

Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике

А.РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение

Комбинаторика – это один из самых увлекательных разделов современной математики. И один из самых бурно развивающихся. Если еще каких-то 100 лет назад можно было сказать, что комбинаторика – это набор красивых, но разрозненных утверждений о перечислении объектов того или иного вида, то сейчас комбинаторика – это полноценная дисциплина, которая постепенно вырабатывает свой собственный язык и систему методов, позволяющих собирать воедино все то многообразие задач, которые совсем недавно казались никак не связанными между собой.

Когда говорят о комбинаторных методах, обычно вспоминают только метод производящих функций, который действительно играет огромную роль при решении *перечислительных* задач. Однако не менее значимы в комбинаторике и задачи *экстремальные*, т.е. задачи отыскания наибольших (наименьших) в том или ином смысле систем объектов. И здесь, конечно, производящие функции ни к чему. Их заменяют инструменты, которые появились буквально в последние десятилетия. Среди них *вероятностный метод* (см. [1], [2]), активно разрабатываемый с середины XX века (во многом благодаря классика венгерской и мировой комбинаторики Полу Эрдешу), *линейно-алгебраический метод* (см. [3]), возникший и вовсе около тридцати лет назад, и *топологический метод* – метод столь же молодой и в то же время столь же перспективный.

В этой статье мы хотим рассказать об исторически первой задаче, которая была решена с помощью топологической технологии. Это так называемая *гипотеза Кнезера*, сформулированная Мартином Кнезером в 1955 году и доказанная Ласло Ловасом в 1977 году. Пафос в том, что постановка задачи исключительно проста и доступна школьнику, а решение ее выходит далеко за рамки школьной программы. Тем не менее, мы построим статью так, что практически все в ней при желании сможет понять заинтересованный старшеклассник. Наша цель – на примере одной конкретной задачи продемонстрировать силу и красоту топологического метода: рассуждение, которое мы в конечном счете проведем, это поистине жемчужина (ср. [4]) комбинаторики, одно из самых элегантных

рассуждений в математике, которые известны автору. И значимость его не только в исключительном изяществе, но и в том, что оно как нельзя лучше свидетельствует о единстве математики: зачастую глубокое знание одного предмета позволяет достичь неожиданно ярких результатов в совершенно иной области; именно так возникают методы.

Отметим, что имеется прекрасная книга [5], в которой дается обзор некоторых наиболее употребительных топологических методов в комбинаторике. Правда, эта книга довольно сложна для первого чтения. Поэтому весьма полезными будут также книги [6] и [7], по которым можно получить наглядное представление о самой топологии.

2. Парно пересекающиеся множества и возникновение гипотезы

Рассмотрим произвольное натуральное число n и множество $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$. Пусть $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{C_n^k}\}$ – совокупность всех k -элементных подмножеств множества \mathcal{R}_n . Иными словами, каждое K_i – это подмножество множества \mathcal{R}_n , имеющее мощность k . Подчеркнем, что каждое подмножество обозначено у нас обычной заглавной буквой K , а совокупность подмножеств обозначена «красивой» заглавной буквой \mathcal{K} .

В 1955 году Кнезер установил следующий очень простой факт.

Теорема 1. Пусть $k \leq \frac{n}{2}$. Тогда совокупность \mathcal{K} можно представить в виде объединения $n - 2k + 2$ совокупностей, элементы каждой из которых парно пересекаются. Иначе говоря,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \quad (1)$$

причем для любого $i \in \{1, \dots, n - 2k + 2\}$ и любых двух множеств $K_a, K_b \in \mathcal{K}_i$ выполнено $K_a \cap K_b \neq \emptyset$.

Понятно, откуда взялось условие $k \leq \frac{n}{2}$. Во-первых, при $k > \frac{n}{2}$ величина $n - 2k + 2$ становится не больше единицы, что в контексте соотношения (1) нелепо. Во-вторых, при таком k любые два множества из самой совокупности \mathcal{K} имеют непустое пересечение, так что

и впрямь говорить о каком-либо объединении вида (1) смысла нет.

Совокупности, подобные $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-2k+2}$, т.е. состоящие из попарно пересекающихся множеств, играют огромную роль в самых разных областях комбинаторной математики и ее приложений. Например, их можно интерпретировать как *коды* со сравнительно небольшим *расстоянием Хэмминга* между любыми двумя *кодowymi словами*. В теории кодирования они широко распространены.

Доказательство теоремы 1 исключительно легкое, но мы приведем его во всех подробностях.

Доказательство теоремы 1. В качестве совокупности \mathcal{K}_1 возьмем совокупность, состоящую из всех $K_a \in \mathcal{K}$, которые содержат элемент 1 множества \mathcal{R}_n :

$$\mathcal{K}_1 = \{K_a \in \mathcal{K} : 1 \in K_a\}.$$

Очевидно, множества, принадлежащие совокупности \mathcal{K}_1 , попарно пересекаются – как минимум, по элементу 1. Аналогично, положим

$$\mathcal{K}_2 = \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\}, \dots$$

$$\dots, \mathcal{K}_{n-2k+1} = \{K_a \in \mathcal{K} : n-2k+1 \in K_a\}.$$

Какие множества из совокупности \mathcal{K} еще не задействованы? Разумеется, те, которые целиком содержатся в множестве $\{n-2k+2, \dots, n\}$. Это множество имеет мощность $2k-1$, и, стало быть, любые два его k -элементных подмножества пересекаются. В итоге мы вольны положить

$$\mathcal{K}_{n-2k+2} = \{K_a \in \mathcal{K} : K_a \subset \{n-2k+2, \dots, n\}\},$$

и теорема 1 доказана.

Отметим, что суть доказательства теоремы не изменится, даже если мы потребуем, чтобы для любых $i, j \in \{1, \dots, n-2k+2\}$, $i \neq j$, было выполнено $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$. Просто тогда надо брать

$$\mathcal{K}_2 = \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1,$$

$$\mathcal{K}_3 = \{K_a \in \mathcal{K} : 3 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2, \dots$$

В этом случае напомним

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \quad (1')$$

подчеркивая с помощью значка « \sqcup », что объединение (1') теперь *дизъюнктное*, т.е. его элементы попарно не пересекаются.

При всей простоте доказательства теоремы 1 любые попытки уточнить его, т.е. заменить величину $n-2k+2$ на что-либо меньшее, не приводят к успеху, и читатель может сам, вслед за Кнезером, убедиться в этом. Возникает любопытная гипотеза.

