Равноускоренное движение по прямой

А.ЧЕРНОУЦАН

Вспомним основные формулы кинематики прямолинейного равноускоренного движения точки.

Для описания движения точки вдоль некоторой прямой выбирают на этой прямой положительное направление и обозначают ее, например, осью x. Если движение происходит с постоянным ускорением $a_x = \text{const}$, то проекция скорости v_x изменяется со временем t по линейному закону

$$v_x = v_{0x} + a_x t\,, \qquad (1)$$

где v_{0x} – проекция на ось x начальной скорости, т.е. скорости в момент времени $t = 0$. Зависимости от времени координаты x и перемещения $s_x = x - x_0$, где x_0 – начальная координата, имеют квадратичный характер:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,, \qquad (2а)$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\,. \qquad (2б)$$

Школьники, которые уже познакомились с понятием производной, могут легко проверить, что производная от скорости по времени равна ускорению, а производная от координаты или перемещения по времени равна скорости. Отметим, что для записи формулы (2а) необходимо выбрать не только положительное направление, но и положение начала координат, а для формул (1) и (2б) достаточно указать лишь положительное направление оси.

Скажем несколько слов об используемых обозначениях. Индекс x (или y, z) обозначает проекцию на эту ось соответствующего вектора. При движении по прямой любой описывающий движение вектор – $\vec{v}, \vec{v}_0, \vec{s}, \vec{a}$ – может иметь только два направления. Поэтому, например, $v_x = v$, если вектор $\vec{v}$ смотрит в положительном направлении оси x, но $v_x = -v$, если $\vec{v}$ смотрит в отрицательном направлении. Буква без индекса x, например v, a, s, обозначает модуль соответствующего вектора.

В принципе, основных формул (1), (2) кинематики равноускоренного движения достаточно для решения любых задач. Можно, однако, существенно сократить расчеты, если научиться пользоваться двумя дополнительными кинематическими формулами, связывающими другие наборы переменных. Если выразить время t из выражения (1) и подставить в выражение (2б), то получим формулу, не содержащую времени, но связывающую между собой две переменные величины v_x и s_x:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x\,. \qquad (3)$$

Если же из уравнения (1) выразить a_x, точнее $a_x t$, и подставить в уравнение (2б), то получим формулу

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2}\,t\,. \qquad (4)$$

Эта формула может быть прочитана так: средняя скорость равноускоренного движения на любом интервале времени равна полусумме начальной и конечной скоростей. Кроме того, она имеет наглядный графический смысл, отражающий следующее общее утверждение: перемещение s_x на любом интервале времени равно площади под графиком $v_x(t)$. В случае равноускоренного движения (рис.1) нужно вычислить площадь трапеции с основаниями v_{0x} и v_x и высотой t, что соответствует формуле (4). Средняя скорость на этом графике равна средней линии трапеции, т.е. скорости в середине временно́го интервала.

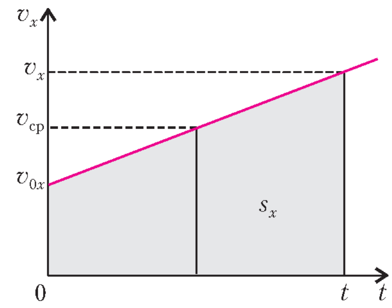

Рис. 1

Еще одно замечание. Каждая из формул (1)–(4) содержит четыре из пяти величин t, s_x, v_{0x}, v_x, a_x. Если надо выбрать формулу для конкретной ситуации, следует смотреть не на то, какие величины должны *присутствовать* в формуле, а на то, какая величина может в ней *отсутствовать*. Действительно, формула (1) не содержит только s_x, формула (2б) не содержит только v_x, формулу (3) можно назвать формулой «без t», а формулу (4) – формулой «без a».

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Автомобиль, который двигался со скоростью $v_0 = 8$ м/с, начинает торможение с ускорением $a = 2$ м/с^2. Какое расстояние s проедет автомобиль к тому моменту, когда его скорость уменьшится вдвое?*

Решение. Для записи уравнений необходимо выбрать положительное направление оси. Выберем его в направлении движения автомобиля (рис.2); тогда $v_{0x} = v_0$, $v_x = v$, $s_x = s$, но $a_x = -a$ (торможение). Убедимся сначала, что задачу можно решить с помощью основных формул (1), (2). Для данной задачи они принимают вид

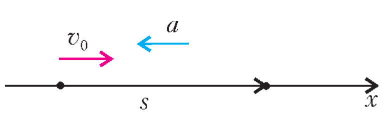

Рис. 2

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - at,$$

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, получим

$$s = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{a} = 12 \text{ м}.$$

Однако можно обойтись и одной формулой. Заметим, что время не входит ни в данные, ни в вопрос задачи, и воспользуемся формулой (3) («без t»):

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2 = 2(-a)s\,,$$

откуда сразу получим приведенный выше ответ.

