any two lines of the second set is b. If a regular polygon of $2n$ sides be thrown at random upon this area, find the chance that it will fall across a line, the diameter of the circum-circle of the polygon being less than a or b.

Solutions to these problems should be received on or before August 1st.

MISCELLANEOUS.

Conducted by J. M. COLAW, Monterey, Va. All contributions to this department should be sent to him.

SOLUTIONS TO PROBLEMS.

7. Proposed by Rev. A. L. GRIDLEY, Pastor of Congregational Church, Kidder, Missouri.

Making no allowance for the curvature of the earth and supposing the sun to rise in the east and set in the west, what would be the course of a man who should walk constantly toward the sun from morning until night? How far and in what direction from the staring point would he be, walking three miles per hour, at the end of three days?

Solution by H. C. WHITAKER, B. S., C. E., Professor of Mathematics, Manual Training School, Philadelphia, Pennsylvania.

Let the azimuth of the sun and of the direction in which the man is walking be counted from the south toward the west and let it be denoted by ϕ. Take as the origin the position of the man at noon and let the time (t) be counted

Рис. 5

Это – хороший пример того, как из чистого любопытства математики задали вопрос, который оказался очень интересным и с точки зрения физиков-экспериментаторов. Потом задачей заинтересовались и физики-теоретики. И выяснилось, что проблематика связана не только с изучением пористых сред, но и с, казалось бы, более далекой областью – квантовой теорией поля. Интуиция, пришедшая оттуда, подсказала две вещи.

Первая идея состоит в том, что нужно изучать эту модель, когда размер шестиугольников стремится к нулю. В реальной ситуации, если вы изучаете, скажем, лес, то размер дерева гораздо меньше, чем размер леса. Или вы изучаете какой-то камень – тогда размеры пор гораздо меньше размера камня. Разница настолько велика, что в некоторых ситуациях физики формально полагают размер меньших объектов равным нулю. А с точки зрения математика нужно сказать, что мы изучаем задачу на решетке, где размер шестиугольника стремится к нулю. Это то же самое, что фиксировать размер шестиугольника и брать все большие и большие картинки, как мы писали вначале, но гораздо удобнее ремасштабировать картинку, чтобы она имела фиксированный размер, а шестиугольники, напротив, становились все меньше. Это и происходит на рисунке 4, и с таким подходом мы можем говорить о предельной модели, когда шаг решетки равен нулю – ее мы и попытались изобразить на последней картинке. Если бы мы оставили все шестиугольники, то получилась бы хаотичная раскраска плоскости в два цвета (которую и определить-то трудно), поэтому мы оставили только один связный синий регион – как говорят, *кластер*, – по которому может протечь вода. Так вот, надо изучать множества вроде таких предельных кластеров. Это тоже фрактальные множества, и мы доказали, что их размерность 91/48. И если 4/3 может как-то просто получиться, то 91/48 уже наводит на мысль, что происходит что-то сложное.

Вторую идею физики называют *универсальностью* – какую бы решетку мы ни взяли, все равно предельный объект получился бы тем же самым (хотя дискретные модели были бы разными), и описывается квантовой теорией поля. В природе принцип универсальности проявляется во многих явлениях. Скажем, вода замерзает при одной температуре, какая-то другая жидкость – при другой, но сам процесс замерзания очень похож.

В середине восьмидесятых годов прошлого века трое российских физиков из Института теоретической физики им. Л.Д.Ландау – А.А.Белавин, А.М.Поляков и А.Б.Замолодчиков – заметили, что для двумерных, плоских моделей универсальность имеет далеко идущие последствия (трехмерные пока во многом остаются непонятыми математиками и физиками). Оказывается, что предел плоской модели, когда шаг решетки стремится к нулю, должен иметь очень много симметрий. То есть сама шестиугольная решетка имеет немного симметрий: она переходит в себя при параллельном переносе или повороте на 60°, а значит, и модель перколяции при этом тоже сохранится. Но если ее повернуть, скажем, на 10°, то модель станет другой. Подобная модель на квадратной решетке сохраняется при повороте на 90°, но не на 60°. Однако выяснилось, что в пределе модели сохраняются при всех поворотах и, более того, при конформных отображениях. Конформные отображения – это объект из комплексного анализа: отображения, которые являются аналитическими функциями, или, по геометрическому определению, это отображения, которые сохраняют углы между кривыми. В школьном курсе географии, например, упоминается отображение Меркатора – оно сохраняет углы, но меняет расстояния. Пример конформного отображения решетки показан на картинке 6. Замечательное свойство плоскости (в отличии от трехмерного пространства) в том, что таких отображений очень много – скажем, квадрат можно конформно отобразить на круг. А если у какого-то объекта (в данном случае у модели перколяции) очень много симметрий, то про него можно многое сказать.