Гипотеза. Совокупность \mathcal{K} нельзя представить в виде объединения $n-2k+1$ совокупностей, элементы каждой из которых попарно пересекаются.

Это и есть гипотеза Кнезера. Теперь нам предстоит понять, как она связана с теорией графов, почему обычные комбинаторные средства не помогают ее доказать и какую роль в ее доказательстве играет топология.

3. Небольшой экскурс в теорию графов и переформулировка гипотезы

Мы предполагаем знакомство читателя с простейшими понятиями теории графов, которые легко найти, например, в книге [8]. Тем не менее, давайте аккуратно договоримся о том, что такое *граф*. В этой статье мы будем считать, что у графа не может быть ни петель, ни кратных ребер, ни ориентации. Иными словами, граф – это пара $G = (V, E)$, в которой V – это конечное множество *вершин*, а E – это любой набор *ребер* $\{x, y\}$, $x, y \in V$, с условиями: (i) $\{x, x\} \notin E$ (нет петель); (ii) каждая пара $\{x, y\}$ входит в E не более одного раза (нет кратных ребер); (iii) $\{x, y\} = \{y, x\}$ (нет ориентации).

Изображать графы мы будем совершенно стандартно – точками и соединяющими их отрезками (или дугами).

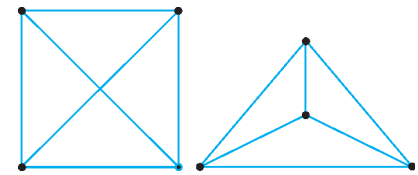


Рис. 1

Скажем, на рисунке 1 приведены примеры некоторых возможных изображений полного графа K_4 , т.е. графа, у которого на четырех вершинах присутствуют («проведены») все возможные шесть ребер.

На рисунке 2 указан объект, который мы в дальнейшем графом считать не будем.

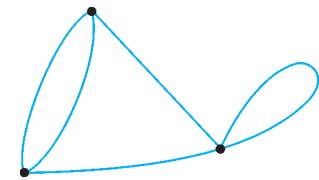


Рис. 2

Нам понадобятся три тесно связанные между собой «экстремальные» характеристики графа.

Назовем *числом независимости* графа $G = (V, E)$ величину $\alpha(G)$, равную размеру самого большого множества вершин графа, внутри которого отсутствуют ребра. Любое такое множество называется *независимым*, и именно отсюда идет название величины $\alpha(G)$. На рисунке 3 приведены примеры графов с числами независимости 2 и 3 соответственно. В первом

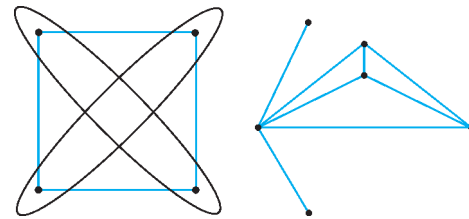


Рис. 3

случае независимых множеств максимальной мощности 2, во втором – 3.

Назовем *кликковым* числом графа $G = (V, E)$ величину $\omega(G)$, равную размеру самого большого множества вершин графа, внутри которого проведены все ребра. Это величина, в некотором смысле противоположная числу независимости. Действительно, если в графе G удалить все ребра и провести вместо них все те ребра, которых в G не было, то получится граф \bar{G} , у которого $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$ и $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$. Фактически, $\omega(G) -$

это количество вершин в любом максимальном (по числу вершин) полном подграфе графа G . Именно такой полный подграф и называется *кликой* в графе.

Назовем *хроматическим числом* графа $G = (V, E)$ величину $\chi(G)$, равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Из определения видно, что каждый цвет – это независимое множество. Таким образом, хроматическое число – это еще и наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить множество вершин графа.

Из последнего рассуждения ясно, что имеет место неравенство $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$. Действительно, даже если сделать каждый цвет максимальным по мощности, то эта мощность будет равна $\alpha(G)$, и, стало быть, даже в таком случае потребуется $\frac{|V|}{\alpha(G)}$ цветов. Еще проще неравенство $\chi(G) \geq \omega(G)$, ведь на покраску всего графа уйдет никак не меньше цветов, чем на покраску любой клики в нем. А на клику нужно столько цветов, сколько в ней вершин.

Какое же все это имеет отношение к гипотезе Кнезера? Сейчас мы введем в рассмотрение *кнезеровский граф*, и все окончательно прояснится.

Итак, пусть по-прежнему $n \in \mathbb{N}$, $k \leq \frac{n}{2}$. Назовем кнезеровским граф $KG_{n,k} = (V, E)$, у которого

$$V = \mathcal{K}, \quad E = \{\{K_a, K_b\} : K_a, K_b \in \mathcal{K}, K_a \cap K_b = \emptyset\}.$$

Иными словами, вершинами кнезеровского графа служат k -элементные подмножества множества \mathcal{R}_n , а ребра кнезеровского графа образованы парами непересекающихся k -элементных подмножеств множества \mathcal{R}_n .

Независимые множества в таком графе – это, конечно же, совокупности, состоящие из попарно *пересекающихся* множеств $K_a \in \mathcal{K}$, т.е. в аккурат совокупности типа $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-2k+2}$. А значит, гипотеза в новых терминах звучит так: *хроматическое число кнезеровского графа равно $n - 2k + 2$: $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$* . При этом неравенство $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$ есть тривиальное следствие соотношения (1'), и лишь оценка $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$ является предположительной. В ней вся загвоздка.

В последующих разделах мы попробуем установить искомое неравенство с помощью стандартных оценок $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ и $\chi(G) \geq \omega(G)$. Но прежде обсудим простейшие примеры кнезеровских графов (с конкретными n и k).

4. Несколько простых примеров

Есть два простейших частных случая, которые в некотором смысле противоположны друг другу. В первом из них $k = 1$. Тогда вершины кнезеровского графа (т.е. графа $KG_{n,1}$) суть одноэлементные множе-

ства $\{1\}, \{2\}, \dots \subset \mathcal{R}_n$. Разумеется, эти множества попарно не пересекаются, так что ребра в графе $KG_{n,1}$ соединяют каждые две вершины. Иначе говоря, граф $KG_{n,1}$ – это полный граф K_n на n вершинах. Его хроматическое число равно n , и это прекрасно согласуется с гипотезой:

$$\chi(KG_{n,1}) = \chi(K_n) = n = n - 2 \cdot 1 + 2.$$

Во втором случае $k = \frac{n}{2}$ (здесь мы считаем, что число n четно). Тогда кнезеровский граф $KG_{n,n/2}$ представляет собой *паросочетание*, т.е. имеет вид графа, изображенного на рисунке 4 (паросочетанием называется набор ребер, никакие два из которых не имеют общих вершин; это своего рода независимое множество ребер). Очевидно теперь, что

$$\chi(KG_{n,n/2}) = 2 = n - 2 \cdot \frac{n}{2} + 2,$$

и это снова подтверждает гипотезу.

