

ИЮЛЬ/АВГУСТ

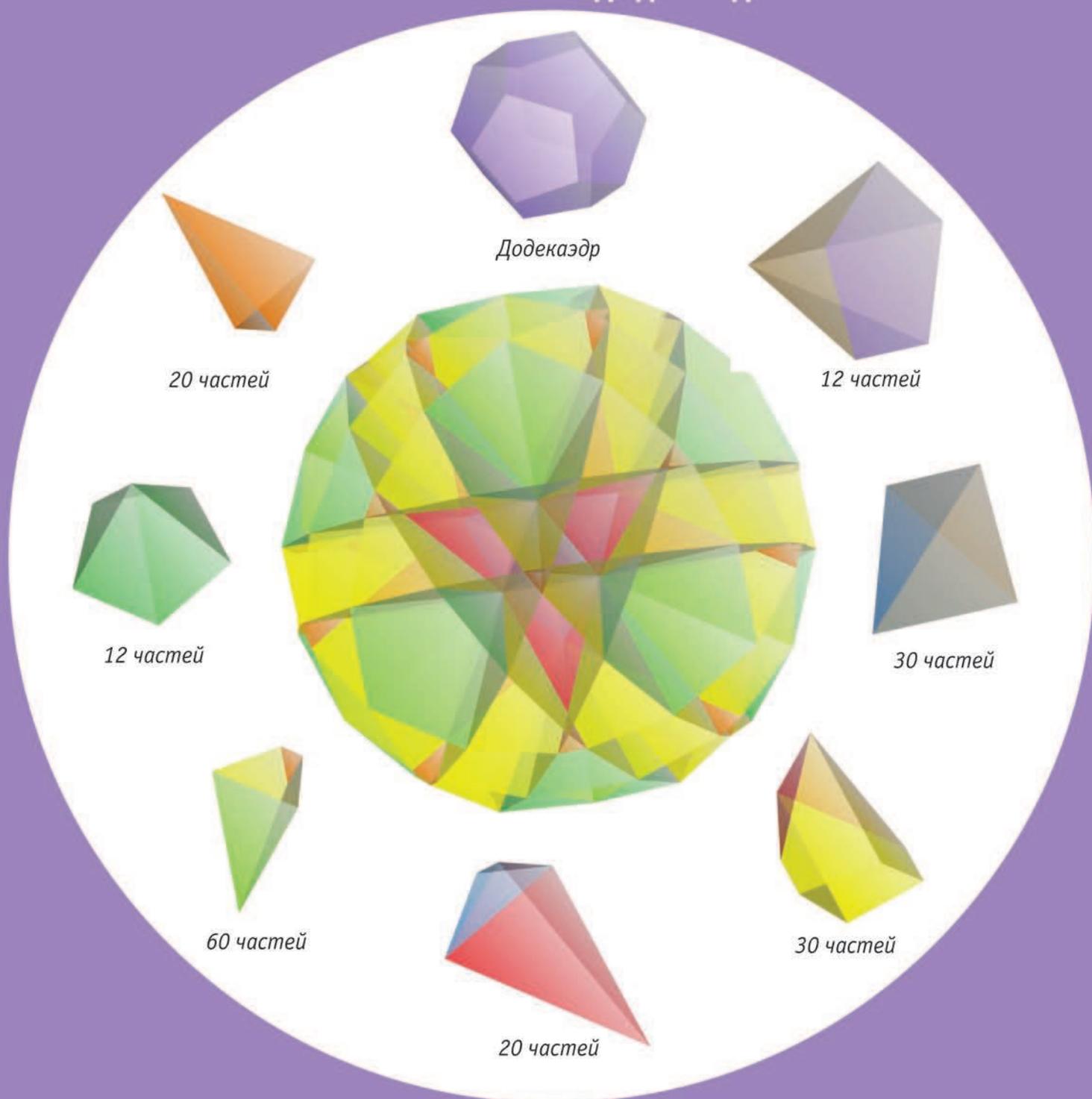
ISSN 0130-2221  
2009 · №4

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



## НА СКОЛЬКО ЧАСТЕЙ ДЕЛЯТ ПОСТРАНСТВО ПЛОСКОСТИ ГРАНЕЙ ДОДЕКАЭДРА?



Одно из решений этой замечательной задачи демонстрирует мультфильм, созданный М.Пановым (см. [www.math.ru/yurev/185.avi](http://www.math.ru/yurev/185.avi)). Подсчет числа частей происходит на ваших глазах: грани додекаэдра медленно продолжают, и можно наблюдать, как возникают новые части. Здесь же приведены несколько кадров из мультфильма. На большом рисунке грани продлены так далеко, что уже появились все части. Рядом нарисовано по части каждого типа (некоторые из них — бесконечного размера и изображены не целиком) и указано, сколько всего образуется частей каждого типа. Одна из частей — сам додекаэдр.

Два других способа подсчета приведены на странице 19 внутри журнала.

журнал©  
**Квант** ИЮЛЬ АВГУСТ 2009 **№4**

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

**Квант**

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН  
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2009, РАН,  
Фонд Осипьяна, журнал «Квант»

НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 2 Линейка длиной в один нанометр. *И.Яминский*  
7 Почему углеродные трубки прочнее стали?  
8 Арифметика многогранников. *Г.Панина*  
14 Рассказы о современной механике (продолжение). *Г.Чёрный*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 18 Математики и программисты. *А.Шень*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи M2139–M2145, Ф2145–Ф2152  
21 Решения задач M2116–M2123, Ф2130–Ф2137

К М Ш

- 30 Задачи  
34 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
34 Об одной хорошо забытой старой задаче. *В.Доценко, К.Шрамов*  
36 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2008/09 учебного года

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Под данным углом

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 37 Движения плоскости и теорема Шаля. *В.Бугаенко*  
42 Загадочные круги и движения плоскости. *С.Дориченко, С.Шашков, А.Шень*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 43 Опыты с компакт-диском. *Н.Ростовцев, А.Седов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 46 Модуль суммы и сумма модулей. *А.Егоров*

ОЛИМПИАДЫ

- 49 XXX Турнир городов  
50 Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады  
52 Избранные задачи Московской физической олимпиады  
55 XIII Международный турнир «Компьютерная физика»  
56 Всероссийская студенческая олимпиада по физике

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Избранные задачи собеседований в 9 класс 57 школы  
59 Ответы, указания, решения  
Нам пишут (30)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к рубрике «Нанотехнологии»*  
II *Кванты Интернета*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

**TENEX**

В издании журнала «Квант» финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

# Линейка длиной в один нанометр

**И. ЯМИНСКИЙ**

Девочке Нана и мальчику Ноно объясняют, что такое нанометр. Сообразительная Нана улыбается. Ей все понятно. Нанометр — это одна миллиардная часть метра. В Ноно видно напряжение. С некоторой задержкой он спрашивает: а что такое метр? И тут большой педагогический такт проявляет третий персонаж — умудренный опытом профессор. Он не раздражается, не возмущается, а просто подходит к Ноно и показывает ему, что метр это примерно расстояние от пола до подбородка Ноно. Мальчик радуется, что он сам больше метра. Он все понял и уже готов бежать играть в футбол...

Так начинается тайваньский мультфильм «Фантастическое путешествие Нана и Ноно», который посвящен популярному рассказу о нанотехнологиях. И такое начало мультфильма не случайно. Нанотехнологии опираются на измерения, в которых нанометр играет ключевую роль. Именно о нанометре и будет рассказано в статье.

## Введение

Всем известно, что метр — это основная единица длины. Он был введен во Франции в XVIII веке и определялся как одна сорок миллионная часть длины Парижского меридиана. В 1799 году из сплава платины и иридия был изготовлен первый эталон метра.

При выборе метра в качестве единицы длины руководствовались, в частности, такими важными соображениями, как удобство использо-



*В Токио перед огромным выставочным залом, где ежегодно проходит международное шоу по нанотехнологиям, сооружена сорокаметровая пила, наполовину вкопанная в землю. Это памятник большой труженице обычных технологий. Нанотехнологии же призваны конструировать новые устройства и материалы, собирая их, как в конструкторе, из атомов и молекул.*

*Эта статья опубликована в рамках договора с ГК «РОСНАНОТЕХ».*

## Немного истории

### Когда метрология была без приставки «нано»

Издrevле большинство мер длины строились исходя из удобства их использования. Например, старорусская сажень, или прямая сажень, была равна расстоянию от конца пальцев одной вытянутой по горизонтали руки до конца пальцев другой вытянутой руки. По указу Николая I, в 1835 году были приведены в соответствие русские и английские меры длины. Он положил, что одна сажень должна равняться семи английским футам (от английского foot — ступня). При переводе в метры получается, что 1 прямая сажень равна 2,1336 метра.

Косая сажень — еще одна старорусская единица длины, равная 2,48 метра. Первоначально косая сажень определялась как расстояние от пальцев левой ноги до кончиков пальцев вытянутой по диагонали правой руки.

Это были удобные в применении меры. Однако, используя их, получали ... различные длины.

О необходимости и важности аккуратных и точных измерений хорошо понимал Дмитрий Иванович Менделеев, который был первопроходцем не только в создании периодической системы элементов. Ему было очевидно, что в обществе с растущим промышленным производством вопрос измерений и метрологии принимает ключевое значение. Развитие железнодорожного транспорта, становление заводов и фабрик, вхождение России в мировую экономику требовали решения задач единства измерений. Необ-

ходимы были серьезные усилия, чтобы килограммы, граммы, метры, сантиметры, миллиметры и дюймы везде были одинаковыми.

С 1892 года и до конца своей жизни Д.И. Менделеев возглавлял первое научное метрологическое учреждение России – Главную палату мер и весов. Ее задачей было обеспечение единства мер и создание надежных методов измерений и их эталонов, а также обеспечение единообразия и верности применяемых мер и измерительных приборов. Теперь это Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии, носящий имя Д.И. Менделеева. Палата, а ныне институт расположены в Санкт-Петербурге. Благодаря усилиям Д.И. Менделеева, в 1900 году в Москве при Московском окружном пробирном управлении была создана Поверочная палатка торговых мер и весов №3. Сейчас это Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (предприятие федерального значения). Его эмблема – буква М (первая буква в слове МЕТРОЛОГИЯ), опоясывающая земной шар и одновременно опирающаяся на него. Хорошая символика для того, чтобы показать, насколько важна метрология для всех нас.

#### Легенда об овсе и не только...

«Если вы в Санкт-Петербурге купили два пуда овса, а потом на санях привезли в Москву и там взвесили овес и обнаружили, что весы показывают всего полтора пуда, вот будет горе. Но если вы – предприимчивый торговец, то горе поправимо. Покупаете в Москве 100 пудов овса, а в Санкт-Петербурге продаете их как 133 с небольшим пуда. Чтобы быть предприимчивым торговцем, вам придется еще посмотреть на разницу в цене на овес в Москве и Санкт-Петербурге. Посчитать, сколько надо будет взять овса, чтобы прокормить лошадь. Оценить стоимость собственного труда. И не забыть про амортизацию оборудования – износ подков лошади и полозьев саней».

#### «История» с дюймо

С нанометрами надо вести себя аккуратно. А то могут произойти всякие истории, какие имели место с метром. Впрочем, даже не с метром, а с дюймо. Кстати сказать, почему-то нанодюйм не так популярен, как нанометр. Наверное, потому, что нанодюйм почти в 40 раз меньше, чем нанометр, и на порядок меньше размера атома.

Но вернемся к обещанной истории с дюймо.

Происходило это во времена большой космической гонки между СССР и США. Обе сверхдержавы спешили быть первыми. Возможно, для ускорения процесса создания космической ракеты американцы две половинки ракеты делали в разных местах. Когда две половинки оказались в одном месте

вания и применения. В наше время, в XXI веке, многие исследования ведутся на масштабе нано. Способ производства, когда материалы и устройства конструируются и собираются из отдельных атомов и молекул, принято называть нанотехнологиями. Для нанотехнологий



Палата мер и весов – НИИ метрологии им. Д.И. Менделеева

метр слишком большая единица измерения длины. Подходящей величиной здесь может служить нанометр.

С точки зрения математики, все очевидно:  $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ , и, казалось бы, нет ничего проще. Однако на практике возникают сложные вопросы. И первый из них – как изготовить линейку с расстояниями между рисками длиной в один нанометр. Действительно, метр является универсальной первичной единицей для измерения длин и имеет свой эталон. Нанометр появляется как производная от метра единица длины. А как сделать вторичный эталон – для нанометра? Этот вопрос относится к области нанометрологии и имеет принципиальное значение для нанотехнологий.

«Хочешь создавать – научись мерить», – это слова знаменитого русского ученого Дмитрия Ивановича Менделеева, внесшего огромный вклад в создание метрологической службы в России. В полной мере его слова справедливы и для нанотехнологий.

Итак, дальнейший рассказ будет о том, как сделать линейку для измерений длин в нанодиапазоне.

#### Как поделить метр на миллиард нанометров?

Нанотехнологии – это искусство создавать новую продукцию, размеры которой находятся в области нанометрового диапазона. Если серьезно заниматься производством таких изделий, то нужно очень хорошо научиться измерять эти самые нанометры. Для этого необходимо не только удобный, но и однозначный эталон длины.

Вроде бы, все просто: чтобы получить нанометр, надо распилить один эталонный метр на один миллиард равных частей. Если потом миллиард человек получат по одному нанометру, разойдутся по разным частям света, а затем, спустя много времени, вновь соберутся в одном месте, приложат все свои нанометры друг к другу и убедятся, что их нанометры одинаковой длины, – вот будет здорово. И означать это «здорово» будет многое. Во-первых, что вначале метр порезали точно на равные части. Во-вторых, что во время странствий нанометр не поизносился, не поистерся и не растянулся. В-третьих, что такие нанометры можно использовать как меру длины и что два человека, измеряющие один и тот же предмет «разными» нанометрами, получат одни и те же результаты. Однако осуществить такое не удастся,

поскольку, как только мы начнем пилить метр, появится стружка, а ширина каждого пропила может вообще оказаться больше одного нанометра, т.е. весь наш труд уйдет в опилки. Можно попробовать разрезать метр ножом так, чтобы не было опилок, но как это сделать?

Вернемся опять к метру. Метр – это единица измерения длины, и равен он, в соответствии с современным определением, расстоянию, которое проходит свет за промежуток времени, равный  $1/299792458$  секунды. Эталонный метр теперь привязали ко времени и к скорости света. Сделали это в 1983 году и сделали потому, что измерения времени сегодня относятся к самым точным измерениям, а скорость света есть одна из фундаментальных и постоянных величин. Таким образом, теперь, вместо того чтобы метр разрезать на части, надо промежуток времени поделить на миллиард частей. Тогда получается, что

*1 нанометр равен расстоянию, которое проходит свет за  $1/299792458000000000$  секунды.*

Если мы хотим измерять нанометр с точностью хотя бы 1%, то промежуток времени придется определять с ошибкой не более чем  $3 \cdot 10^{-20}$  секунды. Сейчас национальные метрологические центры США, Германии и Франции, имеющие в своем распоряжении эталоны на основе цезиевых фонтанов, ведут работы над стандартами частоты на основе оптических излучателей, использующих одиночный ион изотопа иттербия  $^{171}_{70}\text{Yb}$ , захваченный магнитной или электрической ловушкой. Осуществленные оценки уже показывают, что относительную погрешность измерений времени можно уменьшить до  $1 \cdot 10^{-19}$ . Иными словами, в принципе можно измерить один нанометр с точностью 3%.

### Простой рецепт изготовления нанометра

Давайте подумаем, как в домашней лаборатории сделать простой и надежный эталон в 1 нанометр. Казалось бы, эта задача непосильна в условиях, когда у нас нет практически ничего, кроме нашего желания сделать эталон. Если мы пойдем по пути применения стандартов частоты или измерения сверхкоротких промежутков времени – будет именно так. Но для создания нашего эталона длины в 1 нанометр есть возможность выбрать другой путь. И как вы скоро убедитесь – путь не только очень простой, но обеспечивающий высокую точность изготовления нанометра.

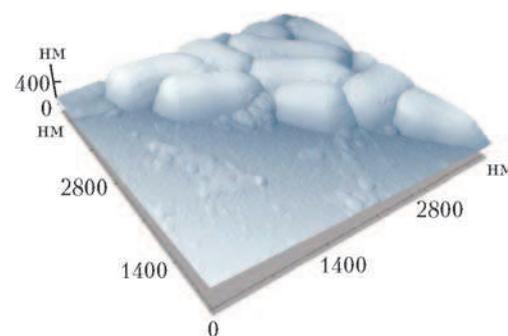
Итак, переходим к описанию рецепта изготовления эталона в 1 нм. Нам понадобятся батарейка, пластинка из пьезокерамики с электродами, два электрических сопротивления и соединительные провода. Все, кроме пьезопластинки, найти несложно. Перед тем как отправиться на поиски пьезопластинки, давайте разберемся, что она из себя представляет. Такие пластинки обычно изготавливают из пьезокерамики, например цирконата-титаната свинца, в виде сплюсненной шайбы. На противоположные торцы шайбы наносят металлические электроды. Для нас подойдет шайба размеров монеты в 1 копейку.

А чем хороша пьезокерамика? Если пьезокерамику поместить в электрическое поле, то ее размеры изменятся. Происходит это по причине обратного пьезоэффекта. Прямой пьезоэффект проявляется в возникновении электрической разности потенциалов на электродах пьезопластинки, если эту пластинку подвергнуть механическому воздействию – сжатию или растяжению. Обратный пьезоэффект состоит в изменении длины стержня под действием приложенного к нему электрического напряжения. Оба эти эффекта впервые были обнаружены братьями Жаком и Пьером Кюри в 1878 году на кристалле кварца. Кстати сказать, на принципе обратного пьезоэффекта устроен электрический звонок в мобильных телефонах или наручных часах.

и их попытались соединить, оказалось, что их диаметры отличаются на... целый дюйм. Составить из двух половинок одно целое сразу не удалось. Произошла заминка, повлекшая отставание американцев, и наша космическая ракета в очередной раз стартовала первой. Была ли ошибка в документации или дюймы были разные, теперь никого не интересует. Тогда, как и всегда, каждому хотелось быть первым.

### Есть ли нанометрология в живой природе?

Природные нанотехнологии, которые так успешно работают в живой природе в течение многих миллионов лет эволюции, к размерам относятся очень аккуратно. Так, сборка некоторых белков осуществляется с точностью, превышающей  $1/10$  нанометра.



*Бактерия Helicobacter pylori*

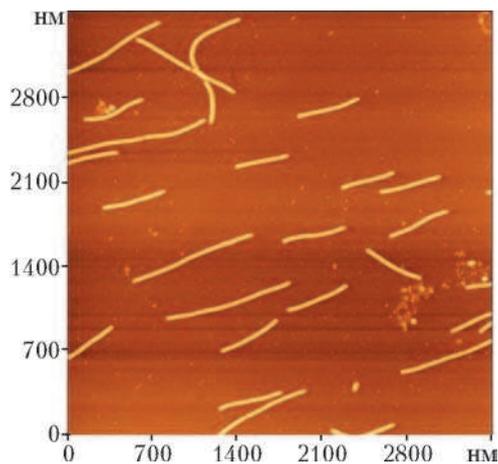
Можно сказать, что многие процессы молекулярного узнавания в биологических системах построены на весьма точном взаимном расположении атомов и молекул. Например, геометрия антител – белковых молекул, которые позволяют обнаруживать чужеродные частицы антигены, – является дополнительной к этим самым антигенам. При объединении друг с другом они образуют новый макромолекулярный комплекс без лишних «зазоров».

Это только один пример, таких примеров в живой природе очень много.

Хорошо изученный вирус табачной мозаики представляет собой молекулу РНК в форме спирали с окружающей ее белковой оболочкой. Он имеет форму продолговатой палочки диаметром 18 нм и длиной около 300 нм. Вот такая миниатюрная частица



*Вирус табачной мозаики*



Вирус картофеля

может доставить очень много неприятностей табаку, помидорам и другим растениям.

Растения, как и мы, подвержены вирусным заболеваниям. К нашему счастью, вирусы растений не представляют никакой опасности человеку. По крайней мере, можно констатировать, что обратное никто никогда не демонстрировал. Поэтому, например, мы можем спокойно съесть картофель, пораженный X вирусом картофеля. Буква X здесь обозначает тип вируса. Есть также A вирус картофеля и B вирус картофеля. X вирус картофеля, как и вирус табачной мозаики, имеет нитевидную форму, только он поуже и подлиннее: 14 нм в диаметре при длине 1 микрон.

Кстати, было высказано предложение использовать вирус табачной мозаики как эталон 18 нанометров, а X вирус картофеля – как эталон 14 нанометров.

### Современные системы навигации

Современные системы навигации GPS и ГЛОНАСС работают с точностью измерения частоты и, соответственно, промежутка времени с относительной погрешностью  $1 \cdot 10^{-13}$ .

GPS – сокращение английских слов **G**lobal **P**ositioning **S**ystem, т.е. глобальная система позиционирования. Полное название этой спутниковой системы навигации – NAVSTAR GPS (NAVigation Satellites providing Time And Range – навигационные спутники, обеспечивающие измерение времени и расстояния; глобальная система позиционирования). Эта система создана Министерством обороны США для точного определения координат и скорости объектов.

Российская спутниковая система навигации – **Г**ЛОбальная **Н**Авигационная **С**путниковая **С**истема, или сокращенно ГЛОНАСС.

Если у вас дома есть GPS-приемник, то вы можете подумать о привязке одного миллиметра к метру с помощью этого общедоступного эталона частоты и о проверке расположения насечек на домашней линейке с

Правило обратного пьезоэффекта очень простое – изменение размеров пьезопластины  $\Delta D$  прямо пропорционально приложенному напряжению  $\Delta U$ :

$$\Delta D = d_{33} \Delta U,$$

где коэффициент пропорциональности  $d_{33}$  – пьезоэлектрический модуль. Использование двух цифр в индексе модуля показывает, что напряжение в общем случае мы можем прикладывать по одному из трех направлений (вдоль осей координат X, Y или Z), а изменение размеров – наблюдать по любому другому направлению. В нашем случае направление электрического поля совпадает с направлением перемещения, поэтому используются две одинаковые цифры 3. Как легко подсчитать, всего у пьезоэлектрического модуля 9 компонентов:  $d_{11}, d_{12}, d_{13}, \dots, d_{33}$ . (Такие физические величины называются тензорами второго порядка.)

Возьмем керамику с пьезоэлектрическим модулем  $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н =  $200 \cdot 10^{-12}$  м/В. Если мы приложим к электродам напряжение 5 В, то изменение размеров пластинки составит 1 нм. Заметьте, что изменение размеров пьезопластины не зависит от толщины самой пластинки. И это очень хорошо, ибо, создавая эталон длины, мы не должны думать о длине самого эталона.

Таким образом, для нашего нанометра мы уже можем сформулировать главный тезис:

*нанометр – это расстояние, на которое изменяется размер пластинки, изготовленной из пьезокерамики с пьезоэлектрическим модулем  $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н =  $200 \cdot 10^{-12}$  м/В, при приложении к ее электродам напряжения 5 В.*

В нашем эталоне мы использовали именно такие пьезопластинку и батарейку. Если у батарейки напряжение больше 5 В, то нам понадобятся два электрических сопротивления, с помощью которых мы сделаем делитель напряжения с выходом 5 В. А если мы найдем пьезокерамику с другим значением пьезоэлектрического модуля, то, подбирая на делителе нужное напряжение, мы сможем и для этого случая выполнить условие  $\Delta D = 1$  нм.

### Маленькие хитрости есть в каждом деле

В изготовлении нашего нанометра есть свои «хитрости». Вот первая. Если мы используем пьезопластинку, изготовленную из пьезокерамики с пьезоэлектрическим модулем  $d_{33} = 200 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н, то после каждого приложения напряжения 5 В размер пластинки будет изменяться на 1 нм. Между приложениями напряжений очень важно не забывать обкладки пластинки замыкать проводником. Пьезокерамика – очень хороший изолятор: будучи приложенным к обкладкам единоразово, напряжение будет держаться на них достаточно долго. Это может длиться и часы, и сутки, все зависит от влажности воздуха и чистоты поверхности пластинки. Замыкая электроды пластинки проводником, мы позволяем отрицательному заряду стечь по проводнику на противоположную обкладку таким образом, чтобы напряжение на пластинке стало равным нулю и пластинка вернулась к исходным размерам.

И еще одна важная «мелочь». Электрическое напряжение можно прикладывать так, чтобы пьезопластинка становилась толще, или так, чтобы пластинка становилась тоньше. Иными словами, батарейку можно подключать плюсом на верхний электрод, а можно – плюсом на нижний электрод. В обоих случаях пластинка будет менять свой размер на 1 нм. Есть ли разница в том, как прикладывать напряжение? Чтобы ответить на этот вопрос, надо рассказать, как изготавливают пьезокерамику.

Пьезокерамику делают из порошка, который спекают при высокой температуре и лучше при высоком давлении. При этом получается твердый материал, который на микроскопическом масштабе состоит

из отдельных зерен. В каждом зерне положительные заряды слегка смещены относительно отрицательных (в целом зерна электрически нейтральны), и это смещение зарядов приводит к тому, что у зерна появляется дипольный момент. Попадая в электрическое поле, такое зерно будет растягиваться или сжиматься.

В свежее испеченной пьезокерамике дипольные моменты отдельных зерен имеют случайные направления, обратный пьезоэффект наблюдается для каждого зерна в отдельности, а направленное перемещение пластины в целом отсутствует. В постоянном электрическом поле часть зерен растянется, а часть сожмется в направлении поля, но в целом размер пьезокерамического образца не изменится.

Чтобы вызвать направленное перемещение, все дипольные моменты отдельных зерен нужно сориентировать одинаковым образом. Для этого пьезокерамику помещают в электрическое поле напряженностью 1000 В/мм и более и нагревают до температуры около 300 °С. Этот процесс называется поляризацией керамики. Перегреть керамику нельзя, потому что при некоторой температуре (точка Кюри) пьезоэффект пропадает. Если поляризация проведена успешно, то все зерна имеют дипольные моменты, направленные в одну сторону, при этом поляризующее поле растягивает керамику. Если же приложить электрическое поле противоположного направления, то будет происходить процесс деполяризации, сжимающий керамику.

Вот здесь и кроется ответ на наш вопрос, как надо прикладывать напряжение в эталоне нанометра – чтобы керамика растягивалась или сжималась. Правильный ответ такой. Если мы хотим избежать возможной деполяризации керамики, то напряжение надо прикладывать таким образом, чтобы всегда происходило только удлинение пластины.

### Поверяем нанометр и становимся нанометрологами

У пьезокерамики есть ряд недостатков – нелинейность, гистерезис, крип. Нелинейность проявляется в отклонении от простой формулы  $\Delta D = d_{33}\Delta U$ . Гистерезис обусловлен «памятью» материала к предыстории прикладываемого напряжения, в результате чего может оказаться, что при одном и том же приложенном напряжении удлинения пластины будут разными. Вследствие крипа, или ползучести, удлинение пьезокерамики может отставать во времени от приложенного напряжения.

Будут ли эти эффекты снижать точность нашего эталона нанометра? Практически нет, если к электродам эталона строго периодически прикладывать только два значения электрического напряжения: 5 В и 0 В. Все недостатки пьезокерамики – нелинейность, гистерезис, крип – присутствовать будут, но их вклад будет все время одним и тем же. А если так, то, аккуратно выбирая напряжение, мы можем добиться удлинения пьезопластины точно на один нанометр.

Завершая наш рассказ, отметим, что если вы не сумели изготовить свой собственный эталон нанометра, но все поняли в данной статье, то можно считать, что вы уже состоявшийся нанометролог. (Ведь не каждый же нанометролог пользуется самостоятельно изготовленным наноэталонном.) Если же вы потрудились, нашли пьезопластинку и соорудили свой нанометр, то можно сказать, что вы самый передовой нанометролог.

За рамками статьи остался очень важный вопрос: как убедиться, что наша пластинка удлиняется точно на один нанометр? Другими словами, каким образом осуществить привязку созданного нанометра к первичному эталону метра? К сожалению, эту процедуру в домашних условиях сделать нельзя. Надо обратиться в метрологическую службу, и там с помощью интерферометра смогут точно определить перемещение пластины. Как это делается – тема для другой статьи.

точностью чуть лучше чем 1%. До нанометра с помощью системы GPS пока приблизиться не удается.

### Экономика изготовления нанометра

Возможно, у вас остается пока нерешенным вопрос, где найти пьезокерамическую пластинку. На самом деле, такие пластинки буквально окружают нас в нашей повседневной жизни. Звонки в часах, мобильных телефонах и компьютерах часто изготавливают именно из пьезокерамических пластин. Правда, в них есть одна особенность. Там пьезопластины приклеивают к упругой металлической пластинке. В результате этого при изменении размеров пьезопластины такая клееная конструкция совершает дополнительный изгиб и центр конструкции перемещается на гораздо большее расстояние, чем свободная пластинка. Поэтому если мы хотим получить перемещение в 1 нм, то лучше использовать просто пьезокерамическую пластинку – иначе прикладываемое напряжение должно быть существенно меньше да и стабильность такой системы гораздо меньше. Кроме того, за счет разницы температурных коэффициентов пьезокерамики и металла клееная конструкция будет дополнительно изгибаться при изменении температуры окружающей среды.

Где же найти правильную пьезопластинку? Оказывается, они продаются в магазинах электронных аксессуаров. Стоимость одной пластины – около 10 рублей.

Тогда можно подсчитать бюджет нашей разработки эталона нанометра: батарейка – 40 руб., провода – 8 руб., пьезопластинка – 10 руб., поиск и заказ пластины в Интернете (оплата трафика) – 35 руб., доставка пьезопластины (если вы не поедете сами) – 150 руб., собственный труд – оцените сами.

Вот такая экономика изготовления эталона в один нанометр.

### Любопытно, что ...

...если вы взгляните на себя в зеркало, то за это время каждый волосок вашей шевелюры удлинится на один нанометр.

...если водой из озера Байкал заполнить половину объема железнодорожной цистерны, то уровень воды в озере упадет почти на один нанометр.

...монету достоинством в 1 копейку бросил в бассейн, при этом уровень воды повысился на 1 нм. Каковы размеры бассейна?

...ученые научились делать золотые нити толщиной в один атом. При этом на длине 1 нанометр целиком укладываются 3 атома золота.

## Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Углерод встречается в природе в виде нескольких полиморфных модификаций (аллотропов). Два из них широко известны – это графит и алмаз. Углеродная нанотрубка тоже является модификацией углерода и представляет собой гигантскую молекулу из атомов углерода.

Нанотрубки могут быть вложены одна в другую – тогда их называют многослойными. На рисунке 1 изображены продольные сечения пятислойной, двухслойной и семислойной

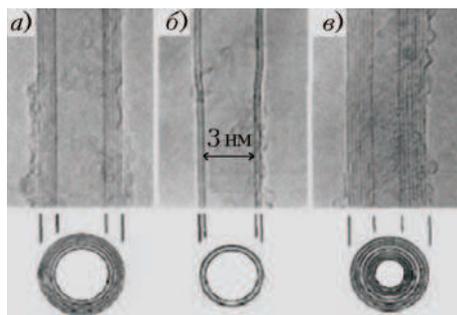


Рис. 1

нанотрубок, полученные с помощью электронного микроскопа, а на рисунке 2 представлено изображение поверхности

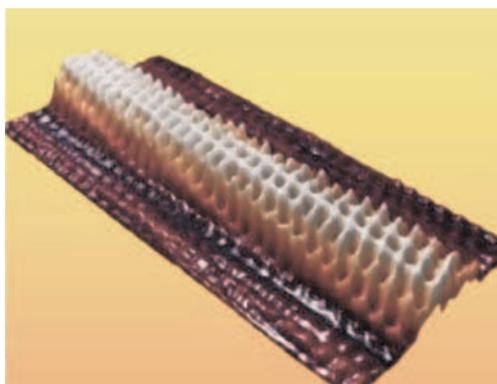


Рис. 2

однослойной нанотрубки, полученное с помощью сканирующего зондового микроскопа.

Прочность на разрыв углеродных нанотрубок, измеренная экспериментально, очень большая и составляет около 60 ГПа. А вот прочность стали – примерно 0,8 ГПа. Почему же нанотрубки почти в сто раз прочнее стали? Попробуем вычислить прочность одностенной нанотрубки, схематично показанной на 4-й странице обложки. Там шариками обозначены атомы углерода, а соединяющими их линиями – ковалентные связи между этими атомами. У такой трубки одна треть С-С связей ориентирована вдоль ее оси. Закрепим невидимый конец трубки, а к другому ее концу приложим растягивающую силу  $F$ . Пусть в нанотрубке атомы углерода образуют между собой одинаковые связи и углы между ними составляют  $120^\circ$ . Тогда при растяжении нанотрубки эти связи будут растягиваться одинаково. Однако разорваться нанотрубка может самым причудливым образом, зависящим, например, от того, какая именно связь разорвется первой. Чтобы упростить расчеты, предположим, что растя-

*Этот материал опубликован в рамках договора с ГК «РОС-НАНОТЕХ».*

жение разрывает только С-С связи, ориентированные вдоль оси трубки и расположенные в одной плоскости ее поперечного сечения. Известно, что расстояние между ближайшими атомами углерода в нанотрубке приблизительно равно  $d = 0,15$  нм. Легко показать, что если диаметр трубки равен  $D$ , то количество связей, ориентированных вдоль оси трубки,

равно  $N = \frac{\pi D}{d\sqrt{3}}$ . При этом к каждой С-С связи приложена сила, равная  $\frac{F}{N}$ . Прочность одной С-С связи можно найти

из графика зависимости потенциальной энергии этой связи от расстояния между атомами (рис.3). Из графика видно, что потенциальная энергия связи достигает минимума, когда расстояние между ядрами атомов составляет 154 пм. Это и определяет расстояние, на котором находятся атомы углерода в нерастянутой нанотрубке. Тангенс угла наклона кас-

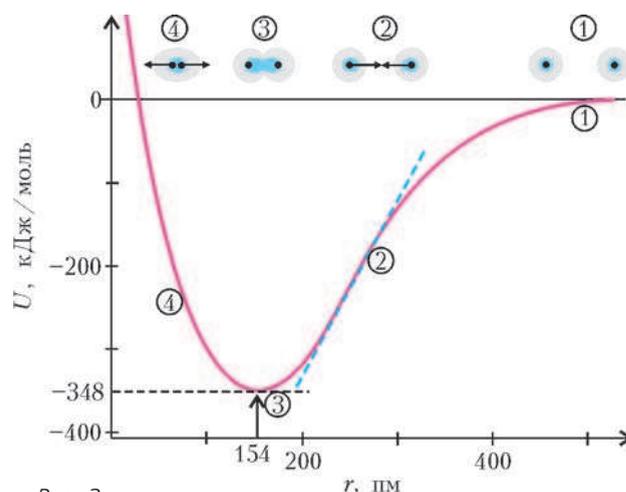


Рис. 3

ательной к правой ветви кривой пропорционален силе  $F_1$ , необходимой для того, чтобы удерживать атомы на данном расстоянии  $r$ . Отсюда находим  $F_1 = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{1}{N_A}$ , где

$N_A = 6 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – число Авогадро. Чтобы увеличить расстояние между атомами углерода, надо приложить большую силу. А если она будет больше силы, соответствующей максимальному тангенсу угла наклона (см. синий пунктир на рисунке 3), то связь порвется. Иными словами, связь порвется при

$$F > \frac{348 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль}}{154 \cdot 10^{-12} \text{ м} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}} = 3,8 \text{ нН}.$$

Понятно, что если в одностенной нанотрубке число параллельных оси С-С связей в одном поперечном сечении равно  $N$ , то нанотрубка разорвется, когда растягивающая ее сила станет больше  $N \cdot 3,8$  нН. Пусть  $D = 1,5$  нм, тогда  $N = 18$  и  $F_{\max} = 18 \cdot 3,8 \text{ нН} \approx 69 \text{ нН}$ . Чтобы вычислить предел прочности  $\sigma_{\max}$  нанотрубки, разделим  $F_{\max}$  на площадь поперечного сечения  $S = \pi D^2/4$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{4F_{\max}}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 69 \cdot 10^{-9}}{3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^{-18}} \text{ Па} = 39 \text{ ГПа}.$$

Полученное нами значение  $\sigma_{\max}$  довольно близко к экспериментально найденным величинам (63 ГПа) и, как и следовало ожидать, гораздо больше прочности самых прочных сортов стали (0,8 ГПа).

(Продолжение см. на с.43)



# Арифметика многогранников

Г.ПАНИНА

– Сложению тебя обучили? – спросила Белая Королева.

– Сколько будет один плюс один?

– Я не знаю, – ответила Алиса. – Я сбилась со счета.

– Сложения не знает, – сказала Черная Королева.

– А Вычитание знаешь? Отними из восьми девять.

– Этого я не знаю, но зато...

– Вычитания не знает, – сказала Белая Королева.

Л. Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

## Введение

Сначала мы научимся складывать многоугольники на плоскости и многогранники в трехмерном пространстве. Операция сложения многогранников и вообще произвольных фигур была введена немецким математиком Германом Минковским (1864–1909) и изучается в университетских курсах.

А затем мы научим вас тому, что покажется на первый взгляд невозможным – вычитать многоугольники и многогранники. Кажущаяся невозможность вычитания не должна нас смутить – ведь каждый из нас был в свое время убежден, что нельзя из восьми вычесть девять. Вычитание многогранников в чем-то напоминает переход к отрицательным числам, но конструкция здесь возникает гораздо забавнее – многогранники как бы выворачиваются наизнанку, принимают довольно причудливые формы (например, взгляните на рисунки 6 и 12,б).

Какая польза в умении складывать и вычитать многогранники? Вообразите, что вам нужно решить обычную школьную задачу (например, про бассейн с трубами или про двух землекопов), но при этом запрещено складывать и вычитать числа. Скорее всего, решить задачу вы не сможете – будут связаны руки.

Так же и с другими объектами математики. Каждый раз, когда удастся придумать разумную операцию сложения (вычитания, умножения ...) для необычных объектов, это большой прогресс, дающий рабочий инструмент. Например, математики умеют складывать и вычитать точки на кривой, петли на поверхности, или, как в этой статье, многогранники. Кстати, здесь же нам придется научиться складывать и вычитать пружинные графы на сфере.

В статье нет доказательств, зато много примеров. Мы предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно дополнительные примеры, экспериментировать, вначале

поверить в утверждения, а только потом думать о доказательствах.

Математика – экспериментальная наука!

## Складываем многоугольники на плоскости

Белая Королева охнула и закрыла глаза.

– Прибавить я еще могу, – сказала она, – если мне дадут подумать. Но отнять – ни под каким видом!

Итак, мы живем на плоскости, где введена декартова система координат  $(x, y)$  с началом в точке  $O$ . Это дает нам право на каждую точку  $a$  смотреть одновременно и как на точку, и как на вектор  $\overline{Oa}$ . Поэтому всякий раз, когда мы будем писать о сумме точек, будем иметь в виду сумму соответствующих векторов.

Выпуклым многоугольником на плоскости мы называем выпуклую оболочку непустого конечного множества точек. Важно, что у нас точка и отрезок тоже считаются многоугольниками.

Определим на множестве выпуклых многоугольников операцию сложения по Минковскому.

**Определение 1.** Пусть  $K$  и  $L$  – выпуклые многоугольники. Их суммой Минковского называется множество точек

$$K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}.$$

Вот простейшие свойства суммы Минковского.

(1) Сумма двух многоугольников – выпуклый многоугольник.

(2) Если один из многоугольников, скажем  $L = \{a\}$ , состоит из одной точки, то  $K + L$  – параллельный перенос многоугольника  $K$  на вектор  $a$ .

(3) «Одноточечный» многоугольник  $O = \{O\}$ , где  $O$  – начало координат, играет роль «нуля»: сумма  $K + O$  всегда равна  $K$ .

(4) Если слагаемые  $K$  и  $L$  переместить с помощью параллельных переносов  $u$  и  $t$ , то их сумма перенесется параллельно на вектор  $u + t$ .

Поэтому имеет смысл отождествлять многоугольники, отличающиеся на параллельный перенос. Или иначе, когда мы вычисляем сумму Минковского, мы можем поместить начало координат туда, куда нам удобно (как правило, удобно в вершину одного из многоугольников).

(5) Для поворотов предыдущее утверждение неверно. Если повернуть одно из слагаемых, сумма изменится уже существенно.

**Пример 1.** Сумма Минковского двух непараллельных отрезков – параллелограмм (рис.1).

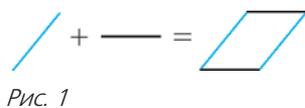


Рис. 1

**Пример 2.** Сумма Минковского двух параллельных отрезков – отрезок суммарной длины.

**Пример 3.** Сумма Минковского треугольника и отрезка, параллельного одной из сторон, – трапеция (рис.2).

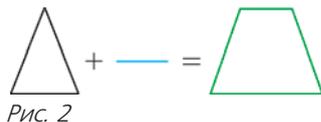


Рис. 2

**Пример 4.** Еще один пример – сумма пятиугольника и треугольника (рис.3). В данном случае это семи-



Рис. 3

угольник. Однако если чуть повернуть треугольник (а пятиугольник оставить прежним), то суммой будет восьмиугольник, так как параллельные стороны пятиугольника и треугольника перестанут быть параллельными.

Поглядев на приведенные примеры, можно подметить, что ломаная, ограничивающая суммарный многоугольник  $K + L$ , составлена из ребер многоугольников  $K$  и  $L$ . Говоря точнее, сумму Минковского многоугольников можно вычислить, следуя такому алгоритму (рис.4):

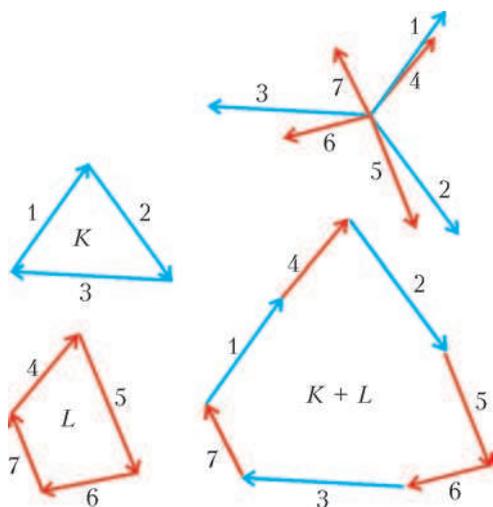


Рис. 4

• Превратим каждое ребро многоугольников  $K$  и  $L$  в вектор, нарисовав на нем стрелку. Полученные векторы должны обходить многоугольники по часовой стрелке.

• Отложим все векторы от начала координат. Получится так называемый общий *букет векторов* для обоих многоугольников.

• Может оказаться, что два вектора из букета имеют общее направление. Тогда эту пару векторов нужно заменить на их сумму.

• Двигаясь по часовой стрелке, берем по очереди векторы из букета и откладываем один за другим (первый вектор – от произвольно выбранной точки на плоскости, каждый следующий вектор – от конца предыдущего). Получается ломаная линия.

• Ломаная замкнется. Она ограничивает сумму Минковского многоугольников  $K$  и  $L$ .

**Задача 1.** Пусть  $K$  – выпуклый многоугольник. Убедитесь, что  $K + K$  есть многоугольник  $K$ , растянутый гомотетией в 2 раза.

### Вычитаем многоугольники

– *Пойду-ка я к Королеве навстречу, – сказала Алиса.*

*Конечно, ей интересно было поболтать с цветами, но разве их сравнишь с настоящей Королевой!*

– *Навстречу? – переспросила Роза. – Так ты ее никогда не встретишь! Я бы тебе посоветовала идти в обратную сторону!*

Разность Минковского определить невозможно, если ограничить себя только выпуклыми многоугольниками. Действительно, при сложении многоугольники не становятся меньше (точнее говоря, сумма  $K$  и  $L$  содержит параллельный перенос каждого из слагаемых – это хорошо видно на рисунке 3). Поэтому вычесть из маленького многоугольника большой невозможно: в этом случае маленький многоугольник содержал бы параллельный перенос большого.