Задача 2 (ЕГЭ 2009). *За время $t = 2$ с прямолинейного движения с постоянным ускорением тело прошло путь $s = 20$ м, не меняя направления движения и уменьшив свою скорость в 3 раза. Чему равна начальная скорость тела на этом интервале?*

Решение. Попробуйте сначала решить эту задачу с помощью основных формул (1), (2); при этом не забудьте, что

$a_x = -a$. Мы же сразу воспользуемся формулой (4) («без a»):

$$s = \frac{v_0 + (v_0/3)}{2} t, \text{ откуда } v_0 = \frac{3s}{2t} = 15 \text{ м/с}.$$

Иногда условие задачи сформулировано так, что одним уравнением обойтись не удастся. В этом случае можно выбрать любые два уравнения из четырех.

Задача 3. *Автомобиль разгоняется с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Мимо наблюдателя он проезжает со скоростью $v = 20$ м/с. На каком расстоянии s от наблюдателя автомобиль находился за $t = 6$ с до этого момента?*

Решение. Среди параметров условия отсутствует v_0, а среди четырех стандартных формул нет формулы «без v_0». Запишем первые два уравнения:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Выразив v_0 из первого уравнения и подставив во второе, найдем

$$s = vt - \frac{at^2}{2} = 84 \text{ м}.$$

Вместо формул (1), (2б) можно использовать формулы (1), (4).) Полученная нами в ответе формула как раз и есть недостающая формула «без v_0». Она имеет такой же вид, как формула (2б) для случая торможения. Этому есть простое объяснение, опирающееся на прием, который называют «обращением времени». Если записать движение на видеокамеру, а затем пустить запись в обратном направлении, то тело за то же время пройдет то же расстояние, но с начальной скоростью $v_0' = v$, конечной скоростью $v' = v_0$ и с ускорением $a_x' = -a_x = -a$. Задача сводится к движению с известными v_0, a и t и решается одной формулой (2б).

Приведем еще один пример задачи, где одной формулой обойтись не удастся.

Задача 4 (ЕГЭ 2010). *Материальная точка, двигаясь равноускоренно по прямой, за время t увеличила скорость в 3 раза, пройдя путь $s = 20$ м. Найдите t, если ускорение точки $a = 5$ м/с^2.*

Решение. В этом случае нельзя решить задачу одной формулой, так как каждая формула связывает между собой четыре величины из пяти, а в условии задачи присутствуют все пять. Запишем сначала уравнение (3):

$$(3v_0)^2 - v_0^2 = 2as$$

и выразим из него v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{as}{4}},$$

после чего найдем t из формулы (1) (или из формулы (4)):

$$3v_0 = v_0 + at, \quad t = \frac{2v_0}{a} = \sqrt{\frac{s}{a}} = 2 \text{ с}.$$

Особенно выгодно использовать одну формулу вместо двух в задачах, где сравниваются разные случаи или разные этапы движения. В таких задачах сокращение кинематических расчетов оказывается еще существеннее.

Задача 5 (ЕГЭ 2010). *На последнем километре тормозного пути скорость поезда уменьшилась на 10 м/с. Определите скорость в начале торможения, если общий тормозной путь поезда составил 4 км, а торможение было равнозамедленным.*

Решение. Обозначим длину последнего участка через $s_п$ ($s_п = 1$ км), скорость в конце этого участка равна нулю ($v_п = 0$), а в начале скорость равна $v_{0п} = 10$ м/с (рис.3). Полный тормозной путь обозначим через s ($s = 4$ км), а начальную скорость – через v_0. Поскольку время в условии не упоминается, запишем формулу (3) («без t») дважды – для всего тормозного пути и для последнего участка:

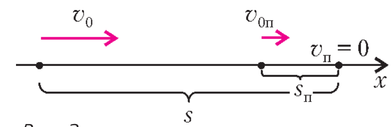

Рис. 3

$$0 - v_0^2 = -2as, \quad 0 - v_{0п}^2 = -2as_п.$$

Исключив a, получим

$$v_0 = v_{0п}\sqrt{\frac{s}{s_п}} = 20 \text{ м/с}.$$

В следующей задаче надо последовательно рассмотреть два этапа единого равноускоренного движения.