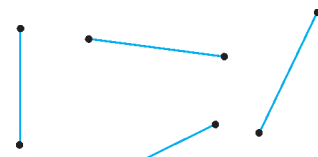


Рис. 4

Есть еще один симпатичный пример – совсем частный, но любопытный. Это граф $KG_{5,2}$. У него $10 = C_5^2$ вершин, являющихся парами элементов из $1, \dots, 5$. Если «правильно» изобразить этот граф, то получится картинка, изображенная на рисунке 5. В теории

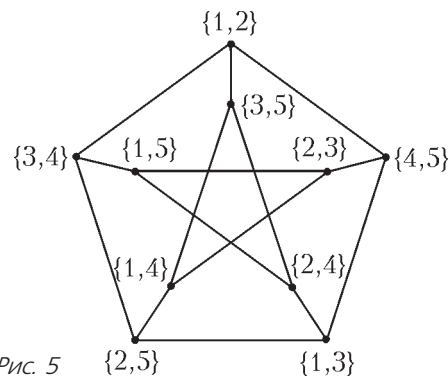


Рис. 5

графов эта картинка хорошо известна. Она называется *графом Петерсена*. Ясно, конечно, что хроматическое число такого графа равно трем. Верхнюю оценку мы давно знаем: $\chi(KG_{5,2}) \leq 5 - 2 \cdot 2 + 2 = 3$. Нижняя же следует хотя бы из наличия нечетного цикла в нашем графе.

О графе Петерсена можно почитать в замечательной книге [8].

5. Применим оценку $\chi(G) \geq \omega(G)$

Ну, это совсем легко. Действительно, что такое клика в графе $KG_{n,k}$? Это, по сути, любой набор попарно непересекающихся k -элементных подмножеств множества \mathcal{R}_n . Естественно,



Рис. 6

типичная клика выглядит так, как показано на рисунке 6. И размер ее заведомо не превышает $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$,

где через $[x]$ мы обозначаем максимальное целое число, не превосходящее x . В итоге имеем неравенство

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \omega(KG_{n,k}) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Абсолютно ничего хорошего. Вместо желаемой оценки вида $n - 2k + 2$ имеем примерно в k раз худший результат.

Стоит отметить еще одно любопытное обстоятельство. Допустим, $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$. Тогда

$$\omega(KG_{n,k}) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil < 3,$$

т.е. в кнезеровском графе нет даже треугольников. Тем не менее, мы верим, что хроматическое число такого графа равно

$$n - 2 \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1 \right) + 2 \geq n - 2 \cdot \left(\frac{n}{3} + 1 \right) + 2 = \frac{n}{3}.$$

Это, на первый взгляд, довольно удивительно: граф без треугольников и со сколь угодно большим хроматическим числом. Что ж, тем интереснее.

6. Применим оценку $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$

Здесь тоже все легко. Мы ведь отлично знаем, что $\alpha(KG_{n,k}) \geq C_{n-1}^{k-1} = |\mathcal{K}_1|$ (см. доказательство теоремы 1). А стало быть, самое лучшее, на что мы можем теперь рассчитывать, это оценка

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{C_n^k}{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{n}{k}.$$

Даже если бы мы доказали, что $\alpha(KG_{n,k}) = C_{n-1}^{k-1}$, это нам не помогло бы.¹

Получается весьма забавная ситуация. Обе известные нам комбинаторные оценки хроматического числа приводят к практически одному и тому же результату.

В первом случае мы имели неравенство $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$.

Во втором случае мы получили неравенство $\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{n}{k}$. С учетом того, что хроматическое число

всегда целое, можно написать $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$, где $\lceil x \rceil$ — это минимальное целое число, не меньшее x . Таким образом, вторая оценка только на единицу больше первой, да и то лишь при тех k , которые не делят n . Мало мы приблизились к заветной цели, пора переходить к топологии.

7. Теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана

Мы предполагаем знакомство читателя с самыми азами математического анализа. По существу, нам

¹ Этот факт верен. Он называется теоремой Эрдеша–Коррадо. Доказательство этой теоремы (не вполне тривиальное) можно найти в книге [2].

нужны лишь следующие совсем базовые объекты и понятия. Во-первых, нам потребуется пространство \mathbb{R}^d . Во-вторых, в этом пространстве мы рассмотрим сферу. Сфера — это, разумеется, поверхность шара. Если размерность шара естественно считать равной размерности всего пространства, то размерность сферы полагают на единицу меньшей. Скажем, круг на плоскости (в пространстве \mathbb{R}^2) — это двумерное множество, а его граница — окружность — одномерна: это попросту отрезок со склеенными концами. Посему обозначим шар единичного радиуса в \mathbb{R}^d через B^d , а его сферу — через S^{d-1} :

$$B^d = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1 \},$$

$$S^{d-1} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1 \}.$$

В-третьих, назовем $A \subset S^{d-1}$ *открытым множеством*, если для любого $\mathbf{x} \in A$ найдется достаточно маленький шарик B с центром в \mathbf{x} , у которого все точки, лежащие на сфере, содержатся и в A : $(B \cap S^{d-1}) \subset A$. Назовем $A \subset S^{d-1}$ *замкнутым*, если его дополнение до всей сферы открыто.

Еще следует иметь представление о плоскостях в многомерных пространствах. Под (*гипер*)плоскостью мы будем понимать аналог обычной плоскости в \mathbb{R}^3 . Если в \mathbb{R}^3 любая плоскость задается уравнением $ax + by + cz = m$, то в общем случае плоскость — это множество

$$P = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = m \}.$$

В этом смысле прямая на обычной плоскости \mathbb{R}^2 — это тоже своего рода гиперплоскость в двумерном пространстве. Размерность гиперплоскости равна $d - 1$.

В 1930 году Л.А.Люстерник и Л.Г.Шнирельман доказали следующую замечательную теорему.

Теорема 2. Пусть A_1, \dots, A_d — замкнутые множества на сфере S^{d-1} , причем $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$. Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т.е. существует A_i и такая точка $\mathbf{x} \in A_i$, что $-\mathbf{x} \in A_i$.