Как же разумно расширить класс выпуклых многоугольников так, чтобы сделать возможным вычитание? Если взять определение суммы и попробовать помудрить с ним, приспособив для вычитания, то ничего хорошего не выйдет (попробуйте!).

Имеется универсальный алгебраический прием: разностью двух многоугольников  $K$  и  $L$  будем называть формальное выражение  $(K - L)$ , не придавая последнему никакого геометрического смысла. Два таких выражения  $(K - L)$  и  $(M - N)$  будем считать равными, как только  $K + N = M + L$ . Несложно проверить, что такие формальные выражения можно складывать (по правилу  $(K - L) + (M - N) = ((K + M) - (L + N))$ ), и у каждого  $(K - L)$  есть обратный элемент  $(L - K)$ .

Этот прием вам уже встречался раньше на уроках математики – при переходе от положительных чисел к отрицательным или от целых чисел к рациональным дробям.

Однако нам хочется иметь дело не с формальными разностями, а с геометрическими объектами. Почему так? Дело в том, что многоугольник (или многогранник в пространстве) имеет богатую геометрическую структуру: у него есть ребра, вершины, понятие площади и т.д. Хотелось бы иметь все это богатство и для разностей Минковского.

С этой точки зрения, плодотворным оказалось при-

способить для вычитания многоугольников алгоритм суммирования. Для вычисления разности нам (как и Алисе) надо кое-где поменять направления векторов на противоположные.

Итак, разность двух многоугольников  $K - L$  мы определим алгоритмически:

- Построим многоугольник  $L'$ , центрально симметричный многоугольнику  $L$  относительно начала координат.

- Превратим каждое ребро многоугольников  $K$  и  $L'$  в вектор, нарисовав на нем стрелку.

Полученные векторы должны обходить многоугольник  $K$  по часовой стрелке, а многоугольник  $L'$  – против часовой стрелки.

- Как и раньше, отложим все векторы от начала координат. Получится *букет векторов* для обоих многоугольников, но на этот раз необходимо помнить, откуда эти вектора пришли – от  $K$  или от  $L'$ . На рисунке 5 красные пришли – бывшие ребра многоугольника  $K$ , а синие – многоугольника  $L'$ .

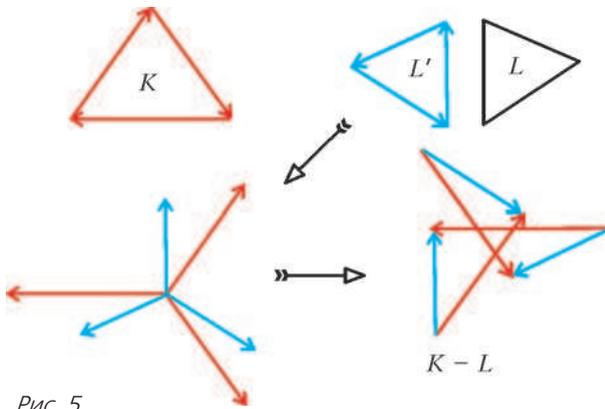


Рис. 5

- Может оказаться, что два вектора из букета имеют общее направление. Пусть для определенности это красный и синий векторы, причем красный вектор длиннее. Тогда эту пару векторов нужно заменить на разность красного и синего векторов и покрасить в красный цвет. Если синий вектор длиннее, то все нужно сделать наоборот. А если векторы равной длины, то просто оба вектора нужно удалить из букета.

- Двигаясь по букету по часовой стрелке, мы откладываем векторы по очереди один за другим. Если векторы разных цветов, то их нужно отложить с нарушением направления (не начало к концу, а начало к началу или конец к концу). А если два последующих вектора одного цвета, то направление не должно нарушаться. Получается ломаная линия.

- Ломаная замкнется. Она представляет разность Минковского  $K - L$ .

Давайте убедимся, что это определение хорошее, т.е. что для него выполнены обычные свойства вычитания.

**Задача 2.** Докажите, что

$$K - K = 0.$$

(Действительно, мы получим букет векторов, где каждый красный вектор продублирован равным ему синим. Соглас-

но алгоритму, все векторы надо удалить, и останется пустой пучок векторов, которому соответствует точка.)

**Задача 3.** Докажите, что

$$K - L + L = K.$$

(Убедитесь, что в полученном пучке векторы, пришедшие из  $L$  и из  $-L$ , убьют друг друга.)

**Пример 5.** Разность двух квадратов, повернутых друг относительно друга на  $45^\circ$ , – восьмиконечная звезда (рис.6).

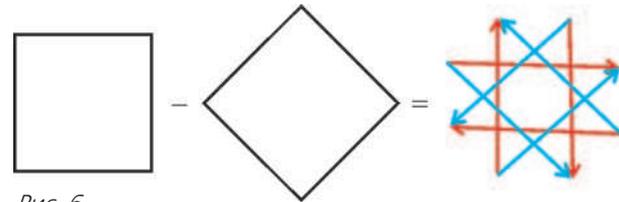


Рис. 6

**Задача 4.** На плоскости нарисована замкнутая ломаная, ребра которой – красные и синие стрелки. При этом две последовательные стрелки одного цвета склеены «конец к началу», а две последовательные стрелки разных цветов склеены «конец к концу» или «начало к началу». Как определить, представима ли такая ломаная как разность двух выпуклых многоугольников? Если да, то как найти эти многоугольники?

**Задача 5** (для тех, кто знает, что такое «группа»).

(1) Подытожив сказанное, сделайте вывод о том, что разности многоугольников образуют группу относительно сложения по Минковскому.

(2) Сложение в группе задается как  $(K - L) + (M - N) = (K + M) - (L + N)$ . Однако давайте увидим геометрию происходящего. Пусть  $K - L$  и  $M - N$  заданы как ломаные из красно-синих стрелок. Как построить их сумму?

### Выходим в пространство

*Алиса начала было спускаться с холма, но вдруг оробела и остановилась.*

*– Прежде чем туда идти, нужно запастись хорошей веткой, чтобы отмахиваться от слонов, – оправдывалась она перед собой.*

В трехмерном пространстве сумма Минковского определяется точно так же, как и на плоскости, но устроена сложнее. Уже неверно, что сумма составлена из перетасованных ребер (или граней) слагаемых. Убедитесь в этом на следующих несложных примерах.

**Пример 6.** Сумма трех взаимно ортогональных отрезков одинаковой длины – куб.

**Пример 7.** Сумма плоского пятиугольника и отрезка, не лежащего в плоскости пятиугольника, – пятиугольная призма.

Поэтому давайте сначала разработаем удобный вспомогательный инструмент, который сделает для нас сумму Минковского удобнее в обращении. Таким инструментом будут пружинные графы на сфере.

Обозначим через  $S$  единичную сферу в трехмерном пространстве с центром в начале координат  $O$ . Большой окружностью будем называть пересечение сферы  $S$  с плоскостью, проходящей через ее центр.

Рассмотрим некоторый граф  $G$  на сфере. Его надо представлять себе так: вершины графа  $\{1, 2, \dots, n\}$  –

точки, лежащие на сфере, ребра – отрезки больших окружностей. Мы считаем, что ребра графа не пересекаются между собой (не считая, разумеется, общих вершин). Множество ребер графа  $G$  обозначим через  $E$ .

Нам интересны будут только те графы, которые можно представить в виде системы пружинок, по пружинке на каждое ребро. Каждая пружинка должна быть обязательно либо сжата, либо растянута (т.е. производить ненулевую силу). Главное условие – система пружинок должна находиться в равновесии.

Дадим строгое определение.

**Определение 2.** Стрессом графа на сфере  $G$  называется функция  $f$ , сопоставляющая каждому ребру некоторое вещественное число так, что для любого  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{(i,j) \in E} f(i,j) \mathbf{u}_{ij} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u}_{ij}$  – единичный вектор, касающийся ребра  $(i,j)$  в точке  $i$  и направленный вдоль ребра от вершины. Эта формула выражает равновесие сил, действующих на вершину  $i$ .

Представлять себе это надо так. У нас есть узкий шаровой слой (пространство между двумя сферами), в котором живет пружинная система. Из-за внешних ограничений пружинки не могут слезть со сферы, но по сфере могут двигаться свободно под действием сил натяжения пружинок.  $f(i,j)$  – сила натяжения пружинки, соответствующей ребру  $(i,j)$ . Векторы сил, создаваемых пружинкой на ее концах, не параллельны, но равны по величине и действуют вдоль ребра. Если стресс положительный, то силы сонаправлены векторам  $\mathbf{u}_{ij}$ .

На рисунках мы отмечаем ребра графа с положительным стрессом (растянутая пружина) красным цветом, а с отрицательным стрессом (сжатая пружина) – синим (как на рисунке 7).

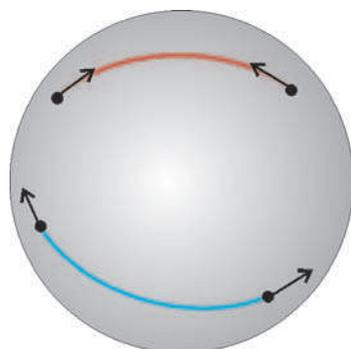


Рис.7. Сжатая и растянутая пружины

Нас интересуют только всюду ненулевые стрессы (т.е. все пружинки должны быть напряжены).

Кроме того, будем предполагать, что в графе со стрессом нет изолированных вершин и нет вершин, к которым примыкает ровно два ребра.

Совсем не все графы на сфере можно представить в виде системы пружинок. Например, если граф состоит из одного-единственного ребра. Или граф из трех ребер, образующих треугольник.

Итак, пусть  $G$  – граф на сфере, а  $f$  – его всюду положительный стресс (т.е. все пружинки растянуты). Покажем, что этому объекту можно поставить в соответствие трехмерный выпуклый многогранник  $P(G, f)$  (от английского слова «polytope»).

Рассмотрим вначале отдельно одну вершину  $i$  графа  $G$ . Пусть  $\mathbf{1}, \dots, \mathbf{k}$  – силы, создаваемые пружинками в вершине  $i$ . Это векторы, идущие вдоль ребер графа, примыкающих к  $i$ , длины которых равны значению стресса. Поскольку стресс всюду положительный, они все направлены вдоль ребра от вершины. Будем считать, что нумерация ребер соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке.

Для вершины  $i$  рассмотрим касательную к сфере плоскость. В этой плоскости построим выпуклый многоугольник, руководствуясь следующим правилом. Выберем точку в плоскости и будем откладывать один за другим векторы  $\mathbf{1}, \dots, \mathbf{k}$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке (рис.8). Поскольку сумма всех этих векторов равна нулю (это условие из определения стресса), ломаная замкнется.

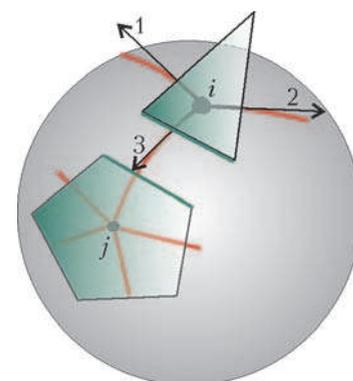


Рис.8. Граф с положительным стрессом порождает выпуклый многогранник

Не правда ли, знакомая картинка? Силы, приложенные к вершине, составляют букет векторов, сумма которых равна нулю, и из этих векторов мы строим выпуклый многоугольник. Это будет грань многогранника  $P(G, f)$ .

Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа.

Заметим, что у многоугольников, соответствующих соседним вершинам графа, есть параллельные стороны одинаковой длины. Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать выпуклый многогранник  $P(G, f)$ . Он определяется такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.

И наоборот, по выпуклому многограннику можно построить граф с положительным стрессом (рис.9). Для этого рассмотрим для каждой грани многогранни-

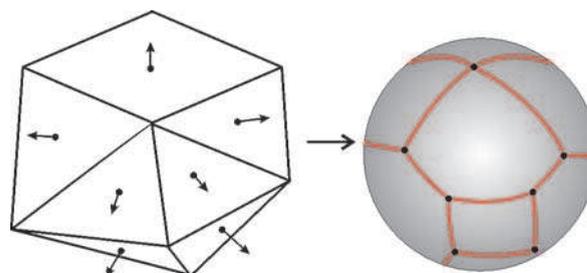


Рис.9. Выпуклый многогранник порождает граф с положительным стрессом

ка единичный вектор, ей ортогональный (и смотрящий наружу). Если отложить все полученные векторы от начала координат  $O$ , то их концы попадут на сферу  $S$ . Это будут вершины графа. Соединим их, согласно комбинаторике многогранника, отрезками больших окружностей (а именно, две точки нужно соединять, если

соответствующие грани многогранника имеют общее ребро). Так мы получим ребра графа. Значение стресса на ребре при этом полагаем равным длине соответствующего ему ребра многогранника.

В этой схеме мы имеем дело с *комбинаторной двойственностью*: вершинам графа соответствуют грани многогранника, вершинам многогранника – области разбиения сферы, ребрам графа – ребра многогранника, причем две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие грани делят ребро.

**Пример 8.** Расположим на сфере три большие окружности, лежащие под углом  $\pi/2$  друг к другу. Их объединение порождает граф с 6 вершинами и 8 ребрами. Функция, ставящая в соответствие каждому ребру число 1, очевидно является стрессом. Убедитесь, что в нашей схеме такому графу со стрессом соответствует куб.

**Задача 6.** А какой многогранник получится, если взять не три, а только две большие окружности?

**Пример 9.** Единичный отрезок тоже можно рассматривать как трехмерный многогранник. Попробуем образовать, какой граф на сфере ему соответствует. Согласно комбинаторной двойственности, у него не должно быть вершин (ведь у отрезка нет граней) и должно быть всего одно ребро. Поэтому нам приходится расширить понятие графа на сфере.

**Определение 3.** Одно замкнутое ребро, совпадающее с большой окружностью, тоже будем считать графом на сфере. Значение стресса на этом ребре может быть любым. Такой граф (со стрессом) будем называть *экзотическим*.

Физический смысл экзотического графа ясен: это замкнутая пружина, опоясывающая сферу по экватору.

Давайте научимся складывать графы с положительными стрессами.

Пусть  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  – два графа с положительными стрессами. Зададим их сумму алгоритмически (рис.10).

• Поместим на сферу оба графа и в качестве суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  возьмем результат наложения этих

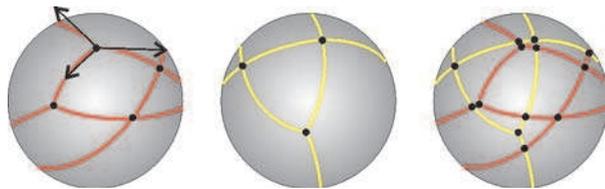


Рис. 10

графов. Говоря точнее, нужно взять все вершины графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  и все новые вершины, получившиеся как пересечения ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ . Ребра полученного графа – кусочки ребер  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ .

• Значение стресса  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на ребре наследуется. Это значит, что если ребро графа  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  есть часть ребра графа  $G_1$ , то ему

надо присвоить значение стресса  $f_1$ . Аналогично, если ребро суммы есть часть ребра графа  $G_2$ , то ему надо присвоить значение стресса  $f_2$ . Если же ребро одновременно является частью ребер обоих графов, то значения стрессов надо сложить.

Нулевым элементом относительно этой операции является пустой граф (граф без ребер и без вершин).

Несложно убедиться, что в результате мы получим граф с положительным стрессом.

**Теорема.** Сложение по Минковскому выпуклых многогранников соответствует сложению их графов со стрессами.

Иными словами, если есть два графа со стрессами  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ , то

$$P((G_1, f_1) + (G_2, f_2)) = P(G_1, f_1) + P(G_2, f_2).$$

Мы оставляем эту теорему без доказательства. Отметим впрочем, что примеры 6 и 7, в сравнении с примерами 8 и 9, хорошо ее иллюстрируют.

### Вычитание по Минковскому

– Интересно, куда мне теперь идти?

На этот вопрос ответить было нетрудно: через лес вела только одна дорога, и обе стрелки указывали на нее.

– Дойду до развилки, – подумала Алиса, – тогда и решу. Ведь там им придется указывать в разные стороны.

Напрасно она на это надеялась! Она все шла и шла по дороге, но и на развилках стрелки неизменно указывали в одну сторону.

Теперь наша цель – придать геометрический смысл выражению «разность Минковского двух выпуклых многогранников». Двумерный случай нас подготовил к тому, что нас ждет нечто невыпуклое и с самопересечениями.

Сначала разберемся, как складывать графы с произвольными, не обязательно положительными стрессами. Как и для Алисы, у нас сейчас нет выбора: все стрелки ведут в одно и то же место.

**Определение 4.** Пусть  $(G_1, f_1)$ ,  $(G_2, f_2)$  – два графа с ненулевыми стрессами. Зададим их сумму алгоритмически (рис.11):

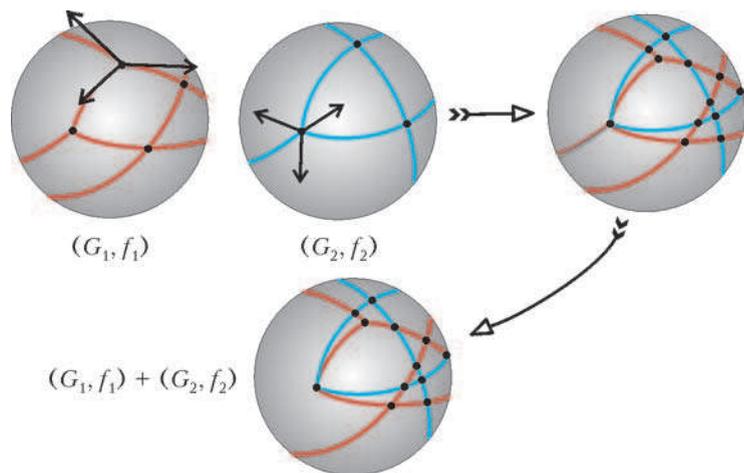


Рис. 11

- Как и прежде, нужно взять результат наложения этих графов.

- Как и прежде, значение стресса на ребрах наследуется от  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$ .

- Однако на этом процедура сложения не заканчивается. Следующий шаг – удаление лишних ребер и вершин. Может случиться так, что стресс суммы  $(G_1, f_1) + (G_2, f_2)$  на некотором ребре окажется равным нулю. Тогда такое ребро надо удалить.

- После удаления всех ребер с нулевым стрессом может случиться так, что к одной вершине примыкают ровно два ребра (это означает, что эти ребра образуют угол  $\pi$ , и стрессы на этих ребрах равны). Тогда эту вершину надо удалить, а два ребра объединить в одно. Вершины, к которым не примыкают ребра, тоже нужно удалить.

В результате мы получим некоторый граф на сфере с ненулевым стрессом.

Теперь ясно, как вычитать графы со стрессами. Обратным графом к графу  $(G, f)$ , очевидно, является граф  $(G, -f)$ . (Убедитесь, что  $(G, f) + (G, -f)$  – пустой граф!) Поэтому взять разность графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, f_2)$  означает взять сумму графов  $(G_1, f_1)$  и  $(G_2, -f_2)$ .

**Задача 7.** Покажите, что любой пружинный граф на сфере можно представить в виде разности двух графов с положительными стрессами.

Теперь попробуем по графу с всюду ненулевым (но теперь не обязательно положительным) стрессом  $(G, f)$  построить геометрический объект  $P(G, f)$ .

Алгоритм в точности повторяет алгоритм построения  $P(G, f)$  для графа с положительным стрессом. Опять, как и у Алисы, у нас нет другого выбора.

- Пусть  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  – силы, создаваемые пружинками в вершине  $i$  графа  $(G, f)$ . Теперь это векторы, идущие либо в направлении ребра, либо в противоположном направлении, в зависимости от знака стресса. Мы считаем, что их нумерация соответствует порядку обхода ребер графа по часовой стрелке. *Поскольку стресс может быть знакопеременный, сами векторы  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  могут идти совсем в другом порядке.*

- Как и прежде, для вершины  $i$  рассмотрим касательную к сфере  $S$  плоскость. В этой плоскости построим замкнутую ломаную, руководствуясь старым правилом. Выберем точку в плоскости и будем откладывать один за другим векторы  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ , повернутые на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Здесь важно, что мы берем векторы согласно порядку ребер, а не порядку векторов.

*Полезно убедиться, что эта процедура в точности описывает построение разности Минковского выпуклых многоугольников.*

- Аналогично поступим со всеми остальными вершинами графа. Для каждой вершины мы получим невыпуклый многоугольник (замкнутую плоскую ломаную, возможно с самопересечениями)

- Важно, что для этих многоугольников остается выполненным главное свойство, позволяющее собрать их воедино, – у многоугольников, соответствующих

соседним вершинам графа, есть параллельные отрезки одинаковой длины.

Поэтому из таких многоугольников, перенося их параллельно, можно собрать некий объект  $P(G, f)$ , определяемый такой конструкцией с точностью до параллельного переноса.  $P(G, f)$  называется *виртуальным многогранником*.

Теперь ясно, что нужно сделать для построения разности Минковского двух многогранников  $K$  и  $L$ :

- Превратить многогранники в пружинные графы.
- Взять разность пружинных графов.
- Построить виртуальный многогранник  $P(G, f)$ , соответствующий разности графов.

Дадим пояснение для продвинутых читателей. Дело в том, что при суммировании по Минковскому параллельные грани многогранников складываются. Поэтому естественно ожидать, что гранями разности Минковского  $K - L$  должны служить разности Минковского граней многогранников  $K$  и  $L$ . Именно это явление закодировано в конструкцию виртуального многогранника.

**Пример 10.** На рисунке 12,а) представлен граф со стрессом. Граф трехвалентен, следовательно, виртуальный многогранник  $(G, f)$  (рис.12,б) склеен из треугольников.

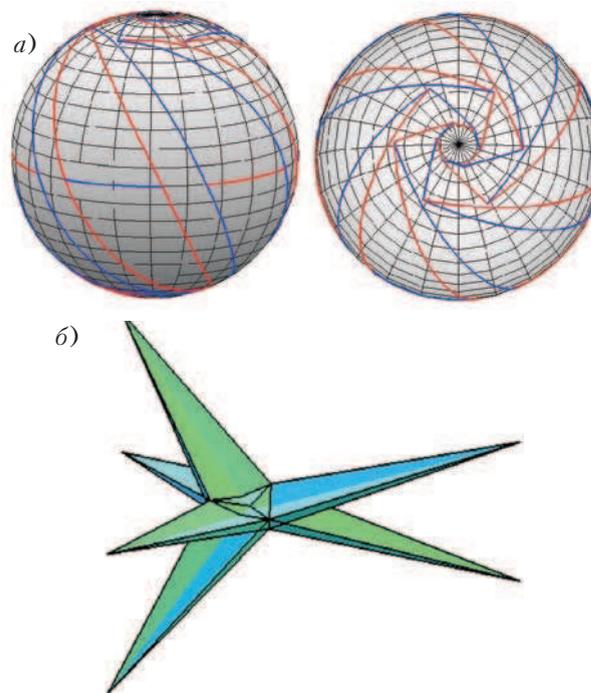


Рис.12. Пример графа со знакопеременным стрессом и соответствующий ему виртуальный многогранник

**Литература**

1. А.Пухликов, А.Хованский. *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*. (Алгебра и анализ, т.4 (1992), вып. 2, с. 161–185.)
2. Сайт, посвященный гиперболическим виртуальным многогранникам: [club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html](http://club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html)

# Рассказы о современной механике (продолжение)

Г. ЧЁРНЫЙ

## Исследование вулканических извержений методами механики

Изучение вулканов и их активности всегда было делом специалистов – вулканологов, геологов и представителей других наук. Механика долгое время не вмешивалась в этот вопрос. Были отдельные попытки рассмотрения гейзеров и других подобных образований. Но собственно вулканами ученые-механики занялись лишь в последнее время, и сразу же произошел прорыв в этой области.

Для изучения и прогнозирования деятельности вулканов были применены традиционные для механики методы математического моделирования. На нынешнем этапе исследований уже получены интересные и обнадеживающие результаты. Построены модели различных типов извержений, методами механики описан ряд прошлых извержений (в хорошем согласии с имеющимися данными). В наши дни, благодаря работе ученых из Института механики МГУ, появилась возможность задним числом провести расчет происходивших в свое время извержений, о которых было много известно, но, как оказалось, многое становится известным лишь сейчас.

Вулканическое извержение – один из наиболее разрушительных видов природных катастроф. Достаточно сказать, что за последние три века в результате вулканических извержений погибли более 220 тысяч человек. Для надежного прогноза последствий вулканических извержений необходимо научиться правильно интерпретировать различные сигналы, получаемые от вулкана, – микроземлетрясения, деформации построек, рост температуры в термальных источниках и состав выделяемых газов. Связать эти не прямые разрозненные наблюдения под силу лишь математическим моделям, основывающимся на фундаментальных законах механики.

Рассмотрим, например, подробнее, что произошло в 79 году нашей эры во время извержения вулкана Везувий, когда погибли города Помпеи и Геркуланум. Как известно из многочисленных источников, после кратковременного всплеска извержение быстро пошло на убыль. Жители Помпей, хотя и изрядно напуганные, решили, что вулкан успокоился, и не собирались покидать свои дома. Внезапно извержение снова усилилось, и на город обрушились потоки раскаленных камней. Практически мгновенно город был погребен под их многометровым слоем.

Объяснить это не мог никто, а механики – объяснили.

Создали модель, расчеты по которой восстановили хронологию событий. На рисунке 1 приведен график рассчитанной зависимости интенсивности извержения от времени. Оказывается, возле Везувия в земле имеется достаточно мощный водоносный слой. И вот,

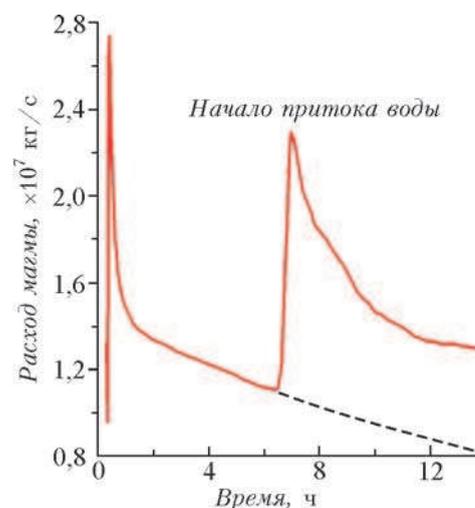


Рис.1. Интенсивность извержения Везувия (79 г.)

когда произошел спад извержения, в месте контакта с этим слоем давление внутри канала вулкана сильно упало, и туда устремилась вода, которая практически мгновенно превратилась в пар и произвела выстрел, выбросивший громадное число камней, пепла и тому подобное.

В настоящее время методы механики активно используются для анализа и прогноза вулканических извержений. В Институте механики МГУ созданы модели течения магмы (расплавленной лавы) в канале вулкана для различных типов извержений. Эти модели позволяют связать наблюдаемые на поверхности величины, например расход магмы и ее температуру, с процессами, происходящими в земной коре. Для ряда вулканов их история известна, описана методами механики, и, таким образом, становится возможным прогноз. Например, взяв параметры извержения для Везувия приблизительно те же, что были в начале нашей эры, ученые рассчитали лавовые потоки, которые могут возникнуть сегодня. Они установили, в частности, что на город Неаполь в течение 15 минут могут обрушиться огромные потоки раскаленной магмы. Население и местные органы власти призадумались, и сейчас разрабатываются планы эвакуации населения на этот случай.

### Механическая модель образования суперконтинентов

Еще один, действительно ошеломляющий, пример применения механики в огромном по масштабу промежутке времени от начала возникновения Земли и до наших дней – это образование континентов. Известно, что континенты и составляющие их плиты движутся. И вот, по данным геологов, за последние три с половиной миллиарда лет эти плиты несколько раз собирались в

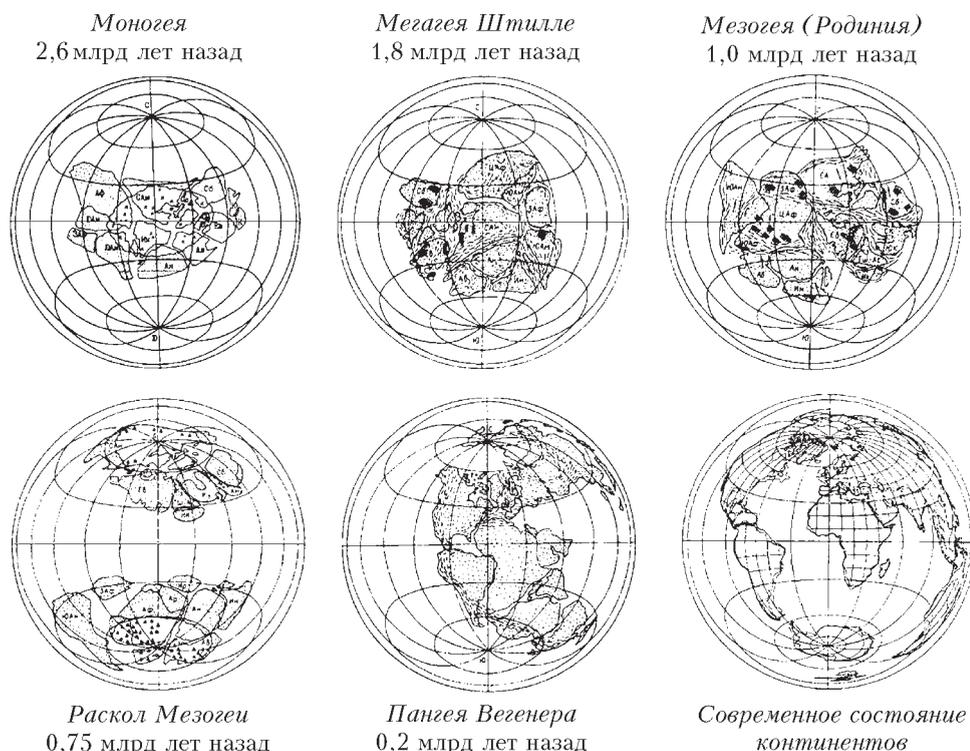


Рис.2. Суперконтиненты в геологической истории Земли

некий общий материк (рис.2). Геологи умеют определять возраст пород. На ныне существующих континентах есть области, где породы очень старые – по три миллиарда лет и больше, а в других местах обнаружены так называемые ювенильные породы, т.е. породы, возникшие намного (на миллиард, на два миллиарда лет) позже. Но почему все это происходит – неясно.

Для объяснения была предложена конвекционная теория динамики земной коры. Внутреннее строение Земли выбиралось очень простым – в центре находится горячее расплавленное ядро, которое является источником тепла, дальше располагается мантия, которая разделена на два слоя – верхний и нижний (это – данные сейсмологии). Слои – толстые, верхний слой имеет толщину примерно 650 километров. Эти слои отличаются друг от друга по своему внутреннему строению. Граница между слоями – это поверхность фазового перехода вещества мантии с поглощением тепла, т.е. при переходе через эту поверхность одни химические связи преобразуются в другие и это сопровождается поглощением тепла. Так вот, была построена такая упрощенная модель: есть сферически симметричная Земля, затем ей дают небольшое возмущение, отклонение от сферически симметричной формы,

и отслеживают, что происходит при дальнейшей эволюции. При решении этой задачи используется метод математического моделирования.

Оказывается, что развивающиеся (увеличивающиеся) возмущения приводят к глобальным движениям мантии Земли. Возникают так называемые тепловые конвективные потоки, и в двухслойной мантии наблюдается интереснейшее явление. В некоторые периоды, достаточно короткие по сравнению с общим временем

эволюции, верхний, более холодный, слой мантии почти целиком сливается одной гигантской струей вглубь Земли, обволакивая ее ядро. Взамен этого происходит всплытие на поверхность части вещества нижнего, более горячего, слоя. Всплытие происходит тремя-пятью менее мощными струями, чем струя, идущая вниз. Всплывающий материал образует новые, ювенильные породы.

Заметим, что наиболее неожиданным открытием оказалась так называемая «глобальная самоорганизация» течения, которая заключается в коллективном, т.е. одной мощной струей, погружении вещества. Следствием этого и является сборка (над местом погружения) суперконтинента из отдельных континентов, а также повышенная скорость погружения вещества.

Описываемая теорией картина не только качественно согласуется с геологической историей нашей планеты, но и позволяет делать некоторые выводы (авторы работы – московские ученые-механики).

Поскольку теория имеет некоторую свободу (свободные параметры, которые можно задавать), временной масштаб подгоняется под масштаб действительных новых образований, которые геологи определяют по распаду радиоактивных элементов. На рисунке 3 приведен

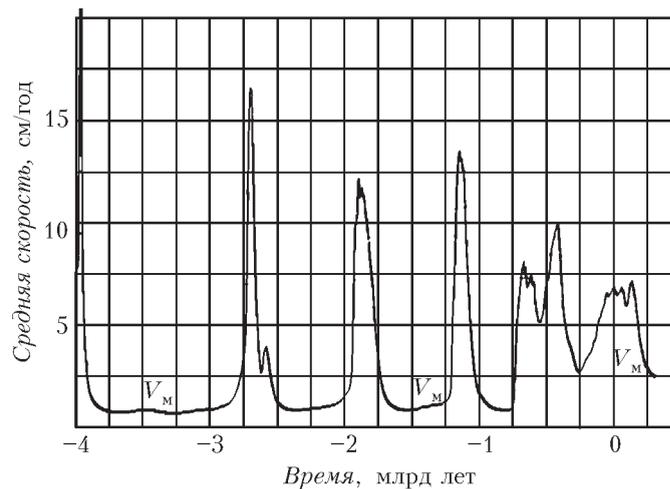


Рис.3. Средняя скорость движения мантии

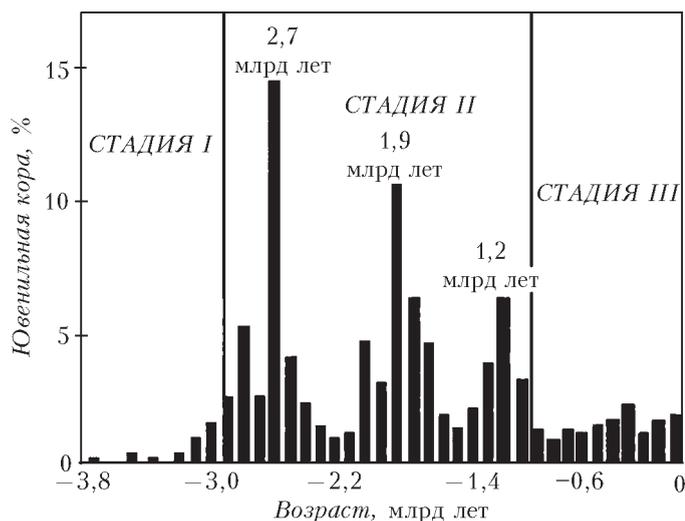


Рис.4. Геологические данные по возрасту ювенильных пород

график рассчитанной средней скорости движения мантии. Он имеет довольно острые пики, когда скорость сильно возрастает, продолжительность пиков невелика по сравнению с общим временем эволюции. Во время этих пиков и происходит интенсивное образование пород. Полученная картина хорошо согласуется с имеющимися геологическими данными по возрасту ювенильных пород (рис.4). После того как периоды подогнаны, получается очень похожая картина.

### Механика и арктические исследования

В нашей стране разработаны (чего нет больше нигде в мире) глубоководные, до 6 километров глубины погружения, самоходные или управляемые извне самодвижущиеся аппараты – обитаемый «Мир» и необитаемый «Клавесин». Они принципиально отличаются от имеющихся в ряде стран так называемых батискафов, которые просто опускают на канате, внизу они сбрасывают балласт и всплывают. Но 6 километров глубины – это давление 600 атмосфер, которое должно выдержать достаточно сложное устройство аппарата. И здесь нужна механика материалов, механика их поведения в таких сложных условиях.

Новость, которая в газетах освещалась очень широко, – недавняя экспедиция к Северному полюсу на атомных ледоколах «Россия» и «Академик Федоров» и установка Российского флага на дно Северного Ледовитого океана. На атомных ледоколах есть атомные реакторы, которые представляют собой почти чисто механические устройства. Возможность создания прочных судов – это тоже механика. Но еще раньше на Северном полюсе побывали подводные лодки, которые всплыли точно в точке полюса. Кто их туда привел? Радио? Оно не работает под водой. Эхолокация? Хотя она и работает, но на очень малых расстояниях. А привели лодки инерциальные гироскопические системы навигации поразительной точности – еще одно чудо, выдающееся достижение механики и прошлого и совсем недавнего времени.

Навигация – это наука и искусство, находясь на перемещающемся аппарате (машине, морском или воз-

душном судне, космическом или воздушном корабле), определять местоположение и ориентацию этого аппарата. В старину моряки для навигации использовали компас, Солнце и звездное небо. Потом на помощь пришло радио. Новая эпоха началась с появлением инерциальных систем навигации, которые не используют никаких внешних сигналов или наблюдений. Самые первые такие системы, до сих пор остающиеся традиционными, – гироскопические. В их основе лежит чисто механическое устройство – гироскоп. (Простейшее представление о гироскопе дает быстро вращающийся волчок, который, вопреки силе тяжести, не падает, и при этом его ось вращения прецессирует, т.е. медленно описывает конус.) Гироскопические системы навигации прошли колоссальную эволюцию за последние десятилетия и особенно в наши дни. В нашей стране созданы гироскопические системы навигации поразительной точности. На эти приборы имеется огромный спрос во всем мире, каждые два года проводятся посвященные им международные конференции. Хотя эти приборы и электронные, но принцип их действия и принцип использования – чисто механические.

Кстати сказать, акустическая локация и связь – тоже дело механиков. Ведь акустика – наука, отпочковавшаяся от механики, как и давно выделившаяся динамическая метеорология (и значительная часть океанологии). В совокупности эти две науки изучают движения в воздушной оболочке Земли – атмосфере и движения в мировом океане, а также их взаимодействие.

Среди ряда новейших достижений этих наук можно отметить теорию «рингов» Гольфстрима и теорию торошения льдов в Арктике. Последняя сродни теории столкновения материковых плит, но, конечно, относится к явлениям гораздо меньшего масштаба по пространству и времени и к более простой среде.

### Производство электроэнергии на атомных электростанциях

Хорошим примером использования механики в технике может служить атомная энергетика – одна из быстро развившихся в последние десятилетия технологий. Ныне атомные реакторы используются не только в энергетике, но и для транспорта.

Принципиальная схема атомной электростанции – АЭС – изображена на рисунке 5. Помимо атомного реактора она включает двухконтурную систему теплоносителя (первый контур – радиоактивный, он располагается внутри корпуса реактора, а второй, уже с малой радиоактивностью, находится вне реакторного корпуса), паровые турбины, которые вращают электрогенераторы, сами электрогенераторы, системы передачи электроэнергии, систему охлаждения, насосы.

Сердцем АЭС является атомный реактор – совместное детище физиков и механиков. Топливо (уран) загружают в реактор в виде тепловыделяющих элементов, которые представляют собой трубочки, набитые этим топливом. Атомную реакцию уменьшают или усиливают, перемещая вверх или вниз эти тепловыделяющие элементы, т.е. выдвигая их из реактора или задвигая в него.

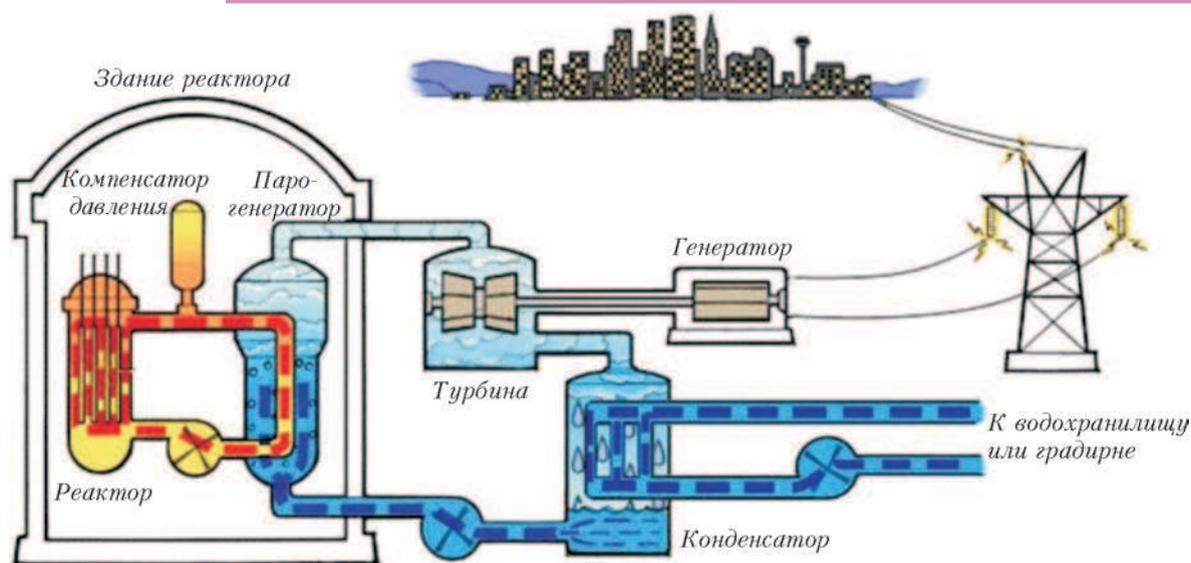


Рис.5. Схема устройства АЭС

Тепловыделяющие элементы – это далеко не самая сложная часть станции, но даже их технология изготовления разрабатывается учеными-механиками совместно с инженерами завода-изготовителя. Вся загружаемая в реактор конструкция в сборе привозится с завода на нескольких большегрузных автомашинах. На этом роль физиков заканчивается. Корпус реактора рассчитывается методами механики, и, между прочим, не методами XIX века, а непрерывно совершенствующимися методами последних лет.

Все остальное тысячетонное сложнейшее оборудование АЭС также рассчитывается, создается и монтируется инженерно-техническим персоналом на основе новейших достижений механики. Правда, это требует электротехнических и теплотехнических расчетов (включая расчет движения жидкости и пара в системах теплоносителя и охлаждения), которые относятся к области физики. Но можно сказать, что теплотехника – это небольшая часть механики. Механика, вобрав в себя тепловые процессы, вообще говоря, давно занимается теплотехническими проблемами более сложными, чем те, которые решает сама теплотехника.

На этом примере хотелось бы обосновать следующий тезис. Для того чтобы достижения ряда других наук, включая физику, сделать полезными человеку, без механики не обойтись. Механика является основой. Так, физики открыли и изучили реакцию деления урана с выделением энергии. Механики на основе этого открытия создали сооружения, дающие людям тепловую и электрическую энергию. Другие открытия в физике (лазеры или иные источники излучения), в химии, в науке о материалах и даже в биологии, для того чтобы стать полезными людям, требуют использования новейших достижений механики. Например, все, что говорилось выше об АЭС, остается верным и для всех новых химических технологий. Здесь сердце – химический реактор – опять совместное детище химиков и механиков, причем, учитывая, что желаемое ускорение химических процессов требует во многих случаях создания все более быстропротекающих химических

реакторов, роль методов механики в их расчете становится все большей. Развитие современных технологий спутниковой связи, создание в будущем космических систем, использующих солнечную энергию для передачи ее на Землю, – все это абсолютно невозможно без механики, без уже существующих и новых, требующих развития, ее методов.

#### Закключение. Сэр Исаак Ньютон и вечно новая механика

Современный этап развития науки и прогресс научного знания в целом в значительной мере определяются проникновением в различные области науки методов математического моделирования, которые основаны на построении и использовании тех или иных математических моделей.

Не нужно забывать, что метод математического моделирования возник в ньютоновской механике (знаменитые законы Ньютона) и был с успехом использован самим Ньютоном при решении ряда серьезных задач. Впоследствии искусство построения сложных математических моделей было создано именно механиками и затем применено последовательно физиками, геофизиками, химиками, биологами, лингвистами, а в последнее время – социологами и экономистами.

Модели механики необычайно наглядны. Неслучайно ряд знаменитых физиков прошлого утверждали, что ни одно физическое явление не может считаться до конца понятым, пока оно не сформулировано в терминах механики. Замечательный механик и математик, академик Алексей Николаевич Крылов писал в предисловии к его русскому переводу «Математических начал натуральной философии» Ньютона: «Начала ...» Ньютона составляют незыблемое основание механики, теоретической астрономии и физики». Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума».

