Семейство формул Лагранжа

И.КУШНИР

Возможно, не существует открытий ни в элементарной математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны без аналогии.

Д.Пойа

В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC (РИС.1) ОБОЗНАЧИМ AL БИССЕКТрису угла BAC. Формула Лагранжа имеет вид

$$AL^2 = AC \cdot AB - CL \cdot LB. \qquad (1)$$

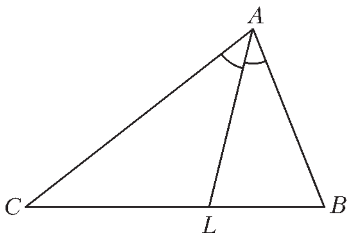

Рис. 1

Ее мы назовем первой формулой Лагранжа. В учебной литературе она известна еще с XVIII столетия, правда тогда биссектрису называли «равноделящей» («Собрание геометрических теоремъ и задачъ», составил Е.Прнивальский, издание седьмое, Москва, 1901 г.). Долгие годы доказательство формулы (1) было громоздким, да и сама она носила «подсобный характер» – с ее помощью биссектриса внутреннего (и внешнего) угла треугольника выражалась тремя сторонами a, b и c треугольника.

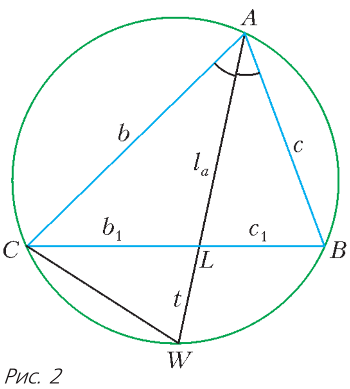

Рис. 2

На формулу обратили внимание, когда появилось ее доказательство с помощью вспомогательной окружности (рис.2). Вокруг треугольника ABC опишем окружность и продлим биссектрису AL до пересечения с окружностью в точке W. Обозначим $BL = c_1$, $CL = b_1$, $WL = t$, $AL = l_a$. Треугольники AWC и ABL подобны:

$$\frac{AW}{AB} = \frac{AC}{AL}, \text{ или } \frac{l_a + t}{c} = \frac{b}{l_a}, \text{ откуда } l_a^2 + l_a t = bc.$$

Но $l_a t = b_1 c_1$ (теорема о произведении отрезков хорд), и $l_a^2 = bc - b_1 c_1$. Формула (1) доказана.

Популярен и второй способ доказательства (с применением теоремы косинусов для треугольников CAL и BAL):

$$b_1^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\angle A}{2}, \quad c_1^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Сравнивая выражения для $\cos\frac{\angle A}{2}$ из обеих формул, получим

$$\frac{b^2 + l_a^2 - b_1^2}{2b} = \frac{c^2 + l_a^2 - c_1^2}{2c},$$

или

$$l_a^2 (b - c) = bc(b - c) - \left(cb_1^2 - c_1^2 b\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}, \text{ или } bc_1 = b_1 c,$$

имеем

$$cb_1^2 - c_1^2 b = c_1 b_1 b - c_1 b_1 c = c_1 b_1 (b - c).$$

Значит, $l_a^2 (b - c) = bc(b - c) - c_1 b_1 (b - c)$. Пусть $b \neq c$. Тогда $l_a^2 = bc - b_1 c_1$. Если $b = c$, формула (1) очевидно следует из теоремы Пифагора.

Формула Лагранжа и отрезок *AW*

Формулу (1) запишем в виде

$$l_a^2 = bc - l_a t \ \text{ (где } t = LW\text{)}.$$

Тогда

$$l_a^2 + l_a t = bc, \text{ или } l_a (l_a + t) = bc.$$

Поскольку $l_a + t = AW$, то формулу (1) можно записать в виде

$$bc = l_a \cdot AW, \qquad (1^0)$$

или

$$\frac{AW}{b} = \frac{c}{l_a}. \qquad (1^1)$$

Получили еще один вид формулы Лагранжа. Может быть, запись в виде (1^1) привела к выводу формулы (1) с помощью подобия треугольников AWC и ABL. Это подобие мы назовем первым замечательным подобием.