Теорема 2 в случае плоскости ($d = 2$) очень проста, но мы докажем ее в первом параграфе последнего раздела (см. также популярную статью [9]). Уже случай обычного пространства ($d = 3$) совсем не тривиален. В прекрасной книге [10] содержится элементарное рассуждение, которое доказывает утверждение теоремы 2 при $d = 3$. Для полноты картины и большей замкнутости изложения мы приведем подобное рассуждение во втором параграфе последнего раздела. Общий случай элементарному изложению не поддается, и мы лишь можем отослать заинтересованного читателя к книге [5].

Теорема 2 в некотором смысле не может быть улучшена. А именно, в ней нельзя заменить d на $d + 1$. Иными словами, сферу S^{d-1} можно покрыть $d + 1$ замкнутым множеством, ни одно из которых не содержит противоположных точек. В третьем параграфе последнего раздела мы расскажем, почему это так при $d = 3$.

Стоит отметить, что из последнего обстоятельства (возможности покрыть сферу $d + 1$ множеством) возникла знаменитая гипотеза Борсука, о которой есть масса литературы, в том числе популярной: см. [10], [11].

В 1932 году К. Борсук, не зная о работе Люстерника и Шнирельмана, доказал ряд утверждений, равносильных теореме 2. Он исходил из соображений, высказанных незадолго до того С. Уламом. Именно поэтому все вариации на тему теоремы 2 принято сейчас называть теоремами Борсука–Улама (в западной традиции) и теоремами Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана (в российской традиции).

Для доказательства гипотезы Кнезера нам потребуются следующий вариант теоремы 2.

Теорема 3. Пусть A_1, \dots, A_d – множества на сфере S^{d-1} , причем часть из них замкнута, часть открыта и $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$. Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т.е. существует A_i и такая точка $\mathbf{x} \in A_i$, что $-\mathbf{x} \in A_i$.

Теорема 3 сильнее теоремы 2. В ней мы не предполагаем, что все множества, покрывающие сферу, замкнуты; мы разрешаем им также быть открытыми. Отметим, что случай, когда все множества открыты, равносильен случаю, когда все множества замкнуты. Это не очевидно, и доказательство этого можно найти в книге [5].

В четвертом параграфе последнего раздела мы обсудим еще несколько формулировок, равносильных теореме 2. А в следующем разделе мы приведем поистине удивительное рассуждение, которое с помощью теоремы 3 доказывает гипотезу Кнезера.

8. Доказательство гипотезы

Как мы уже говорили, первым гипотезу доказал Л. Ловас в 1977 году. Однако рассуждение, которое мы изложим ниже, предложил в 2002 году студент Джошуа Грин. В разделе 8.1 мы определим ряд вспомогательных понятий, а в разделах 8.2 и 8.3 проведем обещанное рассуждение.

8.1. Вспомогательные понятия

Пусть Π – любая гиперплоскость в \mathbb{R}^d , проходящая через центр сферы S^{d-1} , т.е. через точку $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда множество $S^{d-1} \cap \Pi$ представляет собой сферу

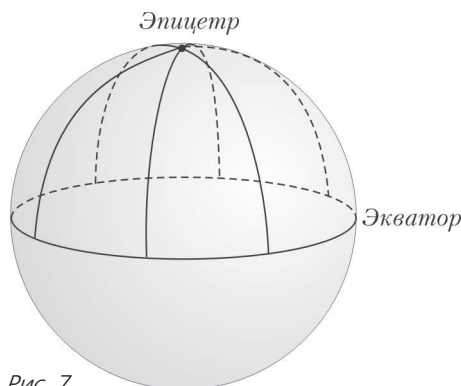


Рис. 7

S^{d-2} . Для случаев $d = 2$ и $d = 3$ это наглядно очевидно. В первом случае мы пересекаем окружность с прямой и получаем две точки, но

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$

и все в порядке. Во втором случае мы получаем окружность, и снова нет проблем. В общем случае картина аналогичная.

Любую сферу $S^{d-2} = S^{d-1} \cap \Pi$ назовем *экватором* на сфере S^{d-1} . Множество точек сферы S^{d-1} , которые лежат по одну сторону от некоторого экватора, назовем *полусферой*. Если полусфера не включает в себя свой экватор, то она открыта, и мы будем явно говорить о ней как об *открытой полусфере*. Точку полусферы, которая равноудалена от всех точек соответствующего экватора, назовем *эпицентром* этой полусферы (рис. 7). Для данной точки $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ (открытая) полусфера $H(\mathbf{x})$ с эпицентром в точке \mathbf{x} задается однозначно.

8.2. Разместим элементы множества \mathcal{R}_n на сфере

Нам хочется доказать, что $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$. Предположим противное и придем в конечном счете к противоречию. Итак, допустим, $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 1$. Это означает, что каждой вершине кнезеровского графа (т.е. каждому множеству $K_a \in \mathcal{K}$) присвоен некоторый цвет, причем всего цветов (в худшем случае) $n - 2k + 1$ и вершины, соединенные ребром (т.е. множества $K_a, K_b \in \mathcal{K}$ со свойством $K_a \cap K_b = \emptyset$), покрашены в разные цвета. Введем обозначение $d = n - 2k + 1$ и обозначим цвета, в которые покрашены вершины графа, через χ_1, \dots, χ_d .

Теперь рассмотрим множество \mathcal{R}_n , в котором «живут» все множества $K_a \in \mathcal{K}$, служащие вершинами кнезеровского графа. Каждому элементу этого множества мы хотим поставить в соответствие некоторую точку на сфере S^d , лежащей в \mathbb{R}^{d+1} . Иными словами, мы хотим заменить множество натуральных чисел $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$ на множество точек $\mathcal{X}_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, считая, что каждому числу $i \in \mathcal{R}_n$ соответствует точка \mathbf{x}_i . Разумеется, это можно сделать бесконечным количеством способов. Однако мы внесем одно важное дополнительное ограничение. А именно, мы потребуем, чтобы на любом экваторе сферы S^d лежало не более d точек из множества \mathcal{X}_n .

На первый взгляд, требование пугает, и неискушенному читателю должно показаться, что удовлетворить этому требованию очень трудно. В действительности все весьма просто, и мы сейчас попробуем (не вдаваясь, впрочем, в технические детали) создать интуицию того, что «почти всякое» расположение n точек на сфере S^d обладает нужным свойством.