Ньютоновская механика – действительно непревзойденное достижение физики (натуральной философии), всей истории человеческой цивилизации. Она вечна.

# Математики и программисты

**А.ШЕНЬ**

**И**МЕЮТСЯ  $N$  НА ВИД ОДИНАКОВЫХ ПРЕДМЕТОВ, КОТОРЫЕ на самом деле нескольких различных типов. Известно, что предметы одного из типов составляют большинство (больше  $N/2$ ). Требуется указать представителя этого большинства, используя детектор, в который можно (за один раз) загрузить два предмета и определить, одного они типа или разных. Сколько таких проб (сравнений) придется сделать?

Если не экономить и сравнивать попарно все предметы, то понадобится  $N(N-1)/2$  сравнений (каждый предмет участвует в  $N-1$  сравнениях и в каждом сравнении участвуют два предмета). Оказывается, если действовать с умом, можно сделать число проб пропорциональным  $N$  (вместо  $N^2$ ).

Мы сейчас приведем два доказательства этого факта. Первое (как мы надеемся) должно понравиться математикам, второе – программистам.

Оба рассуждения начинаются с такого замечания: *если мы нашли два предмета разных типов, то их можно выбросить, сохранив большинство*. В самом деле, из них максимум один принадлежит большинству, и после его удаления большинство не пропадет (ведь мы выбросили и предмет другого типа). По тем же причинам два приятеля, которые собираются голосовать за разных кандидатов, могут сговориться не идти на выборы, если они почему-либо верят, что подсчет производится честно и что один из кандидатов пользуется поддержкой более половины голосующих (он потеряет максимум один голос за и минимум один голос против).

Математик продолжит рассуждение так. Пусть сначала  $N$  четно. Тогда поделим предметы на пары и сравним их в каждой паре (всего  $N/2$  сравнений). Те пары, в которых предметы различны, можно выбросить. После этого остаются пары с равными предметами – и достаточно оставить от каждой по одному, так что задача после  $N/2$  сравнений сводится к такой же задаче для (максимум) половинного числа предметов, и можно повторять рассуждение.

Если временно забыть о нечетных  $N$ , получится формула

$$T(N) \leq N/2 + T(N/2),$$

где  $T(n)$  – число проб при поиске представителя большинства среди не более чем  $n$  предметов. Отсюда следует, что  $T(N) < N$ . (Индукция:  $T(2) = 0$ , поскольку в этом случае больше половины – это все; если  $T(N/2) < N/2$ , то  $T(N/2) < N/2 + N/2 = N$ . Например, из 8 предметов после 4 сравнений остаются максимум 4, затем после двух остаются 2, всего  $4 + 2 = 6$  сравнений.)

Конечно, это рассуждение не имеет смысла, пока мы не разобрались с нечетными  $N$ . При нечетном  $N$  после выбрасывания пар с неравными предметами остаются несколько пар с равными предметами плюс один непарный предмет.

Например, могут остаться пары  $(a, a)$ ,  $(b, b)$ ,  $(c, c)$  и еще  $d$  без пары (всего 7 элементов). Мы знаем, что среди этих 7 предметов больше половины (т.е. 4 или более) одинаковых. Поэтому как минимум две пары из трех принадлежат большинству (если только одна, то большинства никак не

наберется). Значит, предметы искомого типа составляют большинство среди  $a, b, c$ , а про  $d$  можно забыть.

Если остается не 7 элементов, а, скажем, 9, то ситуация будет другой. Пусть у нас четыре пары  $(a, a)$ ,  $(b, b)$ ,  $(c, c)$ ,  $(d, d)$  и непарный предмет  $e$ . Для большинства нужно 5 предметов – достаточно двух пар и  $e$ . Поэтому среди  $a, b, c, d$  предметы искомого типа могут не быть большинством. Но они должны быть большинством среди  $a, b, c, d, e$ , иначе будет 5 элементов другого типа (минимум две пары плюс один). Поэтому в этом случае надо не выбрасывать  $e$ , а присоединить его.

Легко сообразить, что один из этих двух приемов всегда сработает: мы либо добавляем непарный предмет, либо нет – с тем расчетом, чтобы на следующем шаге оставалось нечетное число предметов. По индукции можно получить и  $T(N) < N$ , разобрав два случая:  $T(2k) \leq k + T(k)$  и  $T(2k+1) \leq k + T(k+1)$ . Первое доказательство закончено.

Это рассуждение порадует математика, но не программиста – который вынужден думать о том, как все эти разные случаи четного и нечетного  $N$  и четного и нечетного количества пар запрограммировать и ничего не пропустить. Но есть и другой вариант.

Представим себе, что нас заперли в комнате с детектором,  $N$  предметами и тремя большими коробками, где эти предметы могут лежать. Коробки предусмотрительно снабжены надписями: «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» (Н), «ОДИНАКОВЫЕ» (О) и «ВЫБРОШЕННЫЕ» (В). Изначально все предметы лежат в коробке «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» (что согласуется с ее названием), и нам известно, что более половины из них некоторого одного типа  $X$ .

Нам строго-настроено велено соблюдать две заповеди:

- Все предметы в коробке «ОДИНАКОВЫЕ» должны на самом деле быть одного типа (если там вообще что-то есть).
- Предметы типа  $X$  должны составлять большинство среди всех невыброшенных (находящихся в коробках «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» и «ОДИНАКОВЫЕ»).

(Очевидно, в начальном состоянии оба условия выполнены.)

Когда коробка с надписью «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» становится пустой, нас выпускают из комнаты (и это заслуженно, поскольку в этот момент предметы типа  $X$  по правилам составляют большинство среди предметов в коробке «ОДИНАКОВЫЕ», и можно взять из нее любой предмет – они все одинаковые).

Что мы можем делать, не нарушая заповедей? Несколько очевидных вещей.

Во-первых, если коробка «ОДИНАКОВЫЕ» пуста, а коробка «НЕПРОВЕРЕННЫЕ» – нет, то можно переложить один предмет из Н в О. (Множество невыброшенных предметов остается тем же самым, так что заповедей мы не нарушим.)

Во-вторых, если обе коробки О и Н непусты, то можно взять по одному предмету и сравнить их. Если они одинаковые, то кладем оба в О; если разные, то выбрасываем (кладем в В) оба. Как мы видели, это не противоречит заповедям.

Остается заметить, что

- если есть непроверенные предметы, то одно из действий заведомо выполнимо;
- любое из действий уменьшает число непроверенных на 1, при этом детектор используется не более одного раза.

Следовательно, после  $N$  шагов коробка Н опустеет и нас выпустят. При этом детектор будет использован не более  $N$  раз (на самом деле меньше, так как первый шаг – переключивание).

Соответствующая программа (совсем простая) приведена в книжке «Программирование: теоремы и задачи» (М.: МЦНМО, 2-е изд., 2004; см. также сайт [www/mcsme.ru/freebooks](http://www/mcsme.ru/freebooks)). Программирование первого решения явно потребовало бы существенно больших усилий.

На этом примере можно немного пофилософствовать о разнице между математическим и программистским взглядом на вещи. Пусть задача  $X$  сводится к множеству однород-

ных простых задач  $X_1, \dots, X_n$ . Математик обычно разбирает одну из них и пишет « $X_2, \dots, X_n$  решаются аналогичным способом и оставляются читателю в качестве упражнений». Напротив, программист понимает, что никто за него программировать не будет, а программирование большого количества даже и очень простых задач утомительно, и лучше найти другой подход, избегающий разбора многочисленных случаев.

## К ВАНТЫ ИНТЕРНЕТА

### На сколько частей делят пространство плоскости граней додекаэдра?

(Начало см. на 2-й странице обложки)

На Межрегиональной заочной математической олимпиаде 2008 года предлагались задачи:

Найти число частей, на которые продолжения граней тетраэдра разбивают пространство (задача 5, 7 класс).

Найти число частей, на которые продолжения граней куба разбивают пространство (задача 3, 6 класс).

Обе эти задачи решаются простым подсчетом. В первом случае ответ 15; во втором 27. Но возникает вопрос, а на сколько частей разбивают пространство продолжения граней других правильных многогранников: октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Подсчет в этом случае уже сложнее, но задача вполне разрешима! Рассмотрим эту задачу для додекаэдра.

Есть два способа подсчета числа частей, на которые продолжения граней додекаэдра разбивают пространство, не требующих выхода из плоскости.

**Первый способ.** Разобьем продолжения граней додекаэдра на 6 пар параллельных плоскостей. Теперь будем последовательно добавлять эти пары плоскостей и смотреть, сколько частей получается в результате. При добавлении пары плоскостей количество частей увеличивается на число частей, которые данные плоскости пересекают.

В начале есть одна часть (все пространство). Каждая из плоскостей первой пары пересекает 1 часть. Поэтому после добавления одной пары плоскостей число частей будет равно трем. Аналогично, вторая пара плоскостей пересекает по 3 части, а третья пара – по 9 частей. Поэтому после добавления трех пар плоскостей число частей станет равным 27. Чтобы посчитать число частей, добавляющееся на четвертом, пятом и шестом шаге, рассмотрим чертеж, на котором изображены пересечения плоскости одной из граней продолжениями других плоскостей (рис.1, 2). На рисунке 1 одинаковым цветом изображены пересечения данной плоскости с продолжениями пар параллельных граней. Здесь любая тройка пар параллельных прямых разбивает плоскость на 17 частей. Следовательно, четвертая пара плоскостей пересекает по 17

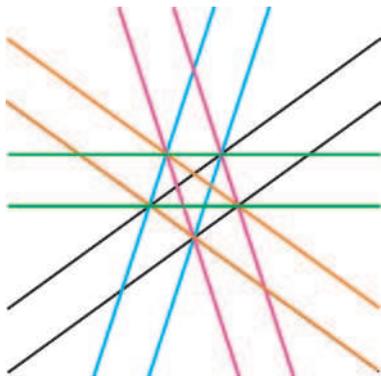


Рис. 1

частей. Таким образом, после проведения четырех пар плоскостей количество частей станет равным  $27 + 17 \cdot 2 = 61$ . Аналогично, любая четверка пар параллельных прямых на рисунке разбивает плоскость на 26 частей. Поэтому после проведения пяти пар плоскостей количество частей станет равным  $61 + 2 \cdot 26 = 113$ . Наконец, все пять пар разби-

вают плоскость на 36 частей (рис.2). Поэтому после добавления последней (шестой) пары плоскостей число пространственных частей станет равным  $113 + 36 \cdot 2 = 185$ .

**Второй способ.** Хорошо известна формула Эйлера для плоского графа. Вот один из ее частных случаев:

Пусть на плоскости проведено несколько

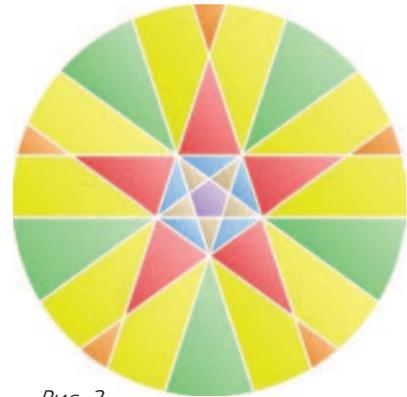


Рис. 2

прямых. Обозначим через  $V$  число вершин – точек пересечения нескольких прямых;  $P$  – число ребер – отрезков между парами вершин и лучей, выходящих из вершины;  $G$  – число граней – многоугольников, на которые данные прямые разбили плоскость. Тогда  $G - P + V = 1$ .

Менее известно, что аналогичная формула есть и в пространственном случае (в действительности такая формула есть и для пространства произвольной размерности):

Пусть в пространстве проведено несколько плоскостей. Обозначим через  $V$  число вершин – точек пересечения нескольких прямых;  $P$  – число ребер – отрезков между парами вершин и лучей, выходящих из вершины;  $G$  – число граней – многоугольников, которые в данных плоскостях высекаются другими плоскостями;  $C$  – число пространственных частей, на которое пространство разбивается данными плоскостями. Тогда  $C - G + P - V = 1$ .

Таким образом, количество частей, на которые данное множество плоскостей разбивает пространство, может быть вычислено по формуле:  $C = G - P + V + 1$ .

Как видно из рисунка 2, в каждой из плоскостей содержится 36 «граней». Количество плоскостей равно числу граней додекаэдра, т.е. 12. Поэтому полное число «граней» пространственного графа равно  $G = 12 \cdot 36 = 432$ .

Аналогично можно посчитать количество «ребер». Каждая плоскость содержит 10 прямых, разбитых на 5 «ребер», а все 12 плоскостей – на  $5 \cdot 10 \cdot 12 = 600$  «ребер». Но каждое «ребро» принадлежит двум плоскостям. Следовательно, количество «ребер» вдвое меньше и равно  $P = 600 / 2 = 300$ .

Несколько сложнее посчитать количество «вершин». В каждой плоскости есть 5 «вершин», являющихся пересечением четырех прямых (и, следовательно, пяти плоскостей) и 10 «вершин», являющихся пересечением двух прямых (и, следовательно, трех плоскостей). Можно считать, что в каждой плоскости находится 5 «пярых частей вершин» и 10 «третьих частей вершин». Значит, общее число «вершин» данного пространственного графа равно  $B = (5/5 + 10/3) \cdot 12 = 52$ . Следовательно,  $C = 432 - 300 + 52 + 1 = 185$ .

Л.Оридорога, М.Панов

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4-2009» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2139» или «Ф2145». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2139 – M2145 предлагались на заключительном этапе XXXV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи M2139–M2145, Ф2145–Ф2152

**M2139.** Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета и таких, что произведение двух из них равно третьему?

*Н. Агаханов*

**M2140.** Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

*Р. Женодаров*

**M2141.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\Omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .

*Л. Емельянов*

**M2142.** Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \dots \cos \frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке  $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$ ?

*Б. Трушин*

**M2143.** В королевстве  $N$  городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются *соседними*). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.

Однажды Король провел такую реформу: каждый из  $N$  мэров городов стал снова мэром одного из  $N$  городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

*В. Дольников*

**M2144.** По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого наперстки возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

*Б. Трушин*

**M2145.** Даны натуральные числа  $x$  и  $y$  из отрезка  $[2; 100]$ . Докажите, что при некотором натуральном  $n$  число  $x^{2^n} + y^{2^n}$  – составное.

*С. Берлов, А. Белов*

**Ф2145.** Суточный спутник Земли вращается по круговой орбите, лежащей в экваториальной плоскости. В результате кратковременного включения тормозного двигателя скорость спутника уменьшается по величине на  $1 \text{ м/с}$ , а направление скорости не меняется. Найдите изменение периода обращения спутника.

*А.Повторов*

**Ф2146.** По прямой бежит кролик, его скорость все время равна  $v_0 = 5 \text{ м/с}$ . В точке, отстоящей на  $L_0 = 100 \text{ м}$  от этой прямой, сидит лиса. Она замечает кролика и бросается в погоню, когда тот находится на минимальном расстоянии от упомянутой точки. Лиса бежит с такой же по величине скоростью, вектор скорости лисы направлен в любой момент в точку, где находится кролик. Найдите максимальное ускорение лисы в процессе погони. Лису и кролика считать материальными точками.

*А.Старов*

**Ф2147.** У Пети и Васи в кухне на даче имеется небольшой автоматический подогреватель воды. Он представляет собой пятилитровую емкость с хорошей теплоизоляцией и электрическим двухкиловаттным нагревателем. Емкость всегда соединена с водопроводной трубой, по которой в нее может поступать холодная вода, а внизу есть краник, через который можно отбирать горячую воду. Нагреватель снабжен реле с регулятором, позволяющим установить желаемую температуру воды. Подогреватель используется в основном для мытья посуды, а поскольку ночью посуду никто не моет, его на ночь отключают.

И тут у братьев зашел спор. Петя считал, что они поступают экономно, отключая электропитание прибора на ночь. Вася же полагал, что разницы никакой нет – ведь за ночь вода сильно остывает, и утром нагреватель включается на более длительное время, а если оставлять электропитание, то за ночь нагреватель будет включаться много раз, зато на небольшое время, поддерживая заданную температуру воды.

Чтобы решить спор, братья проделали эксперимент. Они установили регулятор температуры на  $46 \text{ }^\circ\text{C}$ . Оказалось, что за 9 ночных часов вода остыла до  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Температура воздуха ночью в кухне была  $16 \text{ }^\circ\text{C}$ . Достаточно ли этих данных, чтобы оценить, сколько придется платить в месяц, если отключать или не отключать питание подогревателя воды на ночь? Стоимость киловатт-часа принять равной 3 рублям.

*И.Леенсон*

**Ф2148.** Давление насыщенных паров воды при  $+20 \text{ }^\circ\text{C}$  составляет  $1000 \text{ Па}$ , а при температуре  $+20,5 \text{ }^\circ\text{C}$  оно возрастает до  $1020 \text{ Па}$ . Определите по этим данным молярную теплоту испарения воды при  $+20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

*З.Рафаилов*

**Ф2149.** Конденсаторы емкостями  $C = 100 \text{ мкФ}$  и  $2C$  и резистор сопротивлением  $R_1 = 10 \text{ Ом}$  соединены последовательно, а параллельно конденсатору емкостью  $C$  подключен резистор сопротивлением  $R_2 = 100 \text{ кОм}$ . К

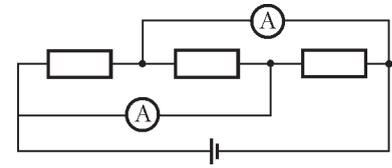
выводам цепочки подключают батарейку напряжением  $U = 10 \text{ В}$ . Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением  $R_1$ ? А в резисторе сопротивлением  $R_2$ ?

*А.Зильберман*

**Ф2150.** В схеме на рисунке резисторы (слева направо) имеют сопротивления

$500 \text{ Ом}$ ,  $200 \text{ Ом}$  и  $200 \text{ Ом}$ , напряжение батарейки  $6 \text{ В}$ . Амперметры одинаковые: каждый имеет сопротивление  $1 \text{ Ом}$ ,

«класс точности»  $1\%$ , ток полного отклонения  $50 \text{ мА}$ . Найдите показания амперметров.



*А.Простов*

**Ф2151.** Три катушки, индуктивности которых  $1 \text{ Гн}$ ,  $2 \text{ Гн}$  и  $4 \text{ Гн}$ , соединены «звездой». Общая точка заземлена куском провода, параллельно этому проводу включен конденсатор емкостью  $10 \text{ мкФ}$ . В некоторый момент свободные концы катушек подключают к батарейкам, создающим в точках подключения одинаковые потенциалы  $+6 \text{ В}$ . Через время  $0,1 \text{ с}$  после подключения заземляющий провод перерезают. Найдите максимальный заряд конденсатора. Элементы цепи считать идеальными.

*Р.Александров*

**Ф2152.** Широкий параллельный пучок лучей падает на прозрачный однородный шар из материала с коэффициентом преломления  $n = 1,414$ . Найдите размер светлого пятна на противоположной стороне шара.

*А.Шаров*

### Решения задач М2116 – М2123, Ф2130–Ф2137

**М2116.** Полный набор домино выкладывается на столе в замкнутую цепь, и для всех пар соседних доминошек вычисляется модуль разности очков на клетках, которыми они соприкасаются. Обозначим через  $S$  сумму всех таких модулей разностей. Ясно, что наименьшее значение  $S$  равно  $0$  (это происходит в том случае, когда замкнутая цепь выложена по правилам домино). А какое наибольшее значение может принимать сумма  $S$ ?

**Ответ:** 96.

Пронумеруем доминошки по часовой стрелке числами от  $1$  до  $28$ , начиная с некоторой из них. Пусть первая и вторая доминошки соприкасаются очками  $a_1$  и  $b_1$ , вторая и третья – очками  $a_2$  и  $b_2$ , ..., двадцать восьмая и первая –  $a_{28}$  и  $b_{28}$ , причем  $a_i \geq b_i$  для всех  $i$  от  $1$  до  $28$ . Тогда в наборе чисел  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{28}, b_{28}$  каждое

		3	3	3	3	4	4	3	3	4	4	3	3													
5	0	0	3	0	3	3	6	3	6	6	2	6	2	2	5	2	5	5	1	5	1	1	4	1	4	4
	5																									0
	0																									4
4	4	5	2	4	1	2	6	1	5	6	3	5	2	3	0	2	6	0	4	6	3	4	1	3	0	1
			3	3			4	4			3	3			3		4	4			3	3				3

из чисел от 0 до 6 содержится ровно 8 раз. Оценим указанную в условии сумму:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{28} - b_{28}) = \\ &= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_{28} + b_{28}) - 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{28}) = \\ &= 8 \cdot 21 - 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{28}) \leq \\ &\leq 8 \cdot 21 - 2(8 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 96. \end{aligned}$$

Пример, когда данная сумма равна 96, приведен на рисунке. Этот пример интересен также тем, что при повороте всех доминошек на  $180^\circ$  (каждая доминошка поворачивается вокруг своего центра) получается замкнутая цепь, выложенная по правилам домино.

А.Грибалко

**M2117.** Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2009-й степени натурального числа?

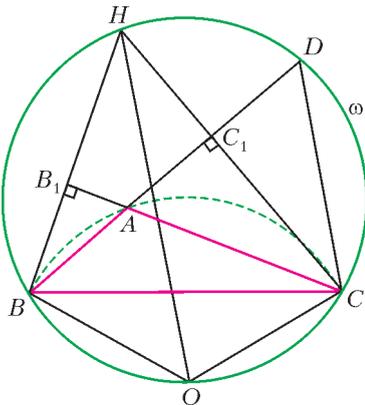
**Ответ:** существует.

Примером может служить арифметическая прогрессия  $2008!, 2 \cdot 2008!, 3 \cdot 2008!, \dots, 2008 \cdot 2008!$ . Произведение этих 2008 чисел равно  $(2008!)^{2009}$ .

Утверждение задачи остается в силе, если вместо чисел 2008 и 2009 взять произвольные взаимно простые натуральные числа  $m$  и  $n$ . Для построения примера вначале рассмотрим любые  $m$  различных натуральных чисел, образующие арифметическую прогрессию. Пусть произведение этих чисел равно  $N$ . Домножим каждое из чисел на  $N^k$ . После домножения мы по-прежнему будем иметь набор из  $m$  чисел, образующих арифметическую прогрессию, а произведение этих чисел будет равно  $N^{mk+1}$ . Теперь ясно, что условие задачи будет выполнено, если  $mk + 1$  делится на  $n$ . Нетрудно видеть, что в случае взаимно простых  $m$  и  $n$  подходящее натуральное  $k$  найдется.

Г.Гальперин

**M2118.** Докажите, что в треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $120^\circ$ , расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения высот равно  $AB + AC$ .



Пусть  $BB_1$  и  $CC_1$  – высоты треугольника  $ABC$ , а  $O$  и  $H$  – центр его описанной окружности и точка пересечения высот соответственно (см. рисунок). Вокругности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , величина дуги  $BAC$  равна  $120^\circ$ , поэтому центральный угол  $BOC$  равен  $120^\circ$ . Пусть  $\omega$  – окружность, описанная около треугольника  $BOC$ . Из четырехугольника  $B_1AC_1H$  получаем, что  $\angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ , поэтому точка  $H$  лежит на окружности  $\omega$ . На продол-

жении отрезка  $AB$  за точку  $A$  отложим отрезок  $AD = AC$ . Угол  $DAC$  равен  $60^\circ$ , поэтому треугольник  $DAC$  – правильный. Отсюда  $\angle BDC = \angle ADC = 60^\circ$ , следовательно, точка  $D$  лежит на окружности  $\omega$ . Кроме того,  $AB + AC = AB + AD = BD$ , значит, для решения задачи достаточно установить равенство хорд  $OH$  и  $BD$  в окружности  $\omega$ . Заметим, что величины меньших дуг  $OB$  и  $HD$  равны по  $60^\circ$ , так как в силу  $BO = OC$  угол  $BHO$  равен  $\frac{1}{2}\angle BHC$ , т.е.  $30^\circ$ , и  $\angle HBD = 90^\circ - \angle BHC_1 = 30^\circ$ . Значит,  $OH$  и  $BD$  равны как диагонали равнобокой трапеции  $BHDO$ .

П.Кожевников

**M2119.** В бесконечной последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$  число  $a_1$  равно 1, а каждое следующее число  $a_n$  строится из предыдущего  $a_{n-1}$  по правилу: если у числа  $n$  наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то  $a_n = a_{n-1} + 1$ , если же остаток равен 3, то  $a_n = a_{n-1} - 1$ . Докажите, что в этой последовательности все числа положительны, причем каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз.

Пусть  $b(t)$  равно 1, если наибольший нечетный делитель числа  $t$  имеет остаток 1 при делении на 4, и  $b(t)$  равно  $-1$  в противном случае. Тогда

$$a_n = b(1) + b(2) + \dots + b(n).$$

Каждому натуральному числу  $t$ , для которого  $b(t)$  равно 1, поставим в соответствие натуральное число  $t'$ , для которого  $b(t')$  равно  $-1$ , следующим образом: если  $t = 2^x(4y + 1)$  (где  $x$  и  $y$  – некоторые целые неотрицательные числа), положим  $t' = 2^x(4y + 3)$ . Ясно, что  $t' > t$ , и по числу  $t'$  однозначно определяется число  $t$ , которому оно соответствует. Среди чисел  $1, 2, \dots, n$  имеется несколько пар соответствующих чисел  $t, t'$ , а также несколько чисел  $t$  вида  $t = 2^x(4y + 1)$ , для которых соответствующее число  $t'$  больше  $n$ . Поэтому сумма  $a_n = b(1) + b(2) + \dots + b(n)$  равна количеству чисел  $t = 2^x(4y + 1)$ , не превосходящих  $n$ , но таких, что  $t' > n$ , т.е. количеству решений двойного неравенства

$$2^x(4y + 1) \leq n < 2^x(4y + 3) \tag{1}$$

в целых неотрицательных  $x$  и  $y$ . (Из полученной интерпретации чисел  $a_n$  уже вытекает, что  $a_n \geq 0$ .)

Пусть  $n = \overline{c_{r+1}c_r c_{r-1} \dots c_1 c_0}$  – двоичная запись числа  $n$ , дополненная слева цифрой 0 (для удобства дальнейших рассуждений), т.е.  $n = c_r \cdot 2^r + c_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0$ , где  $c_{r+1} = 0$ ,  $c_r = 1$ ,  $c_i$  равно 0 или 1 при  $i = 0, 1, \dots, r - 1$ . Ниже мы докажем, что количество  $a_n$  решений двойного неравенства (1) в целых неотрицательных  $x$  и  $y$  равно сумме  $|c_{r+1} - c_r| + |c_r - c_{r-1}| + \dots + |c_1 - c_0|$ .

Другими словами,  $a_n$  – это количество пар соседних различных цифр в записи  $\overline{c_{r+1}c_r c_{r-1} \dots c_1 c_0}$ . Например,

зная двоичную запись числа  $2009 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = \overline{011111011001}$ , легко находим  $a_{2009} = 5$ . Отсюда сразу следует решение задачи. Действительно, так как  $c_{r+1} = 0$  и  $c_r = 1$ , то  $a_n > 0$ . Далее, зафиксировав натуральное  $s$ , заметим, что, при любом натуральном  $k$ , если двоичная запись числа  $n$  имеет вид  $010\dots010\dots0\dots10\dots0$  ( $0$ , затем  $s$  групп вида  $10\dots0$  из одной единицы и  $k$  нулей), то  $a_n = 2s$ , а если двоичная запись числа  $n$  имеет вид  $010\dots010\dots0\dots10\dots01$  ( $0$ , затем  $s$  групп вида  $10\dots0$  из одной единицы и  $k$  нулей, и еще одна единица в конце), то  $a_n = 2s + 1$ . Таким образом,  $a_n$  равно фиксированному четному или нечетному числу для бесконечного количества значений  $n$ . Итак, будем искать количество решений в целых неотрицательных  $x$  и  $y$  неравенства (1). Так как  $n < 2^{r+1}$ , то при  $x \geq r + 1$  неравенство (1) не имеет нужных нам решений. Зафиксируем  $x$  из множества  $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ . Имеем

$$\frac{n}{2^x} = (c_r \cdot 2^{r-x} + c_{r-1} \cdot 2^{r-x-1} + \dots + c_{x+1} \cdot 2 + c_x) + (c_{x+1} \cdot 2^{-1} + \dots + c_0 \cdot 2^{-x}) = 4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha,$$

где  $A = c_r \cdot 2^{r-x-2} + c_{r-1} \cdot 2^{r-x-3} + \dots + c_{x+2}$  (считаем, что  $A = 0$  в случае  $x = r$ ) и  $0 \leq \alpha < 1$ . Поделив неравенство (1) на  $2^x$ , получаем

$$4y + 1 \leq 4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha < 4y + 3. \quad (2)$$

Пусть для некоторого  $y$  неравенство (2) выполнено. Тогда при  $y \leq A - 1$  имеем  $4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha \leq 4A - 4 + 3$ , что неверно, а при  $y \geq A + 1$  имеем  $4A + 2c_{x+1} + c_x + \alpha \geq 4A + 4 + 1$ , что также неверно. Единственное возможное значение  $y = A$  удовлетворяет (2) в том и только том случае, когда один из двоичных знаков  $c_x$  и  $c_{x+1}$  равен 1, а другой равен 0. Таким образом, каждая пара различных соседних цифр  $c_x, c_{x+1}$  дает ровно одно решение неравенства (1).

*А.Заславский, П.Кожевников*

**M2120.** Многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами таков, что уравнение  $P(m) + P(n) = 0$  имеет бесконечно много решений в целых числах  $m$  и  $n$ . Докажите, что график функции  $y = P(x)$  имеет центр симметрии.

Можно считать, что степень многочлена  $P(x)$  больше 1, а его старший коэффициент равен 1 (если старший коэффициент отличен от 1, то, поделив на него, получим многочлен, удовлетворяющий условию).

Заметим, что для данного числа  $n$  может найтись лишь конечное число таких чисел  $m$ , что  $P(m) = -P(n)$  (поскольку многочлен может принимать одно и то же конкретное значение лишь в конечном числе точек, не превышающем его степень). Также будем использовать следующий факт, верный для любого многочлена  $P(x)$  нечетной степени с положительным старшим коэффициентом (и аналогичный факт для многочлена четной степени): найдется такое число  $A$ , что  $P(x) > 0$  при  $x > A$ ,  $P(x) < 0$  при  $x < -A$ , и, кроме того,  $P(x)$  возрастает на каждом из интервалов  $(-\infty; -A)$ ,  $(A; +\infty)$ . Если бы степень многочлена  $P(x)$  была четной, то при

достаточно больших по модулю  $x$  выполнялось бы неравенство  $P(x) > 0$ , и могло найтись лишь конечное число пар целых чисел  $m, n$ , для которых выполнено равенство  $P(m) + P(n) = 0$ . Значит, степень  $P(x)$  нечетна. Учитывая сказанное, получаем, что для любого наперед заданного числа  $C$  найдется бесконечно много таких пар чисел  $m > C$  и  $n < -C$ , что  $P(m) + P(n) = 0$ .

Пусть степень  $P(x)$  равна  $k$ , и  $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \dots$  (здесь и далее троеточием обозначены слагаемые меньших степеней). Легко подобрать такое число  $d$ , что многочлен  $P(x - d)$  будет иметь вид  $x^k + bx^{k-2} + \dots$ , т.е. коэффициент при степени  $k - 1$  будет нулевым. Действительно,

$$P(x - d) = (x - d)^k + a(x - d)^{k-1} + \dots = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + \dots,$$

и достаточно взять  $d = a/k$ . Докажем, что точка  $(d; 0)$  и является центром симметрии графика  $P(x)$ . Обозначим  $P(x - d)$  за  $Q(x)$ . Достаточно доказать, что график многочлена  $Q(x)$  симметричен относительно точки  $(0; 0)$ , т.е. что  $Q(x) = -Q(-x)$  при любом  $x$ .

Итак,  $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \dots$ . Возьмем числа  $m > 0$  и  $n < 0$  по модулю больше  $C$  (как выбрано  $C$ , будет ясно из дальнейших рассуждений), для которых  $Q(m) + Q(n) = 0$  (где  $m - d$  и  $n - d$  — целые числа). Докажем, что  $|m| = |n|$ . Пусть  $|m| < |n|$ . Положим вначале  $n = -m - 1$ . Тогда

$$Q(m) + Q(n) = Q(m) + Q(-m - 1) = m^k + bm^{k-2} + \dots + (-m - 1)^k + b(-m - 1)^{k-2} + \dots = -km^{k-1} + R(m),$$

где  $R(x)$  — некий фиксированный многочлен степени  $k - 2$ ; таким образом,  $Q(m) + Q(-m - 1)$  — многочлен четной степени с отрицательным старшим коэффициентом. Тогда если  $C$  достаточно велико, то  $Q(m) + Q(-m - 1)$  будет меньше нуля. При  $n = -m - 2, -m - 3, -m - 4, \dots$  сумма  $Q(m) + Q(n)$  тем более будет меньше нуля, если  $C$  настолько велико, что  $Q(x)$  возрастает на интервале  $(-\infty; -C)$ . Итак, не может быть  $|m| < |n|$  при  $m > C, n < -C$ . Аналогично доказывается, что невозможно  $|m| > |n|$ . Значит, существует бесконечно много  $m$  (где  $m - d$  — целое) таких, что  $Q(m) + Q(-m) = 0$ , поэтому многочлен  $Q(x) + Q(-x)$  имеет бесконечно много корней. Это возможно, только если этот многочлен нулевой, т.е. выполнено тождество  $Q(x) + Q(-x) \equiv 0$ .

*Замечания.* Отметим, что график любого многочлена третьей степени имеет центр симметрии.

Можно сформулировать задачу, аналогичную данной задаче, для случая многочлена четной степени: *если многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами таков, что уравнение  $P(m) = P(m - n)$  имеет бесконечно много решений в натуральных числах  $m$  и  $n$ , то график функции  $y = P(x)$  имеет ось симметрии.*

Отметим также идейно родственную задачу, предлагавшуюся на окружном этапе Всероссийской олимпиады

ады школьников в 1999 году (задача 8 для 11 класса, автор А. Голованов): *если для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках, то существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.*

С. Дориченко, П. Кожевников

**M2121.** *Противоположные стороны выпуклого шестиугольника ABCDEF параллельны. Назовем его «высотами» векторы с концами на прямых, содержащих противоположные стороны, перпендикулярные им и направленные от AB к DE, от EF к BC и от CD к AF. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его «высот» равна нулевому вектору.*

Пусть из «высот» шестиугольника ABCDEF можно составить треугольник (это и значит, что сумма «высот» равна нулевому вектору). Тогда этот треугольник равен треугольнику AA<sub>1</sub>A<sub>2</sub>, где A<sub>1</sub> и A<sub>2</sub> – проекции точки A на прямые CD и DE соответственно (рис. 1). Значит, четырехугольник AA<sub>1</sub>DA<sub>2</sub> – вписанный, и диаметр описанной около треугольника AA<sub>1</sub>A<sub>2</sub> окружности равен AD.

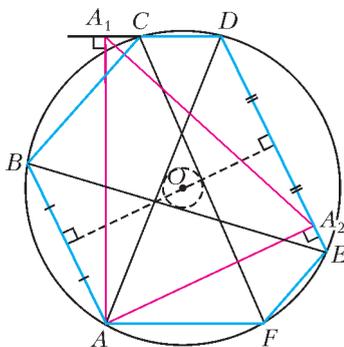


Рис. 1

Аналогично получаем, что две другие главные диагонали шестиугольника равны этому диаметру, т.е. AD = BE = CF. Следовательно, AB и DE являются основаниями равнобокой трапеции и поэтому имеют общий серединный перпендикуляр. Этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла между прямыми AD и BE, т.е. проходит через центр O окружности, вписанной в треугольник, образованный главными диагоналями.

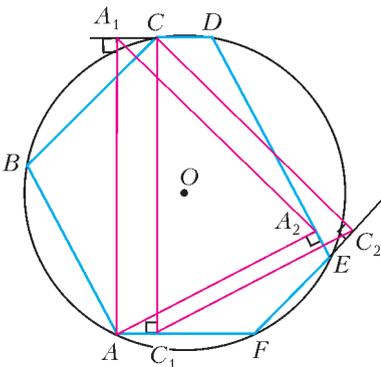


Рис. 2

Серединные перпендикуляры к остальным сторонам шестиугольника также проходят через точку O, следовательно, вокруг шестиугольника ABCDEF можно описать окружность.

Пусть теперь ABCDEF – вписанный шестиугольник (рис. 2). Вновь рассматривая вписанный четырехугольник AA<sub>1</sub>DA<sub>2</sub>, получаем

$$\angle DA_1A_2 = \angle DAA_2 = 90^\circ - \angle DAB = \angle BCD - 90^\circ,$$

т.е. AA<sub>1</sub>A<sub>2</sub> ⊥ BC. Опустим перпендикуляры CC<sub>1</sub> и CC<sub>2</sub> на прямые AF и FE соответственно. Тогда,

рассуждая аналогично, получим, что C<sub>1</sub>C<sub>2</sub> ⊥ DE. Таким образом, у треугольников AA<sub>1</sub>A<sub>2</sub> и C<sub>1</sub>CC<sub>2</sub> соответствующие стороны параллельны друг другу и AA<sub>1</sub> = CC<sub>1</sub>, следовательно, эти треугольники равны. Поэтому отрезок A<sub>1</sub>A<sub>2</sub> равен третьей «высоте» шестиугольника.

*Замечание.* Как указал читатель О. Жеребцов из Усинска (Республика Коми), вывести из вписанности шестиугольника нужное векторное равенство можно и по-другому, с использованием векторов. Обозначив через A', B', C', D', E', F' середины сторон вписанного шестиугольника ABCDEF соответственно, заметим, что A'D', C'F' и E'B' – «высоты» шестиугольника. Тогда нужное равенство A'D' + C'F' + E'B' = 0 вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \overline{A'D'} + \overline{D'E} + \overline{EE'} + \overline{E'B'} + \\ + \overline{B'C} + \overline{CC'} + \overline{C'F'} + \overline{F'A} + \overline{AA'} = \vec{0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \overline{D'E} + \overline{EE'} + \overline{B'C} + \overline{CC'} + \overline{F'A} + \overline{AA'} = \\ = \frac{1}{2}(\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{FA} + \overline{AB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

А. Заславский

**M2122.** а) Докажите, что любое натуральное число n, большее 17, можно разложить в сумму трех натуральных попарно взаимно простых слагаемых, каждое из которых больше 1.

б\*) Выясните, конечно или бесконечно множество натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех взаимно простых в совокупности натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.

а) Если n – четное число, большее 8, то n = 6k, n = 6k + 2 или n = 6k + 4, причем в первых двух случаях k есть натуральное число, большее 1, в третьем же случае k – натуральное число. Из формул 6k = 2 + 3 + [6(k - 1) + 1], 6k + 2 = 3 + 4 + [6(k - 1) + 1], 6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1) легко вытекает, что n есть сумма трех натуральных чисел, больших 1 и попарно взаимно простых.

Пусть теперь n – нечетное число, большее 17. Здесь возможны шесть случаев: n = 12k + 1, 12k + 3, 12k + 5, 12k + 7, 12k + 9 и 12k + 11, причем в первых трех случаях k есть натуральное число, большее 1, в трех же остальных k – натуральное число. Имеем 12k + 1 = [6(k - 1) - 1] + [6(k - 1) + 5] + 9, где числа 6(k - 1) - 1, 6(k - 1) + 5 и 9 – большие единицы и попарно взаимно простые, так как первые два из них не делятся на 3 и являются взаимно простыми (ибо если d | 6(k - 1) - 1 и d | 6(k - 1) + 5, то d | 6, а оба числа нечетные). Если n = 12k + 3, то n = (6k - 1) + (6k + 1) + 3; если n = 12k + 5, то n = (6k - 5) + (6k + 1) + 9; если n = 12k + 7, то n = (6k + 5) + (6k - 1) + 3; если n = 12k + 9, то n = (6k - 1) + (6k + 1) + 9; если n = 12k + 11, то n = (6(k + 1) - 5) + (6(k + 1) + 1) + 3.

В каждом случае, как легко заметить, мы имеем три слагаемых, больших 1 и попарно взаимно простых.

**Комментарии.** Число 17 не обладает обсуждаемым свойством: если в условиях задачи  $17 = a + b + c$ , то  $a, b, c$  – различные нечетные числа, большие 1. Такие тройки с наименьшими суммами: (3, 5, 7) и (3, 5, 9) не подходят, а сумма чисел любой иной больше 17.

Постараемся теперь понять, почему границей оказалось именно число 17. Для этого решим вначале более простую, чем пункт а), задачу: докажем, что любое натуральное число, большее 6, является суммой двух взаимно простых натуральных чисел, больших 1. Эту задачу можно решить подобно пункту а) или с помощью функции Эйлера  $\varphi(n)$  (условие задачи эквивалентно тому, что  $\varphi(n) > 2$  при  $n > 6$ ); мы покажем гораздо более прозрачное неэлементарное решение.

Пусть в интервале  $\left(\frac{n}{2}; n\right)$  найдется простое  $p$  такое, что  $n - p > 1$ . Тогда разложение  $n = p + (n - p)$  – искомое (числа  $p$  и  $n - p$  взаимно просты, так как  $p$  – простое, а  $(n - p) < p$ ).

Ясно, что при  $6 < n < 12$  искомое  $p$  существует. При  $n \geq 12$  его существование вытекает из такого утверждения (мы оставляем его без доказательства).

**Предложение 1.** Пусть  $n > 11$ . Тогда в интервале  $\left(\frac{n}{2}; n\right)$  содержится по крайней мере два различных простых числа.

Перейдем теперь к исходному случаю трех слагаемых.

Пусть в интервале  $\left(\frac{n}{2}; n\right)$  найдется простое  $q$  такое, что

$$n - q > 6. \quad (1)$$

Тогда разложим  $m = n - q$  как выше:  $m = p + (m - p)$ . Как и раньше, разложение  $n = q + p + (n - q - p)$  – искомое.

Докажем теперь, что при  $n > 17$  условие (1) всегда выполняется.

**Предложение 2.** Пусть  $n > 17$ . Тогда в интервале  $\left(\frac{n}{2}; n\right)$  содержится по крайней мере три различных простых числа:  $\frac{n}{2} < q < r < s < n$ .

Легко видеть, что при  $q > 3$  простые числа  $q < r < s$  не могут быть последовательными нечетными. Отсюда  $n - q > 6$ .

Предложения 1 и 2 – незначительные обобщения знаменитого постулата Бертрана. Их нетрудно доказать с помощью рассуждений статьи А.Коробова «Простые числа и постулат Бертрана» («Квант» № 4 за 1998 год; см. также: М.Айгнер и Г.Циглер. «Доказательства из Книги». – М.: Мир, 2006).

С помощью подобных рассуждений нетрудно доказать индукцией по  $n$  следующее

**Предложение 3.** Для любого  $n > 1$  существует такое  $N(n)$ , что любое  $k > N$  представимо в виде суммы  $n$  попарно взаимно простых слагаемых, больших 1.

б) Для краткости, назовем *трехпарным* число, допускающее представление в виде суммы трех взаимно

простых натуральных слагаемых, любые два из которых не взаимно просты.

Пусть натуральное  $n$  обладает следующим свойством: существуют простые

$$p < r < q: p^2 r q < n, (p r q, n) = 1. \quad (2)$$

Тогда число  $n$  трехпарно.

Действительно, рассмотрим числа вида  $n - xqr$ . Поскольку  $p$  и  $qr$  взаимно просты и  $n$  не делится на  $p$ , найдется такое целое положительное  $x < p$ , что  $n - xqr$  делится на  $p$ .

Пусть  $n - xqr = mp$ . В силу того что  $n > p^2 qr$  и  $x < p$ , имеем  $m > (p - 1)qr$ , причем  $m$  не делится на  $q$  и  $r$ .