Так вот, используя эти идеи, Белавин, Поляков и Замолодчиков описали возможные пределы дискретных случайных объектов как «квантовые теории поля с конформными симметриями», которые ведут к очень интересной алгебраической структуре, где и появляются числа вроде 91/48. Предположительно их теория должна быть применима для всех *критических* моделей, то есть моделей в точке фазового перехода. Если вы, скажем, берете ферромагнитные материалы и смотрите на температуру Кюри, когда пропадает ферромагнетизм. Или меняете плотность дырок в перколяции и ждете момента, когда жидкость начнет просачиваться (на шестиугольной решетке такой момент наступает, когда желтые и белые шестиугольники равновероятны).

Теория конформной инвариантности позволила физикам объяснить наблюдаемые явления, в частности, 4/3 и 91/48 перестали быть чисто экспериментальными числами и получили теоретическое обоснование. К сожалению, до математического доказательства было далеко, и даже две упомянутые идеи не были доказаны. Так что задача снова вернулась к нам, к математикам, причем со старой формулировкой столетней давности, которую сформулировали в журнале «American Mathematical Monthly» еще в 1894 году: как посчитать вероятность пробоя. Знаменитый математик Роберт Лэнглендс из Принстона вложил много усилий, пытаясь математически обосновать или хотя бы переформулировать физическую теорию. С двумя коллегами-физиками он провел много компьютерных экспериментов и пришел к выводу, что действительно существует предельная вероятность пробоя (то есть мы берем прямоугольник, накладываем шестиугольную решетку с каким-то шагом, считаем процент раскрасок, при которых есть пробой, а потом шаг устремляем к нулю), она не зависит от решетки и сохраняется при конформных отображениях. Увидев их работу, физик Джон Карди из Оксфорда вывел точную формулу, но не дал строгого доказательства. Получил он ее так: он зафиксировал три вершины прямоугольника и менял позицию четвертой точки, перемещая ее по периметру и получая дифференциальное уравнение. Уравнение простое, но его нельзя решить в полиномах или тригонометрических функциях. Поэтому его решение имеет специальное название – гипергеометрическая функция, оно выглядит довольно сложно и я его не привожу. А потом знаменитый шведский математик Леннарт Карлесон заметил, что если за нашу область взять равносторонний треугольник, то формула становится очень простой. То есть если в равностороннем треугольнике с длиной стороны 1 мы отложим на противоположной стороне отрезок длины l, то тогда вероятность пробоя будет просто сходиться к l (рис. 7), и когда шаг решетки очень маленький, она будет пример-