В 1987 году на XXVIII Международной математической олимпиаде от Советского Союза была предложена и принята жюри моя задача[1]:

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника в точке W (отличной от A); M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC. Докажите, что четырехугольник AMWN равновелик треугольнику ABC.

Прошло почти четверть века, чтобы улыбнуться и сказать – решение очевидно: это формула Лагранжа (рис.3).

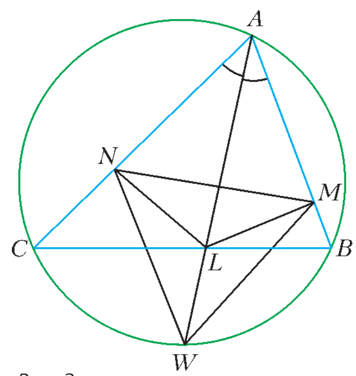

Рис. 3

Действительно, для этого достаточно доказать формулу

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AW \cdot MN$$

(площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна полупроизведению этих диагоналей). Воспользуемся формулой Лагранжа вида (1^0) $bc = AW \cdot l_a$ и домножим ее на $\frac{1}{2}\sin\angle A$:

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AW \cdot l_a \sin\angle A. \qquad (\blacktriangle)$$

Поскольку вокруг четырехугольника можно описать окруж-

---

[1] *Буквы в условии изменены в соответствии с обозначениями этой статьи.*

ность с диаметром AL, то $l_a \sin\angle A = MN$, откуда

$$S = \frac{1}{2} AW \cdot MN, \qquad (1\text{-А})$$

а значит, мы решили задачу Международной олимпиады.

Однако, стоит в формуле (▲) «подвинуть» множитель $\sin\angle A$:

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AW \sin\angle A \cdot l_a,$$

и мы получим новую формулу, которую, как и формулу (1-А), можно причислить к семейству формул Лагранжа:

$$S = \frac{1}{2} U_1 U_2 \cdot l_a, \qquad (1\text{-Б})$$

где U_1, U_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точки W на прямые AB и AC.

Вторая формула Лагранжа

С удовольствием процитирую выдающегося польского математика Стефана Банаха, одного из создателей современного функционального анализа (пространства Банаха):

«Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик – тот, кто устанавливает аналогии доказательств; более сильный математик – тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии».

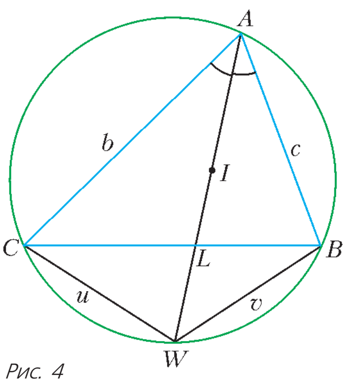

Рис. 4

По аналогии с выводом первой формулы Лагранжа выведем формулу для отрезка AW с помощью теоремы косинусов. Обозначим $BW = v$, $CW = u$ (рис.4). Имеем

$$BW^2 = c^2 + AW^2 - 2c \cdot AW \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Выражая $\cos\frac{\angle A}{2}$ отсюда и из аналогичного равенства для CW^2, получаем

$$\frac{b^2 + AW^2 - u^2}{2b \cdot AW} = \frac{c^2 + AW^2 - v^2}{2c \cdot AW},$$

или

$$b^2 c + AW^2 \cdot c - u^2 c = bc^2 + AW^2 \cdot b - v^2 b,$$

$$AW^2 \cdot (c - b) = bc^2 - v^2 b - b^2 c + u^2 c,$$

$$AW^2 \cdot (c - b) = bc(c - b) + (c - b)u^2.$$

Мы учли, что $BW = CW = IW$, где I – инцентр (теорема трилистника). Пусть $b \ne c$. Тогда

$$AW^2 = bc + CW^2. \qquad (2)$$

Получили формулу, которую назовем второй формулой Лагранжа. Ее можно записать в виде $AW^2 = bc + IW^2$. Для $b = c$ формула (2) очевидна из теоремы Пифагора.