Поскольку  $q$  и  $r$  взаимно просты, найдется такое целое положительное  $y < r$ , что  $m - yq$  делится на  $r$ . Так как  $r > p > x$  и  $r$  – простое, то  $r$  и  $x$  взаимно просты, а значит, остатки от деления на  $x$  чисел вида  $y + kr$  при  $k = 0, 1, \dots, x - 1$  различны. Тогда среди этих остатков есть 1. Для такого  $k$  число  $w = y + kr$  взаимно просто с  $x$ . Но поскольку  $m - yq$  делится на  $r$ , то и  $m - wq = m - yq - krq$  делится на  $r$ . При этом  $m - yq - krq > (p - 1)qr - yq - krq > (p - 1)qr - qr - (p - 2)qr = 0$ , т.е.  $m = wq + zr$ , причем  $w, z > 0$ .

Окончательно имеем:  $n = xqr + wpq + zpr$ , причем эти три слагаемых взаимно просты, поскольку  $xqr$  и  $wpq$  имеют наибольший общий делитель  $q$  (все остальные множители в этих слагаемых взаимно просты по построению), а  $zpr$  не делится на  $q$  (иначе бы и  $n$  делилось на  $q$ ). Таким образом,  $n$  трехпарно.

Докажем, что множество натуральных  $n$ , не обладающих свойством (2), конечно.

Назовем натуральное число  $n$  свободным от квадратов, если  $p^2$  не делит  $n$  при любом простом  $p$ .

**Лемма 1.** При любом натуральном  $n$  среди чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  более четверти свободны от квадратов.

**Доказательство.** Среди чисел  $1, 2, \dots, n$  имеем не более  $\frac{n}{p^2}$  чисел, делящихся на  $p^2$ . Поэтому количество чисел, делящихся на квадрат простого числа, не больше

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{n}{p^2} < \frac{n}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)} = \frac{n}{4} + n \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{3n}{4}.$$

Лемма доказана.

Занумеруем все простые числа в порядке возрастания:

$p_1, p_2, \dots$

**Лемма 2.**  $p_k < 2^{k+1}$  при любом  $k$ .

**Доказательство.** Первые (по возрастанию)  $k - 1$  простых чисел порождают  $2^{k-1}$  чисел, свободных от квадратов. Поэтому среди чисел от 1 до  $4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$  содержится по меньшей мере  $k$  простых чисел (в противном случае доля чисел, свободных от квадратов, была бы не более четверти), т.е.  $p_k \leq 2^{k+1}$ .

**Лемма 3.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2^{256}$ , существуют простые  $p < q < r < \sqrt[4]{n}$ , не являющиеся делителями числа  $n$  (такие числа далее называем *неделителями* числа  $n$ ).

**Доказательство.** Пусть  $2^{k+1} \leq \sqrt[4]{n} \leq 2^{k+2}$ , и предположим, что среди  $p_1, \dots, p_k$  не более двух неделителей  $n$ .

Тогда поскольку  $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{11}$ ,  $2^5 < p_{12} < p_{13} < \dots < p_{k-2}$ , то  $n \geq p_1 \dots p_{k-2} > 2^{11} \cdot 2^{5(k-13)} > 2^{4k+8} \geq n$  при  $k > 62$ . Следовательно,  $k \leq 62$ ,  $n \leq 2^{256}$ . Противоречие показывает, что три недели существуют. С другой стороны, из леммы 2 следует, что  $p_k < \sqrt[4]{n}$ . Лемма 3 доказана.

Таким образом, любое натуральное  $n > 2^{256}$  обладает свойством (2). Утверждение задачи доказано.

**Замечание 1.** Можно доказать и более общее утверждение: при любом  $k \geq 2$  множество натуральных чисел, не допускающих представления в виде суммы  $k + 1$  взаимно простых слагаемых, любые  $k$  из которых не взаимно просты, будет конечным.

**Замечание 2.** Грубая оценка  $2^{256}$  позволяет легко найти наибольшее не обладающее свойством (2) число: 120120. Покажем, как это можно сделать.

Оценку можно последовательно понижать. Так, из  $n \leq 2^{256}$  сразу получается, что  $n < 2^{48}$ .

В самом деле, пусть  $n \geq 2^{48}$ ,  $\sqrt[4]{n} \geq 2^{12}$ . Рассуждая как при доказательстве леммы 3, получаем

$$n \geq 4079 \cdot \dots \cdot 1031 > (2^{10})^{30} > 2^{256}.$$

Таким образом, последовательно получаются оценки:  $2^{24}$ ,  $2^{20}$ ,  $2^{18}$ , 130000. Теперь достаточно показать, что не обладающее свойством (2) число  $n$  интервала (120120; 130000) должно делиться на  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ . Рассмотрим простые числа 2, 3, ..., 23. Пусть среди них есть три неделиателя  $p < r < s$  числа  $n$ , один из которых не больше 13. Имеем  $p^2rs \leq 13^2 \cdot 19 \cdot 23 < 120120 < n$ , откуда  $n$  обладает свойством (2).

Значит, среди простых чисел от 2 до 23 не более двух неделиателей  $n$ , причем один из них не больше 13. Окончательно:  $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 > 130000$ .

Однако число 120120 является трехпарным:  $120120 = 391 + 5695 + 114034$ , где  $(391, 5695) = 17$ ,  $(5695, 114034) = 67$ ,  $(114034, 391) = 23$ . Наибольшее не являющееся трехпарным число – 2730.

*В.Лецко, В.Сендеров*

**M2123.** Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

Пусть на каждый из вопросов возможны два ответа: «да» или «нет».

Разобьем вопросы теста на группы по 5 вопросов (с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й и т.д.) При первой попытке ответим «нет» на все вопросы.

Покажем теперь, как за 4 следующие попытки узнать все верные ответы на вопросы в первой группе. На вопросы с 6-го по 30-й отвечаем в этих попытках «нет», а на вопросы с 1-го по 5-й отвечаем так:

при второй попытке отвечаем «да» на все пять вопросов;

при третьей попытке отвечаем «нет» на 1-й и 2-й вопросы (на остальные три – «да»);

при четвертой попытке отвечаем «нет» на 1-й и 3-й вопросы (на остальные три – «да»);

при пятой попытке отвечаем «нет» на 1-й и 4-й вопросы (на остальные три – «да»).

Заметим, что из сообщений о числе верных ответов в первой и второй попытках мы узнаем, например, сколько во второй попытке было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й.

После третьей попытки мы узнаем количество  $A$  верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 2-й вопросы, после четвертой – количество  $B$  верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 3-й вопросы, после пятой – количество  $C$  верных ответов во второй попытке среди двух ответов на 1-й и 4-й вопросы.

Пусть хотя бы одно из чисел  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равно 0 или 2. Тогда после пятой попытки мы узнаем верные ответы на вопросы с 1-го по 4-й. В самом деле, пусть, например,  $B = 2$ ; тогда во второй попытке ответы на 1-й и 3-й вопросы верные; поэтому, зная  $A$  и  $C$ , определяем верные ответы на 2-й и 4-й вопросы соответственно. Зная верные ответы на вопросы с 1-го по 4-й, определим верный ответ на 5-й вопрос, так как знаем, сколько было верных ответов во второй попытке на вопросы с 1-го по 5-й.

Остается случай  $A = B = C = 1$ ; тогда во второй попытке: среди ответов на 1-й и 2-й вопросы ровно один верный, среди ответов на 1-й и 3-й вопросы – тоже ровно один верный, и среди ответов на 1-й и 4-й вопросы – ровно один верный. Значит, при второй попытке на 2-й, 3-й и 4-й вопросы наши ответы либо все верны, либо все неверны. Но мы уже знаем, каких ответов при второй попытке на вопросы с 1-го по 5-й больше: верных или неверных. Таким образом, мы знаем верные ответы на 2-й, 3-й и 4-й вопросы, тогда и на 1-й вопрос (верный ответ противоположен верному ответу на 2-й вопрос), а значит, и на 5-й вопрос.

Далее, аналогично узнаем верные ответы на вопросы 2-й, 3-й, 4-й и 5-й групп по 5 вопросов (потратив на каждую 4 попытки). Тогда за  $1 + 4 \cdot 5 = 21$  попытку знаем верные ответы на вопросы с 1-го по 25-й. Заметим, что верные ответы на вопросы последней группы можно узнать за 3 попытки, поскольку мы уже знаем, сколько верных ответов в самой первой попытке мы сделали на эти вопросы. Итак, всего хватит 24 вопроса.

**Замечание.** Данную задачу можно переформулировать на языке линейной алгебры и получить значительно более сильные оценки на количество попыток. Скажем, для теста из 33 вопросов достаточно всего 16 попыток, чтобы узнать верные ответы на все вопросы.

*С.Дориченко*

**Ф2130.** Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти

вертикально и разогнаться до скорости  $v$ . Длина удава  $L$ . Каким может быть рекорд? Как должен двигаться удав, чтобы установить рекорд? Масса удава распределена по его длине равномерно.

Пусть  $H$  – высота планки над уровнем земли,  $M$  – масса удава. Будем отсчитывать потенциальную энергию также от уровня земли. Тогда начальная механическая энергия удава сразу после его выпрямления равна  $Mg\frac{L}{2} + \frac{Mv^2}{2}$ . Чтобы ее хватило для преодоления планки как можно большей высоты, удав должен двигаться так, чтобы его центр масс в момент преодоления планки находился как можно ниже. Для этого удаву нужно сложиться пополам, чтобы его середина оказалась над планкой, а голова и хвост свешивались вниз. При этом центр масс удава поднимется на максимальную высоту, равную  $H - L/4$ , и в этот момент кинетическая энергия удава будет равна нулю. Таким образом, на максимальной высоте механическая энергия удава будет  $Mg\left(H - \frac{L}{4}\right)$ . Из закона сохранения механической энергии получаем

$$Mg\frac{L}{2} + \frac{Mv^2}{2} \geq Mg\left(H - \frac{L}{4}\right).$$

Отсюда находим рекордную высоту:

$$H_{\max} = \frac{3L}{4} + \frac{v^2}{2g}.$$

С.Варламов

**Ф2131.** Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой  $m$ , совершает  $f$  раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением  $a$ , потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением  $a/2$ . Коэффициент трения между грузом и платформой  $\mu < 1$ , ускорение  $a \gg g$ , частота  $f \gg 1$  Гц. В каком направлении и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

Поскольку  $a \gg g$  и  $\mu < 1$ , груз будет все время скользить относительно платформы. При этом на него будет все время действовать сила трения скольжения  $F = \mu mg$ , постоянная по величине, но направленная то вправо, то влево.

Сравним время движения платформы вправо  $t_1$  и время движения влево  $t_2$ . Поскольку движение платформы в обоих случаях равноускоренное и пройденные вправо и влево пути равны, получаем

$$\frac{at_1^2}{2} = \frac{a}{2} \frac{t_2^2}{2}, \text{ откуда } t_2 = \sqrt{2}t_1.$$

Таким образом, влево платформа движется дольше, чем вправо. Значит, на груз будет дольше действовать сила трения, направленная влево, и он станет смещаться влево. Так как

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{f} \text{ и } t_2 = \sqrt{2}t_1,$$

получаем

$$t_1 = \frac{1}{f(1 + \sqrt{2})}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{f(1 + \sqrt{2})}.$$

Изменение импульса груза за время  $\Delta t = 1$  с составляет

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mb = f(\mu mgt_1 - \mu mgt_2) = \mu mg \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

где  $b = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  – среднее ускорение груза (за положительное направление принято направление движения груза вправо). Следовательно, груз будет двигаться влево со средним ускорением, равным по модулю

$$b = \mu g \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}.$$

А.Андрюанов

**Ф2132.** Один из концов U-образной трубки постоянного сечения с налитой в нее ртутью наглухо закрыли. Воздух в закрытом конце трубки стали медленно нагревать, измеряя зависимость его давления  $p$  от температуры  $T$ . Как оказалось, эта зависимость в начале нагревания приближенно является линейной:  $p = p_0(1 + \alpha(T/T_0 - 1))$ , где  $p_0 = 760$  мм рт. ст. – атмосферное давление,  $T_0$  – температура окружающей среды, коэффициент  $\alpha = 0,5$ . Найдите высоту столба воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса.

Запишем уравнение состояния воздуха в закрытом конце трубки в начале процесса:

$$p_0Sl_0 = \nu RT_0,$$

где  $S$  – площадь сечения трубки,  $l_0$  – искомая высота воздушного столба,  $\nu$  – число молей воздуха. Пусть при нагревании до температуры  $T$  уровень ртути в открытом конце трубки поднялся на  $x$ , а в закрытом опустился на  $x$ . Тогда давление воздуха в закрытом конце трубки равно  $p = p_0 + 2\rho gx$ , объем равен  $S(l_0 + x)$ , и уравнение состояния воздуха имеет вид

$$\nu RT = (p_0 + 2\rho gx)S(l_0 + x) =$$

$$= p_0Sl_0 + Sx(p_0 + 2\rho gl_0) + 2\rho gSx^2.$$

При малых  $x$ , в начале процесса нагревания, квадратичным слагаемым можно пренебречь, поэтому, вычитая из данного уравнения состояния то уравнение, которое было справедливо в начале процесса, получаем

$$\nu R(T - T_0) = Sx(p_0 + 2\rho gl_0),$$

откуда

$$x = \frac{\nu R(T - T_0)}{S(p_0 + 2\rho gl_0)} = \frac{p_0l_0}{p_0 + 2\rho gl_0} \frac{T - T_0}{T_0}.$$

Следовательно,

$$p = p_0 + 2\rho gx = p_0 + \frac{p_0 \cdot 2\rho gl_0}{p_0 + 2\rho gl_0} \frac{T - T_0}{T_0} = p_0 \left( 1 + \frac{2\rho gl_0}{p_0 + 2\rho gl_0} \frac{T - T_0}{T_0} \right),$$

и

$$\alpha = \frac{2\rho g l_0}{p_0 + 2\rho g l_0}.$$

Отсюда находим

$$l_0 = \frac{p_0}{2\rho g(\alpha^{-1} - 1)} = \frac{\rho g h_0}{2\rho g(\alpha^{-1} - 1)} = \frac{h_0}{2(\alpha^{-1} - 1)} = 380 \text{ мм},$$

где  $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$  мм – высота столба ртути, соответствующая данному в условии задачи значению атмосферного давления.

О.Шведов

**Ф2133.** Проводящие концентрические сферы имеют радиусы  $R$  и  $3R$ , на расстоянии  $2R$  от их общего центра находится точечный заряд  $Q$ . Сферы соединяют между собой тонким проводом, и получившийся проводник заземляют тонким проводником, имеющим большое сопротивление. Какой заряд протечет по этому проводнику? Какое количество теплоты выделится в системе за большое время?

Найдем разность потенциалов между сферами в тот момент, когда с малой сферы на большую перетек заряд  $q$ . Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра:

$$\varphi_{\text{внутр}} = k \frac{-q}{R} + k \frac{Q}{2R} + k \frac{q}{3R}.$$

Снаружи поле такое же, как если бы весь заряд  $-q + q + Q = Q$  был расположен в центре, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_{\text{внеш}} = k \frac{Q}{3R}.$$

Тогда разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{внутр}} - \varphi_{\text{внеш}} = \frac{1}{6}k \frac{Q}{R} - \frac{2}{3}k \frac{q}{R}.$$

Она меняется при перетекании заряда  $q$  по линейному

закону  $\Delta\varphi(q) = \frac{1}{6}k \frac{Q - 4q}{R}$  от  $\frac{1}{6}k \frac{Q}{R}$  до 0, а среднее значение составляет  $\frac{1}{2}\Delta\varphi_{\text{нач}} = \frac{1}{12}k \frac{Q}{R}$ . Полный протекший заряд равен

$$q_{\text{пр}} = \frac{Q}{4}.$$

При этом в соединяющем сферы проводе выделяется количество теплоты

$$W_1 = \frac{1}{12}k \frac{Q}{R} \cdot \frac{Q}{4} = \frac{1}{48}k \frac{Q^2}{R}.$$

Теперь заземляем проводник. Пусть на землю к некоторому моменту перетек заряд  $Q_1$ . Обозначим заряды внутренней и внешней сфер  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Тогда

$$q_1 + q_2 = -Q_1 \text{ и } k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_2}{3R} + k \frac{Q}{2R} = k \frac{Q + q_1 + q_2}{3R}.$$

Отсюда находим

$$q_1 = -\frac{Q}{4} \text{ и } q_2 = -Q_1 + \frac{Q}{4}$$

– заряд внутренней сферы остается неизменным и ток по «внутреннему» соединяющему проводу не течет. Это означает, что все тепло выделяется в заземляющем проводнике. По нему стекает полный заряд  $Q_{1\text{полн}} = Q$ , потенциал большой сферы меняется при этом от  $k \frac{Q}{3R}$  до 0, среднее значение составляет  $\frac{1}{6}k \frac{Q}{R}$ , поэтому в заземляющем проводнике выделяется количество теплоты

$$W_2 = \frac{1}{6}k \frac{Q^2}{R}.$$

Всего в системе выделится количество теплоты

$$W_1 + W_2 = \frac{9}{48}k \frac{Q^2}{R}.$$

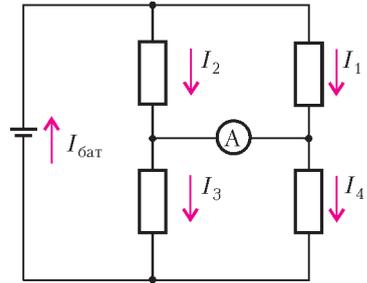
А.Теплов

**Ф2134.** Обычный «мостик» собран из трех резисторов сопротивлением 100 Ом каждый и одного резистора сопротивлением 20 Ом. В одну из диагоналей мостика включен амперметр, он показывает 0,1 А. Какой ток течет через батарейку, подключенную к другой диагонали мостика? Амперметр считать идеальным.

Обозначим ток через резистор сопротивлением 20 Ом через  $I_1$  (см. рисунок), тогда через параллельный ему резистор сопротивлением 100 Ом

течет ток  $I_2 = \frac{I_1}{5}$ , а сумма этих токов течет через батарейку:

$$I_{\text{бат}} = I_1 + I_2 = \frac{6}{5}I_1.$$



Токи в оставшихся двух резисторах одинаковы и равны

$$I_3 = I_4 = \frac{3}{5}I_1.$$

Через амперметр течет ток

$$I_A = I_1 - I_4 = \frac{2}{5}I_1 = \frac{1}{3}I_{\text{бат}}.$$

Таким образом, ток через батарейку в 3 раза больше тока амперметра, т.е.

$$I_{\text{бат}} = 3I_A = 3 \cdot 0,1 \text{ А} = 0,3 \text{ А}.$$

О.Простов

**Ф2135.** Конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ соединен последовательно с катушкой индуктивностью  $L = 1$  Гн. К выводам получившейся цепи подключают батарейку напряжением  $U_0 = 1$  В, и ток в цепи начинает увеличиваться. В тот момент, когда ток максимален, параллельно катушке подключают резистор сопротивлением  $R = 10$  кОм. Какой заряд

протечет через резистор и сколько тепла в нем выделится за большой интервал времени? Элементы цепи считать идеальными.

Сначала найдем максимальный ток через катушку – он соответствует моменту нулевой ЭДС индукции в катушке и напряжению конденсатора  $U_0$ . Работа батареи к этому моменту будет равна

$$A_{\text{бат}} = U_0 \cdot CU_0 = CU_0^2.$$

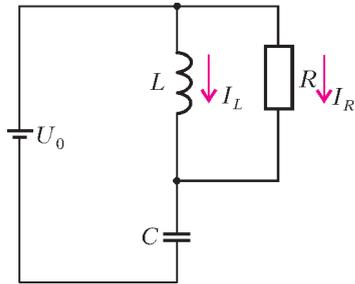
Тогда баланс энергий будет иметь вид

$$CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}LI_{\text{max}}^2,$$

откуда

$$I_{\text{max}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Начиная с этого момента, когда параллельно катушке подключают резистор (см. рисунок), будет выполняться равенство



ся равенство

$$-L \frac{\Delta I_L}{\Delta t} = RI_R, \text{ или } \Delta Q_R = -\frac{L}{R} \Delta I_L.$$

Суммируя, получим протекший по резистору заряд:

$$Q_R = \frac{LI_{\text{max}}}{R} = U_0 \frac{\sqrt{LC}}{R} = 1 \text{ мкКл}.$$

Количество теплоты, выделяющееся в резисторе, проще всего найти из баланса энергий: через большое время ток через катушку станет нулевым, а напряжение конденсатора будет равно  $U_0$ . Тогда

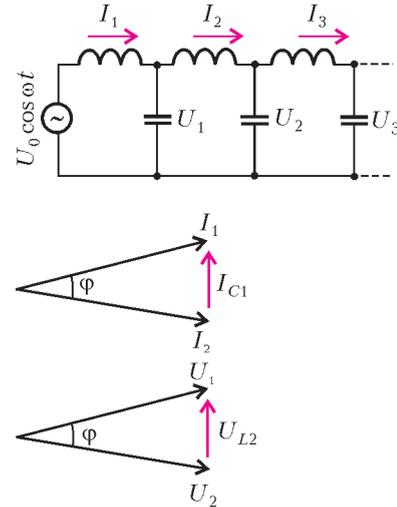
$$A_{\text{бат}} = W_{\text{тепл}} + \frac{1}{2}CU_0^2, \text{ и}$$

$$W_{\text{тепл}} = CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = 50 \text{ мкДж}.$$

А.Повторов

**Ф2136.** Для передачи не очень высокоскоростной информации используется витая пара, состоящая из двух тонких изолированных проводов большой длины. Индуктивность проводов в расчете на 1 сантиметр длины пары равна 1 мкГн, емкость между проводами составляет 1 пФ на сантиметр. С какой скоростью бежит электромагнитная волна вдоль такой пары?

Нарисуем витую пару в виде эквивалентной бесконечной (или очень длинной) цепи, состоящей из одинаковых LC-звеньев (см. рисунок). Пусть каждое звено соответствует кусочку длиной  $\Delta l = 1 \text{ см}$ , потом мы проверим – правильно ли мы «разрезали» провода, не слишком ли велик выбранный нами кусочек. Токи



$I_1, I_2, \dots$  отличаются друг от друга только сдвигами по фазе  $\varphi$ , а величины их одинаковы:  $I_1 = I_2 = \dots = I_L$ . При малом  $\varphi$

$$I_C = I_L \cdot \varphi.$$

Для частоты  $\omega$  можно записать

$$U_L = \omega L \cdot I_L, \quad U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I_C.$$

Тогда

$$\varphi = \omega \sqrt{LC},$$

и напряжение на выходе звена с номером  $n$  запишется так:

$$U_n = U_0 \cos(\omega t - n\varphi) = U_0 \cos\left(\omega\left(t - n\sqrt{LC}\right)\right),$$

т.е. оно запаздывает на время  $\tau = n\sqrt{LC}$ .

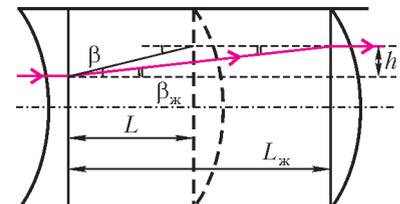
По этому запаздыванию мы и определим скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{\Delta l}{\tau} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{1 \cdot \sqrt{10^{-6}} \cdot 1 \cdot 10^{-12} \text{ с}} = 1 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Теперь – проверка. Сдвиг по фазе для одного звена для «умеренной» частоты  $\omega = 1 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$  составит  $\varphi = 10^{-3} \text{ рад} \ll 1$ . Если «размеры» звена уменьшить еще – скорость волны будет той же.

З.Рафаилов

**Ф2137.** Тонкая плосковогнутая рассеивающая линза прижата плоскостью к торцу цилиндрической трубки. В трубку вставлена плосковыпуклая собирающая линза так, что главные оптические оси линз совпадают с осью трубки, а собирающая линза обращена к рассеивающей плоской стороной. Собирающую линзу можно перемещать вдоль оси трубки. Если на первую (рассеивающую) линзу вдоль оси направить узкий параллельный пучок света, то при некотором расстоянии между линзами из системы выйдет также параллельный пучок. Если же пространство между линзами заполнить жидкостью, то для



получения на выходе параллельного пучка расстояние между линзами необходимо увеличить в 1,5 раза. Найдите показатель преломления жидкости.

Рассмотрим ход одного из параксиальных (т.е. приосевых) лучей в данной оптической системе (см. рисунок). Пока между линзами в трубке был воздух, при преломлении этого луча на плоской поверхности плосковыгнутой линзы выполнялось следующее соотношение, справедливое для малых углов падения  $\alpha$  (на рисунке этот угол не показан – он практически равен нулю) и преломления  $\beta$ :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n_{ст}},$$

где  $n_{ст}$  – показатель преломления стекла этой линзы. После заполнения трубки жидкостью угол преломления изменился, так что теперь

$$\frac{\alpha}{\beta_{ж}} = \frac{n_{ж}}{n_{ст}}, \text{ откуда } n_{ж} = \frac{\beta}{\beta_{ж}}.$$

Угол падения луча на плоскую поверхность плосковы-

пуклой линзы после заполнения трубки жидкостью также уменьшился от  $\beta$  до  $\beta_{ж}$ . Для того чтобы данный луч после преломления в этой линзе остался параллельным главной оптической оси системы, он должен внутри линзы идти под тем же углом к ее выпуклой поверхности, что и до заполнения трубки жидкостью. Это возможно, только если луч попал на линзу на том же расстоянии от оси, что и до заполнения трубки жидкостью. Поскольку  $n_{ж} > 1$  и  $\beta_{ж} < \beta$ , для выполнения указанного условия плосковыпуклую линзу надо отодвигать от плосковыгнутой на  $L_{ж} - L$ , причем по условию  $L_{ж}/L = 1,5$ . Пусть  $h$  – то расстояние, на которое луч смещается, проходя между линзами, от оси системы. Тогда

$$\beta = \frac{h}{L}, \text{ а } \beta_{ж} = \frac{h}{L_{ж}}.$$

Таким образом,

$$n_{ж} = \frac{\beta}{\beta_{ж}} = \frac{L_{ж}}{L} = 1,5.$$

В.Погожев

## НАМ ПИШУТ

### Наблюдения Рёмера и эффект Доплера

В 1675 году датский астроном Оле Рёмер, проводя серию наблюдений над затмениями спутников Юпитера, обнаружил, что период обращения одного из спутников периодически изменяется. Анализируя причины этого загадочного явления, ученый пришел к выводу, что оно непосредственно связано с тем, что свет движется от Юпитера до Земли с некоторой определенной скоростью, а не мгновенно, – факт в то время далеко не очевидный. Он даже сумел определить эту скорость, исходя из результатов своих наблюдений. Вычисленная им скорость оказалась равной 215000 км/с.

Нам представляется, что кажущееся изменение частоты обращения спутника вокруг планеты, которое наблюдал Рёмер, является своеобразным аналогом эффекта Доплера – изменения воспринимаемой частоты волны (световой или акустической) в зависимости от скорости приближения или удаления источника волны от приемника. Ведь оба явления – и вращение спутника вокруг планеты, и формирование волны – представляют собой периодические процессы. Не исключено, что сравнение этих явлений может помочь лучше разобраться в них обоих. Эффект Доплера подробно описан во многих книгах и учебниках, а недавно ему была посвящена обстоятельная статья в «Кванте» (см. статью С.Дворянинова «Легенда об искажении сигнала» в «Кванте» №1 за этот год). Поэтому, чтобы не повторяться, мы будем считать этот эффект известным читателю и рассказывать о нем не будем.

О.Рёмер наблюдал движение одного из спутников Юпитера (Ио), который периодически исчезал из поля зрения, скрываясь за планетой. Когда этот спутник выходил из тени, наблюдалась своеобразная вспышка света. Промежуток времени между вспышками Рёмер первоначально считал периодом обращения спутника вокруг планеты. Но потом он обратил внимание на то, что этот промежуток времени увеличивается, когда Земля и Юпитер удаляются друг от друга, и уменьшается, когда эти планеты сближаются. Такая

связь между взаимным расположением Земли и Юпитера и периодом обращения его спутника казалась непостижимой. Но Рёмер разъяснил это удивительное явление, полагая, что свет перемещается не мгновенно, а с какой-то определенной скоростью. Действительно, во время сближения планет свет от второй из двух последовательных вспышек проходит меньшее расстояние до встречи с Землей, чем от первой, и для земного наблюдателя промежуток времени между вспышками уменьшается. А когда планеты удаляются друг от друга, этот промежуток времени увеличивается. В результате соответственно увеличивается или уменьшается наблюдаемая частота вспышек.

Поясним наши рассуждения с помощью рисунка. Для простоты будем полагать, что планеты движутся навстречу друг другу или удаляются друг от друга вдоль одной прямой. Пусть в некоторый момент времени  $T$  спутник выходит из тени Юпитера, находящегося на расстоянии  $ZЮ_1$  от Земли. Наблюдатель на Земле увидит его в момент времени  $T + t_1$ , где  $t_1$  – время, за которое свет проходит расстояние  $ZЮ_1$ . В момент времени  $T + \tau$ , где  $\tau$  – период обращения спутника вокруг Юпитера, спутник вновь выйдет из тени Юпитера, приближающегося к Земле и находящегося теперь на расстоянии  $ZЮ_2$  от Земли. Наблюдатель с Земли увидит спутник в момент времени  $T + \tau + t_2$ , где  $t_2$  – время, за которое свет проходит расстояние  $ZЮ_2$ . Так как  $t_2 < t_1$ , то  $T + \tau + t_2$  отличается от  $T + t_1$  меньше чем на  $\tau$ . Следовательно, для наблюдателя с Земли время между двумя выходами спутника Юпитера из тени будет меньше  $\tau$ . А когда планеты удаляются друг от друга, для земного наблюдателя время между двумя выходами спутника Юпитера из тени будет больше  $\tau$ . Полная аналогия с эффектом Доплера!

И.Гольдфаин



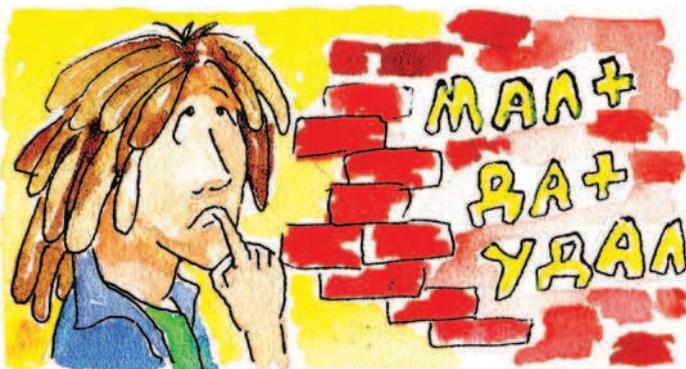
# Задачи

1. Решите ребус

$$\text{ДЕЦЛ} = \text{МАЛ} + \text{ДА} + \text{УДАЛ},$$

если ДЕЦЛ должен быть как можно меньше. (Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми – одинаковые.)

*М.Ахмеджанова*



2. Барон Мюнхгаузен говорит, что у него есть многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Написав его на бумажной ленте, барон сделал несколько разрезов между цифрами и получил на кусочках ленты числа 1, 2, ...,  $N$  (каждое – ровно по одному разу). Не хвастает ли барон?

*А.Шаповалов*



3. До повышения цен чай с двумя пряниками стоил 1 рубль. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов), рубля стало хватать только на чай с одним пряником. Потом цены опять выросли, причем на столько же процентов, как и в первый раз. Хватало ли после этого рубля хотя бы на чай?

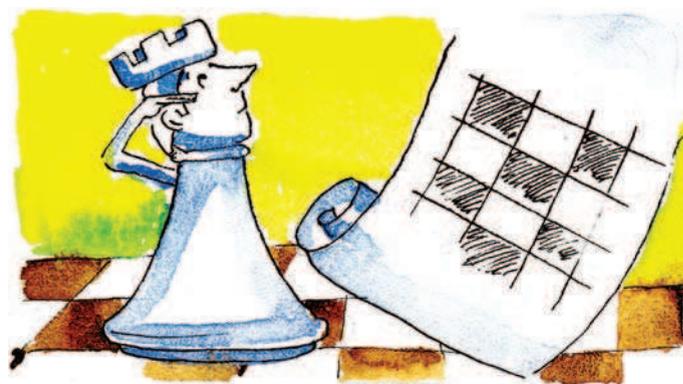
*И.Акулич*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



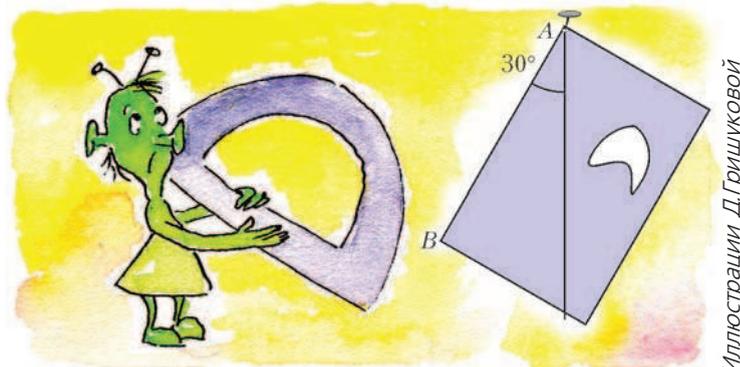
4. В углах шахматной доски стоят четыре ладьи. Ладья каждым своим ходом перемещается (по горизонтали или вертикали) до упора в другую ладью или в край доски. Соберите все ладьи в четырех центральных клетках.

*А.Шаповалов*



5. Если прямоугольник с вырезанным в нем отверстием неправильной формы подвесить за вершину  $A$ , сторона  $AB$  образует с вертикалью угол  $30^\circ$ , а если за вершину  $B$  – угол  $60^\circ$ . Какой угол с вертикалью образует сторона  $AB$ , если прямоугольник подвесить за середину этой стороны?

*Е.Соколов*



Иллюстрации Д.Гришковой

# Под данным углом

Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность (рис. 1). Ее центр совпадает с центром прямоугольника, а диаметр равен его диагонали. Зафиксировав одну из диагоналей, приходим к одной из самых простых и красивых теорем геометрии: длина медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, равна половине длины гипотенузы (рис. 2).

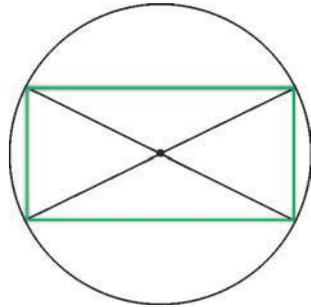


Рис. 1

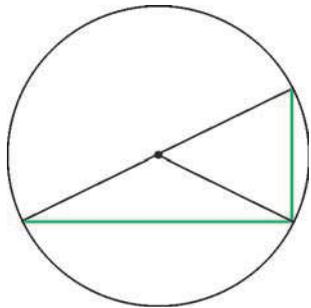


Рис. 2

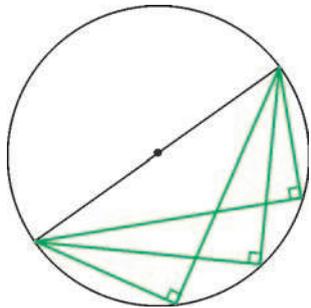


Рис. 3

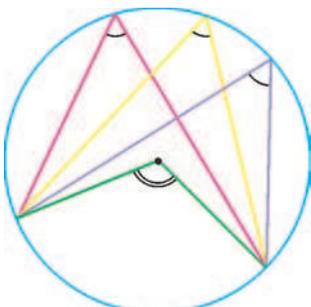


Рис. 4

Другими словами, данный отрезок виден под прямым углом из точек окружности, построенной на нем, как на диаметре (рис. 3).

Отрезок виден под острым углом из точек, лежащих вне круга, и под тупым углом – из точек, расположенных внутри круга.

Вот, например, из каких точек плоскости отрезок  $AC$  виден под углом  $30^\circ$ ? Теорема о вписанном угле (рис. 4) позволяет найти ответ – объединение двух дуг, которое похоже на уши Чебурашки (рис. 5).

Поставим тот же самый вопрос для точек пространства. Ответ следует из предыдущего: из данных точек  $A$  и  $C$  угол  $AXC$  равен  $30^\circ$  градусов в точности для точек  $X$  пространства, которые лежат на поверхности  $S$ , полученной вращением «ушей Чебурашки» вокруг оси  $AC$ . Это соображение позволяет решать весьма трудные задачи, вроде такой: «Дана пирамида  $ABCD$ , в которой

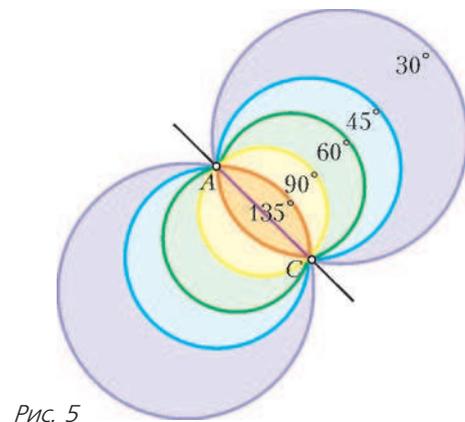


Рис. 5

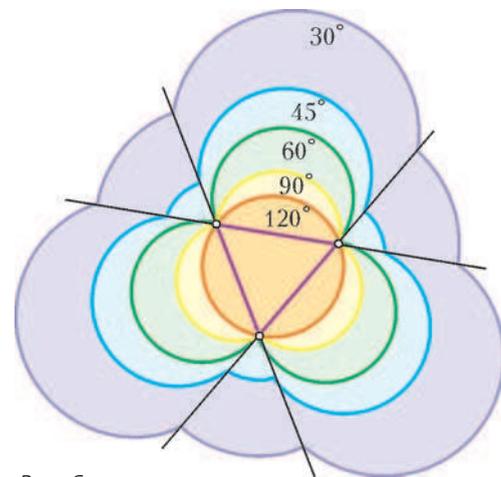


Рис. 6

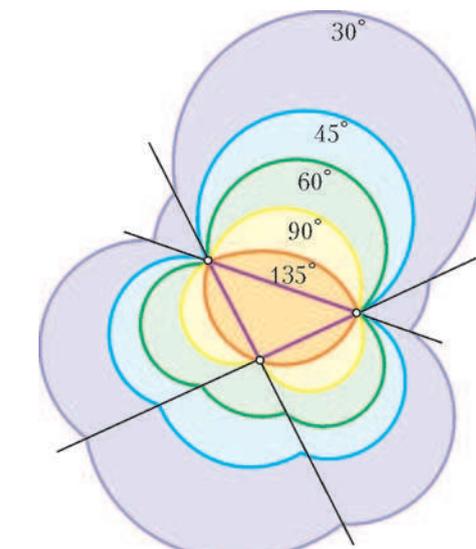


Рис. 7

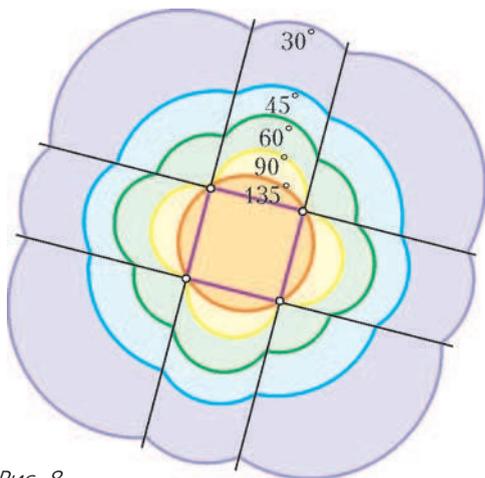


Рис. 8

ребро  $BD$  перпендикулярно грани  $ABC$ . Обязательно ли угол  $ABC$  больше угла  $ADC$ ?» На такой вопрос большинство людей, не задумываясь, ответят положительно, так как из наглядных соображений кажется, что проекция угла всегда имеет меру, большую меры исходного. Оказывается, это не так!

Вот идея решения. Среди точек плоскости, из которых отрезок  $AC$  виден под углом  $30^\circ$  градусов, найдется такая точка  $B$ , что угол  $CAB$  больше  $120^\circ$  (подумайте, почему). Перпендикуляр, восставленный из точки  $B$  к плоскости  $ABC$ , имеет с поверхностью  $S$  общие точки, помимо точки  $B$ . Обозначив одну из таких точек через  $D$ , получаем пример пирамиды  $ABCD$ , в которой ребро  $BD$  перпендикулярно грани  $ABC$ , а углы  $ABC$  и  $ADC$  оба равны по  $30^\circ$  градусов.

Но – вернемся на плоскость.

Как надо двигаться, чтобы некоторая данная фигура – не обязательно отрезок – была видна под данным углом? Для многоугольника ответ, в силу теоремы о вписанном угле, состоит из дуг окружностей: на рисунках 6–8 изображены ответы для равностороннего треугольника, прямоугольного равнобедренного треугольника и квадрата.

Из каких точек видна под прямым углом парабола, заданная уравнением  $y = ax^2$ ? Ответ весьма неожиданный (рис. 9): из точек горизонтальной прямой! Чтобы это доказать, рассмотрим произвольную точку  $P(m; n)$  плоскости. Всевозможные неперпендикулярные

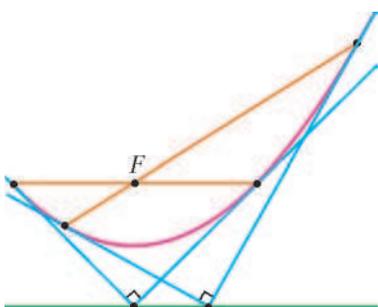


Рис. 9

прямые, проходящие через эту точку, задаются уравнениями вида

$$y = k(x - m) + n,$$

где  $k$  – угловой коэффициент. Чтобы такая прямая касалась параболы, уравнение

$$ax^2 = k(x - m) + n$$

должно иметь единственное решение. Записывая уравнение в виде

$$ax^2 - kx + (km - n) = 0$$

и вычисляя дискриминант

$$D = k^2 - 4a(km - n),$$

получаем уравнение

$$k^2 - 4akm + 4an = 0.$$

Чтобы парабола была видна из точки  $P(m; n)$  под прямым углом, полученное уравнение должно иметь два решения  $k_1$  и  $k_2$ , произведение которых равно  $-1$ . Поскольку в силу теоремы Виета произведение корней равно  $4an$ , приходим к равенству  $4an = -1$ , откуда  $n = -\frac{1}{4a}$ . Как видно, координата  $n$  фиксирована, а  $m$  может быть любым числом. Это как раз и означает, что все такие точки  $P$  расположены на горизонтальной прямой, пересекающей ось ординат в точке  $(0; -\frac{1}{4a})$ . Эта прямая называется директрисой параболы.

Можно доказать, что парабола – геометрическое место точек, равноудаленных от директрисы и фиксированной точки, не лежащей на директрисе (эта точка называется фокусом параболы). Из этого определения можно геометрически вывести, что из точек директрисы парабола видна под прямым углом, а кроме того, все отрезки, соединяющие точки касания сторон прямого угла с параболой, проходят через ее фокус (точка  $F$  на рисунке 9). Подробнее можно прочитать, например, в статье В.Болтянского «Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы» («Квант» № 12 за 1975 г.) или в книге А.Акопяна и А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» (М.: МЦНМО, 2007).

А из каких точек плоскости данная окружность видна под данным углом? Нетрудно понять, что ответом будет концентрическая ей окружность.

Красив ответ и для эллипса. Оказывается, эллипс, заданный уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , виден под прямым углом из точек окружности радиуса  $\sqrt{a^2 + b^2}$  с центром в начале координат (рис. 10). Геометрическое доказательство можно найти, например, в уже упомянутой книге, а пока попытайтесь придумать алгебраическое доказательство.

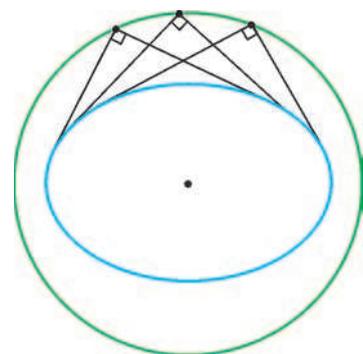


Рис. 10

А. Спивак

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

*Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.*

*Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.*

1. Шахматная фигура, которая умеет ходить и как ладья, и как конь, называется канцлером, а фигура, сочетающая возможности ферзя и коня, — магараджей. Расставьте на шахматной доске  $8 \times 8$  четыре канцлера и четыре магараджи так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую.