Рассмотрим понятный и наглядный пример: положим $d = 2$. Тогда $n = d + 2k - 1 \geq d + 1$. Скажем, $n = 3$. Естественно, сейчас речь идет о размещении трех точек на обычной сфере S^2 в трехмерном пространстве. Представим себе, что эти три точки мы выбираем наугад. Если угодно, мы закрываем глаза и, повертев пальцем в воздухе, тыкаем в случайную точку сферы (палец «бесконечно тонкий»). Это точка \mathbf{x}_1 . Точно так

же находим точки $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Давайте подумаем, с какой «вероятностью» эти точки улягутся на один экватор. Коль скоро точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ уже выбраны, они вместе с центром $\mathbf{0}$ нашей сферы однозначно определяют некоторую плоскость Π . И окружность $S^1 = \Pi \cap S^2$ – это тот самый *единственный* экватор, на котором одновременно лежат $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Стало быть, если мы хотим, чтобы точка \mathbf{x}_3 попала на этот экватор, мы вынуждены выбирать ее из *одномерного* множества. Однако изначально выбор точки \mathbf{x}_3 ничем ограничен не был, и мы вольны были тыкать в любую точку *двумерной* сферы. Ясно, что в любом разумном смысле вероятность попадания в одномерное подмножество при случайном выборе из двумерного множества равна нулю. Таким образом, мы и впрямь можем утверждать, что вероятность размещения трех точек на сфере S^2 с условием, что все они не лежат на одном и том же экваторе, равна единице. А это и значит, по сути, что почти любое расположение точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ нас устраивает. Очевидно, при $n > 3$ рассуждение по-прежнему в силе.

В общем случае работают совершенно аналогичные соображения. Ключевой момент ведь был в том, что любые три точки в \mathbb{R}^3 однозначно задают плоскость. Так вот, в \mathbb{R}^{d+1} , где разворачиваются наши события, любые $d + 1$ точек однозначно задают гиперплоскость. А это нам и нужно.

8.3. Применим теорему 3

Итак, мы выбрали на сфере S^d множество точек χ_n , и никакие $d + 1$ точек из χ_n не лежат на одном экваторе. При этом χ_n находится во взаимно однозначном соответствии с \mathcal{R}_n . Это, в частности, означает, что каждому множеству $K_a \in \mathcal{K}$ однозначно соответствует множество $L_a \subset \chi_n$, имеющее мощность k . При этом мы можем считать, что L_a покрашено в тот же цвет, что и K_a , и, более того, если $L_a \cap L_b = \emptyset$, то и цвета множеств L_a, L_b различны.

Сейчас будет основной трюк. Мы чудесным образом увяжем все, о чем до сих пор шла речь, с теоремой 3. Для этого нам нужно будет покрыть сферу S^d некоторыми множествами A_1, \dots, A_{d+1} , часть из которых замкнута, а часть – открыта. Что ж, за дело.

Пусть $\mathbf{x} \in S^d$. Рассмотрим открытую полусферу $H(\mathbf{x})$ с эпицентром в точке \mathbf{x} . Если в $H(\mathbf{x})$ содержится меньше k точек из множества χ_n , то скажем, что точка \mathbf{x} принадлежит множеству A_{d+1} . Если же $m = |H(\mathbf{x}) \cap \chi_n| \geq k$, то в множество $H(\mathbf{x}) \cap \chi_n$ попадает $s = C_m^k$ множеств $L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{a_s}$. У каждого из них есть свой цвет $\chi_j, j \in \{1, \dots, d\}$. Соответственно, скажем, что точка \mathbf{x} принадлежит множеству A_j с каждым из индексов j , участвующих в упомянутой раскраске. Формально можно написать так:

$$A_{d+1} = \{\mathbf{x} \in S^d : |H(\mathbf{x}) \cap \chi_n| < k\},$$

$$A_i = \{\mathbf{x} \in S^d : \text{в } H(\mathbf{x}) \cap \chi_n$$

есть подмножество L_a цвета $\chi_i\}$ при $i = 1, \dots, d$.

Разумеется, множества A_1, \dots, A_d могут иметь взаим-

ные пересечения. Однако очевидно, что $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$, и наличие пересечений нас не смущает.

Надо еще понять, какие из множеств A_1, \dots, A_{d+1} замкнуты, а какие открыты. Пусть точка \mathbf{x} принадлежит любому из множеств $A_i, i \in \{1, \dots, d\}$. Это значит, что $H(\mathbf{x}) \cap \chi_n$

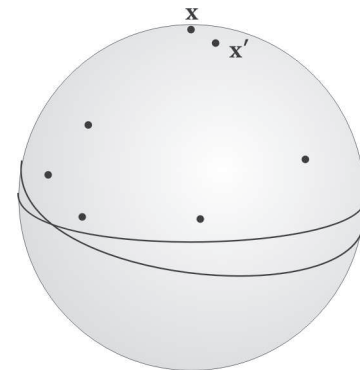


Рис. 8

представляет собой конечное множество точек U на сфере, причем, безусловно, U вложено в *открытое* множество $H(\mathbf{x})$. Если взять точку $\mathbf{x}' \in S^d$, достаточно близкую к \mathbf{x} , то нетрудно понять, что $H(\mathbf{x})$ целиком накроет множество U . Наглядная иллюстрация этому факту дана на рисунке 8. Суть в том, что точки из U не лежат на экваторе полусферы $H(\mathbf{x})$. Именно поэтому можно столь мало пошевелить полусферу, чтобы и после этого шевеления точки из U не вышли на новый экватор или за его пределы. Таким образом, любая точка \mathbf{x}' , близкая (в известном смысле) к точке \mathbf{x} , принадлежит тому же множеству A_i , что и \mathbf{x} . Следовательно, множества $A_i, i \in \{1, \dots, d\}$, открыты. В то же время вся сфера S^d замкнута, а значит, множество $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ тоже замкнуто (как разность замкнутого и открытого множеств).

Применим теорему 3. Она говорит, что в одном из множеств A_1, \dots, A_{d+1} есть пара противоположных точек \mathbf{x} и $-\mathbf{x}$. Рассмотрим два случая: в первом случае $\mathbf{x} \in A_i$, где $i \in \{1, \dots, d\}$; во втором случае $\mathbf{x} \in A_{d+1}$.

Случай 1. В этом случае полусферы $H(\mathbf{x})$ и $H(-\mathbf{x})$ содержат множества L_a и L_b соответственно, каждое из которых имеет цвет χ_i (раз уж и \mathbf{x} , и $-\mathbf{x}$ сидят в одном и том же A_i). Но полусферы $H(\mathbf{x})$ и $H(-\mathbf{x})$ не пересекаются (они ведь не содержат общего экватора), а стало быть, не пересекаются и множества L_a, L_b . Так ведь у нас непересекающиеся множества не могут быть одного цвета! Противоречие.