Задача 6 (ЕГЭ 2009). *Тело, свободно падающее с некоторой высоты, первый участок пути проходит за время $\tau = 1$ с, а такой же последний участок – за время $\tau/2$. Найдите полное время падения t, если начальная скорость равна нулю.*

Решение. Длина участка, пройденного телом за последние полсекунды, такая же, как и за первую секунду:

$$s_п = s_1 = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Скорость в начале последнего участка (рис.4) найдем из формулы (2б):

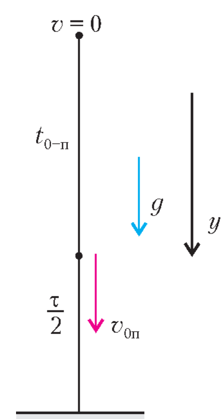

Рис. 4

$$s_п = v_{0п}\frac{\tau}{2} + \frac{g(\tau/2)^2}{2},$$

$$v_{0п} = \frac{g\tau^2/2 - g(\tau/2)^2/2}{\tau/2} = \frac{3}{4}g\tau.$$

Поскольку эта скорость является конечной скоростью предыдущего движения, то с помощью формулы (1) можно найти время от начала падения до последнего участка:

$$v_{0п} = gt_{0-п}, \quad t_{0-п} = \frac{v_{0п}}{g} = \frac{3}{4}\tau.$$

Это время меньше τ, следовательно, первый и последний участки пересекаются. Полное время падения равно

$$t = \frac{3}{4}\tau + \frac{\tau}{2} = \frac{5}{4}\tau = 1{,}25 \text{ с}.$$

Задача 7. *Определите, на сколько путь, пройденный свободно падающим телом в десятую секунду, больше пути, пройденного телом в предыдущую секунду. Начальная скорость тела равна нулю.*

Решение. Лобовой способ решения состоит в том, чтобы определить путь за каждую из данных секунд, после чего найти разность между ними. Путь за любой интервал времени между моментами t_1 и t_2 можно найти как разность путей, пройденных к концу интервала и к началу интервала:

$$s_{8-9} = s_9 - s_8 = \frac{gt_9^2}{2} - \frac{gt_8^2}{2} = 405 \text{ м} - 320 \text{ м} = 85 \text{ м},$$

$$s_{9-10} = s_{10} - s_9 = 95 \text{ м}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$\Delta s = s_{9-10} - s_{8-9} = 10 \text{ м}.$$

А можно использовать среднюю скорость:

$$v_8 = gt_8, \quad v_9 = gt_9, \quad s_{8-9} = \frac{v_8 + v_9}{2}(t_9 - t_8) = 85 \text{ м}$$

и т.д. Этот способ позволяет увидеть, что такой же ответ $\Delta s = g\Delta t^2 = 10$ м будет верен для любых двух последовательных секундных интервалов $\Delta t = 1$ с. Действительно, средняя скорость на каждом интервале равна скорости в его середине, а середина последующего интервала наступает на Δt позже, чем середина предыдущего. Следовательно, вторая средняя скорость на $g\Delta t$ больше, чем первая.

Получается, что решение через средние скорости позволяет отвлечься от начальной скорости. Рассмотрим еще пример.

Задача 8. *За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $s = 5$ м и останавливается. Какой путь проходит тело за вторую секунду этого движения?*

Решение. Решение «в лоб» требует записать данные задачи в виде системы уравнений:

$$0 = v_0 - at_5,$$

$$s_{4-5} = s = \left(v_0 t_5 - \frac{at_5^2}{2}\right) - \left(v_0 t_4 - \frac{at_4^2}{2}\right),$$

из которой определить a и v_0, после чего найти путь за вторую секунду:

$$s_{1-2} = \left(v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}\right) - \left(v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}\right).$$

Видно, что при наличии неизвестной начальной скорости лобовой способ становится очень трудоемким.

