Скорость и ускорение

Е.СОКОЛОВ

Для описания состояния движущегося тела в данный момент времени в кинематике вводятся понятия вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ускорения $\vec{a}$. А когда есть два вектора, то естественно поставить вопрос об их взаимном расположении. Например, такой: *может ли угол между скоростью и ускорением быть равным 37°?*

Вопрос непростой, и в нашем классе его обсуждение превратилось в оживленную дискуссию.

Первым у нас всегда спешит с ответом Саша.

– Конечно, нет, такого быть не может! А вот угол 90° между скоростью и ускорением может быть (рис.1,*а*). Мы уже встречались с тем, что когда тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, то у него есть

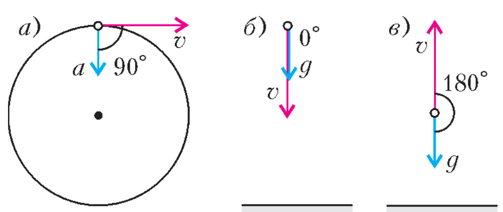

Рис. 1

ускорение. Это ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости, т.е. к центру окружности, поэтому ему дали специальное название – центростремительное ускорение.

– И не только 90°, – поправила его Яна. – Помните, мы говорили, что при свободном падении ускорение тела всегда направлено вниз (рис.1,*б*). Поэтому угол между скоростью и ускорением может быть равен 0°.

– А ведь свободное падение это не только движение вниз, – вмешалась Маша. – Свободным падением можно называть любое движение тела под действием только силы тяжести, например в отсутствие сопротивления воздуха. Поэтому даже когда мяч летит вверх, его ускорение, согласно нашему правилу, по-прежнему направлено вниз (рис.1,*в*). Угол между скоростью и ускорением в этом случае равен 180°.

– Вот мы и ответили на ваш вопрос: угол между скоростью и ускорением может принимать три значения, – подытожил разговор Иван.

– Ну что же, вы нашли три возможных угла. Можете отдохнуть и полюбоваться еще одной знакомой вам картинкой (рис.2). Скажу честно – это намек. На рисунке 2 изображена траектория тела, брошенного под углом к горизонту. Такую ситуацию мы не раз обсуждали и говорили, что скорость тела в каждой точке направлена по касательной к траектории, а ускорение все время направлено вниз. Ведь куда бы ни летело тело, оно всегда свободно падает. Нарисуем для нескольких точек траектории векторы скорости и ускорения (рис.3). В верхнее точке *A* скорость направлена горизонтально, а ускорение направлено вниз. В этой точке угол между скоростью и ускорением равен 90°. Для точки *B* соответствующий угол острый, а для точки *C* – тупой. И понятно, что величины этих углов могут быть любыми.

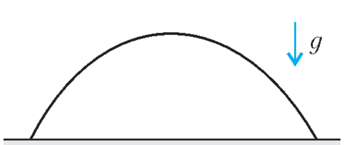

Рис. 2

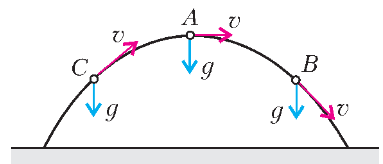

Рис. 3

Итак, вот итог наших размышлений: *угол между скоростью и ускорением может быть любым.*

Это хорошо, что мы нашли правильный ответ, но, к сожалению, жизнь наша от этого только усложнилась. Ведь если бы существовало только три угла, то достаточно было бы выбрать один вариант из трех. Но теперь мы знаем, что ускорение может быть направлено куда угодно, и вариантов стало бесконечно много. Как же быть? Как в задачах правильно рисовать, куда направлено ускорение тела? Сейчас разберемся. Но прежде сделаем общее замечание.

В процессе эволюции человек приобрел способность «видеть» скорость и траекторию. Так, мы хорошо представляем себе, куда полетит брошенный нами снежок, и легко сможем увернуться от летящего в нас снежка. Поэтому вопросы, связанные со скоростью и траекторией, обычно не вызывают сложностей. Но мы не имеем возможности «видеть» ускорение. Вот почему просто так, по наитию, не стоит пытаться его рисовать. Определить, как направлено ускорение в каждом случае, мы можем только с помощью рассуждений, применяя специальные правила. О двух таких правилах мы уже знаем: при равномерном движении тела по окружности ускорение следует направлять к центру окружности (доказывается в кинематике), а при свободном падении – вертикально вниз (доказывается в динамике).

– А есть общее правило для любого движения?

– Да, есть. И его под силу вывести любому первокурснику. Но вы еще не первокурсники, а я очень не люблю рассказывать что-то без доказательств. Давайте поступим так: превратим наше обсуждение в тест на обучаемость. Я честно, хотя и без доказательств, расскажу вам все, что нужно для построения ускорения, и даже открою вам некоторые секреты, а потом вы попытаетесь построить ускорение в десяти простых случаях.

– Согласны. Только разве сложно, зная правила, получить ответ?

– Вот это мы как раз и проверим на опыте. А пока слушайте и задавайте вопросы.

Найти направление ускорения помогают два понятия: нормальная составляющая ускорения и тангенциальная составляющая ускорения. Общее правило заключается в том, что сначала строится каждая из этих составляющих (это несложно сделать), а уже по ним – само ускорение, как показано на рисунке 4.

