Электростатика со льдом

А.СТАСЕНКО

«ЕСЛИ БЫ В ВАШЕМ ТЕЛЕ ИЛИ В ТЕЛЕ ВАШЕГО СОСЕДА (стоящего от вас на расстоянии вытянутой руки) электронов оказалось бы всего на 1% больше, чем протонов, то... силы отталкивания хватило бы, чтобы поднять «вес», равный весу нашей Земли!» («Фейнмановские лекции по физике»). А возможно ли такое?

И тут Отличник вспомнил недавние «ледяные дожди», изломавшие тысячи деревьев в России и порвавшие километры электропроводов. Он знал также о том, что в одной только Америке в результате обледенения небольших самолетов ежегодно погибают десятки человек, а материальный ущерб составляет почти миллиард долларов. И ему пришла в голову светлая мысль: если холодные облачные капли, ударяющиеся о поверхность самолета, электрически заряжены, то, образуя ледяную корку (что очень плохо), они могли бы одновременно и разрушать ее (что было бы хорошо). И Отличник начал рассуждать.

Представим себе тонкую диэлектрическую пленку площадью S, на которой равномерно «размазан» электрический заряд q, так что поверхностная плотность заряда равна $\sigma = q/S$. Будем считать, например, что этот заряд отрицательный: кто-то «напылил» электроны на поверхность пленки. Тогда напряженность электрического поля будет направлена так, как изображено на рисунке 1,*а*, а значение поля $E = \pm\sigma/(2\varepsilon_0)$ представлено на графике на рисунке 1,*б*. Видно, что все векторы $\vec{E}$ направлены нормально к пленке, а величина E при пересечении пленки в направлении оси x претерпевает скачок, направленный вниз и равный $-\sigma/\varepsilon_0$.

Как тут не вспомнить плоский конденсатор! Действительно, если мы поднесем к нашей отрицательно заряженной пленке такую же, но положительно заряженную пленку с такой же по модулю поверхностной плотностью заряда (рис.1,*в*,*г*), то поле между этими плоскостями ($-h/2 < x < h/2$) удвоится: $E = \sigma/\varepsilon_0$, а снаружи исчезнет. Далее, на

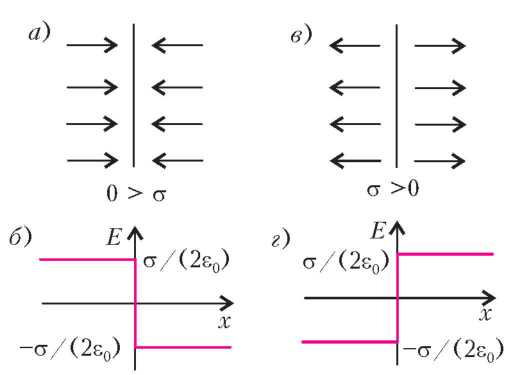

Рис. 1

каждую из этих двух плоскостей, несущих заряды $\pm\sigma S$ и находящихся в поле другой плоскости с напряженностью $\pm\sigma/(2\varepsilon_0)$, действует сила притяжения величиной $F = \sigma S \cdot \sigma/(2\varepsilon_0)$, которую можно трактовать и как внешнее давление:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, эту величину можно рассматривать и как объемную плотность энергии электрического поля – достаточно убедиться в том, что эти физические понятия имеют одну и ту же размерность: $[F]/[S] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Дж}/\text{м}^3$.

Уместно вспомнить, что понятие поля и его физических атрибутов ввел Майкл Фарадей в первой половине девятнадцатого века. Идея поля считается самым важным открытием со времен Ньютона. «Надо иметь могучий дар научного предвидения, – писал А. Эйнштейн, – чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами».