Выведем формулы, аналогичные формулам (1^0) и (1^1). Имеем

$$bc = AW^2 - IW^2, \text{ или } bc = (AW - IW)(AW + IW).$$

Поскольку $AW - IW = AI$, а $AW + IW = AI_a$ (I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC (рис.5)), то

$$bc = AI \cdot AI_a, \qquad (2^0)$$

$$\frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a}. \qquad (2^1)$$

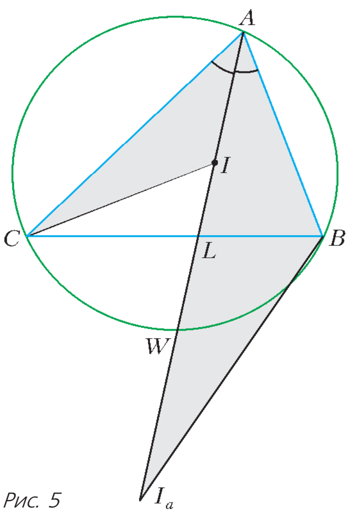

Рис. 5

Получили формулы, родственные формулам Лагранжа. Из формулы (2^1) следует подобие треугольников AI_aB и ACI, которое назовем вторым замечательным подобием.

Формулы (1^0) и (2^0) можно объединить и получить еще один вид формулы Лагранжа:

$$l_a \cdot AW = AI \cdot AI_a,$$

$$\text{или } l_a = \frac{AI \cdot AI_a}{AW}.$$

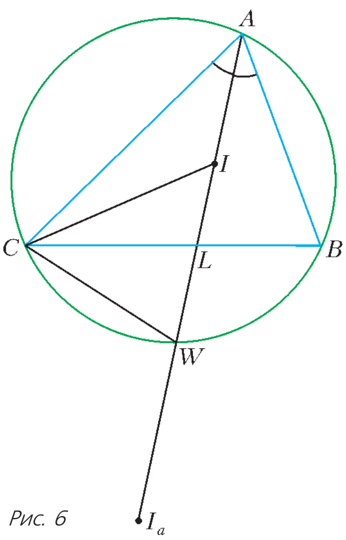

Рис. 6

Учитывая, что $IW = WI_a$ и $CW = IW = \sqrt{AW \cdot WL}$ (докажите!), можно находить соотношения между отрезками, концами которых являются точки A, I, L, W, I_a (рис.6).

Продолжая предложенный путь исследования, найдем формулы, аналогичные формулам (1-А) и (1-Б). Докажем, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} K_1 K_2 \cdot AI_a \quad (2\text{-А})$$

(K_1 и K_2 – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC; рис.7). По формуле (2^0) $bc = AI \cdot AI_a$. Домножим обе части равенства на $\frac{1}{2}\sin\angle A$. Учитывая, что вокруг четырехугольника AK_1IK_2 можно описать окружность с диаметром AI, получим

$$K_1 K_2 = AI \sin\angle A,$$

а значит,

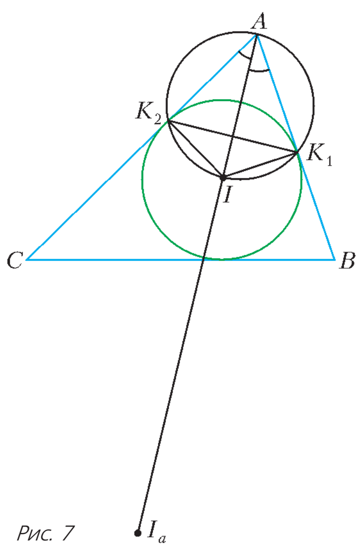

Рис. 7

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AI \sin\angle A \cdot AI_a, \text{ или } S = \frac{1}{2} K_1 K_2 \cdot AI_a.$$

Формула $S = \frac{1}{2} T_1 T_2 \cdot AI$ (2-Б) доказывается аналогично (T_1 и T_2 – точки касания вневписанной окружности со сторонами AB и AC).

Думается, что количество формул семейства Лагранжа можно умножить. Успехов!