Нормальная составляющая ускорения – это составляющая, перпендикулярная скорости. Величину нормальной составляющей ускорения всегда можно найти по уже знакомой нам формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Эта составляющая перпендикулярна скорости и направлена по радиусу R к центру кривизны траектории. Нормальная составляющая ускорения (второе, уже знакомое нам название этой составляющей

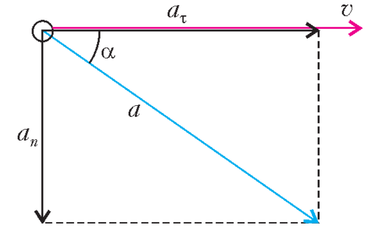

Рис. 4

– центростремительное ускорение) характеризует быстроту изменения направления скорости.

Тангенциальная, или касательная, составляющая ускорения – это составляющая, направленная параллельно скорости. Она характеризует быстроту изменения скорости по величине и определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}\,.$$

Направлять тангенциальную составляющую следует либо по направлению скорости, либо против – в зависимости от того, увеличивается скорость или уменьшается.

Определив обе эти составляющие, мы можем с помощью рисунка 4 восстановить само ускорение (иногда говорят «полное ускорение»). При необходимости модуль ускорения и угол между скоростью и ускорением можно вычислить с помощью теоремы Пифагора и понятия арктангенса:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}\,.$$

Ну как, понятно?

– Да, вроде все ясно. Сначала рисуем нормальную составляющую ускорения перпендикулярно скорости в направлении к центру кривизны – так же, как мы рисовали центростремительное ускорение. Потом строим вторую составляющую – вдоль или против скорости. И после этого по рисунку 4 находим само ускорение.

– Все правильно. Но прежде чем переходить к тесту, я хочу обратить ваше внимание на очень важные частные случаи. Выполните, пожалуйста, такое упражнение: а) укажите два случая движения тела, в которых нормальная составляющая ускорения обращается в ноль; б) укажите два случая движения тела, в которых тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль. Лучше будет, если вы сами ответите на эти вопросы, но ничего страшного не произойдет, если вы просто прочтете следующие два абзаца.

а) Нормальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_n = v^2/R$. А это может произойти в двух случаях. Первый случай видят все: нормальная составляющая обращается в ноль, если скорость обращается в ноль.[1] Поэтому нормальная составляющая ускорения всегда равна нулю в точках остановки тела.

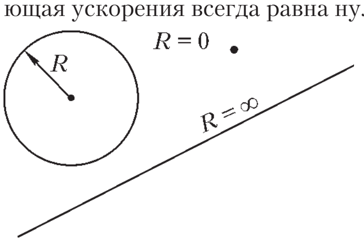

Рис. 5

Второй случай увидит лишь тот, кто знает, что общего у прямой, окружности и точки. Оказывается, и точка, и прямая есть частные случаи окружности (рис.5). Точка – это окружность с радиусом, равным нулю, а прямая – это окружность с радиусом, равным бесконечности. Не верите? Попробуйте нарисовать на компьютере окружность очень большого радиуса. Она практически не будет отличаться от прямой линии. Итак, второй случай, когда нормальная составляющая обращается в ноль, – это случай, когда $R = \infty$, т.е. когда тело движется по прямой. При прямолинейном движении нормальной составляющей ускорения нет.

б) Тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_\tau = \Delta v/\Delta t = v'(t)$. А это тоже может произойти в двух случаях. Первый случай – это равномерное движение, когда модуль скорости вообще не изменяется. Второй случай – это моменты времени, когда модуль скорости достигает максимума или минимума и производная от модуля скорости по времени становится равной нулю.

Наш рассказ о кинематическом методе построения ускорения закончен. Теперь попробуйте выполнить приведенный ниже тест. В нем собраны, пожалуй, все возможные случаи построения ускорения. Отметим, что этот тест не так прост, как кажется.

Тест. *Для каждого из десяти положений тела, изображенных на рисунке 6, определите, как направлено его ускорение.*

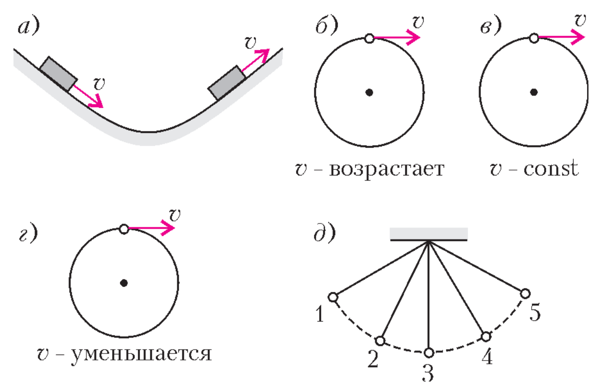

Рис. 6

а) Санки скатываются с горки, а затем заезжают на горку.

б) Тело движется по окружности с возрастающей скоростью.

в) Тело движется по окружности с постоянной скоростью.

г) Тело движется по окружности с уменьшающейся скоростью.

д) Математический маятник совершает колебания. Точки 1 и 5 – крайние точки, 2 и 4 – промежуточные, 3 – самая нижняя точка.

В заключение – одно полезное замечание. Наш разговор о направлении ускорения мы вели на языке кинематики. Однако говорить об этом можно и на языке динамики. Иногда (но не всегда) динамические рассуждения могут оказаться проще кинематических. Например, с помощью динамики очень легко ответить на исходный вопрос об угле $37°$. Динамика учит, что ускорение порождается силой. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{a} = \vec{F}/m$, т.е. куда направлена сила, туда направлено и ускорение. Силу мы можем прикладывать в любом направлении по нашему желанию, поэтому и ускорение, создаваемое этой силой, может иметь любое направление.

[1] *Для знатоков уточним, что полностью эта фраза должна звучать так: «когда скорость обращается в ноль, а радиус кривизны не равен нулю, т.е. точка остановки не является точкой излома траектории».*