Рассмотрим отдельно последнюю секунду и найдем скорость в начале этой секунды:

$$s_{4-5} = s = \frac{v_4 + 0}{2}\Delta t, \quad v_4 = \frac{2s}{\Delta t} = 10 \text{ м/с}$$

и ускорение:

$$0 = v_4 - a\Delta t, \quad a = \frac{v_4}{\Delta t} = 10 \text{ м/с}^2 .$$

Поскольку за каждую секунду скорость уменьшается на $a\Delta t = 10$ м/с, то находим $v_3 = 20$ м/с, $v_2 = 30$ м/с, $v_1 = 40$ м/с, и

$$s_{1-2} = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t = 35 \text{ м}.$$

Еще один способ – «обращение времени» (см. задачу 3). Обращенное движение представляет собой равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью, при этом известен путь за первую секунду, а надо найти путь за четвертую. Такая задача гораздо проще.

Следующая задача использует то обстоятельство, что средняя скорость на каждом интервале равноускоренного движения равна скорости тела в середине этого интервала.

Задача 9. *Двигаясь прямолинейно и равноускоренно, тело за последовательные промежутки времени $t_1 = 4$ с и $t_2 = 6$ с проходит в одном направлении отрезки пути $s_1 = 20$ м и $s_2 = 42$ м. Найдите ускорение тела.*

Решение. Средняя скорость на первом интервале $v_{ср1} = s_1/t_1 = 5$ м/с есть скорость в середине первого интервала, а средняя скорость на втором интервале $v_{ср2} = s_2/t_2 = 7$ м/с есть скорость в середине второго интервала. Промежуток времени между серединами интервалов равен $\Delta t = t_1/2 + t_2/2 = 5$ с. Соответственно, ускорение равно

$$a = \frac{v_{ср2} - v_{ср1}}{\Delta t} = 0{,}4 \text{ м/с}^2 .$$

Рассмотрим теперь задачи, где равноускоренное движение происходит с разворотом.

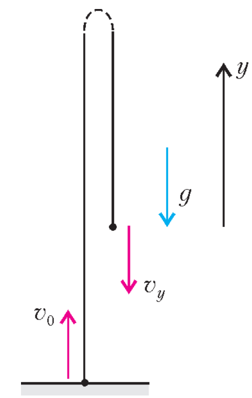

Рис. 5

Задача 10. *Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 50$ м/с. Через сколько секунд его скорость будет равна $v = 30$ м/с и направлена вертикально вниз?*

Решение. Запишем формулу (1) для зависимости скорости от времени (рис.5):

$$v_y = v_0 - gt .$$

Важно понимать, что формулы (1)–(4) действуют все время равноускоренного движения, нет необходимости разбивать его на этап замедленного движения до остановки и ускоренного падения от верхней точки. Поскольку в рассматриваемый момент скорость направлена вниз, против положительного направления оси, надо подставить $v_y = -v$. Получаем

$$t = \frac{v_0 + v}{g} = 8 \text{ с}.$$

Заметим, что полученный ответ как раз соответствует движению вверх до остановки за время $t_1 = v_0/g = 5$ с ($v_0 - gt_1 = 0$) и обратному падению за время $t_2 = v/g = 3$ с ($v = gt_2$, ось направлена вниз). Конечно, не возбраняется делать задачи с разворотом поэтапно, если так, исследуя движение более детально, вы чувствуете себя увереннее. Однако в некоторых случаях поэтапное решение оказывается очень неудобным.

Задача 11. *Тело, брошенное вертикально вверх из точки, находящейся над землей на высоте $h_0 = 8$ м, падает на землю через время $t = 4$ с после броска. С какой скоростью брошено тело?*

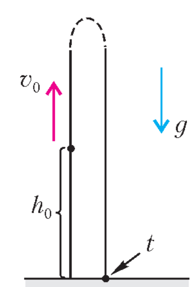

Рис. 6

Решение. Запишем зависимость (2б) перемещения s_y от времени (рис.6):

$$s_y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} .$$

Поскольку эта формула действует все время полета, рассмотрим сразу момент падения на землю, не разбивая движение на две части. Условие падения записывается через перемещение так:

$$s_y = -h_0 \quad (\text{не } s_y = h_0 \text{ !}).$$

Приходим к уравнению

$$-h_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} ,$$

откуда находим

$$v_0 = \frac{gt}{2} - \frac{h_0}{t} = 18 \text{ м/с}.$$

Наибольшую трудность вызывает условие падения, в котором часто забывают знак «–». Этой трудности удается избежать в координатном подходе, т.е. с использованием формулы (2а). Выбираем начало координат на поверхности земли, тогда зависимость координаты от времени принимает следующий вид:

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} ,$$

а условие падения становится тривиальным:

$$y = 0.$$

Если бы начальная скорость была дана, а спрашивалось, например, время полета или скорость падения, то решение через разбиение на два этапа (вверх и вниз) было бы достаточно простым. В данной задаче такое решение встречается с большими сложностями. Впрочем, расчет с разбиением можно использовать для проверки ответа.