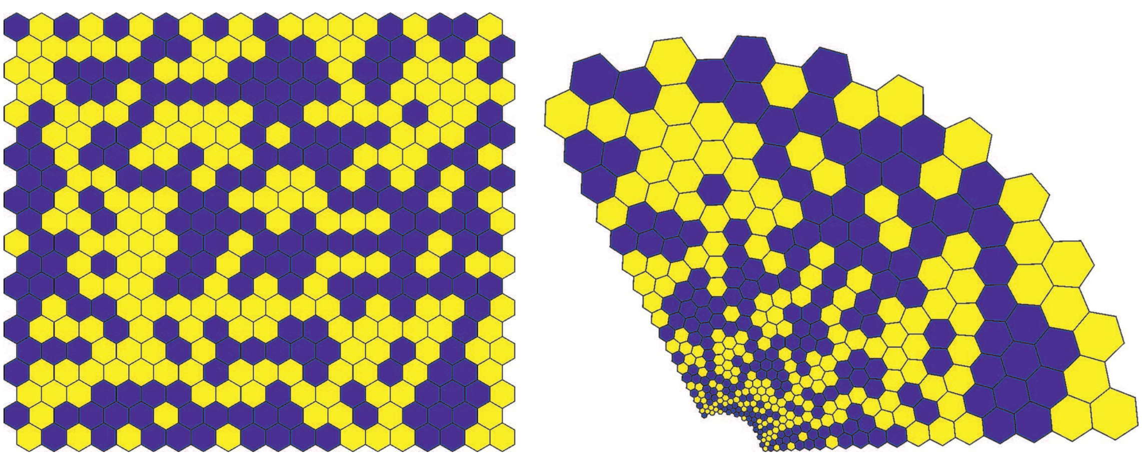


Рис. 6

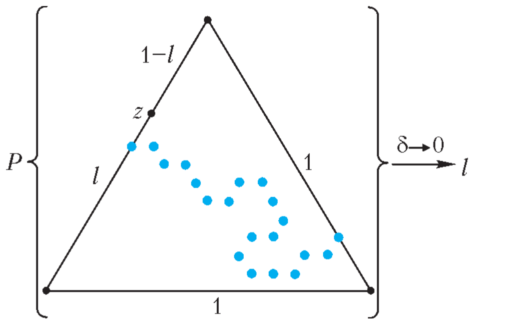


Рис. 7

но равна l. В этом случае, если точка z ездит по стороне, решение уравнения, которое написал Карди, просто линейное.

Эта простая переформулировка имела большое психологическое значение и заинтересовала в задаче многих математиков. Сначала мы пытались строго обосновать подход физиков. Но, как часто случается, оказалось проще придумать новый подход, и физикам он тоже оказался интересен. Мы тоже фиксировали три вершины треугольника и меняли положение четвертой точки z, но разрешили ей двигаться и внутри треугольника. Тогда можно смотреть, есть ли пробой, который отделяет z от базовой стороны. И опять же, в пределе – результат линейный (рис. 8), просто абсцисса y

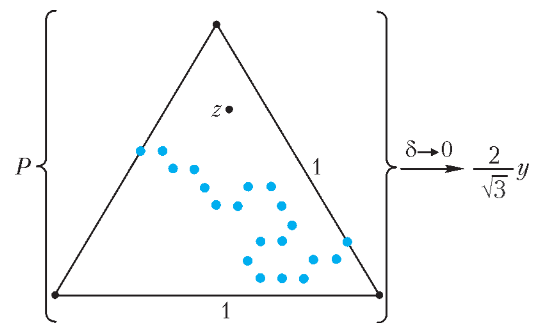


Рис. 8

точки z (только нужно отнормировать так, чтобы в верхней вершине была единица, т.е. умножить на $2/\sqrt{3}$). Идея доказательства на самом деле очень простая. Я вполне мог бы рассказать тут доказательство и даже не всех бы утомил, это заняло бы еще 10 минут, но я лучше не буду. Есть простой комбинаторный аргумент, который говорит, что эта функция от z (приблизительно) гармоническая, то есть в точке z она (примерно) равна среднему арифметическому своих соседей. У вершины шестиугольной решетки соседей будет три. И если мы знаем что-то о поведении гармонической функции на границе, мы потом ее можем восстановить и внутри треугольника, и в нашем случае получается, что функция линейная. Доказательство работает и для других областей, только ответ получается более сложный.

Это пример, когда задачу довольно просто сформулировать. Кстати, интересно, что простая формулировка играет большую роль. Я вначале увидел формулировку Карди, подумал над ней три дня, и стал

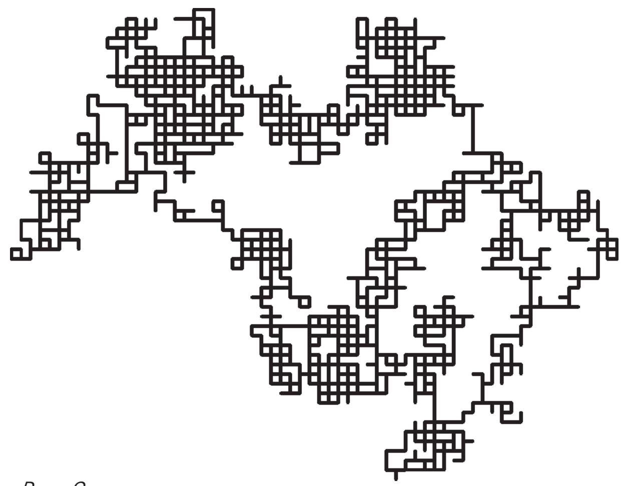
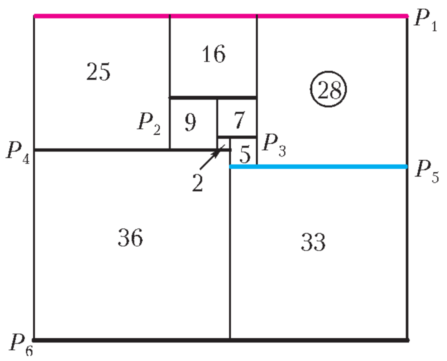


Рис. 9

заниматься чем-то другим. А потом Карлесон рассказал свою переформулировку, и после этого я уже думал полгода и получилось.