Но вернемся к нашей равномерно заряженной пленке. Представим теперь (рис.2), что пленка вовсе не бесконечно тонкая (да такую и негде достать), а имеет толщину h, а тот же самый заряд q «размазан» равномерно уже по ее объему Sh так, что объемная плотность заряда стала равной $\delta = q/(Sh) = \sigma/h$. Понятно, что вне этой «тонкой пленки», которую можно теперь назвать слоем толщиной h, направление и величина электрического поля не изменяется (см. также рис.1,*б*). А внутри? Разумно предположить,

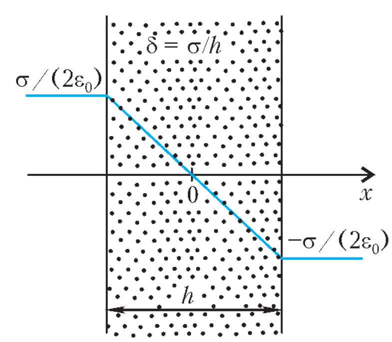

Рис. 2

что поле внутри слоя будет изменяться непрерывно между его значениями на поверхности слоя, причем линейно – ну хотя бы потому, что в средней плоскости ($x = 0$) значение напряженности должно обратиться в ноль (по соображениям симметрии).

Поднесем теперь (рис.3,*а*) к этому слою справа металлический цилиндр с плоским торцом, и пусть радиус этого

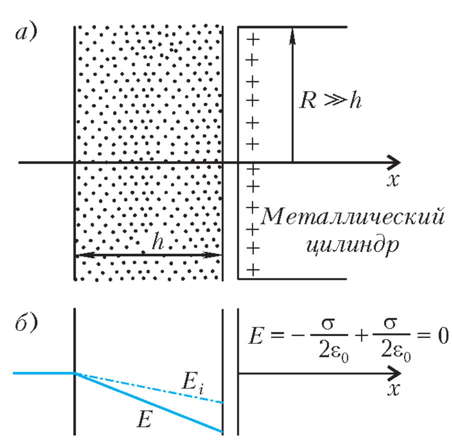

Рис. 3

цилиндра много больше толщины слоя, так что поверхность этого цилиндра «бесконечно далека» от рассматриваемой картины с характерным размером h, помещающейся на наших рисунках. Да, но ведь внутри металла электрическое поле равно нулю (иначе в металле побежал бы электрический ток). А это означает, что на поверхности торца должен возникнуть распределенный *положительный* заряд с плотностью, в точности равной σ (по модулю). Электрическое поле от этого распределенного заряда аналогично первоначальному (см. рис.2), только противоположно по знаку (оно отдельно изображено на рис.1,*в,г*), так что вне слоя суммарная напряженность поля станет равной нулю (рис.3,*б*).

Но при чем тут лед, обещанный выше? А при том, что пора учесть, что наши первоначальные заряды с объемной плотностью $\delta = \sigma/h$ должны быть вморожены в диэлектрик, т.е. в среду, не обладающую свойством электропроводности, – а ведь мы до сих пор считали, что они «развешены» кем-то в вакууме. Но если слой обладает диэлектрической проницаемостью ε, то напряженность электрического поля E_i в нем должна быть уменьшена в ε раз (см. рис.3,*б*, пунктир): $E_i = E/\varepsilon$ (тут индекс i происходит, если хотите, от *inner* – внутреннее или, если хотите, от *ice* – лед). Видно, что наибольшее значение этого поля равно

$$E_{\max} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\delta h}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (2)$$

Какую пользу можно извлечь из наших рассуждений? А вот какую: можно оценить внутренние силы, действующие в слое льда. Действительно, если полю в вакууме между двумя заряженными плоскостями мы приписали свойство оказывать давление, то почему бы и в случае с заряженным диэлектриком не приписать полю то же свойство? Только теперь в формулу (1), казалось бы, разумно добавить множитель $(\varepsilon - 1)$ – ведь при $\varepsilon \to 1$ исчезает сам диэлектрик. Однако тут дело сложнее. Хотя при $\varepsilon \to 1$ диэлектрик и превращается в вакуум, напряжение не может исчезнуть: ведь кто-то должен удерживать вместе заряды одного знака. Более точная теория говорит о том, что нужно ввести множитель $2\varepsilon - 1$ (впрочем, это не повлияет на порядок величины искомой оценки).

Строго говоря, силы внутри заряженного диэлектрика различны в разных направлениях. В широко известном учебнике И.Е.Тамма «Основы теории электричества», выдержавшем порядка десятка изданий и сыгравшем большую роль в подготовке отечественных физиков в последние пятьдесят лет, об этом сказано весьма образно: «можно представить себе, что вдоль силовых линий поля натянуты упругие нити, подверженные натяжению... и оказывающие друг на друга боковое давление».