Следующая задача допускает различные подходы, выбор между которыми зависит от данных условия (что дано и что надо найти).

Задача 12. *Камень, брошенный вертикально вверх, дважды был на одной и той же высоте — спустя $t_1 = 0{,}8$ с и $t_2 = 1{,}5$ с после начала движения. Чему равна эта высота?*

Решение. Решение «в лоб» состоит в составлении системы уравнений:

$$h = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2},$$
$$h = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}.$$

Обычно эту систему решают «в числах» и находят ответ:

$$h = 6 \text{ м}.$$

Если, однако, решить ее «в буквах», то получим

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}, \quad h = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Интересно, что эти ответы есть не что иное, как первая и вторая теоремы Виета для уравнения

$$h = v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \quad \text{или} \quad t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2h}{g} = 0,$$

корнями которого как раз являются моменты t_1 и t_2.

Можно также построить решение на симметрии подъема и падения. Ясно, что верхняя точка находится посередине между рассматриваемыми моментами. Значит, время подъема от высоты h до верхней точки и время обратного падения равны $(t_2 - t_1)/2$, а время падения от верхней точки до земли равно $(t_2 + t_1)/2$. Отсюда находим

$$h = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8} - \frac{g(t_2 - t_1)^2}{8} = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Разбиение на два этапа становится неизбежным, если требуется рассчитать пройденный путь. Формула (2б) позволяет вычислить перемещение в любой момент движения, но аналогичной формулы для пути не существует.

Задача 13. *Из точки, находящейся на высоте $h_0 = 10$ м над поверхностью земли, бросают вертикально вверх камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Какой путь пройдет камень за время $t = 3$ с?*

Решение. Поскольку разворот произойдет через время $t_1 = v_0/g = 1$ с ($0 = v_0 - g t_1$), путь надо искать как сумму путей, пройденных камнем при подъеме и при падении:

$$l = l_1 + l_2 = |s_{1y}| + |s_{2y}| = |y_1 - y_0| + |y - y_1|.$$

Если решать через перемещения, то перемещение на каждом этапе ищем отдельно с помощью наиболее удобной формулы:

$$0 - v_0^2 = -2 g s_1, \quad s_2 = \frac{g t_2^2}{2} \quad (t_2 = t - t_1)$$

(в первом случае ось направлена вверх, во втором – вниз). Получаем $s_1 = 5$ м, $s_2 = 20$ м. Поскольку s_2 больше, чем $h_0 + s_1$, то тело раньше упадет на землю, т.е. $l_2 = h_0 + s_1 = 15$ м. Окончательно находим

$$l = l_1 + l_2 = s_1 + (h_0 + s_1) = 20 \text{ м}.$$

Если решать через координаты, то надо использовать одну формулу

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{g t^2}{2},$$

а если y получится отрицательным, то заменить на $y = 0$.

Разбиение на этапы является неизбежным в тех задачах, где меняется характер движения. При этом начальные координата и скорость каждого последующего этапа равны конечным координате и скорости предыдущего этапа.

Задача 14. *Мальчик, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, съехал на санках с горы длиной $s_1 = 50$ м за $t_1 = 10$ с, а затем проехал по горизонтальному участку еще $s_2 = 25$ м до остановки. Найдите величину ускорения мальчика на втором участке движения.*

Решение. Для этапа разгона применим формулу (4):

$$s_1 = \frac{0 + v_1}{2} t_1,$$

откуда найдем конечную скорость первого этапа v_1, которая равна начальной скорости второго этапа. Для торможения удобно применить формулу (3):

$$0 - v_1^2 = -2 a_2 s_2.$$

Отсюда получаем

$$a_2 = 2 \text{ м/с}^2.$$

В следующей задаче движение состоит из трех этапов, два из которых происходят с ускорением.