Другая интересная черта перколяции в том, что она связана со многими другими явлениями, даже из классической науки, которую проходят в школе. Есть случайный процесс, который упоминается в курсах биологии и физики, – броуновское движение (рис. 9). Роберт Браун, шотландский ботаник, открывший ядро клетки, в 1827 году увидел в микроскоп хаотическое движение маленьких частичек внутри зернышек пыльцы. И он тогда очень серьезно к этому подошел. До него многие наблюдали это движение, например, швед Ян Ингенхауз, но Браун серьезно подошел к исследованиям и правильно поставил вопрос. Сначала он очень обрадовался, решив, что открыл источник жизни в растениях. Но потом он решил проверить, есть ли такое движение в неживой материи, и выяснилось, что тоже есть, даже в камнях, давно не соприкасавшихся с живым (Браун даже рассмотрел под микроскопом кусок Сфинкса!). Долгое время это движение оставалось необъясненным, математическая модель была в итоге построена Альбертом Эйнштейном и Норбертом Винером. Причиной оказались беспорядочные удары (невидимых в микроскоп) молекул в частичку, и статья Эйнштейна была одним из первых экспериментальных подтверждений атомного строения материи. В оптический микроскоп нельзя было увидеть молекулу, но можно было увидеть частичку, которая гораздо больше и в которую молекула ударяется, и это движение ведет к случайному блужданию. Каждый удар – это какой-то скачок. Это дискретная модель, ее тоже можно моделировать на решетке. И в пределе, если смотреть издалека и если брать очень маленькие молекулы, это будет непрерывный процесс, который называют броуновским движением или процессом Винера. И опять же, вне зависимости от того, какую мы жидкость возьмем и на какой решетке смоделируем, траектории будут одни и те же. И что самое интересное – есть универсальность даже на уровне связи с перколяцией: у траекторий броуновского движения граница тоже будет размерности $4/3$, и это будет та же самая кривая, что для кластера перколяции. Кластеры разные, а граница одна и та же. Эту гипотезу сформулировал «отец фракталов» Бенуа Мандельброт, а доказали француз Венделен Вернер, американец Грег Лоулер и израильтянин Одед Шрамм – замечательный пример международного сотрудничества!

Я уже сказал, что в перколяции основной инструмент – это гармонические функции, и для броуновского движения они



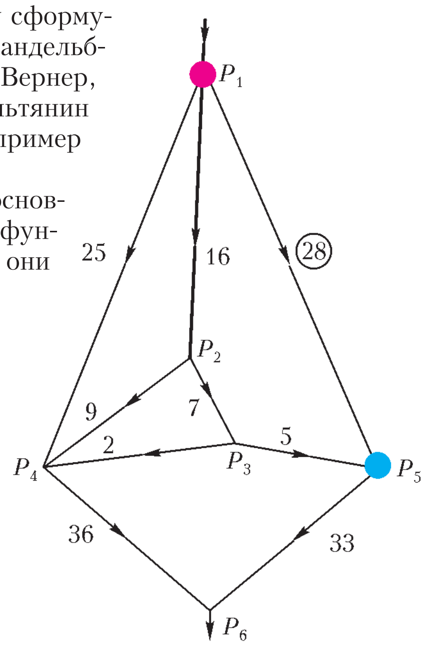


Рис. 10

тоже играют важную роль. На самом деле они появляются и в школьном курсе – их изучают в электростатике в связи с законами Кирхгофа.

В 1847 году Кирхгоф изучал движение тока по цепям и предложил моделировать их графами – вот, скажем, справа на рисунке 10[2] изображена электрическая цепь и нарисован ток, который по ней течет. Что говорят два закона Кирхгофа? Первый закон Кирхгофа говорит, что в вершину, если там нет источника тока, втекает столько же, сколько вытекает. Например, посмотрим на вершину, обведенную синим, P_5, в нее втекают токи 28 и 5, а вытекает ток 33. А второй закон Кирхгофа говорит, что если вы возьмете какой-то цикл и пройдетесь вдоль него, то суммарный ток будет нулевым (если все сопротивления одинаковые).