*А.Грибалко*

2. Числа  $A$  и  $B$  называются *дружественными*, если сумма всех делителей числа  $A$ , кроме самого  $A$ , равна  $B$ , а сумма всех делителей числа  $B$ , кроме самого  $B$ , равна  $A$ . (Например, 220 и 284 — дружественные.) Возьмем два дружественных числа  $A$  и  $B$ . Затем нашли сумму чисел, обратных к делителям числа  $A$ , вычли единицу и получили результат  $\alpha$ . Проделав то же самое для числа  $B$ , получили результат  $\beta$ . Чему равно произведение  $\alpha\beta$ ?

*Г.Гальперин*

3. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены автомобильной дорогой, и между любыми двумя городами есть авиационное сообщение. Известно, что из каждого города выходит нечетное число дорог. Путешественник хочет проехать по каждой дороге ровно один раз (в одном из двух направлений). Какое наименьшее число авиaperелетов ему для этого придется сделать?

*П.Кожевников*

4. Натуральное число  $a$  назовем *уютным*, если одно из чисел  $a - 1$  и  $a + 1$  простое, а другое — составное. Докажите, что уютных чисел бесконечно много.

*Д.Швецов*

5. В четырехугольнике  $ABCD$  диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BCD$ , при этом угол  $BCD$  равен  $120^\circ$  и угол  $BAD$  равен  $30^\circ$ . Докажите, что периметр треугольника  $BCD$  равен длине диагонали  $AC$ .

*В.Произволов*

## Об одной хорошо забытой старой задаче

**В.ДОЦЕНКО, К.ШРАМОВ**

*Ехали медведи  
На велосипеде,  
А за ними раки  
На хромой собаке,  
А за ними кот  
Задом наперед...*

*К.Чуковский*

### Введение

Весной 2005 года авторы этой статьи подбирали задачи для вступительных собеседований в 9 математический класс 57-й школы города Москвы. На одно из последних собеседований было решено выбрать несколько малоизвестных (хотя бы восьмиклассникам) довольно содержательных задач, решение каждой из которых было бы — по той или иной причине —

серьезным аргументом в пользу того, что решивший ее школьник сможет учиться в математическом классе. Вот условие одной из них:

*Расстояние между городами А и Б равно 30 км. Три туриста хотят добраться из города А в город Б. У них есть мотоцикл, на котором каждый из них может ехать со скоростью 60 км/ч, и велосипед, на котором каждый из них может перемещаться со скоростью 15 км/ч. Пешком каждый из них может перемещаться со скоростью 6 км/ч. Любое из средств передвижения можно оставить на дороге, чтобы кто-то из оставшихся туристов им воспользовался.*

*а) Докажите, что туристам не удастся организовать путешествие так, что прибывший последним затратит на путь менее 2,5 часов.*

б) Объясните, как туристам нужно действовать, чтобы прибывший последним затратил ровно 2,5 часа.

(Как обнаружилось впоследствии, эта задача была ранее на одной из Соросовских олимпиад, в которой авторы статьи участвовали, будучи школьниками, – и, судя по всему, она запомнилась им именно оттуда.)

Пункт а) этой задачи оказался довольно трудным. (Попробуйте решить его, не читая статью дальше – но помните, что требуется именно доказательство, а не только «интуитивно ясное» рассуждение! Заметим, что не очевидно, скажем, что все транспортные средства должны оказаться в городе  $B$  и что нет смысла ездить в обратном направлении.) В частности, решение, которое авторы имели в виду в момент составления варианта собеседования, было довольно неточным (как и решение, опубликованное в сборнике задач Соросовской олимпиады). Наоборот, пункт б) допускает много разных решений, в том числе и довольно «любовых». Мы предложили ее на Заочном конкурсе по математике для 6–8 классов осенью 2005 года, и ее решили 65 человек из 307 участвовавших.

Здесь мы хотим обсудить эту задачу и предложить читателям несколько смежных исследовательских вопросов.

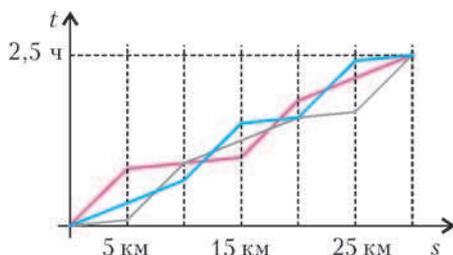
### Конструкция

Заметим, во-первых, что требуемую конструкцию довольно легко обнаружить совершенно «лобовым» способом. А именно, нужно назначить «схему движения» (сколько раз и в каком порядке происходят обмена транспортных средств), после чего составить систему уравнений и решить ее. (В действительности нужно еще проверить, что каждое транспортное средство будет оказываться в точках обмена не позже, чем должно покинуть эти точки.)

**Упражнение 1.** Проверьте, что следующая схема движения может быть реализована:

- первый турист едет  $x$  километров на мотоцикле, потом идет  $y$  километров пешком, а остаток пути до  $B$  едет велосипеде;
- второй турист едет  $x + y$  километров на велосипеде, оставляет его первому и идет остаток пути пешком;
- третий турист идет  $x$  километров пешком, а остаток пути едет на мотоцикле, оставленном первым.

Довольно изящную схему движения предложил один из участников Заочного конкурса по математике (Евгений Джигалов, Москва). А именно, оказывается, можно разбить отрезок  $AB$  на 6 частей и на каждой из этих частей назначить каждому из туристов одно из транспортных средств. Соответствующий график приведен на рисунке (красная, синяя и серая линии – «мировые линии» трех туристов).



### Оценка на время

Дальше мы используем простое, но очень важное соображение.

Рассмотрим какую-нибудь точку, в которой не происходило разворотов, пересадок и остановок. В каждый момент времени число проходов через эту точку пешком в направлении из  $A$  в  $B$  не меньше, чем разность числа людей между этой точкой и  $B$  и числа транспортных средств между этой точкой и  $B$ . (Не «равно», а именно «не меньше», так как кто-то мог уйти обратно.)

Это легко проверить, посмотрев, что происходит с течением времени с данными числами. Если человек пересекает эту точку пешком в сторону  $B$ , то число проходов увеличивается, и разность тоже. Если проезжает, то и число проходов, и разность сохраняются. Так что если бы не было идеи возвращаться, то число проходов и разность всегда менялись бы одинаково. Но если идти или ехать назад, то число проходов неизменно, а разность может уменьшиться (при возвращении пешком) или остаться прежней.

Проверим, что путешествие не могло длиться менее 2,5 часов. Пусть на все путешествие было затрачено время  $t$ , причем за время путешествия самой правой точкой, в которой побывал велосипед, была точка  $B$  на отрезке  $AB$ , а самой правой точкой, в которой побывал мотоцикл, – точка  $M$  на отрезке  $AB$  (мы не предполагаем заранее, что все транспортные средства в результате оказались в  $B$ , равно как не предполагаем и того, что во время путешествия никто не ехал и не шел назад). Тогда велосипед проехал не меньшее расстояние, чем  $AB$ , а мотоцикл – не меньшее, чем  $AM$ .

Докажем, что пешком всеми людьми в сумме было пройдено расстояние, не меньшее суммы отрезков  $AB$ ,  $BB$  и  $MB$ . Без ограничения общности точка  $B$  лежит между  $A$  и  $M$ . Тогда на отрезке  $MB$  ни одно транспортное средство не могло быть использовано, поэтому он пройден каждым человеком (хотя бы) один раз. На отрезке  $BM$  в распоряжении туристов есть только мотоцикл. Поэтому каждая «обычная» точка этого отрезка (в которой не происходит разворотов, пересадок и остановок) пройдена пешком как минимум два раза (через большое время между  $M$  и  $B$  находятся три человека и одно транспортное средство) – возможно, что одним и тем же человеком, но это неважно. Аналогично, каждая обычная точка отрезка  $AB$  хотя бы один раз пройдена пешком (через большое время между  $B$  и  $B$  три человека и два транспортных средства). Суммируя, получаем, что пешком пройдено не меньше, чем  $AB + 2BM + 3MB = AB + BB + MB$ . Отсюда

$$\begin{aligned} 3t &\geq \frac{AB}{15} + \frac{AM}{60} + \frac{AB + BB + MB}{6} = \\ &= \left(\frac{AB}{15} + \frac{BB}{6}\right) + \left(\frac{AM}{60} + \frac{MB}{6}\right) + \frac{AB}{6} \geq \\ &\geq \left(\frac{AB}{15} + \frac{BB}{15}\right) + \left(\frac{AM}{60} + \frac{MB}{60}\right) + \frac{AB}{6} = \\ &= AB \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{60}\right) = 7,5, \end{aligned}$$

и  $t \geq 2,5$ , что и требовалось.

Заметим, что из нашего решения следует, что для любого способа, при котором оценка в 2,5 часа достигается, все транспортные средства в результате оказались в городе  $B$ , и никто из туристов за время путешествия не шел и не ехал назад. Действительно, нужно, чтобы

- путь, пройденный велосипедом, был равен  $AB$  – т.е. велосипед не ехал назад (и аналогично для мотоцикла);

- суммарно пешком пройдено не меньше  $AB + BB + MB$  – т.е. никто не шел назад;

- $BB = MB = 0$  (поскольку, скажем, мы оценивали  $\frac{BB}{6}$  снизу как  $\frac{BB}{15}$ ) – т.е.  $B = B$  и  $M = B$ .

### Различные обобщения задачи

**Случай трех произвольных скоростей (оценка времени и ее достижимость).** Самое первое обобщение, которое приходит в голову, состоит в том, чтобы рассмотреть случай трех произвольных скоростей  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно пешехода, велосипеда и мотоцикла; сохраняя видимость здравого смысла, мы считаем, что  $a < b \leq c$ .

**Упражнение 2.** Докажите, что туристам не удастся организовать путешествие так, что прибывший последним затратит по времени меньше

$$\tau = \frac{AB}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Возникает вопрос, всегда ли полученная оценка достигается, – т.е. для любых ли скоростей можно подобрать схему движения, при которой время путешествия таково. Оказывается, что ответ здесь «нет». Поскольку, как мы видели выше, велосипед в результате оказался в городе  $B$ <sup>1</sup>, то он (а значит, и вся группа в целом) затратил на путешествие время, не меньшее

$\frac{AB}{b}$ , которое должно быть не больше  $\tau$ , откуда

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

<sup>1</sup> Обратите внимание, что здесь существенно строгое неравенство  $a < b$ .

С другой стороны, можно заметить, что для такого неравенства на скорости схема путешествия существует (например, годится схема Е.Джигалова, приведенная выше). Подумайте, чему равно минимальное время в остальных случаях.

**Случай  $n$  произвольных скоростей.** Пусть теперь есть  $n + 1$  туристов и  $n$  транспортных средств, – т.е. даны числа  $v_0 < v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ , каждый турист может перемещаться пешком со скоростью  $v_0$  и т.д.

**Упражнение 3.** Получите аналогичным образом оценку снизу

$$\tau = \frac{AB}{n+1} \left( \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} \right)$$

на минимальное время путешествия.

**Упражнение 4.** Проверьте, что для того, чтобы это время могло быть реализовано, необходимо, чтобы

$$\frac{1}{v_1} \leq \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} \right)$$

– т.е. вторая по величине скорость была не меньше среднего гармонического всех скоростей (или, что то же самое, что вторая по величине скорость не меньше среднего гармонического *всех остальных* – проверьте!).

Является ли это условие также и достаточным? Мы не знаем ответа на этот вопрос, хотя скорее всего это так и конструкция не очень сложна. Интересно было бы построить пример, аналогичный примеру Е.Джигалова в следующем точном смысле. Разобьем отрезок  $AB$  на  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  равных частей. Упорядочим некоторым способом все перестановки транспортных средств (включая ноги) – таких перестановок ровно  $n!$  – и назначим на  $k$ -м отрезке туристам транспортные средства в точности в соответствии с  $k$ -й перестановкой (назначим первому туристу транспортное средство, стоящее после перестановки на первом месте, второму – стоящее на втором месте, и т.д.).

**Задача\*.** Верно ли, что полученная нижняя оценка достигается? Если да, верно ли, что она достигается с помощью такой схемы? (Иными словами, можно ли так упорядочить перестановки, что эта схема позволяет достичь нижней оценки времени?)

## Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2008/09 учебного года

### Лучших результатов в конкурсе добились школьник

Дэниэл Линг, Беэр-Шева (Израиль), 8 кл.

### и кружок

лица 14, Тамбов, руководитель А.В.Бурмистрова.

### Жюри конкурса отмечает также хорошие работы школьника

Сидристого Данила, Магнитогорск, школа 5, 8 кл.

### и следующих кружков:

Центра дополнительного математического образова-

ния, Курган, руководители О.И.Южаков, Е.Г.Пушкарева,

лица 3, Чебоксары, руководители С.А.Иванов, А.В.Мо-

нов,

«Эрудит» при ФМШ 32, Астрахань, руководитель Т.М.Сергеева,

«Эврика», Харьков, руководители Е.Л.Аринкина,

А.Л.Бернштейн.

Победители конкурса награждаются DVD-дисками – электронным архивом журнала «Квант» с 1970 по 2008 год.

# Движения плоскости и теорема Шаля

**В. БУГАЕНКО**

**П**ОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ОДНИМ ИЗ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ ГЕОМЕТРИИ. Однако в школьной программе эту тему, по существу, обходят стороной, ограничиваясь лишь изучением частных случаев. Так, в курсе планиметрии рассматриваются только параллельный перенос, поворот (с частным случаем – центральной симметрией) и осевая симметрия. Очень естественный и важный вопрос «А какие вообще бывают движения плоскости?» в школьном учебнике, как правило, не поднимается. А между тем, ответ на этот вопрос оказывается неожиданно простым, и дает его теорема Шаля. Доказательство этой теоремы является главной целью настоящей статьи.

Важность теоремы Шаля еще и в том, что она дает мощный инструмент для решения задач. В подтверждение этих слов приведем три задачи с различных математических олимпиад. Советуем попытаться решить их самостоятельно. Это возможно сделать, опираясь лишь на сведения, почерпнутые из школьного учебника планиметрии, однако полученные решения всех трех задач будут достаточно непростыми. Если вам это удастся, значит, вы обладаете мастерством решения олимпиадных задач по геометрии. Если не получится – не отчаивайтесь. Вернитесь к этим задачам, когда дочитаете статью до последнего раздела. Вооруженные знанием теоремы Шаля, вы наверняка справитесь с ними. В конце статьи приведены решения этих задач.

**Задача 1** (XIX Турнир городов, весенний тур, 1998). *Внутренняя точка  $M$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  такова, что треугольники  $AMB$  и  $CMD$  – равнобедренные, и у каждого угол при вершине  $M$  равен  $120^\circ$ . Докажите, что найдется точка  $N$  такая, что треугольники  $BNC$  и  $DNA$  – равносторонние.*

**Задача 2** (XXIII Турнир городов, весенний тур, 2002). *На плоскости нарисованы два равных треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  так, что обход вершин одного треугольника происходит по часовой стрелке, а обход соответствующих им вершин другого треугольника происходит против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  лежат на одной прямой.*

**Задача 3** (Украинская республиканская олимпиада, 1977). *Дан треугольник  $ABC$ . Произвольная точка  $M$  плоскости отображается последовательно относительно прямых  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ . При этом она переходит в точку  $T(M)$ . Найдите множество таких точек  $M$ , чтобы расстояние между точками  $M$  и  $T(M)$  было минимальным.*

## Что такое движение?

**Определение.** Движением плоскости называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния.

На всякий случай напомним, что преобразованием плоскости (взаимно однозначным отображением плоскости на себя) называется любое правило, ставящее в соответствие каждой точке плоскости точку этой же плоскости (ее *образ*) так, что любая точка плоскости является образом одной и только одной точки (ее *прообраза*). Тем самым, чтобы выяснить, является ли преобразование плоскости движением, нужно проверить, что для любой пары точек расстояние между ними равно расстоянию между их образами. Используя физическую терминологию, будем говорить, что при движении каждая точка *переходит* в свой образ.

Заметим, что понятие движения в геометрии не совпадает с тем, что обычно называют движением физики. Для задания движения в физике существенна траектория каждой точки, а в геометрии важны лишь ее начальное и конечное положения.

## Начинаем классифицировать движения

Есть простой способ пополнять коллекцию движений. Если взять несколько движений и осуществить их последовательно одно за другим, то в результате получим еще одно движение, которое называется *композицией* исходных движений. Таким образом, на первый взгляд может создаться впечатление, что разнообразие движений плоскости необъятно. Ведь имея запас параллельных переносов, поворотов и осевых симметрий, можно строить различные их композиции любой длины! А кроме этого, можно предположить, что существуют движения, не представимые в виде композиций движений, известных из школьной программы. Оказывается, что это предположение неверно. Да и вообще, упомянутое впечатление обманчиво, поскольку часто различные композиции задают одно и то же движение. Это явление существенно сужает разнообразие всевозможных движений. Нашей ближайшей целью будет доказать, что любое движение может быть представлено в виде композиции уже знакомых нам движений, причем достаточно короткой.

Рассмотрим на плоскости два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Зададимся вопросом: существует ли движение, переводящее вершины первого треугольника в соответствующие вершины второго? Очевидным образом, из определения движения следует, что необходимым условием существования такого движения является равенство соответствующих сторон треугольников:  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  и  $AC = A_1C_1$ . Являются ли эти условия достаточными? Попытаемся найти движение, переводящее тройку вершин одного треугольника в соответствующую тройку вершин второго равному треугольника.

Будем делать это последовательно (рис. 1), совмещая точки по очереди. Сначала добьемся того, чтобы вершина  $A$  перешла в  $A_1$ . Это сделать просто, с помощью параллельного переноса на вектор  $\overrightarrow{AA_1}$ . Далее, используя поворот вокруг

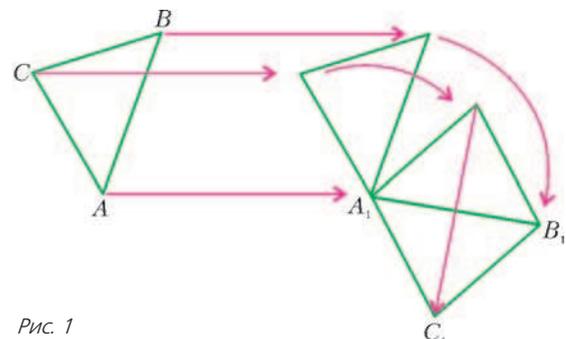


Рис. 1

точки  $A_1$ , можно добиться, чтобы и точка  $B$  перешла в  $B_1$ . Итак, точки  $A$  и  $B$  у нас уже попали на свое место. Где может при этом оказаться точка  $C$ ? Образ точки  $C$  должен находиться на заданных расстояниях (равных длинам отрезков  $AC$  и  $BC$  соответственно) от точек  $A_1$  и  $B_1$ . Таких точек всего две и расположены они симметрично относительно прямой  $A_1B_1$ . Одна из них обязана быть точкой  $C_1$ . Если образ точки  $C$  совпал с  $C_1$ , то искомое движение найдено. В противном случае (именно этот случай получился в примере на рисунке 1) нужно сделать еще один шаг – осевую симметрию относительно  $A_1B_1$ . Итак, искомое движение можно представить в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.

Пусть теперь мы уже имеем некоторое движение, переводящее первую тройку точек во вторую. Можно ли по этим данным найти образы остальных точек плоскости? Иными словами, единственно ли движение, задаваемое образами трех точек? Положительный ответ на этот вопрос почти очевиден. Наглядно это можно представить так, как будто мы треугольник, нарисованный на листе бумаги, накладываем на равный ему треугольник, нарисованный на другом листе бумаги. Очевидно, что достаточно проследить лишь за тем, чтобы вершины перешли в вершины – тогда каждая точка верхнего листа бумаги наложится на однозначно определенную точку нижнего, и никакой свободы уже не будет. Несмотря на убедительность этого наглядного рассуждения, тем не менее, проведем аккуратное доказательство.

В значительной степени нам придется повторить рассуждения, приводимые при доказательстве существования в начале данного раздела. Сначала воспользуемся тем, что точки  $A$  и  $B$  перешли в  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Где может оказаться образ точки  $C$ ? Он должен отстоять от  $A_1$  и  $B_1$  на расстояния  $AC$  и  $BC$  соответственно, а значит, должен находиться на пересечении двух соответствующих окружностей. Две окружности пересекаются не более чем в двух точках (а в данном случае – ровно в двух точках – подумайте, почему?). Таким образом, у нас есть две точки, претендующие на роль образа точки  $C$ . После того, как мы выберем один из этих двух вариантов, образ любой другой точки будет определяться однозначно, поскольку точка на плоскости однозначно определяется своими расстояниями до трех заданных точек, не лежащих на одной прямой. Действительно, три окружности, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются не более чем в одной точке (докажите это).

Итак, единственность движения, заданного образами трех не лежащих на одной прямой точек, доказана. Ранее мы нашли такое движение явно. Объединяя доказанные существование и единственность, получаем факт, вполне заслуживающий звания теоремы.

**Теорема 1.** Любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.

### Элементарные движения

В силу важности трех видов движений, упомянутых в теореме 1, будем называть их *элементарными*. С помощью операции композиции из элементарных движений мы можем получать любые.

Каждое элементарное движение (кроме тождественного движения, которое является одновременно параллельным переносом на нулевой вектор и поворотом на нулевой угол с любым центром) принадлежит только одному из трех типов.

Выясним, чем задается каждый из трех типов элементарных движений.

Параллельный перенос задается своим вектором. Разным векторам соответствуют разные параллельные переносы. Таким образом, соответствие между множеством параллельных переносов и множеством векторов является взаимно однозначным.

Осевая симметрия задается своей осью. Множество осевых симметрий находится во взаимно однозначном соответствии с множеством прямых на плоскости.

Поворот задается своим центром, величиной угла поворота и направлением. Мы исключим из рассмотрения направление поворота, вместо этого будем считать, что угол поворота может быть как положительным, так и отрицательным. Положительные углы означают поворот против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке. При этом повороты относительно одного и того же центра на углы, различающиеся на величину, кратную  $360^\circ$ , совпадают между собой. Например, повороты на  $-50^\circ$  и на  $310^\circ$  – это одно и то же. Таким образом, поворот задается парой (центр поворота, величина поворота). С учетом сделанной оговорки о возможности добавления к величине поворота кратных  $360^\circ$  и за исключением упомянутого выше случая тождественного преобразования разным парам соответствуют разные движения.

### Композиции движений

В отличие от элементарных движений самих по себе, композиция двух элементарных движений иногда может быть представлена в более простом виде и часто сводится к одному элементарному движению. Приведем несколько таких случаев, начиная от совсем очевидных и переходя потом к более сложным, в виде последовательности лемм. В простых случаях мы приведем наброски доказательства. В сложных случаях ограничимся набросками доказательств или даже только формулировками.

**Лемма 1.** Композиция двух параллельных переносов на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является параллельным переносом на вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Лемма 2.** Композиция двух поворотов с общим центром на углы  $\alpha$  и  $\beta$  является поворотом с тем же центром на угол  $\alpha + \beta$ .

**Лемма 3.** Композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей  $l_1$  и  $l_2$  является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от  $l_1$  к  $l_2$ , длина которого равна удвоенному расстоянию между осями.

**Набросок доказательства.** Возьмем произвольную точку  $M$  плоскости, найдем ее образ  $M_1$  и убедимся, что вектор  $\overline{MM_1}$  является тем самым вектором, который описан в формулировке леммы. Рисунок 2 является иллюстрацией к доказательству. Чтобы оно было полным, нужно рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения осей и точки  $M$ .

Можно избежать рассмотрения различных случаев при доказательстве этой леммы, если воспользоваться методом

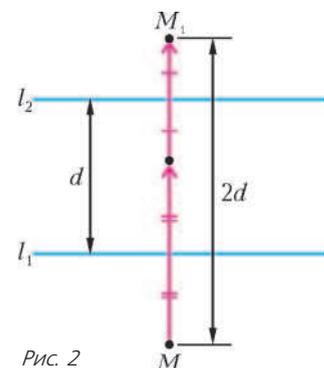


Рис. 2

координат. Удобно расположить ось абсцисс параллельно прямым  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда рассматриваемые оси симметрий будут задаваться уравнениями  $y = a$  и  $y = b$  соответственно. При отражении относительно этих осей абсциссы точек будут сохраняться, а ординаты меняться по правилам  $y \mapsto 2a - y$  и  $y \mapsto 2b - y$  соответственно. При композиции этих симметрий ординаты будут преобразовываться по правилу  $y \mapsto 2b - (2a - y) = y + 2(b - a)$ , а это и означает параллельный перенос на указанный вектор.

**Лемма 4.** *Композиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей  $l_1$  и  $l_2$  является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между осями. (Под углом между осями мы понимаем угол поворота относительно их точки пересечения, при котором ось  $l_1$  переходит в  $l_2$ .)*

**Доказательство.** Рассуждаем аналогично доказательству предыдущей леммы, иллюстрацией служит рисунок 3.

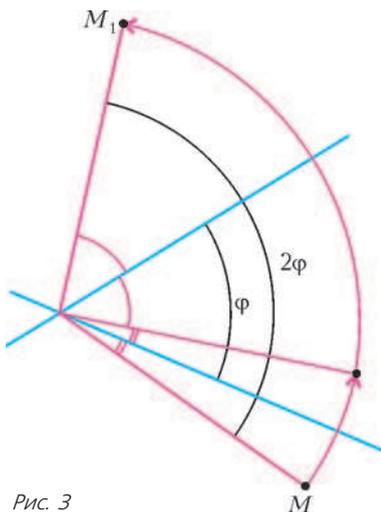


Рис. 3

В этом случае аналитическое доказательство, позволяющее избежать рассмотрения различных случаев, проводится с использованием полярной системы координат. Начало координат следует выбрать в точке пересечения рассматриваемых осей симметрий. Тогда полярный радиус при этих симметриях сохраняется, а полярный угол меняется по правилам  $\varphi \mapsto 2\alpha - \varphi$  и  $\varphi \mapsto 2\beta - \varphi$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, образованные прямыми  $l_1$  и  $l_2$  соответственно с полярной осью. При композиции полярный угол будет преобразовываться по правилу  $\varphi \mapsto 2\beta - (2\alpha - \varphi) = \varphi + 2(\beta - \alpha)$ , а это и означает поворот на угол  $2(\beta - \alpha)$ .

Сделаем очевидное замечание: композиция двух осевых симметрий с совпадающими осями является *тождественным преобразованием*, оставляющим все точки на месте. Однако же, несмотря на очевидность замечания, оно дает нам инструмент, которым мы будем пользоваться в дальнейшем — если в некоторой композиции нескольких движений идут подряд две осевые симметрии с одной и той же осью, то их можно сократить и получить более короткую композицию.

**Лемма 5.** *Композиция двух поворотов на углы  $\alpha$  и  $\beta$  с различными центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно является поворотом на угол  $\alpha + \beta$  (относительно некоторого третьего центра), если  $\alpha + \beta \neq 360^\circ \cdot k$ , и параллельным переносом в противном случае.*

**Доказательство.** Воспользуемся предыдущей леммой и представим каждый из двух данных поворотов в виде композиции двух осевых симметрий. Мы получим композицию четырех симметрий относительно прямых  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$ . Оси первых двух симметрий пересекаются в точке  $O_1$  под углом  $\alpha/2$ , а оси двух последних пересекаются в точке  $O_2$  под углом  $\beta/2$ . Заметим, что выбор пары осей в каждом из этих случаев неоднозначен. Воспользуемся предоставленной свободой для того, чтобы прямые  $l_2$  и  $l_3$  совпали. В качестве такой общей прямой нужно выбрать прямую  $O_1O_2$ , соединя-

ющую центры поворотов. В этом случае прямые  $l_1$  и  $l_4$  находятся однозначно (рис.4). В силу сделанного выше замечания, у нас остается композиция всего двух симметрий относительно прямых  $l_1$  и  $l_4$ . Если эти прямые пересекаются

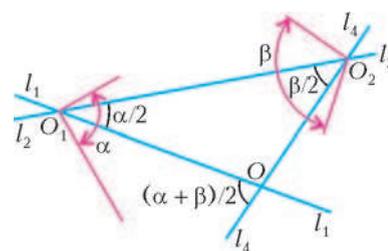


Рис. 4

в некоторой точке  $O$ , то угол между ними составляет  $(\alpha + \beta)/2$  (это следует из теоремы о величине внешнего угла треугольника, примененной к треугольнику  $OO_1O_2$ ). Согласно предыдущему утверждению, это и означает, что искомая симметрия является поворотом с центром  $O$  на угол  $\alpha + \beta$ . Если эти прямые параллельны (в этом случае углы  $\alpha/2$  и  $\beta/2$  смежные, а значит, их сумма равна  $180^\circ$ ), то рассматриваемое движение — параллельный перенос.

**Лемма 6.** *Композиция параллельного переноса на вектор  $\vec{a}$  и поворота с центром в точке  $O$  на ненулевой угол  $\alpha$  является поворотом на тот же угол  $\alpha$  (с другим центром, если вектор  $\vec{a}$  ненулевой).*

**Доказательство.** Аналогично предыдущему доказательству, воспользовавшись леммами 3 и 4, представим каждое из двух составляющих композицию движений в виде композиции двух симметрий так, чтобы вторая симметрия из первой пары совпала с первой симметрией из второй пары. Для этого общей осью этих двух симметрий нужно взять прямую, проходящую через точку  $O$  и перпендикулярную вектору  $\vec{a}$  (рис. 5). И в этом случае рассматриваемое движение есть композиция двух симметрий с пересекающимися (под углом  $\alpha/2$ ) осями, а значит, является поворотом на угол  $\alpha$ .

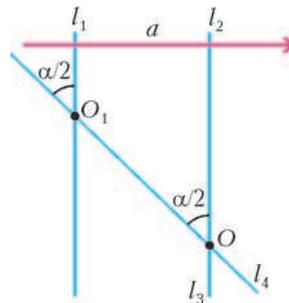


Рис. 5

**Лемма 7.** *Композиция параллельного переноса на вектор  $\vec{a}$  и осевой симметрии относительно оси  $l$ , перпендикулярной вектору  $\vec{a}$ , является осевой симметрией с осью, параллельной  $l$ .*

**Доказательство.** И в этот раз, воспользовавшись леммой 3, представим параллельный перенос в виде композиции двух симметрий с параллельными осями, вторая из которых совпадает с  $l$  (рис.6).

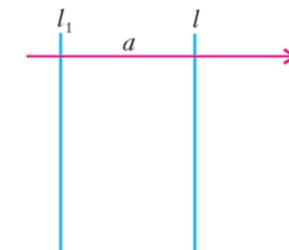


Рис. 6

В полученной композиции трех симметрий две последние сокращаются.

### Ориентация

Мы уже упоминали о разнице в понятиях движения в геометрии и в физике. Речь шла о том, что одно и то же движение с точки зрения геометрии может представляться как физическое движение различными способами. Однако

есть еще одно отличие между этими понятиями. Некоторые движения, например осевую симметрию, нельзя реализовать в виде непрерывного (физического) движения, не выходящего за пределы плоскости (также как в пространстве нельзя совместить несимметричную фигуру с ее зеркальным изображением, например, правую руку с левой). Поэтому с точки зрения физики такие преобразования движения не являются. В геометрии же они считаются движениями и про такие движения говорят, что они меняют ориентацию. Придадим понятию ориентации большую строгость.

Будем называть треугольник *ориентированным*, если в нем задан некоторый порядок обхода его вершин. Треугольники  $ABC$  и  $ACB$  – это один и тот же треугольник, однако если их рассматривать как ориентированные треугольники, то они различны. Если обход вершин ориентированного треугольника происходит против часовой стрелки, то он называется *положительно ориентированным*, а если по часовой стрелке, то – *отрицательно ориентированным*.

### Два вида движений плоскости

Заметим, что параллельный перенос и поворот сохраняют ориентацию (переводят любой треугольник в треугольник той же ориентации), а осевая симметрия меняет ориентацию (переводит любой треугольник в треугольник противоположной ориентации). Значит, любая композиция элементарных преобразований либо сохраняет, либо меняет ориентацию всех треугольников в зависимости от того, четное или нечетное количество осевых симметрий в нее входит. Поскольку любое движение представляется в виде композиции элементарных движений, оно либо сохраняет ориентацию всех треугольников, либо меняет ориентацию всех треугольников (движение не может сохранять ориентацию у одних треугольников и менять у других). Движения, сохраняющие ориентацию, будем называть *собственными*, а меняющие ориентацию – *несобственными*. (Иногда эти два вида движений называют *движениями первого и второго рода* соответственно.)

При доказательстве теоремы 1 мы попутно доказали, что движение однозначно задается образами трех точек, не лежащих на одной прямой, и даже «почти» задается образами двух точек. Слово «почти» в данном случае означает, что хотя мы и не сможем однозначно восстановить движение, зная образы всего двух точек, но выбирать придется всего из двух вариантов. Если мы рассмотрим композицию одного из этих двух движений и осевой симметрии относительно прямой, соединяющей известные нам образы двух точек, то получим второе такое движение. Значит, эти два движения разного вида: одно из них собственное, а второе – несобственное.

Для удобства будем говорить не о паре точек, а о направленном отрезке<sup>1</sup> с концами в них. Итак, мы доказали теорему.

**Теорема 2.** *Существуют единственное собственное и единственное несобственное движения, переводящие данный направленный отрезок в равный ему данный направленный отрезок.*

<sup>1</sup> Не путайте понятия направленного отрезка и вектора, несмотря на то, что в физике эти понятия часто отождествляются. Отрезок называется направленным, если указано, какой из его концов первый, а какой второй. В параллелограмме  $ABCD$  векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  совпадают, хотя направленные отрезки  $AB$  и  $DC$  различны.

### Формулировка и доказательство теоремы Шаля

Теперь, с помощью теоремы 2, мы можем несколько усилить теорему 1, слегка модернизировав ее доказательство. Для этого выясним, какими композициями элементарных движений можно перевести направленный отрезок  $AB$  в равный ему направленный отрезок  $A_1B_1$ . Сначала можно совместить точку  $A$  с  $A_1$  с помощью параллельного переноса. Затем у нас есть две возможности перевести конец получившегося отрезка в  $B_1$ : либо с помощью поворота, либо с помощью осевой симметрии (рис.7). В первом случае полу-

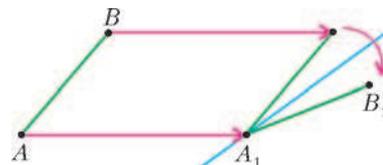


Рис. 7

чается собственное движение, а во втором – несобственное. Поскольку, согласно теореме 2, в каждом из этих двух случаев такое движение единственно, приходим к выводу, что любое собственное движение является композицией параллельного переноса и поворота, а несобственное – композицией параллельного переноса и осевой симметрии. Иными словами, по сравнению с теоремой 1 для случая несобственного движения, удалось обойтись более короткой композицией – без поворота. Однако же это еще не конец – любое движение плоскости можно свести к еще более простому виду.

В случае собственного движения – композиции переноса и поворота, – если поворот происходит на ненулевой угол, воспользуемся леммой 6 и получим, что рассматриваемое движение является поворотом. Если же поворот в композиции происходит на нулевой угол, то движение является параллельным переносом. В результате мы получаем совсем простое описание собственных движений.

**Теорема 3.** *Любое собственное движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом.*

Перейдем теперь к случаю несобственных движений. Попытаемся привести композицию параллельного переноса и осевой симметрии к более простому виду. Для этого разложим параллельный перенос на два: параллельно и перпендикулярно оси симметрии. Композицию параллельного переноса на вектор, перпендикулярный оси, и симметрии относительно оси заменим по лемме 7 на симметрию относительно другой оси, параллельной исходной. Остается композиция параллельного переноса в направлении, параллельном оси, и симметрии относительно этой оси. Такое движение называется *скользящей симметрией*. Подведем итог.

**Теорема 4.** *Любое несобственное движение плоскости является скользящей симметрией.*

Объединение теорем 3 и 4 и называется *теоремой Шаля*. Мы получили простую классификацию движений плоскости.

### Коммутирующие движения

Под конец сделаем еще одно замечание. При рассмотрении композиций движений существует порядок, в котором они производятся. При изменении порядка, вообще говоря, получается другое движение. Иными словами, операция композиции на множестве движений плоскости некоммутативна. Иногда встречаются пары коммутирующих движений. Такими, очевидно, являются пары движений

из леммы 1 (параллельные переносы) и из леммы 2 (повороты с общим центром). А во всех композициях из лемм 3–7 порядок существен – рассматриваемые в них пары движений не коммутируют. Еще один пример коммутирующих движений – это осевая симметрия и параллельный перенос на вектор, параллельный оси симметрии. Поэтому при определении скользящей симметрии неважно, в каком порядке делать составляющие ее элементарные движения.

### Решения задач

**Решение задачи 1.** Из условия следует, что при повороте на угол  $120^\circ$  относительно точки  $M$  вершина  $A$  переходит в  $B$ , а  $C$  в  $D$ . Значит, при этом повороте направленный отрезок  $AC$  переходит в направленный отрезок  $BD$ , поэтому их длины равны, а угол между ними равен  $120^\circ$ . Значит, угол между направленными отрезками  $AC$  и  $DB$  равен  $60^\circ$ . Рассмотрим собственное движение, переводящее направленный отрезок  $AC$  в  $DB$ . По теореме Шаля, он является поворотом, а величина угла поворота должна быть равна углу между этими направленными отрезками, т.е.  $60^\circ$ . Центр этого поворота и будет искомой точкой  $N$ .

**Решение задачи 2.** Рассмотрим движение, переводящее треугольник  $A_1B_1C_1$  в  $A_2B_2C_2$ . Поскольку эти треугольники различно ориентированы, рассматриваемое движение несобственное, а значит, является скользящей симметрией. Очевидно, что середина отрезка, соединяющая любую точку с ее образом при скользящей симметрии, лежит на оси этой симметрии.

**Решение задачи 3.** Движение, описанное в задаче, является композицией трех осевых симметрий, а следовательно, несобственным движением плоскости. По теореме Шаля это скользящая симметрия. Очевидно, что при скользящей симметрии точки, сдвигающиеся на минимальное расстояние, это в точности точки оси. Действительно, все они сдвигаются на один и тот же вектор, параллельный оси симметрии, в то время как другие точки сдвигаются кроме этого еще и в направлении, перпендикулярном оси.

Осталось найти ось этой симметрии. Для этого достаточно найти две точки на ней. Воспользуемся фактом, который уже помог нам при решении предыдущей задачи: середина отрезка, соединяющего точку с ее образом при скользящей симметрии, лежит на оси этой симметрии. Поэтому, чтобы найти ось, достаточно найти середины двух отрезков, соединяющих точки с их образами. Поиск можно сильно упростить, если удачно выбрать две точки, образ которых при рассматриваемой композиции легко найти. В качестве первой точки выберем вершину  $A$  треугольника. При первых двух симметриях она останется на месте, а при третьей отразится относительно стороны  $BC$ . Искомой серединой будет основание высоты, опущенной из вершины  $A$ . В качестве второй точки возьмем точку, симметричную точке  $C$  относительно стороны  $AB$ . При первой симметрии она перейдет в  $C$ , а при двух следующих останется на месте. Значит, вторая искомая точка – основание высоты, опущенной из точки  $C$ .

**Ответ:** искомым множеством точек будет прямая, проходящая через основания высот, опущенных из вершин  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ .

Случай, когда эти основания высот совпадают (а это происходит, если треугольник  $ABC$  прямоугольный с прямым углом  $B$ ), следует разобрать отдельно. Оставляем это читателям в качестве упражнения.

### Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1 (для тех, кто знаком с понятием группы). Докажите, что множество движений образует группу относительно операции композиции. Образует ли группу множество собственных движений? А множество несобственных движений?

2. Докажите (без использования теоремы Шаля), что любое движение можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.

3. Получите другое доказательство теоремы Шаля с помощью задачи 2.

4. Скользящая симметрия задается парой (ось симметрии, вектор переноса). Докажите, что скользящие симметрии, задаваемые разными парами, различны.

5. Завершите решение задачи 3, рассмотрев случай прямоугольного треугольника с прямым углом  $B$ .

6. Образами скольких точек задается движение пространства?

7. Попробуйте дать определения ориентации, а также собственного и несобственного движений в пространстве. Образами скольких точек задается собственное движение пространства?

8. Какое движение является композицией двух центральных симметрий с различными центрами?

9. Пусть  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Докажите, что композиция трех поворотов на углы  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  относительно точек  $A, B, C$  соответственно является тождественным преобразованием тогда и только тогда, когда углы треугольника  $ABC$  равны  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  соответственно. (Повороты осуществляются против часовой стрелки, а треугольник  $ABC$  отрицательно ориентирован.)

10. На плоскости нарисован многоугольник с нечетным числом сторон. Точку  $M$  отражают последовательно относительно середин последовательных сторон многоугольника, в результате чего получается точка  $M_1$ . Докажите, что середина отрезка  $MM_1$  является вершиной многоугольника.

11. На плоскости был нарисован многоугольник с нечетным количеством сторон. Затем в нем отметили середины сторон, а сам многоугольник стерли. Восстановите многоугольник по отмеченным точкам с помощью циркуля и линейки.

12. Дан треугольник  $ABC$ . Постройте точки  $K, L$  и  $M$  так, чтобы треугольники  $AKM, BLK$  и  $CLM$  были равносторонними.

13. Дан произвольный треугольник. На двух его сторонах наружу построены равносторонние треугольники. Пусть  $M$  и  $N$  – вершины этих треугольников, не совпадающие с вершинами исходного. На третьей стороне также построили равносторонний треугольник, но теперь – во внутреннюю сторону. Пусть  $O$  – его центр. Найдите углы треугольника  $MNO$ .

14. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

15. На сторонах произвольного четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что у четырехугольника с вершинами в центрах этих квадратов диагонали перпендикулярны и равны.

# Загадочные круги и движения плоскости

**С. ДОРИЧЕНКО, С. ШАШКОВ, А. ШЕНЬ**

ОБ ЭТОМ ЛЮБОПИТНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НАМ РАССКАЗАЛ Жак Мазойе, профессор Высшей нормальной школы в Лионе (Франция). Сделайте две копии рисунка 1 (случайно расположенные черные пятнышки) на тонкой бумаге, лучше с увеличением. Наложите их друг на друга, глядя на просвет (можно приложить к окну). Если совместить точно – получится исходная картинка. Но если немного

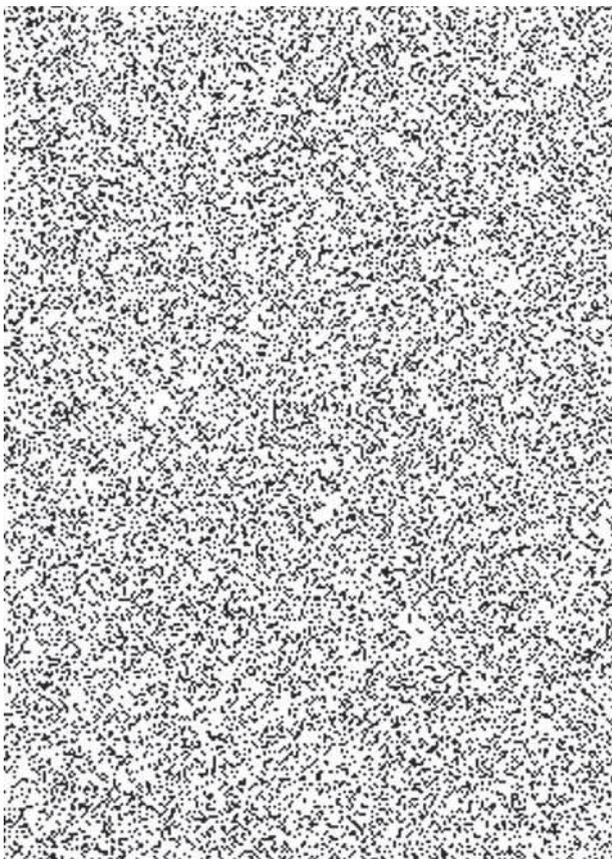


Рис. 1

повернуть один лист относительно другого, картинка изменится (рис. 2).