Задача 15. *Расстояние между двумя светофорами автомашина прошла на первом участке, равном 0,1 всей его длины, равноускоренно и набрала скорость $v = 20$ м/с. Затем она шла равномерно с этой скоростью, а на последнем участке, равном по длине первому, тормозила с постоянным ускорением. Какова средняя скорость (в км/ч) автомашины?*

Решение. На каждом из этапов применим формулу (4) («без a»):

$$0{,}1s = \frac{0 + v}{2} t_1, \quad 0{,}8s = v t_2, \quad 0{,}1s = \frac{v + 0}{2} t_3.$$

Получаем

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{0{,}2s}{v} + \frac{0{,}8s}{v} + \frac{0{,}2s}{v} = \frac{1{,}2s}{v},$$

откуда находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{v}{1{,}2} = 60 \text{ км/ч}.$$

Вернемся к случаю, когда движение состоит из двух этапов, но второй этап происходит с разворотом. Тут весьма кстати оказывается умение компактно решать такие задачи (см. задачу 11).

Задача 16. *В течение $t_1 = 20$ с ракета поднимается с постоянным ускорением $a_1 = 0{,}8g$, после чего двигатели ракеты выключаются. Через какое время после этого ракета упадет на землю?*

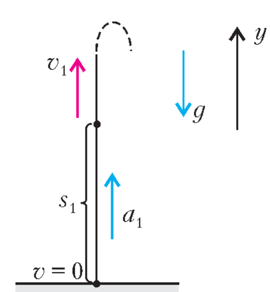

Рис. 7

Решение. К концу первого этапа (рис.7) ракета пройдет расстояние

$s_1 = 0{,}8gt_1^2/2$ и наберет скорость $v_1 = 0{,}8gt_1$. Для второго этапа выберем ось, направленную вверх, с началом координат на поверхности земли. Тогда условие падения принимает вид $y = 0$, при этом начальная координата и начальная скорость равны s_1 и v_1 соответственно. Из формулы (2а) получаем уравнение

$$0 = s_1 + v_1 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или } 0 = \frac{0{,}8gt_1^2}{2} + 0{,}8gt_1 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t = 2t_1 = 40 \text{ с}.$$

В следующих задачах рассматривается движение двух тел и исследуется момент их встречи. В таких задачах удобно применять координатную запись (2а) для каждого из тел на единой координатной оси с общим началом координат. Тогда условие встречи принимает вид условия равенства координат двух тел.

Задача 17. *Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона расстояние $s = 15$ м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением $a = 0{,}5$ м/с². Пассажир побежал со скоростью $v = 4$ м/с. Через какое время он достигнет двери вагона?*

Решение. Выберем начало координат в точке, где находился пассажир в начальный момент (рис.8). Зависимости

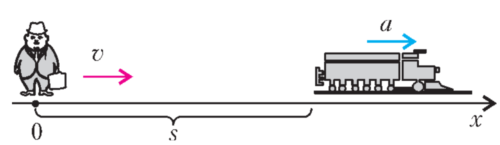

Рис. 8

координат пассажира и двери вагона от времени имеют вид

$$x_1 = vt, \quad x_2 = s + \frac{at^2}{2}.$$

Условие встречи $x_1 = x_2$ приводит к квадратному уравнению

$$\frac{at^2}{2} - vt + s = 0.$$

Непривычным является то обстоятельство, что при заданных числовых значениях уравнение имеет два положительных корня: $t_1 = 6$ с и $t_2 = 10$ с. Какой же из корней выбрать? Дело в том, что когда пассажир в первый раз догонит дверь (в момент времени t_1), его скорость будет больше, чем скорость поезда в этот момент, и если он продолжит свой бег, то опередит желанную дверь. Конечно потом, двигаясь с ускорением, дверь догонит пассажира (в момент t_2). Исходя из нормального поведения человека, надо выбрать, конечно же, первый корень.

Пусть теперь движение тел до встречи продолжается разное время.