Тогда потенциал течения этого тока будет гармонической функцией. Он будет как раз обладать свойством, что значение в каждой точке – это среднее значение по соседям. Очень интересно, что после Кирхгофа математики про гармонические функции на некоторое время забыли, а одной из причин возвращения стала опять же задача для школьников. Она появилась в нескольких сборниках начала XX века, возможно, первым ее сформулировал знаменитый российский математик Н.Н.Лузин, предположив, что квадрат нельзя разбить на квадраты разного размера. На одинаковые квадраты разбить просто, скажем, квадрат 4×4 – на четыре квадрата 1×1. А можно ли разбить на квадраты разного размера? И четыре студента-первокурсника Брукс, Смит, Стоун и Тутте в Тринити-колледж в Кембридже придумали решение в 1940 году. Они стали не квадраты резать ножницами, а искать электрические цепи, придумав соответствие между электрическими цепями и разбиениями квадратов. Как говорится, одна картинка стоит тысячи слов, и их соответствие тоже проще объяснить на примере рисунка 10. Слева – разбиение прямоугольника на квадраты, а справа – электрическая цепь. Горизонтальные отрезки соответствуют вершинам. Вот, скажем, красный отрезок – это красная вершина, синий отрезок – это синяя. А на ребре, соединяющем их, мы пишем длину стороны этого квадрата, т.е. 28. И получается, что разбиение на квадраты дает нам в точности два закона Кирхгофа. Например, в синюю вершину сверху втекают токи 5 и 28, и синей стороны сверху касаются два квадрата размером 5 и 28. А вытекает ток 33 – это нижний квадрат со стороной 33. Вот вам первый закон Кирхгофа. А второй дается вертикальными отрезками: суммы размеров квадратов слева и справа от вертикального отрезка равны, это соответствует тому, что на электрической схеме суммарный ток вокруг грани нулевой.

Поэтому достаточно не квадрат разбить на квадраты, а найти соответствующую цепь, удовлетворяющую законам Кирхгофа. И они нашли пример (рис.11), вопреки ожиданиям Лузина! Опять же интересно, что это задача для школьников, но ее решение заняло 20 лет серьезной работы математиков и привело к гораздо более интересным математическим исследованиям.

Это один только пример из современной математики, и мне опять хочется подчеркнуть – математика сейчас очень активная наука, все ее области взаимосвязаны. Математика очень активно сотрудничает с

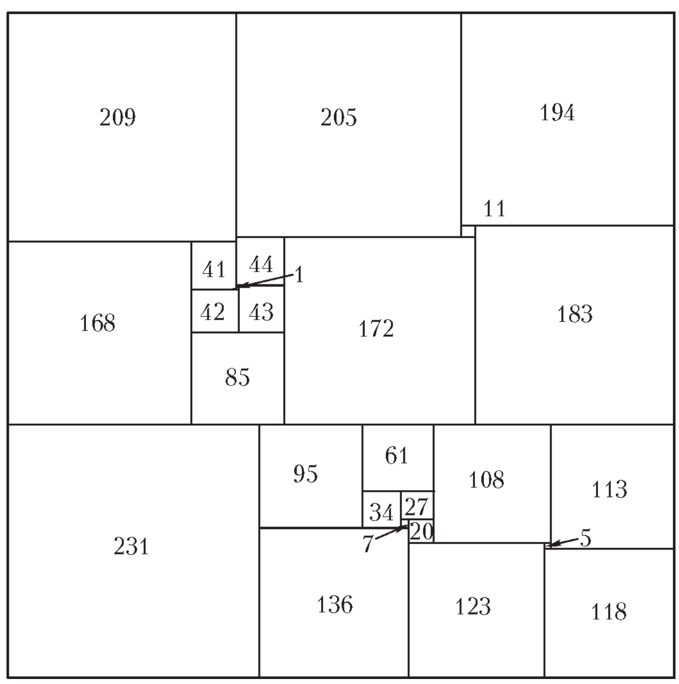


Рис. 11

[2] *Рисунки 10 и 11 взяты из статьи Брукса, Смита, Стоуна и Тутте «Разбиение прямоугольников на квадраты» (Duke Math. J. 7 (1940), p. 312–340).*

физикой, экономикой, биологией и другими науками. Она очень активно применяется в обыденной жизни, хотя часто мы этого не замечаем. Ну и сами по себе чисто математические задачи бывают очень интересными. Более того, до сих пор есть замечательные задачи, которые можно объяснить школьникам. В описанной задаче очень простые правила приводят к сложным и глубоким явлениям – так часто происходит и в природе.