Еще проще это увидеть, если одну из картинок напечатать на прозрачной пленке и накладывать на вторую.

На рисунке 2 явно видны окружности. Откуда они возникают, если изначально ничего похожего не было?

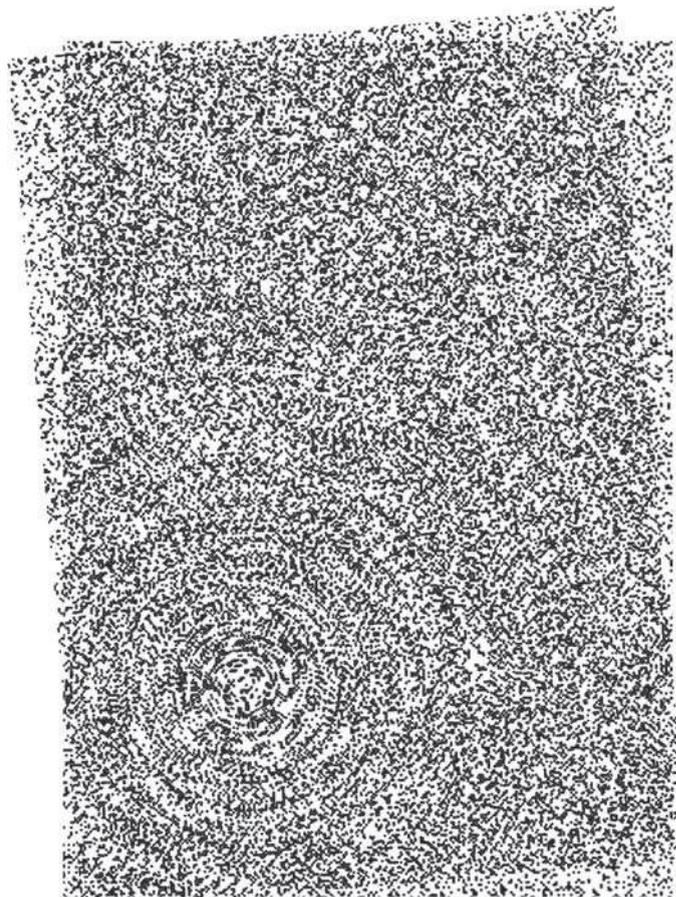


Рис. 2

Одно из возможных объяснений такое. Вторая картинка слегка повернута относительно первой. Около центра поворота разница невелика, и картинки практически совпадают (этот участок хорошо виден). Чуть дальше от центра пятнышки уже не совпадают, но накладываются друг на друга, образуя маленькие «дуги» (как показано на рисунке 3). Эти «дуги» и являются частями окружностей, которые мы видим.

По этой теории, окружности должны быть видны на таком расстоянии от центра, где пятнышки еще накладываются. Можно оценить это расстояние как  $d/\alpha$ , где  $d$  – размер одного пятнышка, а  $\alpha$  – угол поворота в радианах.

Когда пятнышки разъезжаются дальше, окружности постепенно должны перестать быть заметны. Однако мы видим окружности и существенно большего радиуса. Почему? Возможно, черные пятнышки, случайно разбросанные по листу, образуют иногда пятна большего размера, поворот которых мы и замечаем. Или мы по инерции видим окружности там, где их уже нет. (В самом деле, если закрыть нижнюю половину рисунка 2, разглядеть окружности в верхней половине будет труднее.)

Но продолжим наши эксперименты. Сдвинем немного одну картинку относительно другой в какую-нибудь сторону. Как ни удивительно, окружности снова будут видны, хотя их центр сдвинется (причем в другую сторону). Что же это значит?

Рис. 3

Так проявляется замечательное свойство движений плоскости: *сделав последовательно поворот и сдвиг, мы в итоге снова получим поворот*. Другими словами, когда мы сначала повернули одну картинку, а затем сдвинули ее относительно другой, полученный результат точно такой же, как если бы мы просто повернули первую картинку вокруг другой точки.

Одно из доказательств этого факта можно прочесть, например, в статье С.Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год. Кстати, можно заметить, что

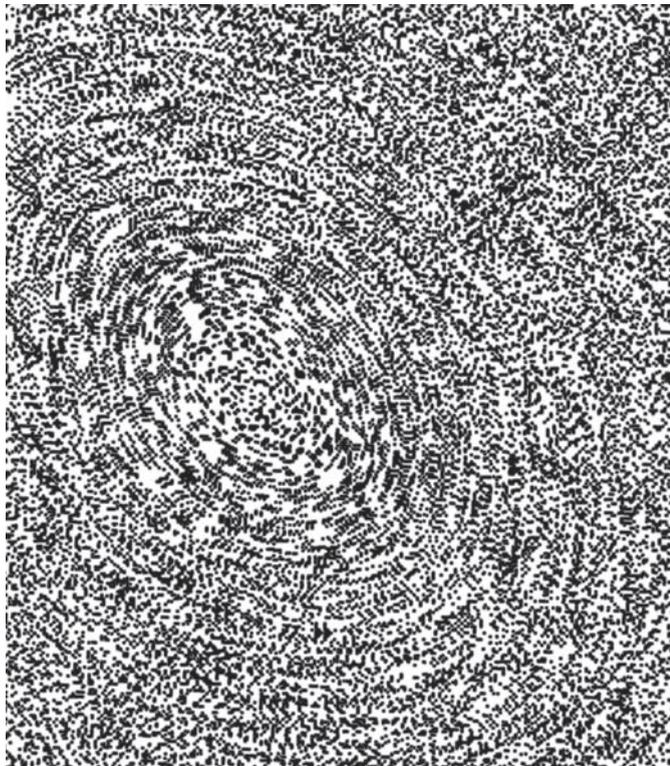


Рис. 4

центр окружностей смещается примерно перпендикулярно направлению сдвига: это уже следствие того, что у нас малый угол поворота. Формула, приведенная в конце раздела «Задача о неподвижной точке и преобразования плоскости» упомянутой статьи, позволяет это понять.

Другое доказательство имеется в статье В.Бугаенко «Теорема Шаля и движения плоскости» в этом номере журнала.

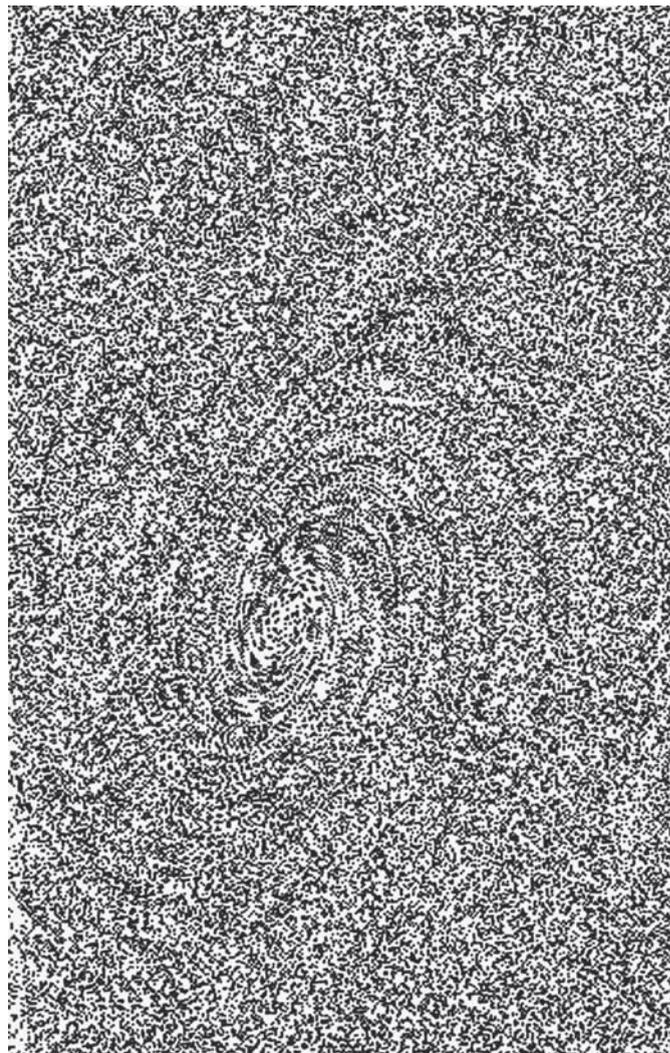


Рис. 5

Там рассказано о классификации движений плоскости и о решении задач с помощью теоремы Шаля.

Если вы умеете работать с рисунками на компьютере, эксперимент можно провести и без бумаги. При этом можно сделать и более сложные вещи – попробуйте разобраться, например, как получились рисунки 4 и 5 (где видны эллипсы и спирали).

## Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?

(Начало см. на с. 7)

Идеальная нанотрубка не имеет никаких дефектов и представляет собой *одну* молекулу, в которой атомы углерода связаны между собой довольно прочными ковалентными связями. Сталь – это поликристалл, содержащий множество внутренних дефектов, таких как границы и микротрещины. При растяжении образца из стали один из таких дефектов превращается в трещину, и образец разрушается. Наличие множества дефектов у металлического образца объясняет пластичность металла. В то же время, нанотрубка не обладает пластичностью.

Очевидно, что если одну одностенную нанотрубку вложить в другую несколько большего диаметра, то прочность такой двухстенной нанотрубки будет почти в два раза больше, чем у одностенной. Поэтому у многостенных нанотрубок прочность в несколько раз выше.

У конструкций из нанотрубок большое будущее. Их уже сейчас используют на практике, например для укрепления теннисных ракеток. В планах – делать из нанотрубок тросы для космических лифтов, чтобы снабжать всем необходимым космические станции на геостационарных орбитах.

К.Богданов

# ОПЫТЫ С КОМПАКТ-ДИСКОМ

Н. РОСТОВЦЕВ, А. СЕДОВ

ПРИ ВЗГЛЯДЕ НА КОМПАКТ-ДИСК (ИЛИ НА DVD-ДИСК), освещенный солнечным или электрическим светом, обращают на себя внимание красивые, окрашенные в радужные цвета секторы на его поверхности. Какова природа их возникновения?

**Немного теории.** Для того чтобы ответить на этот вопрос, познакомимся вначале с отражательными дифракционными решетками, которые применяются для точного измерения длин волн спектральных линий. Изготавливают такие решетки путем нанесения равноотстоящих рисок на поверхность хорошо отражающей металлической пленки, покрывающей стеклянную пластину. На рисунке 1 изображен участок такой решетки и профиль ее сечения перпендикулярно рискам. Видно, что между соседними рисками находятся полосы недеформированного металла – на нижнем рисунке им соответствуют выступы. Расстояние  $d$  между двумя соседними зеркальными полосками называют постоянной решетки.

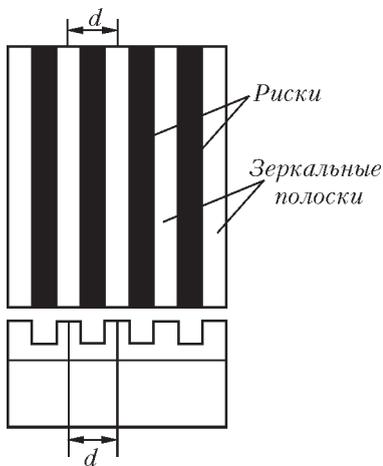


Рис. 1

Пусть на решетку под углом  $i$  падает параллельный пучок лучей. Тогда, согласно принципу Гюйгенса, от каждой точки каждого выступа распространяются вторичные волны. Причем лучи от каждого выступа идут не только под углом  $i' = i$ , как это следует из законов геометрической оптики, но и по всем другим направлениям. Говорят, что лучи дифрагируют (от лат. *diffRACTUS* – разломанный). Установим на пути вторичных волн, дифрагирующих под некоторым углом  $\varphi$ , собирающую линзу. Она соберет их в главном фокусе, где при наложении волн будут интерферировать. Результат интерференции зависит от разности хода волн  $\Delta$ , идущих от двух соседних выступов. Найдем ее.

Допустим, что на решетку под углом  $i$  падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$ . Выберем падающие лучи 1 и 2 и соответствующие им дифрагирующие под углом  $\varphi$  лучи 1' и 2' (рис.2). Из точки B проведем отрезок  $BC \perp AC$ , а из точки A – отрезок  $AD \perp BD$ . Ход лучей 1 и 2 до  $AD$  и ход лучей 1' и 2' от  $BC$  до встречи в фокальной плоскости собирающей линзы одинаковы, следовательно, разность хода интерферирующих волн равна  $\Delta = AC - BD$ . Из треугольников  $ACB$  и  $ADB$  получаем  $AC = d \sin \varphi$  и  $BD = d \sin i$ ,

откуда

$$\Delta = d (\sin \varphi - \sin i).$$

При интерференции максимум интенсивности света (максимум освещенности) наблюдается в том случае, если разность

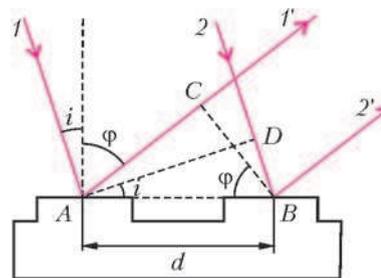


Рис. 2

хода кратна длине волны:

$$\Delta = k\lambda, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Из соотношений для  $\Delta$  получаем, что максимум освещенности участка решетки в окрестности выступов A и B наблюдается, когда

$$d (\sin \varphi - \sin i) = k\lambda. \quad (1)$$

Если угол падения  $i = 0$ , т.е. свет падает по нормали к решетке, то условие максимума принимает вид

$$d \sin \varphi = k\lambda. \quad (2)$$

Посмотрите теперь на рисунок 3, на котором приведено увеличенное изображение участка поверхности компакт-

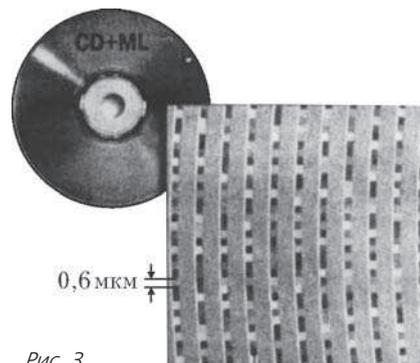


Рис. 3

диска. Информация на нем записана точками и черточками. Видно, что между строками информации, как и в отражательной решетке, находятся равноотстоящие полосы недеформированной пленки металла. Следовательно, при освещении диска максимально освещенными будут те участки, для которых выполняется условие максимума (1).

Попробуем объяснить и возникновение цветных секторов на поверхности компакт-диска. Рассмотрим ход лучей от точечного источника света S в глаз наблюдателя (рис.4). Источник освещает диск белым светом с длинами волн от  $\lambda = 0,4$  мкм (фиолетовый свет) до  $\lambda = 0,76$  мкм (красный свет). Волны дифрагируют от участков A и B диска, рассеянного вертикальной плоскостью вдоль его радиуса. Оптическая система глаза сводит лучи на сетчатке, где они интерферируют. Из рисунка 4 видно, что при перемещении от участка A к участку B угол дифракции  $\varphi$  уменьшается, а угол падения  $i$  растет. Следовательно, разность хода волн  $\Delta$  убывает. Если, например, разность хода волн 1 и 2, попада-

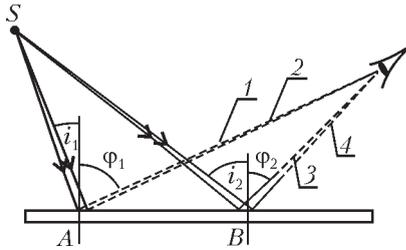


Рис. 4

ющих в глаз от участка A, равна  $\Delta = 0,76$  мкм, а разность хода волн 3 и 4, пришедших в глаз от участка B, составляет  $\Delta = 0,4$  мкм, то участок диска A будет казаться красным, а участок B – фиолетовым. Между участками A и B диск будет окрашен в другие цвета радуги.

А теперь – собственно опыты.

**Определение расстояния между строками записанной информации.** Схема установки для проведения измерений приведена на рисунке 5, где 1 – гелий-неоновый лазер или лазерная указка, 2 – миллиметровая линейка, в середине которой просверлено отверстие диаметром 2 мм, 3 – компакт-диск.

Линейку и диск устанавливают перпендикулярно лучу так, чтобы он проходил через отверстие в линейке и попадал на диск у его края. При правильной установке на линейке появляются 5 красных пятнышек – 5 дифракционных максимумов: центральный нулевой максимум и по два боковых максимума по обе стороны от него. (Если взять DVD-диск, то максимумов будет 3.) Небольшим поворотом и нажимом диска добиваются такого положения, при котором центральный максимум попадает в отверстие линейки, в этом случае угол падения  $i = 0$ . Из соотношения (2) получаем, что искомое расстояние между строками записи информации равно

Рис. 5

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi}.$$

Из рисунка 5 находим

$$\sin \varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}}.$$

Тогда окончательно

$$d = \frac{k\lambda\sqrt{l^2 + L^2}}{l},$$

причем для спектра первого порядка  $k = 1$ , для спектра второго порядка  $k = 2$ .

**Определение границ видимого солнечного спектра.** Для проведения этого опыта на лист плотного картона наклеивают лист клетчатой или миллиметровой бумаги. Шилом или толстой иглой прокалывают отверстие диаметром 1–2 мм. Картон с отверстием и диск зажимают между краями книги и ее картонными обложками (рис.6). Для опыта достаточно взять книгу толщиной 40–50 мм. Вместо книги можно воспользоваться деревянным бруском такой же или большей толщины.

В солнечный день эту установку располагают так, чтобы луч, проходящий через отверстие в картоне, попадал на край диска. Тогда на клетчатой бумаге возникает белый кружок –

спектр нулевого порядка, а по обе стороны от него появляются радужные полосы – спектры первого порядка. Небольшим поворотом и наклоном книги добиваются такого положения, когда спектр нулевого порядка совпадает с отверстием. Замечают расстояния от отверстия до фиолетового края спектра  $l_{\text{ф}}$  и до красного края спектра  $l_{\text{кр}}$ . При рассмотренном расположении  $i = 0$  и  $k = 1$ . Поэтому, согласно выражению (2) и рисунку 6,

$$\lambda = d \sin \varphi = d \frac{l}{\sqrt{l^2 + L^2}},$$

где  $d$  – постоянная решетки (в современных компакт-дисках  $d \approx 1,6$  мкм, в DVD-дисках  $d \approx 0,8$  мкм),  $l$  – расстояние от отверстия до края спектра первого порядка,  $L$  – толщина книги или бруска.

**Наблюдение линейчатых спектров ртути и обращенной линии натрия.** Для наблюдения линейчатых спектров проще всего воспользоваться излучением дуговых ртутных ламп, применяемых для освещения улиц и площадей. В колбе такой лампы находится или капля ртути (лампа «холодного» света), или капля раствора натрия в ртути (лампа «теплого» света). При дуговом разряде в колбе лампы капля превращается в пары Hg и Na, атомы которых излучают свет, имеющий линейчатый спектр.

Расположив диск перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежат лампа и глаз, и приложив верхний край диска к щеке, чуть ниже глаза, вращают диск вокруг его горизонтального диаметра и находят зеркальное изображение лампы. При дальнейшем повороте диска по часовой стрелке появляется сначала линейчатый спектр первого порядка в виде черточек – спектральных линий – различного цвета, а затем – и спектр второго порядка.

Спектр ртутно-натриевой лампы обладает удивительной особенностью, на которую нельзя не обратить внимание. Кроме указанных цветных спектральных линий, принадлежащих атомам ртути, в желтой части спектра наблюдается также черная линия. Она находится как раз в том месте, где должна быть желтая линия натрия, поэтому ее называют обращенной линией натрия. Причина ее возникновения такова. Понятно, что температура паров Na в центральной части колбы значительно выше температуры слоя, прилегающего к стенкам колбы. Вследствие этого при прохождении излучения от центральных слоев через «холодный» пристенный слой желтый свет с длиной волны  $\lambda_0 = 0,589$  мкм хорошо поглощается, а свет с длинами волн больше или меньше  $\lambda_0$  поглощения не испытывает. Таким образом, линия с длиной волны  $\lambda_0$  кажется черной по контрасту с соседними участками спектра.

Такова же причина возникновения и темных линий Фраунгофера в спектре Солнца. Они возникают при прохождении света от фотосферы с температурой  $T \approx 6000$  К через атмосферу Солнца с гораздо меньшей температурой.

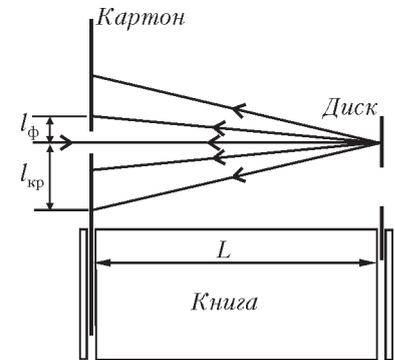


Рис. 6

# Модуль суммы и сумма модулей

А.ЕГОРОВ

ЧИТАТЕЛИ «КВАНТА» НАВЕРНЯКА ВСТРЕЧАЛИСЬ С ПОЧТИ очевидным и очень важным неравенством:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1)$$

справедливым при любых действительных  $a$  и  $b$ . О его следствиях, применениях и обобщениях мы и поговорим.

Доказать неравенство (1) можно, рассматривая различные комбинации знаков чисел  $a$  и  $b$ . Мы поступим иначе.

Запишем равносильное неравенство  $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ . Раскрывая скобки и выполняя необходимые упрощения, приходим к неравенству  $ab \leq |a| \cdot |b|$ . Последнее неравенство очевидно, ибо  $|x| \geq x$  при любом значении  $x$ .

Очевидно, что равенство в неравенстве (1) достигается, если и только если  $ab \geq 0$ . Иногда, допуская некоторую вольность речи, говорят, что  $a$  и  $b$  имеют одинаковые знаки.

Если числа  $a$  и  $b$  имеют разные знаки, то при  $ab < 0$  имеет место строгое неравенство  $|a + b| < |a| + |b|$ .

Будущим студентам полезно знать, что неравенство (1) станет одним из основных при изучении курса математического анализа.

## Некоторые следствия

Заменив в неравенстве (1)  $b$  на  $-b$ , получаем неравенство

$$|a - b| \leq |a| + |b|. \quad (1')$$

Равенство в последнем неравенстве достигается при  $ab \leq 0$ .

Справедливы также неравенства

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a + b|, \quad (2)$$

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|. \quad (2')$$

**Упражнение 1.** Докажите неравенства (2) и (2') и выясните, при каких  $a$  и  $b$  они обращаются в равенства.

Неравенство (1) по индукции обобщается на любое количество слагаемых:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad (3)$$

при любых действительных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , и равенство достигается лишь тогда, когда  $a_i a_j \geq 0$  при  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Упражнение 2.** Докажите неравенство (3).

Теперь посмотрим, как «работают» доказанные неравенства.

## Несколько задач

Начнем с задачи, в решении которой используется метод доказательств неравенства (1).

**Задача 1** (XV Московская математическая олимпиада). Докажите, что

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| < 1$$

при любых действительных  $x$  и  $y$  таких, что  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ .

**Решение.** Запишем равносильное неравенство  $|x - y| < |1 - xy|$  и возведем его в квадрат:  $(x - y)^2 < (1 - xy)^2$ . Раскрывая скобки, получим после простых преобразований

неравенство  $(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$ , очевидно справедливое при имеющихся ограничениях на  $x$  и  $y$ .

Попутно заметим, что неравенство из условия задачи 1 справедливо и для любых  $x, y$ , для которых  $|x| > 1$  и  $|y| > 1$ .

**Упражнение 3.** Что можно сказать о действительных числах  $x$  и  $y$ , если известно, что  $|x + y| > |1 + xy|$ ?

**Задача 2** (LIX Московская математическая олимпиада). Действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют условиям

$$|x| \leq |y - z|, |y| \leq |z - x|, |z| \leq |x - y|. \quad (*)$$

Докажите, что одно из чисел  $x, y, z$  равно сумме двух остальных.

**Решение.** Если хотя бы в одном из неравенств выполняется равенство, т.е., например,  $|x| = |y - z|$ , то либо  $y = x + z$ , либо  $z = x + y$ .

Предположим теперь, что все неравенства (\*) строгие. Тогда  $x^2 < (y - z)^2$ ,  $y^2 < (z - x)^2$ ,  $z^2 < (x - y)^2$ , или

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) < 0, \\ (y - z + x)(y + z - x) < 0, \\ (z - x + y)(z + x - y) < 0, \end{cases} \quad (**)$$

т.е. левые части неравенств (\*\*) отрицательные. Однако, перемножив их, получим

$$(x + y - z)^2 (x + z - y)^2 (y + z - x)^2.$$

Это число положительно. Поэтому система (\*\*) несовместна, так как произведение трех отрицательных чисел обязано быть отрицательным.

Следующая задача предлагалась на LVIII Московской математической олимпиаде.

**Задача 3.** Докажите, что

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|.$$

**Решение.** Из неравенства (1) следует, что

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq |x + y - z + x + z - y| = 2|x|.$$

Аналогично,

$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|, \quad |x + z - y| + |y + z - x| \geq 2|z|.$$

Складываем полученные неравенства, и задача решена.

**Упражнение 4.** При каких  $x, y$  и  $z$  неравенство задачи 3 обращается в равенство?

**Задача 4.** Даны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Известно, что сумма любых двух из этих чисел по модулю не больше двух. Докажите, что  $|a_1 + \dots + a_n| \leq n$ .

**Решение.** Запишем модуль удвоенной суммы данных чисел и воспользуемся неравенством (3):

$$\begin{aligned} |2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_n| &= \\ &= |a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n + a_1| \leq \\ &\leq |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \dots + |a_n + a_1| \leq 2n, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение задачи.

Решим еще задачу, предлагавшуюся десятиклассникам в 1974 году на Всесоюзной математической олимпиаде.

**Задача 5.** При каких действительных  $a, b, c$  равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

верно для любых действительных  $x, y, z$ ?

**Решение.** Подставляя в условие  $x = y = z = 1$ , затем  $x = y = 0, z = 1$ , и  $x = 1, y = -1, z = 0$ , получим систему  $|a + b + c| = 1$ ,  $|a| + |b| + |c| = 1$ ,  $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2$ . Из первых двух равенств следует, что  $ab \geq 0$ ,  $bc \geq 0$ ,  $ac \geq 0$ .

Теперь запишем неравенства

$$|a - b| \leq |a| + |b|, |b - c| \leq |b| + |c|, |c - a| \leq |a| + |c|.$$

Сложив их, получаем

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2(|a| + |b| + |c|) = 2.$$

Равенство в последнем неравенстве возможно лишь тогда, когда во всех трех предыдущих неравенствах – тоже равенства, что возможно лишь при  $ab \leq 0, bc \leq 0, ac \leq 0$ . Из ранее сказанного следует, что  $ab = bc = ac = 0$ , так что два из чисел  $a, b, c$  заведомо равны 0. Подстановка в первое равенство дает, что третье число равно по модулю 1.

Ответ: два из чисел  $a, b, c$  – нули, а третье  $\pm 1$ .

Следующая задача взята из «Задачника «Кванта».

**Задача 6 (M722).** В точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , расположенных на окружности, расставляются в некотором порядке числа  $1, 2, \dots, n$ . Какое наименьшее значение может иметь сумма  $n$  модулей разностей соседних чисел?

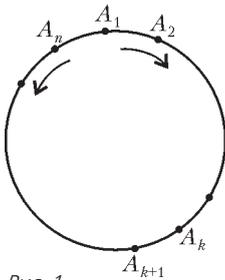


Рис. 1

**Решение.** Пусть число 1 находится в точке  $A_1$ , а число  $n$  – в точке  $A_k$  (рис. 1). Пусть также на дуге  $A_1A_k$  против часовой стрелки стоят числа  $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ , а на дуге  $A_1A_k$  по часовой стрелке – числа  $b_1, b_2, \dots, b_{k-2}$ .

Сумма модулей попарных разностей соседних чисел равна

$$|b_1 - 1| + |b_2 - b_1| + \dots + |b_{k-2} - n| + |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \dots + |a_{n-k} - n| \geq |b_1 - 1 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots$$

$$\dots + b_{k-2} - n + a_1 - 1 + a_2 - a_1 + \dots + a_{n-k} - n| = 2(n - 1).$$

Итак, сумма модулей попарных разностей не меньше  $2n - 2$ .

Осталось заметить, что если на каждой из дуг переставить числа  $b_1, \dots, b_{k-2}$  и  $a_1, \dots, a_{n-k}$  в порядке возрастания (при движении в соответствующем направлении), то полученная сумма будет в точности равна  $2n - 2$ .

**Упражнение 5.** Сколько существует способов расстановки чисел  $1, 2, \dots, n$  в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , для которых сумма модулей попарных разностей равна  $2n - 2$ ?

### Векторы и комплексные числа

Неравенство (1) справедливо и для векторов на плоскости или в пространстве. Докажем это. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – два ненулевых вектора. Отложим их от некоторой точки  $O$ .

Если векторы не коллинеарны (рис.2,а), их сумма изображается диагональю параллелограмма, и тогда в силу неравенства треугольника  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ .

Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны и одинаково направлены (рис.2,б), то  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ , а если их направления противоположны (рис.2,в), то  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ .

Таким образом, для векторов неравенство (1) справедливо и обращается в равенство лишь тогда, когда один из них равен нулю либо когда они одинаково направлены.

Для комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$  неравенство (1) также справедливо, ибо комплексные числа можно отождествить с векторами на плоскости. Из неравенства

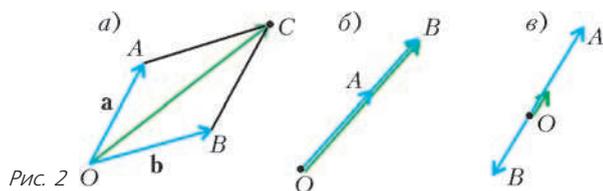


Рис. 2

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  следует такое неравенство для любых действительных чисел  $a, b, c$  и  $d$ :

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Осталось заметить, что неравенства (1'), (2), (2') и (3) справедливы и для векторов, и для комплексных чисел.

**Упражнение 6.** Убедитесь в этом.

При этом из неравенства (3) для комплексных чисел  $z_1 = a_1 + ib_1, \dots, z_n = a_n + ib_n$  следует неравенство

$$\sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

для любых действительных  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ .

**Упражнение 7.** Остается ли справедливым неравенство задачи 1 при комплексных  $x$  и  $y$ ?

**Задача 7.** Из точки  $O$  плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов так, что длина их суммы больше 1.

**Решение.** Введем такую прямоугольную систему координат  $xOy$ , что ни один из данных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  не лежит на осях координат (рис.3). При этом векторы разобьются на 4 группы – в каждом квадранте координатной плоскости – своя группа.

По условию  $\sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| = 4$ . Пусть  $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i)$ . Тогда  $|\mathbf{a}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ . В силу выбора системы координат  $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} < |x_i| + |y_i|$  (докажите это неравенство!). Поэтому  $4 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| < \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$ . Отсюда

следует, что сумма длин проекций векторов на один из лучей, лежащих на координатных осях, больше 1. Но тогда и длина суммы векторов, лежащих в соответствующей полуплоскости, будет больше 1, поскольку при этом сумма проекций векторов на соответствующий луч равна проекции их суммы. Следовательно, модуль суммы этих векторов больше 1.

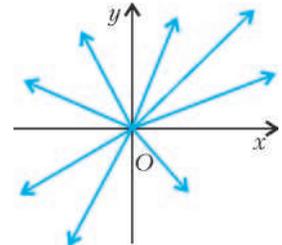


Рис. 3

### Еще одно неравенство

Участникам X Всесоюзной математической олимпиады была предложена замечательная задача.

**Задача 8.** На плоскости даны векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ , сумма которых равна  $\mathbf{0}$ . Докажите неравенство

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|. \quad (4)$$

Прежде чем доказывать это неравенство, сделаем несколько замечаний.

Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – произвольные векторы на плоскости. Подставляя в (4)  $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ , получаем для векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  неравенство

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{c} + \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|. \quad (4')$$

Сначала мы докажем неравенство (4'), а следовательно и (4), для чисел.

**Задача 9.** Докажите, что неравенство

$$|a + b| + |b + c| + |c + a| \leq |a| + |b| + |c| + |a + b + c|$$

справедливо для любых действительных  $a, b$  и  $c$ .

**Решение.** Неравенство очевидно, если все числа  $a, b, c$

неотрицательны (неположительны), а также если одно из них равно 0 (неравенство тогда обращается в равенство).

Если для тройки  $a, b, c$  неравенство выполняется, то оно справедливо и для тройки  $-a, -b, -c$ . Поэтому будем считать, что  $a > 0, b > 0, c < 0$ . Поделим левую и правую части на  $a$  и выполним замену  $x = \frac{b}{a} > 0, y = \frac{c}{a} < 0$ .

Задача теперь сводится к доказательству неравенства

$$|1+x| + |x+y| + |1+y| \leq 1 + |x| + |y| + |1+x+y|$$

при  $x > 0, y < 0$ , т.е. неравенства

$$|x+y| + |1+y| \leq |y| + |1+x+y|, \text{ где } x > 0, y < 0.$$

При  $y \geq -1$  получаем после упрощений неравенство  $|x+y| \leq x - y = |x| + |y|$ , а это – неравенство (1).

Если  $y < -1$ , приходим к неравенству  $|1+x+y| \geq |x+y| - 1$  справедливому в силу неравенства (2).

Тем самым неравенство (4') доказано.

На доказанное нами неравенство (4) для действительных чисел опирается эффективное и основанное на глубоких идеях доказательство неравенства (4) для векторов на плоскости и в пространстве. Оно изложено в статье Ю.Ионина и А.Плоткина «Среднее значение функции» (см. «Квант» №7 за 1977 г., с. 26).

Теперь решим задачу 8. Она оказалась одной из самых трудных задач X Всесоюзной математической олимпиады. Дело в том, что для векторов нет процедуры «снятия» знаков модуля, которой мы пользовались, решая задачу 9. Значит, нужно искать геометрическое решение.

**Решение задачи 8.** Прежде всего заметим, что неравенство (4) симметрично, т.е. сохраняется при любых перестановках векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ . Это следует из вида неравенства и того, что  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ . Поэтому достаточно доказать его для любой четверки векторов, полученной перестановкой из данной. Кроме того, неравенство (4) очевидно, если сумма каких-то двух из векторов равна 0. Итак, в дальнейшем считаем, что ни один из векторов и ни одна из сумм двух из них не равны 0.

Последовательно откладывая векторы  $\overline{AB} = \mathbf{a}, \overline{BC} = \mathbf{b}, \overline{CD} = \mathbf{c}, \overline{DA} = \mathbf{d}$  (рис.4), получим по правилу сложения векторов замкнутую ломаную линию  $ABCD$  ( $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ).

Если эта ломаная окажется самопересекающейся, все сравнительно просто. В самом деле, по неравенству треугольника,  $AC \leq AE + EC, BD \leq BE + ED$ . Значит,  $AC + BD \leq AE + ED + BE + EC = AB + DC$ . Далее:  $\overline{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \overline{DB} = \mathbf{d} + \mathbf{a}$ , т.е.  $CA = |\mathbf{c} + \mathbf{d}|, BD = |\mathbf{a} + \mathbf{d}|, AB = |\mathbf{a}|, CD = |\mathbf{c}|$ . Поэтому  $|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|$ . Кроме того,  $|\mathbf{b} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{b}| + |\mathbf{d}|$ . Складывая последние два неравенства, окончательно получаем требуемое:  $|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}|$ .

Теперь докажем, что данные векторы можно переставить так, что получится самопересекающаяся ломаная (прежде чем читать дальше, подумайте, как это сделать).

Итак, пусть сначала четырехугольник  $ABCD$  – невыпуклый или «вырождающийся» (рис.5,а,б). Отложим от точки  $D$  вектор  $\overline{DA'} = \mathbf{a}$ . Луч  $DA'$  пересечет отрезок  $BC$  (почему?),  $\overline{A'B} = \mathbf{d}$ , а ломаная  $A'BCDA'$  станет самопересекающейся.

Если же  $ABCD$  выпуклый (рис.6), отложим от точки  $C$  вектор  $\overline{CD'} = \mathbf{d}$ . Тогда  $\overline{D'A} = \mathbf{c}$ , и четырехугольник  $ABCD'$

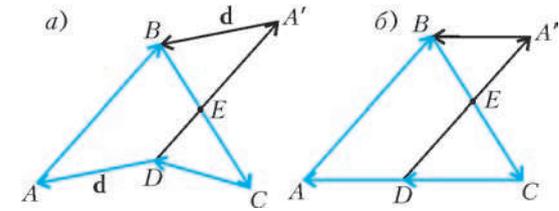


Рис. 5

окажется либо невыпуклым, либо самопересекающимся, т.е. все сведется к одному из двух уже рассмотренных случаев. Тем самым неравенство (4) доказано.

В трехмерном случае утверждение задачи 8 также справедливо, но приведенное доказательство уже не проходит. (Было бы интересно найти элементарное доказательство, поскольку доказательство Ю.Ионина и А.Плоткина неэлементарно.)

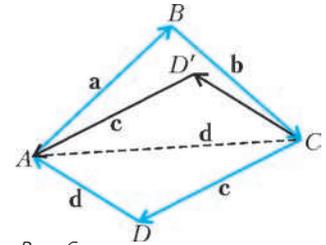


Рис. 6

**Упражнения**

В заключение предлагаем вам решить несколько задач. Некоторые из них могут показаться далекими от темы статьи. Однако такое впечатление обманчиво.

Начнем с конкурсных и близких к ним по содержанию задач. Задачи 8 б, в, 9, 11 в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в МГУ.

**8.** Решите уравнения

- а)  $|x^2 - 3x + 1| + |2x^2 - x - 1| = |3x^2 - 4x|$ ;
- б)  $|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 100| + |x + 100| = 200x$ ;
- в)  $|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x$  при  $x \in (0; \pi)$ .

**9.** Решите неравенства

- а)  $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|$ ; б)  $|\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x$ ;
- в)  $|2 \sin x + 2 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}| \leq 2$ .

**10.** Найдите наименьшее значение функции

- а)  $y = |x - 3| + |x| + |x + 3| + |x + 5|$ ;
- б)  $y = |x^2 + 3x + 1| + |x^2 - 1| + |3x - 2|$ .

При каких значениях  $x$  достигаются наименьшие значения?

**11.** При каких  $x$  и  $y$  выражение  $|2x - y - 1| + |x + y| + |y|$  достигает наименьшего значения? Чему равно это значение?

И, наконец, еще несколько неконкурсных задач.

**12.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – произвольная перестановка чисел 1, 2, ...,  $n$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|.$$

**13.** Докажите, что если  $a$  – корень многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , где  $a_n \neq 0$ , то  $|a| < 1 + \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|a_j|}{|a_n|}$ .

**14.** Докажите неравенство

$$\frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|c|} + \frac{|c|}{1+|a|} \geq \frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|},$$

где  $a, b, c$  – произвольные действительные числа. Попробуйте обобщить это неравенство на большее количество чисел (возможны различные обобщения!).

**15.** По окружности расставлены  $n$  гирек с различными массами, а на дугах между каждыми двумя соседними гирьками помещается шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек (из большей массы вычитается меньшая). Можно ли разложить шарики на две чашки весов так, чтобы наступило равновесие?

## XXX Турнир городов

## Задачи весеннего тура

## БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

## 8–9 классы

1 (3)<sup>1</sup>. В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что прямая пересекает четное число диагоналей.

*Г.Гальперин*

2 (4). См. задачу M2131 «Задачника «Кванта».

3 (4). Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.)

*В.Замятин*

4 (4). Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%?

*А.Шаповалов*

5 (5). В ромбе  $ABCD$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . На сторонах  $BC$  и  $CD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что угол  $NAM$  равен  $30^\circ$ . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $NAM$ , лежит на диагонали ромба.

*Р.Женодаров*

## 10–11 классы

1 (3). См. задачу M2131 «Задачника «Кванта».

2 (4). См. задачу M2132 «Задачника «Кванта».

3. Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $O(n)$  его наибольший нечетный делитель. Даны произвольные натуральные числа  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$ . Построим бесконечную последовательность натуральных чисел по правилу:  $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ , где  $n = 3, 4, \dots$

а) (2) Докажите, что, начиная с некоторого места, все числа в последовательности будут равны одному и тому же числу.

б) (2) Как найти это число, зная числа  $a$  и  $b$ ?

*Г.Гальперин*

4 (4). В ряд выписаны несколько нулей и единиц. Рассмотрим пары цифр в этом ряду (не только соседних), где левая цифра равна 1, а правая 0. Пусть среди этих пар ровно  $M$  таких, что между единицей и нулем этой пары стоит четное число цифр (возможно, ни одной), и ровно  $N$  таких, что между единицей и нулем этой пары стоит нечетное число цифр. Докажите, что  $M \geq N$ .

*В.Ясинский*

5 (4). Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку  $X$ . Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему  $X$  с точкой пересече-

<sup>1</sup> Здесь и далее в скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

ния медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

*С.Маркелов*

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ<sup>2</sup>

## 8–9 классы

1 (3). Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа:  $1/2009$  и  $1/2008$ . На каждом ходу Вася называет любое число  $x$ , а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на  $x$ . Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?

*Д.Баранов*

2. а) (2) Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую – в отношении  $1 : 2$ .

б) (3) Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством?

*С.Маркелов*

3 (5). В каждой клетке квадрата  $101 \times 101$ , кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Шахматная фигура «машина» может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машина попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на  $90^\circ$  в любую сторону по своему выбору. Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли так расставить знаки, чтобы машина не могла попасть в дом?

*А.Чеботарёв*

4 (5). Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел. Известно, что каждый член этой последовательности (кроме первого) – либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое двух соседних с ним членов. Обязательно ли все члены этой последовательности, начиная с некоторого, – только средние арифметические либо только средние геометрические своих соседей?

*А.Переpečко*

5 (6). См. задачу M2133 «Задачника «Кванта».

6 (7). Угол  $B$  при вершине равнобедренного треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$  (рис.1) Из вершины  $B$  выпустили внутрь треугольника два луча под углом  $60^\circ$  друг к другу, которые, отразившись от основания  $AC$  (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали на боковые стороны. В резуль-

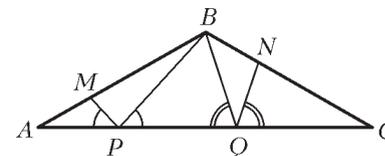


Рис. 1

<sup>2</sup> В Турнире городов сложный вариант весеннего тура назначается на тот же день, когда проходит Московская математическая олимпиада, поэтому в Москве весенний тур турнира (сложный вариант) не проводится. Такая система сложилась потому, что сам Турнир городов замыслился как распространение Московской математической олимпиады по другим городам. Поскольку оба соревнования проходят в один день, жюри имеют возможность использовать некоторые задачи и для турнира, и для олимпиады.

тате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне  $AC$ . Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних треугольников.

*В.Произволов*

7 (9). См. задачу M2136 «Задачника «Кванта».

### 10–11 классы

1 (4). Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник?

*М.Мурашкин*

2 (4). См. задачу 4 для 8–9 классов.

3 (6). На каждой клетке доски  $10 \times 10$  стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями?

*М.Мурашкин*

4 (6). См. задачу M2134 «Задачника «Кванта».

5 (8). См. задачу M2136 «Задачника «Кванта».

6 (9). Дано целое число  $n > 1$ . Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый – красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по  $n$  точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше – тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков – ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл противник?

*А.Шаповалов*

7 (9). См. задачу M2138 «Задачника «Кванта».

### УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На доске написаны числа  $1, 2, \dots, 100$ . Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

*И.Богданов*

2. Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав

свой путь на клетке  $d4$  (рис. 2). Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку  $a1$  она попала с клетки  $a2$ , на клетку  $a8$  она попала с клетки  $a7$  и на клетку  $h8$  она попала с клетки  $h7$ . С какой клетки она попала на клетку  $h1$ ? (Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

*А.Толтыго*

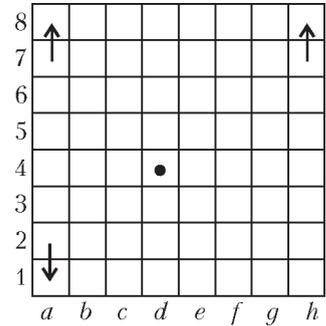


Рис. 2

3. Даны  $n$  цветов с номерами от 1 до  $n$ . Для каждого  $k$  от 1 до  $n$  пусть  $f_k(n)$  обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до  $n$  в первые  $k$  цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что

$$|f_1(n) - f_2(n) + f_3(n) - f_4(n) + f_5(n) - f_6(n) + \dots| = 1.$$

(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например,  $f_1(2) = 1$  и  $f_2(2) = 2$ .)

*М.Берштейн, Г.Мерзон*

4. Сфера касается всех ребер тетраэдра  $ABCD$ , кроме ребра  $CD$ . Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра  $AB$ .

*В.Произволов*

5. Дан многочлен  $P(x)$  с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального  $n$  найдется такое натуральное  $k$ , что  $P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{k}$ . Докажите, что найдутся такие числа  $c$  и  $m$ , что  $P(x) = cx^m$ .

*С.Спиридонов*

6. Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда  $1 \times 1 \times 2$  м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость  $1$  м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

*А.Шаповалов*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

# Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады

1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырехзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова? (6)

*И.Раскина*

*В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

2. Разрежьте фигуру на рисунке 1 на 8 одинаковых частей. (6)

*Фольклор*

3. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кле-

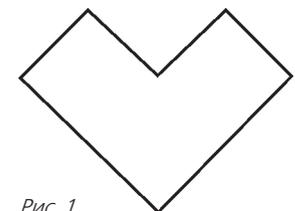


Рис. 1

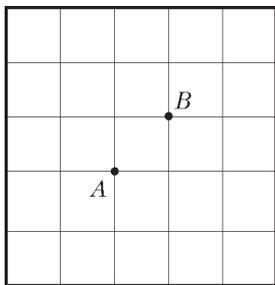


Рис. 2

нов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год? (6)

Д.Шноль

4. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка  $A$  на плане; рис.2) до своего отеля (точка  $B$ ). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет. (6)

И.Яценко

5. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рис. 3). Вася живет в четвертом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно



Рис. 3

идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя. (7)

А.Хачатурян

6. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног? (7)

Д.Шноль

7. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? (7)

И.Раскина

8. Начертите два четырехугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить а) как треугольник, так и пятиугольник; б) и треугольник, и четырехугольник, и пятиугольник. Покажите, как это можно сделать. (7)

Д.Шноль

9. На доске написано:

В этом предложении ...% цифр делятся на 2, ...% цифр делятся на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. (8)

А.Шаповалов

10. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$ , для которой  $CK = BC$ . Отрезок  $CK$

пересекает биссектрису  $AL$  в ее середине. Найдите углы треугольника  $ABC$ . (8)

И.Богданов

11. Известно, что квадратные уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $bx^2 + cx + a = 0$  ( $a, b$  и  $c$  – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его. (8)

В.Клецын

12. Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рис.4). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.) (8)

С.Маркелов

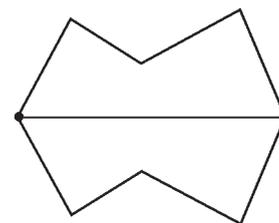


Рис. 4

13. Двое играющих по очереди пишут – каждый на своей половине доски – по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех чисел на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчетом суммы всех цифр на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах – ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник? (8)

А.Шаповалов

14. После урока на доске остался график функции  $y = \frac{k}{x}$  и пять прямых, параллельных прямой  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения. (9)

А.Блинков

15. На кольцо свободно нанизано 2009 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такая изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг? (10)

И.Шанин

16. Стороны  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках  $A_1, B_1$ . Пусть  $A_2, B_2$  – ортоцентры треугольников  $CAA_1$  и  $CBV_1$ . Докажите, что прямая  $A_2B_2$  перпендикулярна биссектрисе угла  $C$ . (10)

А.Заславский

17. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = \sin x, \quad x \in (0; \alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:

$$а) \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right); \quad б) \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)? \quad (11)$$

А.Галочкин

18. Через каждую вершину четырехугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырехугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырехугольника, если один из них равен  $72^\circ$ ? (11)

*А.Канунников*

19. Для каждого простого  $p$  найдите наибольшую натуральную степень числа  $p!$ , на которую делится число  $(p^2)!$ . (11)

*А.Канунников*

20. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел 00, 01, ..., 99 на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр. (11)

*О.Косухин*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### 7 класс

1. Два друга Егор и Петя устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном поселке (рис.1). Стартовали одновременно из точки  $B$  в разные стороны, Егор вдоль улицы  $BA$ , Петя вдоль улиц  $BC$  и  $CA$ , друзья встретились через 4 минуты в точке  $A$  и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после первой встречи они снова окажутся вместе в точке  $A$ ?

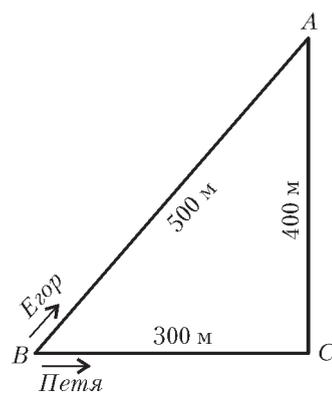


Рис. 1

временно из точки  $B$  в разные стороны, Егор вдоль улицы  $BA$ , Петя вдоль улиц  $BC$  и  $CA$ , друзья встретились через 4 минуты в точке  $A$  и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после первой встречи они снова окажутся вместе в точке  $A$ ?

*М.Семенов*

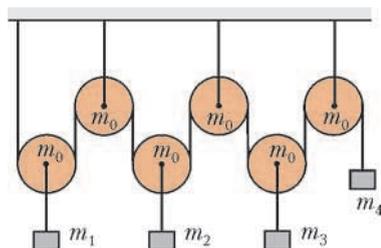


Рис. 2

2. В системе, изображенной на рисунке 2, масса самого правого груза равна  $m_4 = 1$  кг, а массы всех блоков одинаковы и равны  $m_0 = 300$  г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ . Массой троса и трением в блоках пренебречь.

*М.Ромашка*

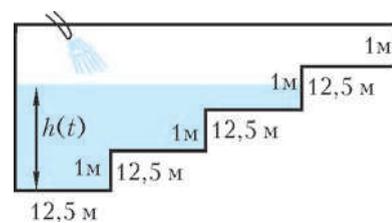


Рис. 3

3. Пятидесятиметровый бассейн шириной 20 м имеет профиль дна, показанный на рисунке 3: через каждые 12,5 м глубина бассейна увеличивается на 1 м. Пустой бассейн начинают заполнять водой, наливая ее со

скоростью 1000 литров в минуту. Постройте график зависимости высоты  $h$  уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени  $t$  и определите, через какое время бассейн заполнится водой доверху.

*М.Семенов*

4. У школьника Андрея есть стеклянная пробирка массой  $M = 80$  г и вместимостью  $V = 60$  мл. Он опустил пробирку в цилиндрический сосуд с водой и постепенно насыпал на дно пробирки песок до тех пор, пока она не погрузилась в воду по горлышко (рис.4). Затем Андрей измерил массу песка, находившегося в пробирке в этот момент, и она оказалась равной  $m = 12$  г. Внутренний радиус сосуда, в который опущена пробирка, равен  $R = 5$  см. Плотность воды  $\rho_v = 1$  г/см<sup>3</sup>. Определите по этим данным плотность стекла пробирки и вычислите, на сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

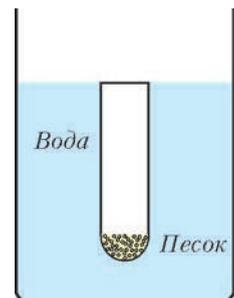


Рис. 4

стекла пробирки и вычислите, на сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

*М.Ромашка*

### 8 класс

1. Так называемый «китайский ворот» представляет собой два цилиндрических вала радиусами  $r$  и  $R$ , насаженных на общую ось, закрепленную горизонтально (рис.5; вид сбоку). На валы в противоположных направлениях намотана веревка, на которой висит подвижный блок такого радиуса, что свободные участки веревки практически вертикальны. К оси блока прикреплен груз массой  $m$ . Ворот снабжен ручкой, конец которой находится на расстоянии  $2R$  от оси ворота. 1) Ворот вращают за ручку так, что он делает  $n$  оборотов в секунду. С какой скоростью при этом движется груз, если веревка нигде не проскальзывает? 2) Какую силу необходимо прикладывать к концу ручки ворота для

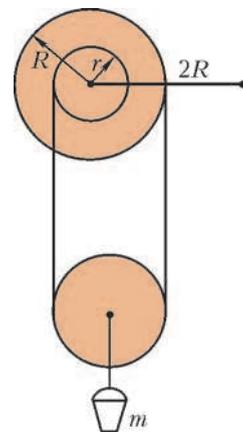


Рис. 5

того, чтобы равномерно поднимать груз, если веревка и блок очень легкие, а трения нет?

*А. Якута*

2. Нарисуйте схему, состоящую из батарейки, двух переключателей и трех лампочек (рис. 6) и имеющую при различных положениях переключателей следующие режимы работы:

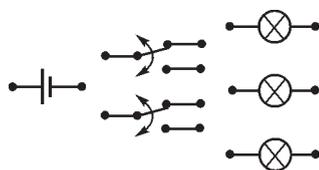


Рис. 6

1) горит первая лампа; 2) горит вторая лампа; 3) горит третья лампа; 4) горят все три лампы. В последнем случае каждая из ламп должна гореть так же ярко, как и тогда, когда она горит одна.

*Д. Харабадзе*

### 9 класс

1. Резисторы сопротивлениями  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом и  $R_4 = 80$  Ом припаяны к клеммам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  так, как показано на рисунке 7. Имеется источник тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 12$  В и внутренним сопротивлением  $r = 5$  Ом, а также много соединительных проводов малого сопротивления, которые можно подключать к источнику и к любой из клемм. Как нужно

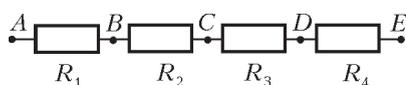


Рис. 7

соединить источник и резисторы, чтобы общая тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была максимальной? Чему равна эта мощность?

*М. Ромашка*

2. Палка, стоящая вертикально на горизонтальной площадке, освещаемой солнечным светом, имеет высоту  $h = 1,2$  м и отбрасывает тень длиной  $L = 0,9$  м. Палку начинают медленно наклонять в направлении отбрасываемой ею тени так, что ее нижний конец не сдвигается с места. Длина тени при этом до определенного момента увеличивается, а потом начинает уменьшаться. Чему была равна максимальная длина тени от палки?

*М. Ромашка*

### 10 класс

1. Автомобиль с задними ведущими колесами въезжает вверх по прямолинейному участку дороги, образуемому с горизонтом углом  $\alpha$ , и останавливается. Через некоторое время после этого водитель резко нажимает на газ и одновременно отпускает тормоз. С каким максимальным ускорением может начать двигаться автомобиль, если коэффициент трения его колес о дорогу  $\mu$ , а мощность двигателя достаточно велика? Центр тяжести автомобиля находится на расстоянии  $h$  от дороги посередине между колесами, расстояние между осями передних и задних колес  $2L$ .

*В. Погожев*

2. В цилиндрический стакан объемом  $V = 200$  мл и сечением  $S = 20$  см<sup>2</sup>, стоящий на столе и находящийся при комнатной температуре  $t_k = 20$  °С, положили кусок льда массой  $m = 100$  г при температуре  $t_0 = 0$  °С и накрыли стакан плотно прилегающей крышкой. Оцените силу, которая потребуется, чтобы оторвать крышку от стакана сразу после того, как лед растает. Считайте, что тепло поступает в стакан только снизу, крышку отрывают сразу по всему периметру, атмосферное давление  $p_a = 10^5$  Па, плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

*Ю. Старокуров*

3. Пять сторон правильного шестиугольника образованы одинаковыми диэлектрическими равномерно заряженными палочками. При этом в точке  $O$ , находящейся в центре шестиугольника, потенциал данной системы зарядов равен  $\Phi_0$ , а напряженность электрического поля равна  $\vec{E}_0$ . Какими станут потенциал  $\Phi$  и напряженность электрического поля  $\vec{E}$  в точке  $O$ , если убрать одну из заряженных палочек?

*Ю. Старокуров, М. Семенов*

### 11 класс

1. Один цилиндрический сосуд радиусом  $R_1$  удерживают внутри другого сосуда радиусом  $R_2$  так, как показано на рисунке 8. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен деревянный цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $h = 21$  см; он может перемещаться относительно втулки без трения только по вертикали. В малый сосуд налита вода до уровня  $a = 30$  см, а в большой налита масло, и при этом цилиндр покоится.

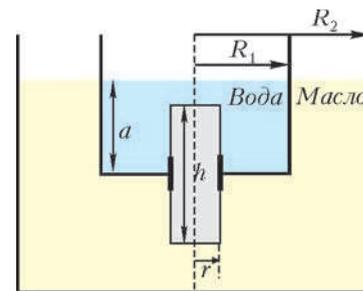


Рис. 8

Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность масла  $\rho_{\text{м}} = 790$  кг/м<sup>3</sup>, плотность цилиндра  $\rho = 600$  кг/м<sup>3</sup>. Какая часть объема цилиндра находится в воде, а какая – в масле? При каком соотношении между  $\rho_{\text{в}}$ ,  $\rho_{\text{м}}$ ,  $r$ ,  $R_1$  и  $R_2$  равновесие цилиндра будет устойчивым, т.е. при его смещении вверх или вниз будут возникать силы, стремящиеся вернуть его обратно к положению равновесия?

*М. Ромашка*

2. Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$ , а остальные грани – с плотностью заряда  $-\sigma$ . Найдите напряженность  $\vec{E}$  электрического поля в центре кубика.

*С. Кротов*

## ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### 8 класс

1. На столе стоит цилиндрический стакан с водой. В его середину начинают медленно насыпать мелкие стеклянные шарики. Процесс насыпания продолжается до тех пор, пока некоторое количество шариков не высыпется из стакана. Нарисуйте и поясните, не проводя детальных расчетов, график зависимости суммарной силы  $F$  давления на дно стакана от веса  $p$  уже насыпанных шариков, если вес воды, заполнявшей стакан вначале примерно на  $3/4$  высоты, был равен  $P$ , плотность стекла приблизительно в 2,5 раза больше плотности воды, а трением можно пренебречь.

*М. Семенов*

2. В трех калориметрах находится по  $M = 20$  г воды одной и той же температуры. В калориметры погружают льдинки, также имеющие одинаковые температуры (но друг-друге): в первый – льдинку массой  $m_1 = 10$  г, во второй – массой  $m_2 = 20$  г, в третий – массой  $m_3 = 40$  г. Когда в калориметрах установилось равновесие, оказалось, что масса первой льдинки стала  $m'_1 = 9$  г, а масса второй льдинки осталась прежней. Какой стала масса третьей льдинки?

*О. Шведов*

### 9 класс

1. Тело движется по прямой в одном направлении. В каждый момент времени вычисляется средняя скорость

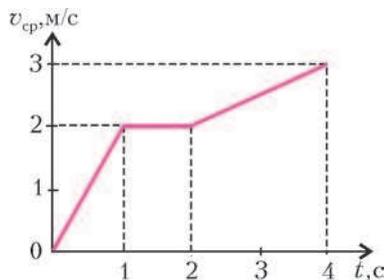


Рис. 9

движения тела за время от начального до текущего момента. На рисунке 9 приведен график зависимости вычисленной таким образом средней скорости тела  $v_{cp}$  от времени  $t$ . Постройте график зависимости мгновенной скорости тела от времени.

*М.Ромашка*

2. В системе, показанной на рисунке 10, неподвижный блок прикреплен к потолку комнаты, а все грузы удерживают неподвижными так, чтобы отрезки легкой нерастяжимой нити, не лежащие на блоках, были вертикальными. Грузы массами  $m_2$  и  $m_3$  подвешены к осям блоков на жестких легких стержнях. Все блоки легкие и могут вращаться вокруг своих осей без трения. Определите ускорение груза массой  $m_2$  после одновременного отпущения всех грузов.

*В.Погожев*

3. В широком сосуде глубиной  $2H$  находится жидкость, плотность  $\rho$  которой зависит от глубины  $x$  так, как показано на рисунке 11 (величина  $\rho_0$

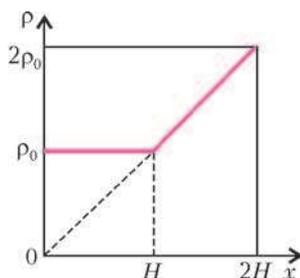


Рис. 11

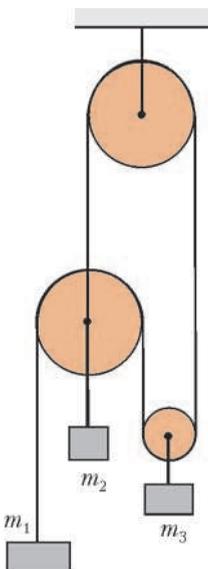


Рис. 10

известна). В сосуд аккуратно опускают плоскую шайбу высотой  $h < H$  и плотностью  $\rho_1$ . Найдите, на какую глубину будет погружено нижнее основание шайбы после установления ее равновесия. Считать, что основания шайбы все время остаются горизонтальными, а слои жидкости при погружении шайбы не перемешиваются.

*Е.Якута*

### 10 класс

1. Капитан корабля заметил строго на севере береговой маяк и приказал держать курс на него. В этот момент расстояние до берега составляло  $s = 30$  км. Корабль движется относительно воды со скоростью  $v = 15$  км/ч и в каждый момент времени держит курс на маяк. Экипаж не знает о присутствии в море западного течения, скорость которого во всех точках одинакова и равна  $u = 5$  км/ч. За какое время корабль доплывет до маяка? За какое время он доплыл бы до маяка, двигаясь по кратчайшей траектории?

*М.Ромашка*

2. На рисунке 12 изображен график циклического равновесного процесса, проводимого над одним молем идеального одноатомного газа. По горизонтали отложена работа, совершенная газом с момента начала процесса, по вертикали отложено количество теплоты, полученное газом. Изобразите график процесса в  $(pV)$ -координатах и определите отно-

шение максимальной температуры газа к его минимальной температуре.

*О.Шведов*

3. Тонкое проволочное кольцо разорвалось, когда нанесенный на него заряд превысил  $q_1$ . Какой заряд можно нанести на второе кольцо, радиус которого в  $n$  раз больше, а прочность проволоки на разрыв в  $k$  раз выше, чтобы второе кольцо не разорвалось?

*В.Погожев*

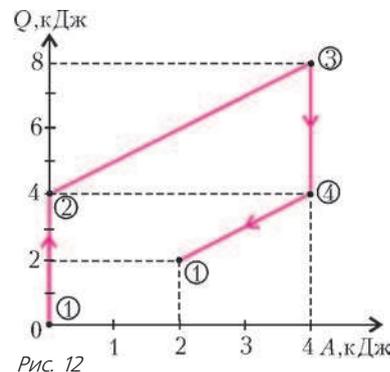


Рис. 12

### 11 класс

1. Тонкий диск катится по горизонтальной плоскости без скольжения, опираясь в каждый момент времени по диаметру своего основания на гладкую боковую поверхность прямого кругового конуса, стоящего на этой плоскости. Угол при вершине конуса  $2\alpha$ , радиус основания конуса равен радиусу диска (рис.13). Определите скорости крайних точек горизонтального диаметра диска, если его центр движется со скоростью  $v$ . Есть ли на диске точки, движущиеся с большей скоростью, чем крайние точки горизонтального диаметра?

*С.Кротов*

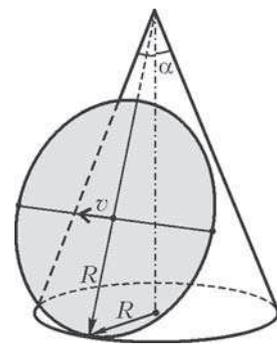


Рис. 13

2. Из тонкой жесткой проволоки изготовили кольцо радиусом  $R$ , которое закрепили так, чтобы его плоскость была горизонтальной. На кольцо нанесли заряд  $Q$ . На оси кольца на высоте  $h$  над ним удерживают маленький шарик массой  $m$ , имеющий одноименный с кольцом заряд  $q$ . Какую по модулю скорость надо сообщить шарiku, толкнув его вверх, чтобы он, двигаясь по вертикали, пролетел в дальнейшем сквозь кольцо?

*В.Погожев*

3. На гладком столе стоит коробка массой  $m$ . На дне коробки находятся два бруска, масса каждого из которых также равна  $m$ . Трения в системе нет. Левый брусок соединен со стенкой коробки легкой горизонтальной пружиной жесткостью  $k$ . Правому бруску сообщили скорость  $v_0$  в направлении левого бруска. При столкновении бруски слипаются и движутся дальше как одно целое. Найдите максимальную скорость коробки и максимальное сжатие пружины при дальнейшем движении.

*М.Ромашка*

4. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$  и зеркального шарика радиусом  $R$ , центр которого находится на главной оптической оси линзы на расстоянии  $l$  от нее. Определите расстояние  $d$  от линзы до точечного источника света, расположенного на оптической оси системы, если изображение источника в данной системе совпадает с самим источником.

*Ю.Старокуров*

*Ю.Старокуров*  
 Публикацию подготовили  
 М.Семенов, О.Шведов, А.Якута

# XIII Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб «Глюон» вновь собирал одаренных школьников и талантливых студентов на свой турнир «Компьютерная физика». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальной науке и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые. Традиционно, турнир проводится в два тура – заочный и очный.

Заочный тур XIII Турнира «Компьютерная физика» начался в сентябре 2008 года рассылкой задания по заявкам в лицеи, школы и гимназии. (Задание заочного тура было опубликовано также в журнале «Квант» №4 за 2008 год, что значительно увеличило число команд-участниц турнира.) Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований.

Очный тур XIII Турнира был проведен с 1 по 8 февраля 2009 года в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке МГУ им. М.В.Ломоносова, фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», журналов «Квант» и «Физика в школе» и Издательского дома «Первое сентября». Оргкомитет турнира выражает благодарность всем названным организациям за помощь в проведении турнира и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов.

По итогам двух туров абсолютным победителем XIII Турнира стала команда Медико-технического лицея города Самара, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус» и диплом I степени. Дипломом I степени и памятными знаками была награждена также команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте. Дипломы II степени получили команды Классического лицея 1 города Ростов-на-Дону и ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана, а дипломы III степени – команды Самарского международного аэрокосмического лицея и лицея 51 города Тольятти. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, а также конкурс «Виртуальная физическая лаборатория» (разработанный компанией «Физикон»).

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIV Турнире «Компьютерная физика» в январе–феврале 2010 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., д.15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

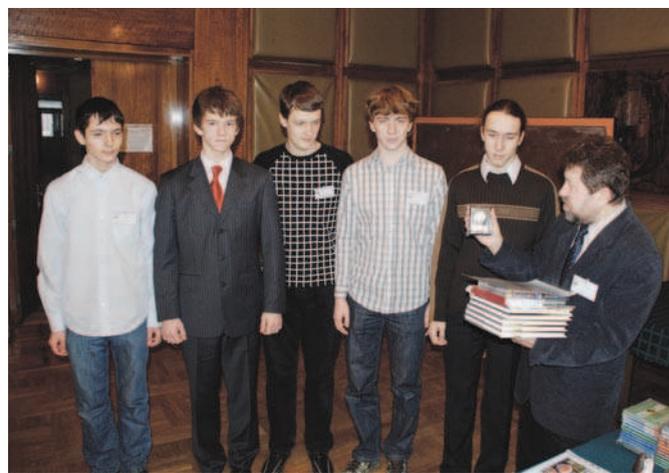
E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт для информации: www.gluon.ru

Ниже приводится заочное задание XIV Турнира «Компьютерная физика».

## ЗАОЧНЫЙ ТУР «ПЛАНЕТНАЯ СИСТЕМА»

Процесс образования планетных систем является одним из центральных в астрофизике. По современным представлениям, планетная система вокруг звезды формируется из газо-



Команда-победительница XIII Турнира «Компьютерная физика»

пылевого облака. Сложные механические и термодинамические процессы, обусловленные действием гравитационных сил, соударениями между собой пылевых частиц и образующихся из них тел, а также взаимодействием тел и пыли с газом, приводят к образованию больших и малых планет и их размещению на стационарных орбитах. Так же могут образоваться спутники планет, пылевые кольцевые скопления и другие компоненты звездно-планетной системы.

Рассмотрим формирование планетной системы из облака малых одинаковых шарообразных тел радиусом  $r = 1$  м, находящихся в поле тяготения центрального шарообразного тела радиусом  $R = 10^3$  м. Будем считать, что движение тел происходит в одной плоскости, плотности малых и большого тел одинаковы и равны  $\rho = 5500$  кг/м<sup>3</sup>, радиус рассматриваемой области  $L = 10^9$  м. Первоначальное расположение малых тел – равномерное по плоскости, их концентрация равна  $n = 10^{-4}$  м<sup>-2</sup>. Облако малых тел в начальный момент времени вращается как единое тело с угловой скоростью  $\omega = 4 \cdot 10^{-8}$  рад/с.

Малые тела взаимодействуют между собой и с центральным массивным телом гравитационными силами. Поскольку тела сферические, для расчета сил притяжения можно воспользоваться выражением

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2},$$

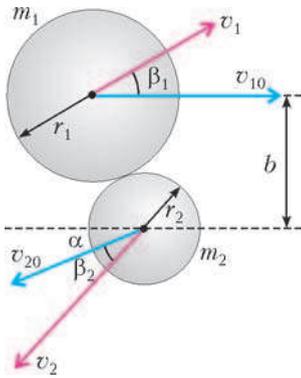
где  $G$  – гравитационная постоянная,  $m_1$  и  $m_2$  – массы взаимодействующих тел,  $l$  – расстояние между центрами этих тел. В процессе движения тела могут испытывать попарные упругие и неупругие столкновения. При упругих столкновениях сохраняются суммарный импульс и суммарная кинетическая энергия взаимодействующих тел, при неупругих – только суммарный импульс, а сами тела «слипаются» в единое целое. В нашей задаче будем считать, что при неупругих соударениях сферических тел образуются также сферические тела.

Взаимное расположение двух сферических тел в момент соударения показано на рисунке, где  $\vec{v}_{10}$  и  $\vec{v}_{20}$  – скорости тел

до соударения,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – после соударения. Направление начальной скорости второго тела относительно направления начальной скорости первого тела характеризуется углом  $\alpha$ , а направления конечных скоростей тел относительно начальных – углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Расстояние  $b$  между направлением скорости первого тела и центром второго тела в момент соударения называется прицельным параметром.

Траекторию  $j$ -й движущейся частицы можно рассчитать, воспользовавшись уравнением движения

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1, i \neq j}^N \vec{F}_i,$$



где  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы,  $N$  – число тел в системе,  $\vec{F}_i$  – сила, действующая на рассматриваемую частицу со стороны  $i$ -го тела, причем индекс « $i$ » относится ко всем остальным телам системы. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, однако можно одно уравнение второго

порядка свести к двум уравнениям первого порядка. Запишем эти уравнения для одной из проекций:

$$m v'_x = \sum F_{ix}, \quad x' = v_x,$$

где  $v$  – скорость частицы,  $x$  – координата частицы. Конечно-

разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Например, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как  $v' = (v - v_0)/\Delta t$ , где  $v_0$  – скорость частицы в некоторый момент времени  $t_0$ ,  $v$  – скорость частицы через малый интервал времени  $\Delta t$ . Для координаты конечно-разностная производная строится аналогично.

### Задание

1. Исследуйте, формируются ли кольцеобразные скопления мелких частиц в случае, когда в системе все соударения мелких частиц с центральным массивным телом и друг с другом абсолютно упругие.

2. Исследуйте, формируются ли стационарные орбиты образовавшихся крупных частиц-планет в случае, когда в системе существуют только неупругие столкновения.

3. Исследуйте, формируются ли стационарные орбиты образовавшихся крупных частиц-планет в случае, когда в системе существуют как упругие, так и неупругие столкновения. Неупругие столкновения происходят между мелкими частицами, мелкими частицами и телами, образующимися из них, а также между образующимися телами, если в момент соударения прицельный параметр  $b$  не превосходит трети радиуса меньшего тела и угол  $\alpha$  между скоростями до соударения меньше  $45^\circ$ . Остальные соударения – абсолютно упругие.

Публикацию подготовили  
В.Альминдеров, А.Кравцов

# Всероссийская студенческая олимпиада по физике

С 12 по 14 ноября 2008 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана проходила очередная всероссийская физическая олимпиада среди студентов технических вузов.

По результатам олимпиады, в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), набравшая 151 балл, второе место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (109 баллов), третье место – команда Балтийского государственного технического университета (БГТУ) «Военмех» им. Д.Ф.Устинова (101 балл).

В личном зачете первое место завоевал Ярослав Бельтюков (СПбГПУ), второе место завоевал Павел Мостовых (БГТУ), третье место – Максим Пестременко (СПбГПУ).

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Три жука находятся в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетом  $a$ . Первый жук ползет вдоль гипотенузы из точки  $A$  к точке  $B$ , второй жук с такой же скоростью ползет из точки  $B$  перпендикулярно стороне  $AB$  в сторону точки  $C$ . Определите, с какой скоростью ползет третий жук и какой путь он преодолеет до встречи, если он движется таким образом, что треугольник, соединяющий жуков, все время подобен исходному.

2. Орбитальная околоземная станция массой  $m$  находится на низкой круговой орбите. Определите, на какой угол повернется плоскость орбиты, если включить двигатель,

сила тяги которого перпендикулярна скорости и равна  $mg$ , на время, равное  $1/(4\sqrt{2})$  периода обращения станции вокруг Земли, таким образом, что скорость станции не изменяется.

3. Гвоздь диаметром  $d$  вбит в доску на глубину  $l$ . Сила трения между гвоздем и доской пропорциональна длине забитой части гвоздя, ее максимальное значение равно  $f = kl$ . Определите работу по вытягиванию гвоздя из доски клещами, если сила, приложенная к доске со стороны гвоздя, ограничена величиной  $F < f$ .

4. Невесомый цилиндр радиусом  $R$  лежит на горизонтальной поверхности и неподвижно закреплен на ней. На цилиндр положили доску длиной  $l = 2\sqrt{3}R$  таким образом, что ее центр тяжести совпадает с точкой касания доски с цилиндром. Определите ускорение доски, если между доской, цилиндром и поверхностью отсутствует трение.

5. Аксиально симметричный сосуд высотой  $H$  и максимальным диаметром  $D$  доверху наполнен водой и плотно закрыт крышкой. Сосуд вращается вокруг вертикальной оси симметрии таким образом, что давление воды на стенки сосуда во всех точках одинаково. Определите объем воды в сосуде.

6. Тепловая машина работает с одним молем одноатомного газа по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат. Температура нагревателя  $T_1$ , температура охладителя  $T_2$ . Определите максимальную работу, которая может быть выполнена в данном цикле.

7. В однородном магнитном поле с вертикально ориенти-

рованным вектором индукции  $\vec{B}$  на гладкой горизонтальной плоскости лежит тело массой  $m$  и зарядом  $q$  на расстоянии  $R$  от отверстия в плоскости. К телу привязана нить, пропущенная через это отверстие, сила натяжения нити пропорциональна расстоянию между телом и отверстием и в начальный момент равна  $F$ . Определите минимальное расстояние между телом и отверстием в процессе дальнейшего движения.

8. Плоская стоячая электромагнитная волна находится между двумя проводящими параллельными пластинами,

расстояние между которыми равно длине волны  $\lambda$ . Определите точки, в которых среднее значение объемной плотности энергии электромагнитного поля волны максимально.

9. Плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$ , пройдя через зонную пластинку, создает в точке наблюдения интенсивность света  $I_0$ . Во сколько раз изменится интенсивность света, если на зонную пластинку накладывается фазовая пластинка, созданная для той же точки наблюдения при длине волны, равной  $\lambda/2$ ?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

## ИНФОРМАЦИЯ

### Избранные задачи собеседований в 9 математический класс 57 школы

Каждую весну Московская государственная Пятидесят седьмая школа проводит собеседования для школьников, поступающих в 8 и 9 математические классы. На таких собеседованиях предлагаются задачи, каждый год новые (не все из них, разумеется, придуманы специально для собеседований, но педагоги стремятся к тому, чтобы вопиюще известными эти задачи не были). Некоторые из них очень просты, некоторые весьма сложны.

Мы приводим избранные задачи для поступающих в 9 класс одного из таких собеседований прошлых лет.

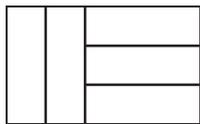


Рис. 1

1. Прямоугольник сложен из пяти одинаковых паркетных плиток, как показано на рисунке 1. Найдите отношение его сторон.

2. Три колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами составляют 4 секунды,  $5/3$  секунды и 2,4 секунды соответственно. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов будет услышано за минуту (считая первый и последний)?

3. Укажите все целые положительные числа, при делении на которые числа 3213, 3361 и 3583 дают одинаковые остатки.

4. Два карандаша – один шестигранный, а второй с квадратным сечением – положили на длинный письменный стол. Оказалось, что расстояния между противоположными гранями у них равны (рис.2). Перекатывая через ребра, каждый из них прокатили от одного края стола до другого.

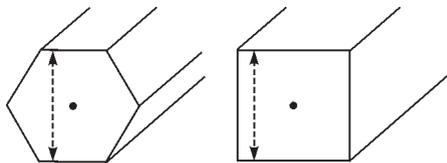


Рис. 2

Рассмотрим траекторию какой-нибудь точки на оси (грифеле) карандаша. а) Для какого из карандашей длина этой траектории больше? б) Во сколько (примерно) раз?

5. Три лыжника бегут с постоянными скоростями. Через каждый километр стоят судьи и отмечают, когда мимо них пробегают. Первый судья отметил моменты 12:01, 12:03, 12:07. Второй судья (через километр) отметил 12:08, 12:10, 12:11, третий (еще через километр) отметил 12:13, 12:15, 12:19. Какие моменты отметил четвертый судья (еще через километр)? Укажите все возможные варианты.

6. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все внутренние углы равны. Известно, что  $AB = 2$ ,  $CD = 5$ ,  $DE = 7$ ,  $EF = 1$ . Найдите  $BC$  и  $AF$ .

7. Найдите все  $x$ , для которых

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = 2007.$$

(Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее данного; например,  $\lfloor 6/5 \rfloor = 1$ .)

8. На столе лежали 30 монет решками вверх. Витя подошел к столу и перевернул 25 монет. После этого Саша подошел к столу и перевернул 24 монеты (при этом он мог переворачивать как те, что переворачивал Витя, так и другие). Каким может быть число монет, оказавшихся после этого решкой вверх? Укажите все варианты.

9. а) Нарисуйте, где может находиться центр круга радиуса 1, если известно, что круг пересекается (имеет хотя бы одну общую точку) с границей прямоугольника  $3 \times 4$ . б) Найдите площадь фигуры, образованной центрами таких кругов.

10. а) Как разместить гири массами 101 г, 201 г, 301 г, 401 г, 501 г и 601 г на чашечных весах так, чтобы разница масс на чашках была наименьшей возможной? Обоснуйте ваш ответ. б) Тот же вопрос, если добавить еще гирю в 701 г.

11. Два лыжника стартовали с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого у отметки 1 км (считая от точки старта). Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и через некоторое время встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника. (Скорости лыжников постоянны.)

12. Для выбора победителя 768 участников лотереи были расставлены по кругу. Сначала из круга вышел И.И.Иванов, затем вышел человек, который стоял через одного от Иванова по часовой стрелке и т.д. – каждый раз выходил стоящий через одного по часовой стрелке от выведенного перед этим. Так делали, пока не остался один человек – его объявили победителем. Где он стоял сначала (считая от Иванова по часовой стрелке)?

13. Вася убедил учительницу повысить ему оценку за итоговую контрольную в первой четверти с двойки на тройку, и его средний балл за первую четверть увеличился на  $a$ . После того, как он проделал то же самое во второй четверти, его средний балл за вторую четверть увеличился на  $b$ . На сколько увеличился в результате его средний балл за первое полугодие? (Средний балл – среднее арифметическое оценок.)

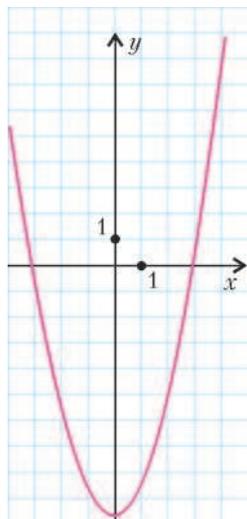


Рис. 3

14. В строчку выписаны единицы, двойки и тройки, причем есть ровно 17 единиц, за которыми следуют двойки, и ровно 23 двойки, за которыми следуют единицы. Какое наименьшее число троек может быть в этой строчке?

15. На клетчатой бумаге нарисовали график функции  $y = x^2 + cx + d$  (рис. 3). Найдите  $c$  и  $d$  с абсолютной погрешностью не более 1.

16. Три колодца – вершины равностороннего треугольника со стороной 20. Нарисуйте все точки, для которых а) расстояние до ближайшего колодца равно 11; б) расстояние до самого далекого колодца равно 20.

17. Пешеход идет вдоль шоссе с постоянной скоростью. Каждые 6 минут он видит попутный автобус, а каждые 3 минуты – встречный. Известно, что автобусы едут в обе стороны с одной и той же скоростью и отправляются с конечных пунктов через одинаковые промежутки времени. Чему равны эти промежутки?

18. В клетчатом квадрате  $100 \times 100$  нужно закрасить несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было не более двух закрашенных клеток.

а) Какое наибольшее число клеток можно закрасить?

б) Какое наименьшее число клеток можно закрасить так, чтобы ни одной нельзя было добавить по имеющимся правилам?

19. Сколько точек пересечения может иметь окружность с границей треугольника?

20. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 7 часов 38 минут?

21. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить неравносторонний прямоугольный треугольник.

22. В бутылке было некоторое количество девятипроцентного раствора уксуса. Туда добавили стакан воды, в результате чего раствор стал шестипроцентным. Каким будет процентное содержание уксуса, когда добавят еще стакан воды?

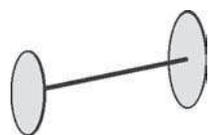


Рис. 4

23. Ось от детской машинки (диаметр левого колеса 20 мм, правого – 21 мм, расстояние между колесами 90 мм; рис.4) покатали по ровному полу. Поскольку колеса разные, ось заворачивает по кругу; при этом колеса оставляют на полу следы, являющиеся концентрическими окружностями. Найдите радиусы этих окружностей.

24. В последовательности 1, 10, 101, 10110, ... каждое следующее число получается из предыдущего по такому правилу: 0 заменяют на 1, а 1 – на 10. Могут ли в одном из чисел в этой последовательности появиться три единицы подряд?

25. Рассмотрим первое число в последовательности из предыдущей задачи, в котором не меньше тысячи цифр. Какие цифры стоят в этом числе на 998-м, 999-м и 1000-м от начала местах?

26. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $BC$  – основание) проведена биссектриса  $BD$  (рис.5). Прямая, проходящая через точку  $D$  пер-

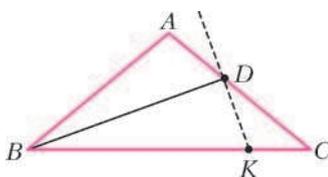


Рис. 5

пендикулярно  $BD$ , пересекает основание  $BC$  в точке  $K$ . Докажите, что  $BK = 2CD$ .

27. Докажите, что ни одну из степеней двойки 1, 2, 4, 8, ... нельзя представить в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

28. Докажите, что любое число, не являющееся степенью двойки, можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

29. Можно ли поместить прямоугольник  $3 \times 8$  внутри прямоугольника  $5 \times 6$ ?

30. Есть по одному литру пятипроцентного, семипроцентного и десятипроцентного раствора уксуса. Какое максимальное количество восьмипроцентного раствора можно получить, смешивая эти растворы?

31. Целое число является точным квадратом и не оканчивается нулем. Если зачеркнуть две его последние цифры, тоже получается точный квадрат. Найдите наибольшее такое число.

32. Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  (рис.6). Докажите, что можно вписать в треугольник  $ABC$  треугольник  $A'B'C'$ , стороны которого равны  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$ .

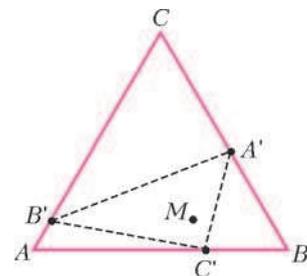


Рис. 6

33. Вася написал на доске 100 различных целых положительных чисел, а Петя нашел их всевозможные попарные суммы (включая сумму каждого числа с собой). Среди полученных сумм оказалось ровно 199 различных чисел. Какие числа были выписаны Васей, если известно, что среди них были числа 1 и 3, но не было числа 2?

34. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ , причем их точка пересечения  $H$  лежит внутри треугольника (рис.7). Известно, что  $AH = HA_1$ ,  $CH = 2HC_1$ . Найдите  $\angle B$ .

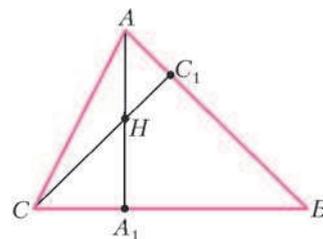


Рис. 7

35. В строчку выписаны 100 чисел. Докажите, что либо можно раскрасить их в четыре цвета так, чтобы числа каждого цвета возрастали слева направо, либо среди них можно выбрать пять чисел, которые убывают слева направо (наибольшее левее всех, следующее по величине правее его и т.д.).

36. Какое наибольшее число диагоналей выпуклого 239-угольника можно выбрать, если требуется, чтобы любые две из выбранных диагоналей имели общую точку (возможную, вершину)?

37. На плоскости нарисованы несколько точек, некоторые из которых соединены отрезками. Докажите, что можно раскрасить точки в два цвета так, чтобы не менее половины отрезков имели разноцветные концы.

38. Шестиугольник разрезан на два шестиугольника той же формы, но пропорционально меньших (рис.8). Длина его верхней стороны равна 1. Найдите длины остальных сторон.

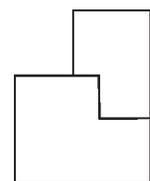


Рис. 8

Публикацию подготовили  
Р.Гордин, В.Доценко, А.Шень, К.Шрамов

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 3)

- 7 пеньков.
- Нитка пакетика закручена при изготовлении, так что немало вращаться будет даже сухой пакетик. Но пакетик очень легкий, и нить не может раскрутиться полностью. После наматывания пакетик становится тяжелее, нить натягивается сильнее и раскручивается дальше.
- При первом взвешивании положим на каждую чашу весов по две бронзовых и по одной серебряной медали. Если весы в равновесии, то эти шесть медалей настоящие, а фальшивая находится среди оставшихся: бронзовой, серебряной и золотой. Чтобы найти ее, на одну чашу весов положим настоящую бронзовую и еще не проверенную серебряную медали, а на другую – не проверенную бронзовую и настоящую серебряную. Если весы снова в равновесии, то понятно, что фальшивая медаль – золотая. Если же одна чашка легче другой, то на ней лежат настоящая и фальшивая медали, и последняя определена. Рассмотрим случай, когда при первом взвешивании одна чаша оказалась легче другой. Тогда фальшивая монета лежит на чаше, которая легче. Взвесим две бронзовые медали с этой чаши: если они одного веса, то фальшивая медаль – серебряная, если они разного веса, то более легкая фальшивая.
- За 8 вечеров.

Ясно, что из двух хоббитов хотя бы один побывает в гостях у другого, если они не будут вести себя одинаково, т.е. сидеть дома в одни и те же вечера и гулять в одни и те же вечера. Если всего  $n$  вечеров, то имеется  $2^n$  вариантов поведения (в каждый из  $n$  вечеров нужно выбрать из двух возможностей: гулять или не гулять). Значит, требуется найти наименьшее  $n$ , для которого выполнится неравенство  $2^n > 250$ .