Задача 18 (ЕГЭ 2008). *Мимо остановки по прямой улице проезжает грузовик со скоростью $v = 10$ м/с. Через $\Delta t = 5$ с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением $a = 3$ м/с². На каком расстоянии s от остановки мотоциклист догонит грузовик?*

Решение. Примем положение остановки за начало координат. Обозначим через t время движения мотоциклиста, тогда зависимость его координаты от времени будет иметь вид

$$x_1 = \frac{at^2}{2},$$

а зависимость координаты грузовика от времени –

$$x_2 = v(t + \Delta t).$$

Условие встречи $x_1 = x_2$ приводит к уравнению

$$\frac{at^2}{2} - vt - v\Delta t = 0,$$

положительный корень которого равен $t = 10$ с. Подставляя это значение в выражение для x_1 или x_2, получим

$$s = 150 \text{ м}.$$

Условие встречи имеет такой же вид и в том случае, когда движение одного из тел происходит с разворотом.

В следующей задаче исследуется условие, необходимое для того, чтобы встреча состоялась.

Задача 19. *Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $v_{01} = 10$ м/с и $v_{02} = 20$ м/с и с постоянными ускорениями $a_1 = 2$ м/с² и $a_2 = 1$ м/с², направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии s между телами они встретятся в процессе движения.*

Решение. Может показаться, что достаточно найти расстояния s_1 и s_2, которые пройдут тела до разворота ($0 - v_{01}^2 = -2a_1 s_1$ и т.п.), и затем сложить эти расстояния: $s = v_{01}^2/a_1 + v_{02}^2/a_2$. Однако полученный таким образом ответ оказывается завышенным, поскольку тела достигают точек разворота не одновременно. Направим координатную ось от первого тела в сторону второго, запишем координаты обоих тел в момент времени t:

$$x_1 = v_{01}t - \frac{a_1 t^2}{2}, \quad x_2 = s - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2}$$

и условие встречи $x_1 = x_2$:

$$\frac{(a_2 + a_1)t^2}{2} - (v_{01} + v_{02})t + s = 0.$$

Максимальному s соответствует ситуация, когда это уравнение имеет один корень. При большем s корней не будет, т.е. встреча не состоится, при меньшем s корней будет два, т.е. тела проедут мимо друг друга, а затем встретятся еще раз (см. задачу 17). Приравнивая дискриминант к нулю, получим

$$s = \frac{(v_{01} + v_{02})^2}{2(a_1 + a_2)} = 150 \text{ м}.$$

Другой подход к такой задаче: поскольку тела должны встретиться и сразу разойтись, то их скорости в момент встречи должны быть одинаковы. Это дает еще одно уравнение, из которого можно найти время и подставить в условие встречи.

И еще один важный метод: если перейти в систему отсчета первого тела, то второе будет двигаться с начальной скоростью $v_{01} + v_{02}$ и ускорением $a_1 + a_2$, направленным против начальной скорости. Ответ соответствует расстоянию, пройденному этим телом до разворота.

В последней задаче мы вспомним основные методы построения графиков равноускоренного движения.

Задача 20. *По графику зависимости скорости точки от времени (рис.9) постройте графики зависимости от времени ускорения, перемещения и пути.*

Решение. График ускорения (рис.10) не требует особых пояснений: на каждом участке величину ускорения находим

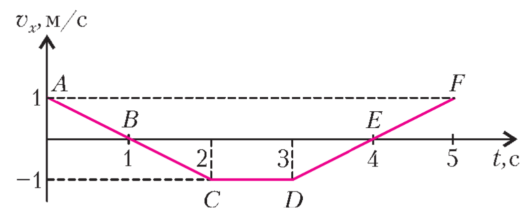

Рис. 9

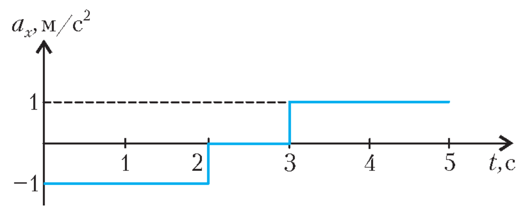

Рис. 10

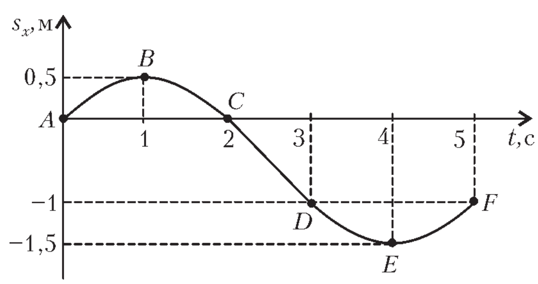

Рис. 11

как $a_x = \Delta v_x / \Delta t$ (тангенс угла наклона графика скорости), т.е. с помощью формулы (1).