Итак, для наших оценок примем, что наибольшее механическое напряжение внутри равномерно заряженного диэлектрика равно $E_{\max}^2\varepsilon_0(2\varepsilon - 1)/2$, или, используя формулу (2),

$$p_{\max} = \frac{\delta^2(2\varepsilon - 1)h^2}{2\varepsilon_0\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Пусть теперь рисунок 3,*а* изображает слой льда, налипший на поверхность какого-либо элемента конструкции самолета (например, переднюю кромку крыла), и пусть в переохлажденном облаке, в котором движется самолет, распределены метастабильные (готовые замерзнуть) капли с концентрацией n и радиусом a. Тогда массовая плотность капель в облаке равна

$$\rho_\infty = n \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0,$$

где ρ_0 – плотность воды. Далее, допустим (для численной оценки сверху), что каждая капля несет максимально возможный заряд, определенный предельным значением напряженности электрического поля E_* на ее поверхности, выше которого в воздухе начнется стекание заряда с поверхности капли. Тогда, согласно закону Кулона, этот заряд равен

$$Q = E_* \cdot 4\pi a^2 \varepsilon_0.$$

При образовании наледи произойдет уплотнение в ρ_i/ρ_∞ раз, где ρ_i – массовая плотность льда. Поэтому объемная плотность заряда станет равной

$$\delta = nQ\frac{\rho_i}{\rho_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0} E_* \cdot 4\pi a^2 \varepsilon_0 \frac{\rho_i}{\rho_\infty} = \frac{3\rho_i}{\rho_0}\frac{\varepsilon_0 E_*}{a}.$$

(Любопытно отметить, что результат оказался не зависящим от «водности» облака ρ_∞, что, впрочем, вполне понятно. Объемная плотность заряда в наледи такая же, как в каждой капле, с поправкой на отличие плотности льда от плотности воды.) Подставляя все это в выражение (3), получим

$$p_{\max} = \left(\frac{3\rho_i}{\rho_0}\frac{\varepsilon_0 E_*}{a}\right)^2 \frac{(2\varepsilon - 1)h^2}{2\varepsilon_0\varepsilon^2} = \frac{9}{2}\left(\frac{\rho_i}{\rho_0}\frac{E_*}{a}\right)^2 \frac{(2\varepsilon - 1)\varepsilon_0 h^2}{\varepsilon^2}.$$

Осталось только сделать численную оценку. Примем $\rho_i = 900$ кг/м^3, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $E_* = 3 \cdot 10^6$ В/м, $a = 10$ мкм $= 10^{-5}$ м, $\varepsilon = 100$, $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Ф/м, $h = 1$ см $= 10^{-2}$ м, тогда

$$p_{\max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^{12}}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^2} \text{ Па} = \frac{9}{4\pi}10^7 \text{ Па}.$$

Это значение вполне сравнимо с измеренными в лабораторных условиях пределами прочности льда. Вот только летать в таких облаках не рекомендуется.

Конечно, рассмотренная геометрия мало похожа на переднюю кромку крыла. В следующем приближении можно было бы рассмотреть цилиндр, учесть, что линии тока воздуха и траектории капель изгибаются перед ним (это связано с известной теоремой Н.Е.Жуковского), и решить численно более сложную задачу.

Но тут другая мысль пришла в голову Отличника: поскольку лед и вода (даже дистиллированная) обладают электропроводностью, заряд может стекать из наледи в проводник! Вернемся к конденсатору, заполненному веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельной проводимостью (величиной, обратной удельному сопротивлению) λ. Ясно, что, чем больше ε, тем больший заряд можно накопить на пластинах (ведь емкость конденсатора пропорциональна $\varepsilon\varepsilon_0$), а чем больше λ, тем скорее конденсатор разрядится. Отсюда очевидно, что характерное время разрядки равно $\tau = \varepsilon\varepsilon_0/\lambda$ (проверьте размерность!). Принимая $\varepsilon = 100$, $\lambda = 10^{-6}$ 1/(Ом·м), получим $\tau = 10^{-3}$ с. Значит, заряд почти мгновенно будет уходить из наледи. Да, но при этом должно выделяться джоулево тепло...

Э, брат, – подумал Отличник, – чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института и с успехом его закончить.

Чего вам и желаем!