Случай 2. В этом случае $|H(\mathbf{x}) \cap \chi_n| \leq k - 1$ и $|H(-\mathbf{x}) \cap \chi_n| \leq k - 1$. Обозначим через S общий экватор полусфер $H(\mathbf{x})$ и $H(-\mathbf{x})$. Тогда

$$|S \cap \chi_n| = |\chi_n| - |H(\mathbf{x}) \cap \chi_n| - |H(-\mathbf{x}) \cap \chi_n| \geq$$

$$\geq n - (k - 1) - (k - 1) = n - 2k + 2 = d + 1,$$

т.е. на экваторе S лежит не меньше $d + 1$ точек, что также невозможно. Опять противоречие, и гипотеза Кнезера доказана.

9. Дополнение

Для понимания этого раздела потребуется слегка больше навыков, чем прежде. Например, необходимо знать определения непрерывной функции и непрерывного отображения. Следует знать также, что непрерыв-

ная функция достигает своего максимального (минимального) значения на замкнутом множестве. Понадобится представление о связности множеств. Но это и все, пожалуй.

9.1. Доказательство теоремы 2 при $d = 2$

Пусть окружность S^1 покрыта двумя замкнутыми множествами A_1, A_2 , не содержащими противоположных точек. Возьмем некоторую точку $x \in A_1$. Тогда $-x \in A_2$. На любой из дуг, соединяющих точки x и $-x$, найдем *последнюю* точку y множества A_1 . Это можно сделать, поскольку A_1 замкнуто и $-x \notin A_1$. Ясно, что y лежит и в A_2 , ведь иначе за ней были бы еще точки множества A_1 . Но тогда $-y$ не может принадлежать ни A_1 , ни A_2 . Противоречие, и теорема доказана.

9.2. Доказательство теоремы 2 при $d = 3$

Предположим, $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, причем все множества A_i замкнуты и, вопреки утверждению теоремы, ни одно из них не содержит пары противоположных точек сферы. Наша цель – прийти к противоречию.

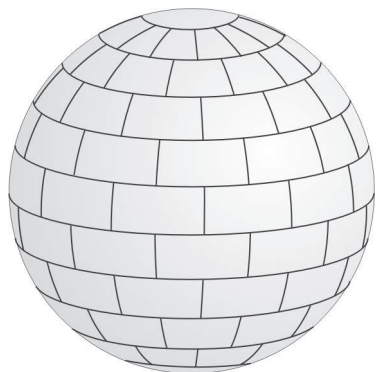


Рис. 9

Разобьем сферу на очень маленькие кирпичики и две шапочки, как показано на рисунке 9. Чуть позже мы скажем, что именно означает выражение «очень маленькие». Все кирпичики одинаковы, шапочки тоже совпадают по форме, и для дальнейшего крайне важно, что мы располагаем кирпичики на сфере в стиле обычной кирпичной кладки: мы будем существенно опираться на то, что ни в одной точке сферы не сходятся сразу четыре отрезка, служащие границами кирпичиков (ситуация, показанная на рисунке 10, невозможна).

Объединим все кирпичики, каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с множеством A_1 . Полученное множество назовем B_1 . Аналогично поступим с A_2 и A_3 , образуя множества B_2 и B_3 соответственно. Поскольку множества A_i замкнуты, то, выбрав кирпичики с самого начала достаточно мелкими, мы добьемся того, что и множества B_i не будут содержать противоположных точек сферы.

Разумеется, $S^2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Рассмотрим пока только множество B_1 . Его граница – это система ломаных линий на сфере. Назовем эти ломаные L_1, \dots, L_k , где k – это просто обозначение для числа наших ломаных. Благодаря способу укладки кирпичиков на сфере, мы можем утверждать, что любая из ломаных замкнута, не пересекает саму себя и не пересекается ни с одной из оставшихся ломаных. Именно ради этого мы так старательно избегали ситуаций, показанных на рисунке 10. В итоге граница множества B_1 имеет весьма приятный вид, чего нельзя было сказать, вообще-то, о гра-

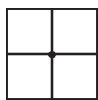


Рис. 10

нице исходного множества A_1 . Затевав кирпичную кладку и заменяя A_1 на B_1 , мы как раз стремились к тому, чтобы от одного замкнутого множества без противоположных точек перейти к другому замкнутому множеству без противоположных точек, улучшив при этом свойства границы множества.

Отразим множество B_1 относительно центра сферы. Получится множество B'_1 , которое не пересекается с множеством B_1 , так как иначе в B_1 нашлись бы противоположные точки сферы. Граница множества B'_1 образована ломаными L'_1, \dots, L'_k , которые симметричны ломаным L_1, \dots, L_k . Итого у нас на сфере есть уже $2k$ ломаных, которые замкнуты, не пересекают самих себя и не пересекаются друг с другом. Хорошо известно, что такие ломаные делят сферу на $2k + 1$ связных кусков. Этот факт интуитивно понятен: одна замкнутая ломаная разбивает сферу на два куска, две замкнутые ломаные разбивают сферу на три куска и т.д. В действительности, этот факт крайне нетривиален, ведь замкнутая ломаная может быть сколь угодно сложной (рис.11). Он называется теоремой Жордана. Однако мы применим этот факт, по-прежнему надеясь на интуицию читателя.

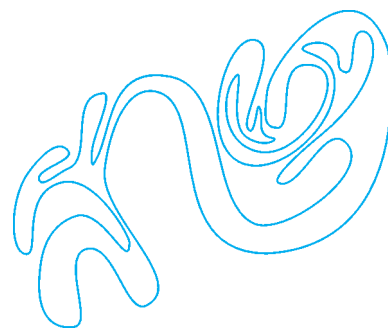


Рис. 11

Итак, на сфере есть $2k + 1$ связных множеств, которые ее покрывают. По построению, среди этих множеств могут быть либо пары множеств, симметричных друг другу, либо множества, которые симметричны относительно центра сферы. Поскольку $2k + 1$ – нечетное число, хотя бы одно центрально-симметричное множество найдется. Назовем его C . Ясно, что $C \subset (B_2 \cup B_3)$.

В множестве C есть, конечно, пары противоположных точек сферы. Возьмем любую из них: скажем, y и $-y$. Ввиду связности множества C , существует непрерывная кривая γ , соединяющая точки y и $-y$ и целиком лежащая внутри множества C .