Рассмотрим подробнее графики перемещения и пути.

График перемещения (рис.11) начинается из начала координат (начальное перемещение равно нулю). На участке AC график представляет собой параболу ветвями вниз, на участке CD – прямую, на участке DF – параболу ветвями вверх. Вершины парабол находятся в точках B и E, в которых скорость равна нулю. Положение точек B, D и E находится с помощью правила площадей: координата точки B равна площади под графиком скорости на участке AB, координата точки D определяется площадью прямоугольника на участке CD, координата точки E – площадью треугольника на участке DE. Правило площадей действует на любом участке. Следует обратить внимание на то, что состыковка участков графика в точках C и D должна быть гладкой, без уголков, поскольку скорость в этих точках не испытывает скачка.

График пути (рис.12) строится, исходя из графика перемещения: там, где перемещение возрастает (участки AB, EF), график пути повторяет ход графика скорости, а на участках, где перемещение убывает, график пути является отражением графика перемещения.

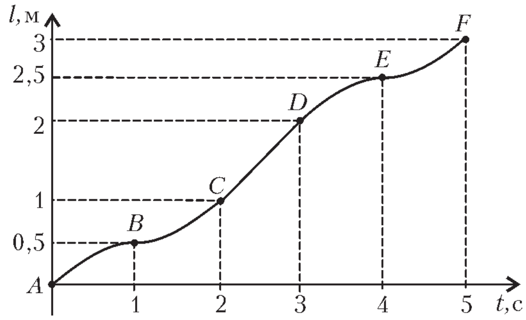

Рис. 12

Упражнения

1. Торможение автомобиля до полной остановки заняло время 4 с и происходило с постоянным ускорением 4 м/с^2. Найдите тормозной путь.

2. От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает движение с той же скоростью. Считая, что вагон движется с постоянным ускорением, найдите, во сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к этому моменту.

3. За одну секунду движения тело прошло путь 10 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

4. Скорость тела, движущегося с постоянным ускорением, в начале некоторого участка равна 7 м/с, а в конце направлена в ту же сторону и равна 1 м/с. Чему равна его скорость в середине этого участка?

5. С какой высоты падает тело без начальной скорости, если путь, пройденный им за последнюю секунду движения, в пять раз больше пути, пройденного за первую секунду?

6. Автомобиль, двигаясь равнозамедленно, за последовательные промежутки времени в 3 с и 2 с прошел отрезки AB и BC в 51 м и 24 м соответственно. Какой путь пройдет автомобиль от точки C до остановки?

7. Тело бросили вертикально вверх. Наблюдатель заметил, что на высоте 75 м тело побывало дважды, с интервалом времени 2 с. Найдите начальную скорость тела.

8. Шарик, пущенный снизу вверх по наклонной плоскости, движется с постоянным ускорением, направленным противоположно начальной скорости. На расстоянии 50 см от начальной точки движения шарик побывал дважды: через 1 с и 2 с. Найдите начальную скорость шарика и его ускорение.

9. Спортсменка пробежала расстояние 100 м за время 12 с, причем на разгон она потратила 4 с, а остальное время бежала равномерно. Найдите скорость спортсменки на участке равномерного движения.

10. Двигаясь от стоянки равноускоренно, автомобиль за 10 с достигает скорости 20 м/с. Следующие 5 с он движется равномерно, а затем останавливается в течение 5 с, двигаясь с постоянным ускорением. Найдите путь автомобиля за все время движения.

11. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 25 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением 0,5 м/с^2. Пассажир побежал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

12. Скоростной лифт опускается с ускорением 5 м/с^2 относительно земли. В некоторый момент времени с потолка лифта начинает падать болт. Высота лифта 2,5 м. Определите время падения болта.

13. По графику зависимости скорости точки от времени (рис.13) постройте графики зависимости от времени ускорения, перемещения и пути.

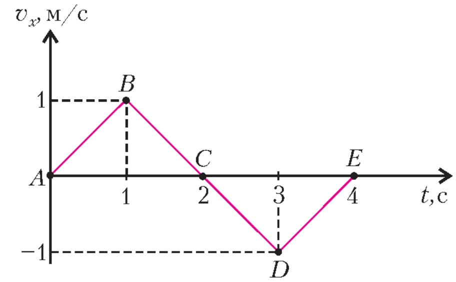

Рис. 13