Второе, что я хотел обсудить, – это школьное образование с точки зрения ученого-математика. Я учил и школьников, и студентов во многих странах: в России, в США, в нескольких европейских странах. Подумав, я решил, что об этом я скажу совсем немного. Потому что условия очень разные в разных странах, проблемы кажутся разными. У кого-то есть ЕГЭ, у кого-то нет, скажем, в Америке подобный экзамен тоже есть, а в Швейцарии его нет. У кого-то хорошие школьные традиции, как, скажем, у нас или в Швейцарии, у кого-то похуже, как, скажем, в Америке. Но главная проблема, видимо, одна и та же. Во всех странах хотят сохранить или улучшить свой уровень математического образования. И везде учителя и ученые пытаются объяснить, что математическое образование сейчас очень важно для людей. В России у нас в решении этих проблем есть преимущество. Во второй половине XX века у нас было создано, пожалуй, лучшее математическое образование в мире. И это не только с наших слов, хотя здесь похвастаться не стыдно. Можно спросить, что про наше образование думают европейцы или американцы. Я разговаривал и с учителями математики, и с учеными, которые встречали наших выпускников в 60-е – 70-е годы. Говорят, что на них это производило удручающее впечатление – сколько наш студент или школьник знает по сравнению с американским или французским школьником. У нас были – и сейчас есть – многие элементы, которых в других странах не было вообще. Физико-математические школы, потом – совершенно замечательная внешкольная система, которая сегодня важна как никогда, потому что она может более дифференцированно работать, чем школа, и может охватывать учащихся разного уровня с разными интересами. Здесь все было, многое остается: кружки, заочные математические школы, очень массовые олимпиады – хорошая система отбора заинтересованных школьников. Несомненно, все это нужно сохранить и улучшить.

Когда мы думаем про будущее математического образования, то главный вопрос – зачем и почему мы преподаем математику, что в школе, что в университете. Может быть, это немножко крамольная мысль и ее опасно, не объяснив, говорить учителям других предметов. Но мы, в основном, изучаем геометрию Евклида не затем, чтобы изучать геометрию Евклида. Конечно, она играет важную роль в школьном курсе физики, но большинство людей не будут применять ее в жизни. Основная же цель – это научить человека думать, научить его рассуждать логически, объяснять свою точку зрения. Древние греки выделяли – и это потом прошло через все средневековье – семь свободных искусств, и даже сейчас еще на многих западных факультетах первая степень называется «бакалавр искусств», а не «бакалавр наук». В первых трех свободных искусствах, кроме грамматики, были логика и риторика, то есть умения логически рассуждать и отстаивать свою точку зрения, а среди следующих четырех, помимо музыки и астрономии, присутствовали арифметика и геометрия. Причина столь заметного присутствия математики и близких дисциплин проста: еще древние греки понимали, что для каждого человека важно уметь думать и рассуждать, и математика – это лучший способ этому научиться.

Это было важно в любое время, и сейчас – важно как никогда. То, что именно изучая математику, люди учатся думать, применимо и к школьному, и к университетскому образованию. У меня есть несколько бывших студентов, особенно из американцев, которые работают аналитиками в банках в Нью-Йорке или в Лондоне. И интересно – банки часто предпочитают аналитиками нанимать людей, защитивших кандидатскую диссертацию по математике или теорфизике, а не по финансовым наукам. Как они рассуждают? Эти люди умеют думать и разбираться в сложных вещах, а уж конкретным финансовым вопросам мы запросто научим их на месте. Если же человека не научили думать в университете и в школе, дело поправить уже сложно. Когда я смотрю на своих однокурсников или товарищей по 239-й физико-математической школе, или просто на бывших студентов, покрывается очень большой спектр профессий: от физиков до биологов, от театроведов до теологов, и я не слышал, чтобы кто-то жалел о том, что его учили математике – все говорят, что это помогает независимо от твоих будущих занятий. И даже для самих будущих математиков в школе, видимо, важнее научиться думать, а не выучить какую-то конкретную область. Когда ко мне приходит студент, конечно, хочется какого-то минимального уровня базовых знаний, но умение думать и рассуждать, понимание, что такое доказательство – гораздо важнее.

И поэтому хочется сохранить и повысить уровень математического образования у нас в России, да и вообще в мире, сделать образование более интересным и от этого более эффективным. Не так важно, каким областям мы научим, важно, чтобы ученики научились думать. В России у нас было много уникального, нужно сохранить и улучшить то, что есть особенного и хорошего в нашей системе.

Большое спасибо за внимание! Успехов всем нам, а главное – хороших учеников!