Дальнейшее рассуждение полностью повторяет рассуждение из параграфа 9.1: *непрерывная* кривая γ – это точный аналог дуги окружности, и она покрыта только множествами B_2 и B_3 . Приходим к противоречию, и теорема доказана.

9.3. Покрытие окружности и двумерной сферы

Здесь мы хотим разобраться с тем, как можно покрыть окружность S^1 тремя, а сферу S^2 – четырьмя замкнутыми множествами без противоположных точек.

С окружностью все тривиально. Покрытие имеет вид значка «Мерседеса», и оно изображено на рисунке 12. Очевидно, что в каждом из секторов нет противоположных точек. Более того, максимальное расстояние между парами точек в любом из секторов (оно называ-

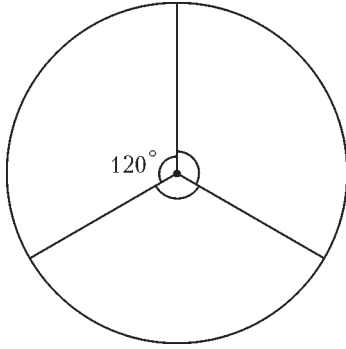


Рис. 12

на каждую из сторон треугольника и получаем те самые три сектора, которые покрывают S^1 .

Последнее рассуждение полезно с той точки зрения, что в случае \mathbb{R}^3 мы его обобщим, и, тем самым, трехмерная конструкция окажется понятнее.

Итак, впишем в S^2 правильный тетраэдр, служащий естественным аналогом правильного треугольника. Посмотрим из центра на каждую из его четырех граней. Получатся трехгранные углы с общей вершиной в центре сферы (рис. 13). Каждый из углов имеет в сечении одну из граней тетраэдра. Пересечения углов со сферой и суть искомые четыре замкнутых множества, покрывающие сферу. Ясно, что все эти множества геометрически одинаковы. В сущности, ясно и то, что такие множества не содержат противоположных точек сферы. Интереснее подсчитать их диаметры.

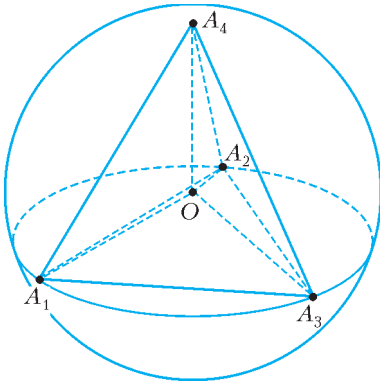


Рис. 13

Заметим, что в случае плоскости диаметры искались тривиально: максимум расстояний в секторах достигался на парах вершин вписанного треугольника. Возникает гипотеза, что и в трехмерной ситуации следует просто найти длину стороны тетраэдра. Однако такая интуиция неверна, и это здесь самое забавное.

Дабы описать положения наиболее удаленных точек данного множества в покрытии сферы, введем некоторые обозначения. Пусть вершины тетраэдра – это A_1, A_2, A_3, A_4 , а его центр – это O (см. рис. 13). Для определенности рассмотрим множество, порожденное трехгранным углом $OA_1A_2A_3$. Пусть B – середина стороны A_2A_3 . Проведем через точку B радиус OC . Утверждение состоит в том, что диаметр – это длина отрезка A_1C . Мы не станем доказывать этот несложный факт, оставляя читателю хорошую пищу для размышлений.

Посчитать длину отрезка A_1C большого труда не составляет. Давайте все же сделаем это. Прежде всего найдем длину x стороны тетраэдра. Рассмотрим высоту тетраэдра, опущенную из вершины A_4 на

плоскость $A_1A_2A_3$. Обозначим ее основание через D . Понятно, что D – центр окружности, описанной вокруг треугольника $A_1A_2A_3$. Длина отрезка DA_1 равна $\frac{x}{\sqrt{3}}$ (по теореме косинусов). Значит, высота A_4D имеет длину $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$ (по теореме Пифагора).

В то же время $OD = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$. В итоге $x\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$, так что $x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Далее, по теореме Пифагора $DB = \sqrt{\frac{2}{9}}$ и $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Мы знаем длины всех сторон треугольника OA_1B ($OA_1 = 1, OB = \sqrt{\frac{1}{3}}, A_1B = \sqrt{2}$). По теореме косинусов косинус угла A_1OB равен $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Берем треугольник A_1OC и по теореме косинусов находим $A_1C = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 1,776... < 2$.

Берем треугольник A_1OC и по теореме косинусов находим

находим

$$A_1C = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 1,776... < 2.$$

9.4. Вокруг теоремы 2

Полезно понимать, что следующая формулировка равносильна утверждению теоремы 2.

Теорема 4. Для любого непрерывного отображения $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ существует точка $\mathbf{x} \in S^d$ с $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

В двумерном случае теорема 4 говорит о том, что нельзя непрерывно растянуть обычную сферу на обычную плоскость, не склеив при этом какие-нибудь две противоположные точки. Интуитивно это довольно понятно, а доказательство, по очевидным причинам, то же самое, что и в параграфе 9.2. Ниже мы объясним, как из теоремы 4 вывести теорему 2. Рассуждение в обратную сторону мы предложим читателю в качестве упражнения.

Итак, пусть теорема 4 верна. Рассмотрим произвольное покрытие $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$ сферы замкнутыми множествами. Нам хочется доказать, что найдется индекс i и такая точка $\mathbf{x} \in A_i$, что $-\mathbf{x} \in A_i$. Построим отображение $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ по следующему правилу:

$$f(\mathbf{x}) = (\text{dist}(\mathbf{x}, A_1), \dots, \text{dist}(\mathbf{x}, A_d)).$$

Здесь $\mathbf{x} \in S^d$, а $\text{dist}(\mathbf{x}, A_i) = \min_{\mathbf{y} \in A_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ (минимум достигается, поскольку множество A_i замкнуто).

Очевидно, отображение f непрерывно. Из теоремы 4 мы, стало быть, знаем, что для некоторой точки $\mathbf{y} \in S^d$ выполнено $f(\mathbf{y}) = f(-\mathbf{y})$. Если i -я координата точки \mathbf{y} равна нулю, то $\text{dist}(\mathbf{y}, A_i) = 0$, т.е. $\mathbf{y} \in A_i$, а значит, и

плоскость $A_1A_2A_3$. Обозначим ее основание через D . Понятно, что D – центр окружности, описанной вокруг треугольника $A_1A_2A_3$. Длина отрезка DA_1 равна $\frac{x}{\sqrt{3}}$ (по теореме косинусов). Значит, высота A_4D имеет

длину $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$ (по теореме Пифагора).

В то же время $OD = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$. В итоге

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}},$$

так что $x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Далее, по теореме Пифагора $DB = \sqrt{\frac{2}{9}}$ и $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Мы знаем длины всех сторон треугольника OA_1B ($OA_1 = 1, OB = \sqrt{\frac{1}{3}}, A_1B = \sqrt{2}$). По теореме косинусов

косинус угла A_1OB равен $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Берем треугольник A_1OC и по теореме косинусов находим

$$A_1C = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 1,776... < 2.$$

9.4. Вокруг теоремы 2

Полезно понимать, что следующая формулировка равносильна утверждению теоремы 2.

Теорема 4. Для любого непрерывного отображения $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ существует точка $\mathbf{x} \in S^d$ с $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

В двумерном случае теорема 4 говорит о том, что нельзя непрерывно растянуть обычную сферу на обычную плоскость, не склеив при этом какие-нибудь две противоположные точки. Интуитивно это довольно понятно, а доказательство, по очевидным причинам, то же самое, что и в параграфе 9.2. Ниже мы объясним, как из теоремы 4 вывести теорему 2. Рассуждение в обратную сторону мы предложим читателю в качестве упражнения.

Итак, пусть теорема 4 верна. Рассмотрим произвольное покрытие $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$ сферы замкнутыми множествами. Нам хочется доказать, что найдется индекс i и такая точка $\mathbf{x} \in A_i$, что $-\mathbf{x} \in A_i$. Построим отображение $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ по следующему правилу:

$$f(\mathbf{x}) = (\text{dist}(\mathbf{x}, A_1), \dots, \text{dist}(\mathbf{x}, A_d)).$$

Здесь $\mathbf{x} \in S^d$, а $\text{dist}(\mathbf{x}, A_i) = \min_{\mathbf{y} \in A_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ (минимум достигается, поскольку множество A_i замкнуто).

Очевидно, отображение f непрерывно. Из теоремы 4 мы, стало быть, знаем, что для некоторой точки $\mathbf{y} \in S^d$ выполнено $f(\mathbf{y}) = f(-\mathbf{y})$. Если i -я координата точки \mathbf{y} равна нулю, то $\text{dist}(\mathbf{y}, A_i) = 0$, т.е. $\mathbf{y} \in A_i$, а значит, и

$-\mathbf{y} \in A_i$. Если же все координаты у точки \mathbf{y} ненулевые, то \mathbf{y} не принадлежит ни одному из множеств A_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, т.е. $\mathbf{y} \in A_{d+1}$. Но тогда и $-\mathbf{y} \in A_{d+1}$. В обоих случаях все доказано.

Назовем отображение $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ *антиподальным*, если f непрерывно и для любого $\mathbf{x} \in S^d$ выполнено $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$. Вот еще один важный вариант теоремы 2:

Теорема 5. *Не существует антиподального отображения $f: S^d \rightarrow S^{d-1}$.*

Равносильность теорем 5 и 4 почти тривиальна, и мы ее не обсуждаем. Зато, отталкиваясь именно от теоремы 5, очень удобно получать обобщения результата Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана. Одно из таких (наиболее широких и важных) обобщений мы приведем ниже, не комментируя терминологию, которая в его рамках возникает. Читатель, знающий продвинутую алгебру, поймет, о чем речь, а читатель, который с подобными вопросами еще не знаком, получит стимул к дальнейшему изучению науки.

Теорема 6. *Пусть G – нетривиальная конечная группа, которая действует свободно на топологических пространствах X и Y . Предположим, что X – это $(n-1)$ -связное пространство, а размерность пространства Y равна $m < n$. Тогда не существует G -эквивариантного отображения из X в Y .*

Следовало наложить некоторые дополнительные ограничения на пространства X , Y в формулировке теоремы, но мы не стали этого делать, дабы совсем уж не загромождать утверждение. Можно считать, что X и

Y – «достаточно хорошие». Например, если $X = S^n$, а $Y = S^m$, то X имеет связность $n-1$, а Y имеет размерность m . Если к тому же $G = \mathbb{Z}_2$, то G -эквивариантность и антиподальность отображения суть одно и то же. Таким образом, при $X = S^n$, $Y = S^{n-1}$, $G = \mathbb{Z}_2$ теорема 6 влечет теорему 5.

Список литературы

1. Н.Алон, Дж.Спенсер. Вероятностный метод. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2007.
2. А.М.Райгородский. Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2008.
3. А.М.Райгородский. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2007.
4. А.Я.Хинчин. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 1979.
5. J. Matoušek. Using the Borsuk – Ulam theorem. – Universitext, Springer, Berlin, 2003.
6. Н.Стирод, У.Чинн. Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967.
7. В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982.
8. Ф.Харари. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
9. М.Г.Крейн, А.А.Нудельман. Теорема Борсука – Улама, или Кое-что о погоде, о дрессированной лошади и двумерных полях. – Квант, 1983, №8, с.20–25.
10. В.Г.Болтянский, И.Ц.Гохберг. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1965.
11. А.М.Райгородский. Проблема Борсука. – М.: МЦНМО, 2006.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как увидеть 50 Гц?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Подсоедините к контактам «+» и «-» светодиода два тонких изолированных провода длиной около двух метров каждый и скрутите их. Утяжелите светодиод чем-нибудь и прикрепите середину скрученного провода, например, к книжной полке. Вы получите светодиодный маятник длиной 1 м. Теперь свободные концы проводов, идущих от светодиода, подсоедините к источнику переменного тока частотой 50 Гц и напряжением 3–4 В, светодиод начнет светиться.

Однако светодиод, как и любой другой диод, пропускает ток только в одном направлении, т.е. 10 мс он светится, а



Рис. 1



Рис. 2

следующие 10 мс – нет. Чтобы увидеть мелькание светодиода с частотой 50 Гц, достаточно раскачать светодиодный маятник. Как только скорость маятника станет выше 1 м/с, вы увидите светящуюся пунктирную линию, вместо сплошной. Особенно хорошо это видно в темноте.

На рисунках 1 и 2 приведены фотографии части траектории такого светодиодного маятника, сделанные с экспозицией 0,5 с. Горизонтальный размер этого участка траектории составляет 0,8 м. Нетрудно убедиться в том, что средняя скорость маятника на рисунках равна 1,6 м/с и 2,2 м/с.

К.Богданов