5.  $BC = 6$ ,  $AF = 10$ .

Сумма углов шестиугольника равна  $720^\circ$ . Так как все углы шестиугольника  $ABCDEF$  одинаковы, каждый из них равен  $120^\circ$ . Значит, смежные с ними углы равны по  $60^\circ$ . Пусть прямые  $AF$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ , прямые  $BC$  и  $DE$  – в точке  $L$ , прямые  $DE$  и  $AF$  – в точке  $M$ . Тогда треугольники  $KAB$ ,  $CLD$ ,  $FEM$  и  $KLM$  – равнобедренные. Отсюда получаем  $2 + BC + 5 = 5 + 7 + 1 = 1 + AF + 2$  и находим  $BC$  и  $AF$ .

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1 за 2009 г.)

- Нет, нельзя. Пусть мы придумали такую разметку. Посчитаем, сколько клеток отмечены. Всего на кубике есть  $3 \cdot 3 = 9$  колец, на каждом кольце отмечены 5 клеток, а через каждую клетку проходят ровно два кольца. Значит, всего отмечено  $9 \cdot 5/2 = 22,5$  – нецелое число клеток. Противоречие.
- Нет, не может. Пусть  $Ц$  – площадь центральной части,  $Ч$  – сумма площадей «четырёхугольных» частей,  $T$  – сумма площадей «треугольных» частей, кроме центральной,  $П$  – площадь всего парка. Если бы описанная ситуация была возможна, то сумма всех «четырёхугольных» частей была бы больше суммы всех прилегающих к сторонам парка «треугольных» частей, т.е.  $Ч > T$ . Из двух равных по площади половинок, на которые цветная линия разбивает большой треугольник, ровно одна всегда содержит центральную часть. Сумма площадей таких половинок равна  $1,5П = 3Ц + 2Ч + T$ . А сумма площадей оставшихся половинок равна  $1,5П = 2T + Ч$ . Приравняв правые части, получим  $T = Ч + 3Ц > Ч$ . Противоречие.
- Да, можно. Каждая «лесенка» состоит из шести квадра-

тов. Поэтому достаточно научиться составлять квадрат. Из двух «лесенок» складываем прямоугольник  $3 \times 4$ , а из двенадцати таких прямоугольников – квадрат.

19. Пронумеруем все бутылки от 1 до 1000 и напомним каждой ее номер в двоичной системе счисления; для номеров, меньших 512, допишем слева нули так, чтобы всего на каждой бутылке были написаны десять цифр. Также присвоим каждой мыши номер от 1 до 10 и дадим  $k$ -й мыши смесь вина из тех бутылок, на которых  $k$ -я цифра – единица. Когда пройдут десять минут, выпишем десять цифр – единицу на  $k$ -м месте, если  $k$ -я мышь изменила цвет, иначе – ноль. Полученная двоичная запись будет номером испорченной бутылки.

20. Разделим данное равенство на  $ab$  и перепишем его в виде  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3 - \frac{1}{ab}$ . Таким образом, достаточно доказать неравенство  $3 - \frac{1}{ab} \geq 2$ . Оно равносильно неравенству  $ab \geq 1$ , поэтому будем доказывать его. Среднее арифметическое чисел  $a$  и  $b$  не меньше их среднего геометрического  $\sqrt{ab}$ , которое мы обозначим  $t$ . Тогда из равенства  $a + b + 1 = 3ab$  получаем, что  $2t + 1 \leq 3t^2$ . Значит,  $0 \leq 3t^2 - 2t - 1 = (t - 1)(3t + 1)$ . Поскольку  $t > 0$ , произведение неотрицательно, когда оба множителя неотрицательны, т.е. когда  $t \geq 1$ , откуда  $ab = t^2 \geq 1$ .

## XXX ТУРНИР ГОРОДОВ

### ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

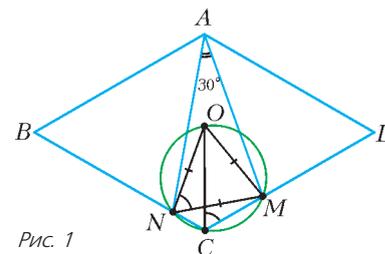
1. Пусть с одной стороны от проведенной прямой находится  $k$  вершин 2009-угольника. Тогда с другой стороны от нее найдется  $2009 - k$  вершин. Прямая пересекает в точности те диагонали, которые соединяют вершины, находящиеся по разные стороны от нее. Вместе с двумя пересеченными нашей прямой сторонами 2009-угольника (которые на четность не влияют) таких диагоналей будет  $k(2009 - k)$ . Поскольку один из этих множителей обязательно четен, четно и их произведение.

3. 50.

Понятно, что надо иметь не меньше чем по 30 единиц, 30 двоек, ..., 30 девяток и не меньше 29 нулей. Поскольку у кубика 6 граней, и  $30 \cdot 9 + 29 = 299 > 49 \cdot 6$ , нельзя обойтись меньше чем 50 кубиками. Покажем, что 50 кубиков хватит. Расположим в ряд 50 кубиков и начнем последовательно заполнять их грани (сначала – у первого кубика, потом – у второго, и т.д.) числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, ... (именно в таком порядке). В результате каждая цифра будет написана на гранях 30 разных кубиков, и мы сможем составить любое 30-значное число, последовательно выбирая кубики с нужными цифрами.

4. Да, могла. Например, годится число 98888888890.

5. Пусть  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $NAM$  (рис. 1). Поскольку угол  $NAM$  вписан в эту окружность и равен  $30^\circ$ ,



соответствующий ему центральный угол  $NOM$  равен  $60^\circ$ . Тогда равнобедренный треугольник  $MON$  – равнобедренный, а четырехугольник  $MCNO$  вписан в окружность (в нем сумма противоположных углов  $C$  и  $O$  равна  $180^\circ$ ). Но углы  $MCO$  и  $MNO$  опираются на одну и ту же дугу этой окружности, откуда  $\angle MCO = \angle MNO = 60^\circ$ , т.е.  $CO$  – биссектриса угла  $C$  ромба, и значит,  $O$  лежит на диагонали  $AC$ .

10–11 классы

3. а) По построению  $x_n$  при  $n \geq 3$  нечетно. Поэтому при  $n \geq 5$  сумма  $x_{n-1} + x_{n-2}$  четна, откуда

$$x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2}) \leq (x_{n-1} + x_{n-2})/2 \leq \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\},$$

причем равенство возможно только при  $x_{n-1} = x_{n-2}$ . Но в последнем случае  $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$ , и далее все члены последовательности будут такими же, как эти три. Допустим,  $x_n < \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}$  при всех  $n \geq 5$ . Тогда  $\max\{x_n, x_{n+1}\} < \max\{\max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}, \max\{x_n, x_{n+1}\}\} = \max\{x_{n-1}, x_{n-2}\}$  при всех  $n \geq 5$ . Но величина  $\max\{x_n, x_{n+1}\}$ , принимающая натуральные значения, не может бесконечно убывать.

б) Это число  $O(\text{НОД}(a, b))$ .

4. Заметим, что если стереть пару идущих подряд единиц, разность  $M - N$  не изменится: четность расстояний от этих единиц до каждого из нулей всегда будет различной, и потому стирание двух единиц уменьшит  $M$  и  $N$  на одно и то же число. Аналогично, не меняет разности  $M - N$  стирание пары идущих подряд нулей. Будем стирать такие пары, пока это возможно. В итоге либо цифр не останется совсем (и тогда  $M - N = 0$ , что нас устраивает), либо останутся чередующиеся нули и единицы. Но в этом случае между любыми двумя единицами и нулем – четное число знаков, т.е.  $M > N = 0$ .

5. Как известно, отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке (обозначим ее  $S$ ) и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины. Продолжим отрезок  $XS$  на расстояние  $SY = 3XS$  за точку  $S$ . Тогда треугольники  $SAY$  и  $SA_1X$ , где  $A_1$  – точка пересечения медиан грани  $BCD$ , гометичны с центром  $S$  и коэффициентом  $-3$ . Следовательно,  $A_1Y$  и  $XA_1$  параллельны. Таким образом, все описанные в условии прямые пересекаются в точке  $Y$ .

Сложный вариант

8–9 классы

1. Да, сможет. Васе достаточно называть все время одно и то же число:  $1/(2008 \cdot 2009)$ .

2. а) Примеры таких многоугольников приведены на рисунках 2 и 3.



Рис. 2

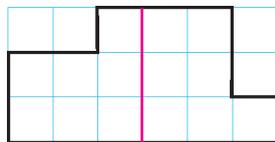


Рис. 3

б) Да. Примером может служить трапеция с отношением оснований 1:2, изображенная на рисунке 4. Она получается разрезанием квадрата по прямой, проходящей через его центр.

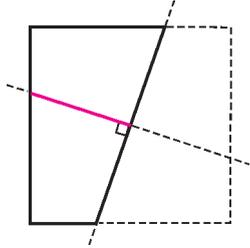


Рис. 4

3. Нет, нельзя.

Достаточно для любой расстановки знаков доказать, что, выезжая из дома, машина может выехать за границу квадрата (подумайте, почему). Пусть машина выезжает из центральной клетки на север. В каждой следующей клетке она сможет ехать на север или на запад, никогда не двигаясь на юг и на восток. Тогда

не позднее чем через 101 шаг она заведомо выйдет за границы квадрата.

4. Нет, не обязательно.

Пример – последовательность: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, ...

...,  $k^2, k(k+1), (k+1)^2, (k+1)(k+2), (k+2)^2, \dots$

6. Отразим точку  $B$  относительно прямой  $AC$ ; пусть при этом отражении она переходит в точку  $B_1$  (рис.5). Продлим  $BP$  и

$BQ$  до пересечения с  $AB_1$  и  $CB_1$  в точках  $M_1$  и  $N_1$ . Тогда треугольники  $AMP$  и  $AM_1P$ , а также  $CNQ$  и  $CN_1Q$  равны, и сумма площадей треугольников  $AM_1P$ ,  $CN_1Q$  и пятиугольника  $M_1PQN_1B_1$  равна

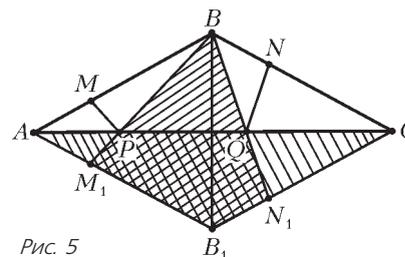


Рис. 5

половине площади ромба  $ABCB_1$ . Теперь заметим, что  $\angle M_1BB_1 + \angle B_1BN_1 = 60^\circ = \angle B_1BN_1 + \angle N_1BC$ , а стало быть, треугольники  $M_1BB_1$  и  $N_1BC$  равны по стороне ( $BB_1 = BC$ ) и двум прилежащим к ней углам. Поскольку площадь треугольника  $B_1BC$  равна половине площади ромба  $ABCB_1$ , то и площадь четырехугольника  $M_1BN_1B_1$  равна половине площади ромба  $ABCB_1$ . Стало быть,

$$S_{AMP} + S_{M_1PQN_1B_1} + S_{CNQ} = S_{PQB} + S_{M_1PQN_1B_1},$$

поэтому площадь треугольника  $PQB$  равна сумме площадей треугольников  $AM_1P$  и  $CN_1Q$ , а значит, и сумме площадей треугольников  $AMP$  и  $CNQ$ .

10–11 классы

1. Нет.

Пусть два прямоугольника имеют соприкасающиеся стороны (скажем, вертикальные). Рассмотрим проекции центров на прямую  $l$ , содержащую эти стороны. Если обе проекции лежат на общем участке соприкасающихся сторон, то отрезок  $l$ , соединяющий центры прямоугольников, не выходит за границы объединения этих прямоугольников (поскольку тогда точка пересечения отрезка  $l$  с прямой  $l$ , расположенная между проекциями, тоже лежит на этом участке; рис.6,а).

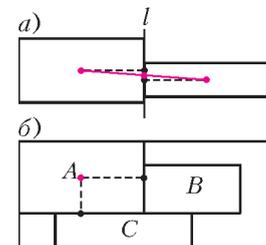


Рис. 6

Осталось найти такие два соприкасающихся прямоугольника. Рассмотрим прямоугольник  $A$  в левом верхнем углу. Пусть  $B$  и  $C$  – соседние с ним прямоугольники, причем  $B$  содержит середину правой стороны  $A$ , а  $C$  содержит середину нижней стороны  $A$ . Так как  $B$  и  $C$  не перекрываются, то не может одновременно нижняя сторона  $B$  располагаться ниже нижней стороны  $A$ , и правая сторона  $C$  располагаться правее правой стороны  $A$ . Пусть, например, нижняя сторона  $B$  расположена не ниже нижней стороны  $A$  (рис. 6,б). Тогда  $A$  и  $B$  – искомые прямоугольники.

3. 90. Указание. Число диагоналей, на которых стоит по нечетному числу фишек, не может уменьшиться.

Пример, когда можно снять 90 фишек, приведен на рисунке 7 (в каждой клетке поставлен номер шага, на котором снимается соответствующая фишка).

●	83	84	85	86	87	88	89	90	●
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
●	65	66	67	68	69	70	71	72	●
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
●	47	48	49	50	51	52	53	54	●
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
●	29	30	31	32	33	34	35	36	●
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
●	11	12	13	14	15	16	17	18	●
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рис. 7

6. Второй игрок всегда может обеспечить себе победу.

Указание. Нарисуем вписанный в данную окружность правильный  $n$ -угольник, одна из вершин которого – точка, отмеченная первым игроком на первом ходу. Пока не все вершины этого  $n$ -угольника отмечены, второй игрок должен ставить синие точки в его вершины. Когда все вершины этого  $n$ -угольника будут отмечены, окружность разобьется на  $n$  дуг. Назо-

вем дугу *красной*, если оба ее конца красные. Далее второй игрок должен отметить хотя бы по одной точке внутри каждой из красных дуг. Последним ходом он сможет выиграть.

*Устный тур для 11 класса*

1.  $\frac{3}{2}100!$ .

2. Пусть ладья попала на клетку h1 с клетки h2. Посмотрим, в каком порядке обходятся углы доски. Противоположные углы доски не могут идти подряд в маршруте ладьи – тогда соединяющий их путь отделяет один из двух других противоположных углов, и в этот угол ладья попасть не может. Значит, углы обходятся либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Случаи аналогичны, разберем первый. Достаточно разобрать варианты, когда первый угол в пути левый. Если первым проходится левый верхний угол, то путь, соединяющий первые три угла, отсекает последний угол – ладья не может в него попасть. Если первым проходится левый нижний угол, то уже пройдя следующий угол, мы оказываемся отрезанными от остальных углов. Значит, на клетку h1 ладья могла попасть только с клетки g1.

3. Обозначим сумму  $f_1(n) + f_3(n) + \dots$  через  $O(n)$ , а сумму  $f_2(n) + f_4(n) + \dots$  через  $E(n)$ . Докажем индукцией по  $n$ , что  $|O(n) - E(n)| = 1$ . Для  $n = 1$  это равенство справедливо. Пусть оно верно для некоторого количества цветов  $n$ . Заметим, что  $f_k(n+1) = kf_k(n) + kf_{k-1}(n)$  при  $1 < k < n + 1$ , поскольку добавив число  $n + 1$ , мы можем покрасить его в один из имеющихся  $k$  цветов, если остальные числа уже раскрашены в  $k - 1$  цвет, либо, если остальные числа раскрашены в  $k - 1$  цвет, покрасить его в оставшийся из  $k$  первых цветов. Заметим также, что  $f_{n+1}(n+1) = (n+1)f_n(n)$  и  $f_1(n+1) = f_1(n)$ . Тогда

$$O(n+1) = f_1(n) + 3(f_3(n) + f_2(n)) + 5(f_5(n) + f_4(n)) + \dots,$$

$$E(n+1) = 2(f_2(n) + f_1(n)) + 4(f_4(n) + f_3(n)) + \dots$$

Вычитая одно выражение из другого и производя сокращения, получим, что  $O(n+1) - E(n+1) = E(n) - O(n)$ , откуда следует утверждение задачи для  $n + 1$  цветов.

*Для знатоков.* Как ни удивительно, у этой задачи имеется и геометрическое решение. Дело в том, что справедливо утверждение: для фиксированного  $n$  числа  $f_k(n)$  суть количества  $(n - k)$ -мерных граней у некоторого  $(n - 1)$ -мерного многогранника – *пермутаэдра*. Такой многогранник можно получить, взяв в  $n$ -мерном пространстве выпуклую оболочку  $n!$  точек, координаты которых – числа от 1 до  $n$  в каком-либо порядке. Например, для  $n = 2$  пермутаэдр – просто отрезок на плоскости (с концами  $(1; 2)$  и  $(2; 1)$ ), для  $n = 3$  пермутаэдр – шестиугольник в пространстве (все шесть точек, полученные из  $(1; 2; 3)$  перестановками координат, включая саму эту точку, лежат в одной плоскости  $x + y + z = 6$ ). Количество вершин пермутаэдра равно  $n!$ , т.е. совпадает с  $f_n(n)$ . (*Указание.* Попробуйте для начала построить взаимно однозначное соответствие между ребрами пермутаэдра и раскрасками множества  $\{1, \dots, n\}$  в  $n - 1$  цвет.)

Если воспользоваться приведенным выше утверждением, для решения задачи достаточно будет доказать, что знакопеременная сумма количеств  $k$ -мерных граней  $(n - 1)$ -мерного пермутаэдра (где  $k$  меняется от 0 до  $n - 1$ ) равна 1. Это гарантирует формула Эйлера: такая сумма равна 1 вообще для любого выпуклого (многомерного) многогранника. Например, для трехмерных многогранников формула Эйлера превращается в известное равенство, которое не раз обсуждалось на страницах «Кванта»:  $V - E + F - 1 = 1$ , где  $V$ ,  $E$  и  $F$  – числа вершин, ребер и граней многогранника, а слагаемое «-1» соот-

ветствует его внутренности. Равенство количеств вершин и ребер многоугольника – тоже частный случай этой формулы.

4. **Лемма.** *Существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, быть может, кроме CD, если и только если  $AC + BD = AD + BC$ .*

Пусть искомая сфера существует. Тогда вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ABD$  касаются в точке касания данной сферы с ребром  $AB$ . Наоборот, если вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ABD$  имеют общую точку (а значит, касаются), то содержащая их сфера – искомая. Пусть  $M_1$  и  $M_2$  – точки касания вписанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $ABD$  с ребром  $AB$ . По формуле для длин отрезков, на которые разбиваются стороны треугольника точками касания вписанной окружности,  $AM_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$  и  $AM_2 = \frac{AB + AD - BD}{2}$ . Касание вписанных окружностей эквивалентно тому, что  $AM_1 = AM_2$ , а это равносильно равенству  $AC + BD = AD + BC$ .

Вернемся к решению задачи. Так как существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, кроме  $CD$ , то по лемме  $AC + BD = AD + BC$ . И по той же лемме, примененной к ребру  $AB$ , получаем искомую сферу. Осталось доказать, что полученная сфера не касается всех ребер тетраэдра. Предположим противное. Тогда она бы пересекала плоскости  $ABC$  и  $ABD$  по вписанным окружностям соответствующих треугольников, т.е. имела бы две общие окружности со сферой, данной в условии, а значит, совпадала бы с ней.

5. Пусть  $P(x) = a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$ . Приведя дроби  $a_m, \dots, a_1, a_0$  к общему знаменателю  $t$ , запишем  $P(x)$  в виде  $\frac{1}{t}(b_mx^m + \dots + b_1x + b_0)$ , где числа  $t, b_m, \dots, b_0$  – целые.

Возьмем  $x$  равным достаточно большому простому числу  $p$ . Тогда

$$P\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{b_m + pb_{m-1} + \dots + p^m b_0}{t \cdot p^m}.$$

Если  $p > |b_m|$ , то числитель полученной дроби взаимно прост с  $p^m$ . С другой стороны, если хотя бы один из коэффициентов  $b_{m-1}, \dots, b_0$  отличен от нуля и  $p$  достаточно велико,  $|b_m + pb_{m-1} + \dots + p^m b_0| > |t|$ , откуда числитель нашей дроби не может полностью сократиться со знаменателем, и значит, число  $P\left(\frac{1}{p}\right)$  не имеет вида  $\frac{1}{k}$ , что противоречит условию. Поэтому  $b_{m-1} = \dots = b_0 = 0$ , и утверждение задачи доказано.

6. У параллелепипеда есть две квадратные грани со стороной 1 м – назовем их мальми. За первые три минуты каждый муравей находит малую грань: он идет по ребру до конца, потом по другому – и тогда он знает, какие ребра образуют малую грань. Далее второй бегаёт по своей малой грани против часовой стрелки, а первый с начала 4-й по конец 5-й минуты обходит два ребра своей малой грани по часовой стрелке. Либо он встретит второго, либо затем за 2 минуты перейдет на другую малую грань, и там, идя снова по часовой стрелке, не позднее чем через 1,5 минуты встретит второго. Итого будет потрачено максимум 8,5 минут.

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. В 2022 году.
2. Примеры таких разрезов приведены на рисунке 8.
3. В шесть раз.
4. Один из возможных маршрутов туриста изображен на

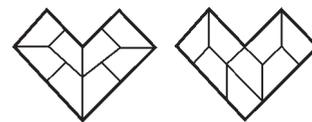


Рис. 8

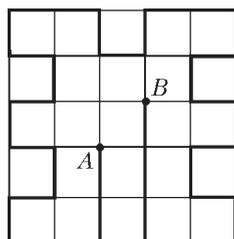


Рис. 9

- рисунке 9. Докажите, что более длинный маршрут невозможен.  
 5. В шестом подъезде.  
 6. У зеленого осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.  
 7. Да, все монеты можно разложить поровну по всем сундукам. *Указание:* докажите, что общее число монет делится на 7 и делится на 11.  
 8. Один из возможных примеров показан на рисунке 10.

9. Пример: «В этом предложении 70% цифр делятся на 2, 60% цифр делятся на 3, а 40% цифр делятся и на 2, и на 3».

10.  $\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle B = 54^\circ$ .

Обозначим точку пересечения отрезков  $CK$  и  $AL$  за  $O$  (рис.11). Заметим, что  $CO$  – медиана к гипотенузе прямоу-

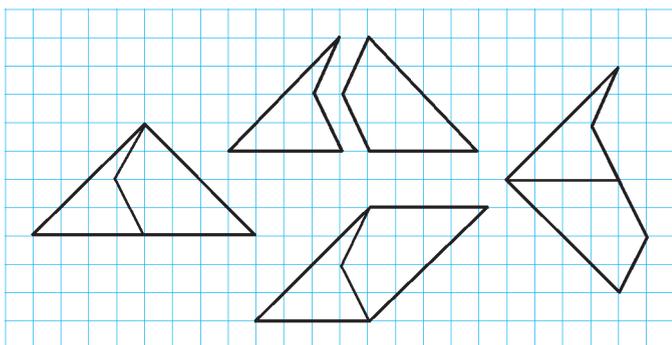


Рис. 10

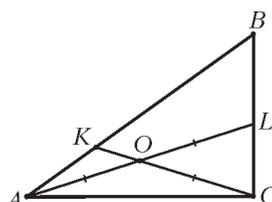


Рис. 11

гольного треугольника  $ACL$ . Значит,  $AO = OC = OL$ , а  $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK$  (последнее равенство верно, так как  $AO$  – биссектриса). Обозначим этот угол за  $\alpha$ . Тогда  $\angle A = 2\alpha$ . Найдем  $\angle B$ . Так как треугольник  $CBK$  равнобедренный, этот угол равен внешнему углу  $CKB$  треугольника  $CKA$ , т.е.  $\angle B = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$ . Наконец, из того, что  $\angle B + \angle A = 90^\circ$ , получаем, что  $2\alpha + 3\alpha = 90^\circ$ . Значит,  $\alpha = 18^\circ$ .

11. 1.

Домножим первое уравнение на  $x$  и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(ax^3 + bx^2 + cx) - (bx^2 + cx + a) = 0 \Leftrightarrow a(x^3 - 1) = 0.$$

Но у последнего уравнения только один корень – а именно, 1.

12. Один из возможных примеров изображен на рисунке 12.

В нем верхние два многоугольника совмещаются поворотом относительно точки  $A$ , нижние два – симметрией относительно точки  $O$ . Интересно, что многоугольниками такого вида можно замостить плоскость, причем непериодическим образом (см. например, обложку «Кванта» №2 за 1980 г.).

13. Второй игрок может выиграть. *Указание.* Можно считать, что оба игрока пишут только числа 1, 10, 100, 1000 или 10000 (подумайте, почему). Докажите, что, отвечая на числа 10 и 1000 числом 1, а на числа 100 и 1 числом 10, второй игрок добьется успеха.

Рис. 12

14. –1.

15. Нет, не существует.

Пусть при каком-то начальном расположении бусинок нашлась последовательность ходов, в результате которой какая-то бусинка прошла полный круг против часовой стрелки или больше. Обозначим начальное положение этой бусинки  $O$ . Тогда положения бусинок определяются углом от точки  $O$  с точностью до  $2\pi$ , причем углы по часовой стрелке будем считать со знаком «-», а углы против часовой стрелки со знаком «+». Занумеруем бусинки по порядку. Обозначим за  $\alpha_i$  угол до  $i$ -й бусинки. Тогда вначале имеем  $-2\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2009} = 0$ . Заметим, что перемещению  $i$ -й бусинки соответствует замена  $\alpha_i$  на  $\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2}$  при  $i = 2, \dots, 2008$ , для первой бусинки имеем замену  $\frac{\alpha_2 + \alpha_{2009} - 2\pi}{2}$ , для 2009-й имеем  $\frac{\alpha_1 + \alpha_{2008} + 2\pi}{2}$ . То, что бусинка прошла полный круг или более, означает, что  $\alpha_{2009}$  стал  $\geq 2\pi$ . Но вначале верно, что  $\alpha_i < \frac{2\pi i}{2009}$ , и при вышеуказанных преобразованиях это свойство сохраняется, поэтому  $\alpha_{2009}$  всегда меньше  $2\pi$ . Противоречие.

16. Опустим из  $B$  и  $A_1$  высоты на  $AC$  в точки  $B_3$  и  $B_4$  соответственно, аналогично построим точки  $A_3$  и  $A_4$  (сделайте рисунок). Заметим, что  $AB_1 = BA_1 = p - c$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Таким образом,  $A_3A_4 = B_3B_4 = (p - c)\cos\gamma$ . Отрезки  $A_3A_4$  и  $B_3B_4$  являются проекциями отрезка  $A_2B_2$  на прямые  $AC$  и  $BC$ , но эти отрезки равны, поэтому отрезок  $A_2B_2$  с ними составляет равные углы. Значит, он либо перпендикулярен биссектрисе угла  $C$ , либо параллелен ей. Обозначим ортоцентр треугольника  $ABC$  за  $H$ . Заметим, что так как  $B_1$  лежит на отрезке  $AC$ , то  $A_4$  лежит на отрезке  $A_3C$ , а значит,  $B_2$  лежит на луче  $HB_3$ . Аналогично,  $A_2$  лежит на луче  $HA_3$ . Значит, биссектриса угла  $A_3HB_3$  пересекает отрезок  $A_2B_2$ . Но эта биссектриса параллельна биссектрисе угла  $ACB$  (так как в четырехугольнике  $HA_3CB_3$  углы  $A_3$  и  $B_3$  прямые). Таким образом, получаем, что  $A_2B_2$  не параллелен биссектрисе угла  $C$ , значит, он ей перпендикулярен.

17. Касательная к графику функции  $y = \sin x$ , где  $x \in (0; \alpha)$ , проведенная в заданной его точке  $(x_0; \sin x_0)$ , имеет угловой коэффициент  $\cos x_0$ , и для ее построения при помощи циркуля и линейки достаточно построить отрезок длины 1. Действительно, имея отрезки 1 и  $\sin x_0$ , можно построить отрезок  $\cos x_0$  (при помощи тригонометрического круга), а значит, и угол, тангенс которого равен  $\cos x_0$ . Покажем, как построить отрезок длины 1 (т.е. восстановить масштаб).

а) Из точки  $B = (a; \sin a)$ , где  $a \in (\frac{\pi}{2}; \alpha)$ , лежащей на графике функции, опустим перпендикуляр на ось  $Oy$  (рис. 13). Так как  $\sin(\pi - a) = \sin a$ , то этот перпендикуляр пересечет график функции  $y = \sin x$  в точке  $A = (\pi - a; \sin a)$ . Через середину отрезка  $AB$  проведем прямую, перпендикулярную оси  $Ox$ . Она пересечет график в точке  $(\frac{\pi}{2}; 1)$ . Отрезок этой прямой от оси  $Ox$  до графика функции  $y = \sin x$  имеет длину 1.

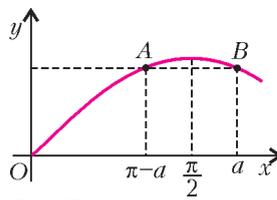


Рис. 13

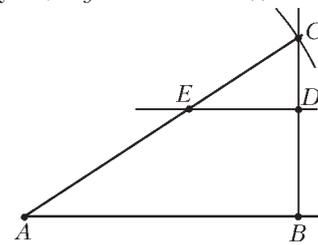


Рис. 14

б) Пусть  $a$  и  $b$  – произвольные точки на оси  $Ox$ , удовлетворяющие условию  $0 < b < a < \alpha$ . Построим отрезок  $AB$  длины  $\sin a + \sin b$ . Через точку  $B$  проведем луч  $l$ , перпендикулярный отрезку  $AB$ . Окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $2\sin \frac{a+b}{2}$  пересекает луч  $l$  в точке  $C$  (рис. 14). Так как  $\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ , то  $\angle CAB = \frac{a-b}{2}$ . На отрезке  $BC$  отметим точку  $D$  такую, что  $BD = \sin \frac{a-b}{2}$ . Через точку  $D$  проведем прямую, параллельную отрезку  $AB$ . Эта прямая пересечет отрезок  $AC$  в точке  $E$ . Длина отрезка  $AE$  равна 1, так как  $\sin \angle CAB = \sin \frac{a-b}{2} = \frac{BD}{AE}$ .

18. Пусть  $ABCD$  – данный четырехугольник,  $O$  – центр вписанной в него окружности, прямые  $AO$ ,  $CO$  – две из трех прямых, данных в условии.

а) Если точка  $O$  лежит на прямой  $AC$ , то эта прямая является осью симметрии четырехугольника  $ABCD$ , поэтому прямые  $BO$  и  $DO$  одновременно обладают указанным свойством. Рассмотрим случай, когда прямые  $AO$  и  $CO$  не совпадают и пересекают границу четырехугольника в точках  $P$  и  $Q$  соответственно (рис. 15). Из условия следует, что треугольники  $AOQ$  и  $COP$  равновелики, а так как их высоты, опущенные из вершины  $O$ , равны, то  $AQ = CP$ . Кроме того,  $\angle AOQ = \angle COP$ , поэтому  $AO \cdot OQ = CO \cdot OP$  и, по теореме косинусов,

$$AO^2 + OQ^2 - 2AO \cdot OQ \cos \angle AOQ = AO^2 = CP^2 = CO^2 + OP^2 - 2CO \cdot OP \cos \angle COP,$$

откуда  $AO + OQ = CO + OP$ . Поэтому либо  $AO = OP$  и  $OQ = CO$ , либо  $AO = OC$  и  $OQ = OP$  (по теореме, обратной теореме Виета) и треугольники  $AOQ$  и  $COP$  равны. Первый случай невозможен (иначе  $AD \parallel CD$ , что неверно). Во втором случае четырехугольник  $ABCD$  симметричен относительно прямой  $BD$  (докажите), откуда прямые  $BO$  и  $DO$  совпадают.

б)  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $108^\circ$  или  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ .

19.  $p + 1$ .

Если  $(p^2)!$  кратно  $(p!)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $n \leq p + 1$ , так как  $p$  входит в разложение числа  $p!$  на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа  $(p!)^n$  – в степени  $n$ ), а в разложение числа  $(p^2)!$  – в степени  $p + 1$ . Докажем, что  $(p^2)!$  делится на  $(p!)^{p+1}$ . Запишем  $p^2$  различных элементов в виде таблицы  $p \times p$ . Две такие таблицы назовем эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк (всего  $p + 1$  перестановка  $p$  объектов). Всего таблиц  $(p^2)!$ , и они разбиваются на классы эквивалентных по  $(p!)^{p+1}$  таблиц в каждом классе, поэтому  $(p^2)!$  делится на  $(p!)^{p+1}$ .

20. Указание. Расположим все «двузначные» числа внутри клеток решетки специального вида, как указано на рисунке 16. Тогда любые два числа, расположенные в соседних (граничащих по отрезку) квадратах, будут отличаться друг от друга на 1, 10 или 11. Докажите, что при любом разбиении

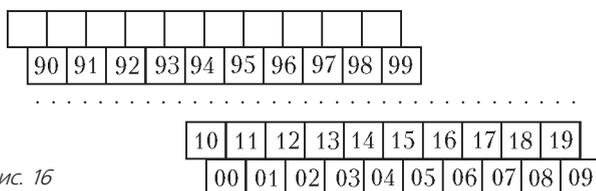


Рис. 16

чисел на две группы найдется путь, идущий по соседним клеткам, проходящий только по числам одной группы и соединяющий либо левый и правый, либо верхний и нижний края решетки.

### ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

#### Первый теоретический тур

##### 7 класс

- $t_{\min} = 48$  мин.
- $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 1,7$  кг.

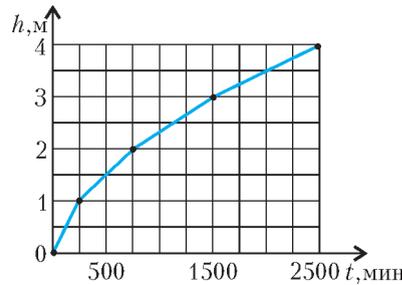


Рис. 17

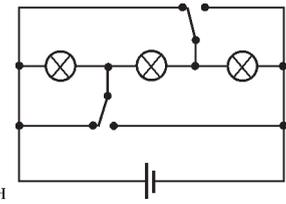


Рис. 18

- См. рис.17;  $t = 41$  ч 40 мин.
- $\rho_{\text{ст}} = \frac{\rho_{\text{в}} M}{M + m - \rho_{\text{в}} V} = 2,5$  г/см<sup>3</sup>;  $\Delta h = \frac{M + m}{\rho_{\text{в}} \pi R^2} \approx 1,17$  см.

##### 8 класс

- 1)  $v = \pi(R - r)$ ; 2)  $F = \frac{mg(R - r)}{4R}$ .

##### 9 класс

- $N_{\max} \approx 7,19$  Вт, при этом все резисторы соединены параллельно.
- $L_{\max} = \sqrt{h^2 + L^2} = 1,5$  м.

##### 10 класс

- $a_{\max} = g \left( \frac{\mu L \cos \alpha}{2L - \mu h} - \sin \alpha \right)$  при условии  $L > \mu h$ .
- $F = p_a S \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}} T_0}{\rho_{\text{л}} T_{\text{к}}} \frac{\rho_{\text{л}} V - m}{\rho_{\text{в}} V - m} \right) \approx 32$  Н.

3.  $\varphi = 0,8\varphi_0$  при удалении любой палочки, а  $E = 0$ ,  $E_0 = \sqrt{3}E_0$  в зависимости от того, какую палочку удалить.

##### 11 класс

1. В воде находится часть объема цилиндра

$$n = \frac{a}{h} - \frac{\rho_{\text{м}} - \rho}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}} = \frac{11}{21}, \text{ а в масле - часть } 1 - n = \frac{10}{21}.$$

Равновесие будет устойчивым, если  $\rho_{\text{м}} \frac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_{\text{в}} \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}$ .

2. Вектор напряженности направлен по пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» и

$$\text{равен } E = \frac{\sigma}{\sqrt{3}\epsilon_0}.$$

#### Второй теоретический тур

##### 8 класс

- См. рис.19.
- $m'_3 = m_3 + \frac{m_3 - m_2}{m_2 - m_1} (m_1 - m'_1) = 42$  г.

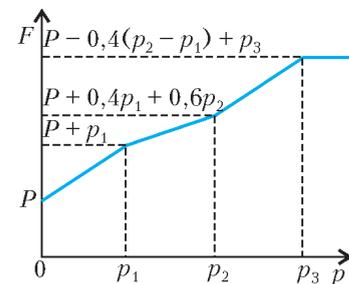


Рис. 19

## 9 класс

1. См. рис.20.

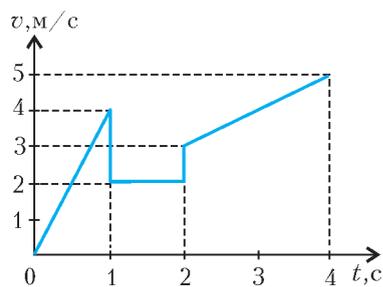


Рис. 20

2. Ускорение направлено вниз и равно

$$a_2 = g \frac{3m_1m_3 + 4m_1m_2 + m_2m_3}{m_1m_3 + 4m_1m_2 + m_2m_3} > g.$$

3.  $x = \frac{\rho_1 h}{\rho_0}$  при  $\rho_1 < \rho_0$ ;  $h \leq x \leq H$  при  $\rho_1 = \rho_0$ ;

$$x = H + \sqrt{2hH \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} - 1 \right)} \text{ при } \rho_0 < \rho_1 \leq \rho_2 = \rho_0 \left( 1 + \frac{h}{2H} \right);$$

$$x = \frac{\rho_1 H}{\rho_0} + \frac{h}{2} \text{ при } \rho_2 < \rho_1 < \rho_3 = \rho_0 \left( 2 - \frac{h}{2H} \right);$$

$$x = 2H \text{ при } \rho_1 > \rho_3.$$

## 10 класс

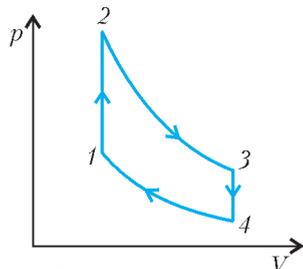


Рис. 21

$$1. t_1 = \frac{vs}{v^2 - u^2} = 2,25 \text{ ч};$$

$$t_2 = \frac{s}{\sqrt{v^2 - u^2}} \approx 2,12 \text{ ч}.$$

$$2. \text{ См. рис.21; } \frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 2.$$

$$3. q_2 \leq q_1 n \sqrt{k}.$$

## 11 класс

1. Мгновенные скорости крайних точек горизонтального диа-

метра диска равны  $v_1 = v \sqrt{\frac{3 - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}$ , наклонены к этому диа-метру под углом  $\beta = \arctg \sqrt{\frac{2}{1 - \sin \alpha}}$  и лежат в плоскости,

перпендикулярной мгновенной оси вращения диска. Эта ось проходит через точку касания диска с горизонтальной плоскостью и точку пересечения вертикальной оси конуса с главной осью симметрии диска, перпендикулярной его плоскости. В верхней половине диска есть целая область точек, движущихся с большей скоростью. В частности, это все точки верхней половины обода диска.

$$2. v_{\min} = \sqrt{2g(x_1 - h) + \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)} \text{ при}$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2} mg \text{ и } x_1 \leq h \leq x_2, v_{\min} = 0 \text{ при}$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} mg \text{ для всех } h \text{ и при } \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2} mg \text{ для}$$

$h < x_1$  и  $h > x_2$ ; здесь  $x_1$  – меньший из корней уравнения

$$\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 mg}{qQ} \text{ и } x_2 \text{ – больший из корней уравнения}$$

$$mgx + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} = mg \frac{R^2 + 2x_1^2}{x_1}.$$

$$3. v_{\max} = \frac{2}{3} v_0, x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{6k}}.$$

4. При  $l < F$  решений нет; при  $F \leq l < R + F$  имеется одно решение:  $d = \frac{Fl}{l - F}$ ; при  $l \geq R + F$  имеются два решения:

$$d_1 = \frac{Fl}{l - F} \text{ и } d_2 = \frac{F(l - R)}{l - R - F}.$$

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
ПО ФИЗИКЕ

1. Скорость и путь третьего жука равны нулю.

$$2. \beta = 60^\circ. \quad 3. A = \frac{k^2 l^3}{3F} + \frac{F^2}{6k}.$$

$$4. a = g \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad 5. V = \frac{\pi H D^2}{8}.$$

$$6. A_{\max} = \frac{3}{2} R T_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right)^2. \quad 7. r_{\min} = R \left( 1 - \frac{1}{1 + q^2 B^2 R / (2mF)} \right).$$

8. Средняя объемная плотность энергии постоянна.

9. Интенсивность света уменьшится вдвое.

журнал ©  
Квант

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Власов, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

## Задача КИМА

Следующая задача – одна из самых популярных в занимательной математике. В середине XIX века ею занимался великий Карл Гаусс, и обычно она носит его имя.

Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?

Очевидно, больше восьми ферзей расставить невозможно, а найти то или иное решение несложно, одно из них представлено на рисунке 1. Гораздо

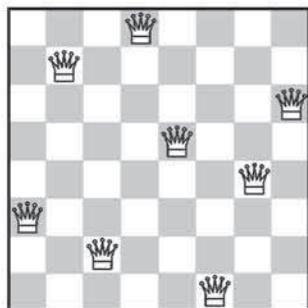


Рис. 1

труднее подсчитать общее число решений, в чем, собственно, и состоит задача. Любопытно, что многие авторы приписывают ее самому Гауссу. На самом деле задача была сформулирована в 1848 году немецким шахматистом М.Беццелем. Доктор Ф.Наук обнаружил 60 решений и опубликовал их спустя два года. Лишь после этого Гаусс заинтересовался задачей и нашел 72 решения, которые сообщил в письме к своему другу астроному Шумахеру. Полный же набор, состоящий из 92 расстановок, получил все тот же Наук в 1850 году. Среди них можно выделить (разными способами) 12 основных, которые не переходят друг в друга при поворотах и зеркальных отражениях доски, а любая другая расстановка возникает из какой-то основной при помощи этих преобразований. Вот один из наборов основных расстановок:

- 1) рис. 1;
- 2) a5, b3, c1, d7, e2, f8, g6, h4;
- 3) a4, b1, c5, d8, e6, f3, g7, h2;
- 4) a4, b2, c5, d8, e6, f1, g3, h7;
- 5) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g1, h5;
- 6) a4, b2, c7, d3, e6, f8, g5, h1;
- 7) a3, b5, c2, d8, e6, f4, g7, h1;
- 8) a4, b1, c5, d8, e2, f7, g3, h6;
- 9) a4, b7, c3, d8, e2, f5, g1, h6;
- 10) a6, b4, c2, d8, e5, f7, g1, h3;
- 11) a4, b8, c1, d5, e7, f2, g6, h3;
- 12) a4, b2, c7, d5, e1, f8, g6, h3.

Остальные 80 получаются из этих 12 при помощи поворотов и отражений доски. Например, из первой расстановки (см. рис.1) при повороте доски по часовой стрелке на  $90^\circ$  возникает следующая расстановка: a3, b6, c8, d2, e4, f1, g7, h5, а при зеркальном отражении (относительно вертикальной линии, разделяющей фланги) – такая: a6, b4, c1, d5, e8, f2, g7, h3. Новые повороты и отражения дают еще пять расстановок, всего с учетом исходной – восемь.

Аналогично, другие основные расстановки порождают восемь решений, исключение – для второй, которая дает только одну при повороте и две при отражении, итого четыре.

Итак, всего имеем  $11 \times 8 + 1 \times 4 = 92$  расстановки восьми ферзей, не угрожающих друг другу.

Существует множество обобщений задачи Гаусса. Самое распространенное из них – для доски  $n \times n$ . Доказано, что для любых  $n$ , кроме 2 и 3, на доске  $n \times n$  можно расставить  $n$  не угрожающих друг другу ферзей, правда число решений в общем случае не известно.

Весьма интересное обобщение придумал американский математик С. Ким. Расставить на доске наибольшее число ферзей, чтобы каждый из них нападал ровно на  $p$  других.

Условие  $p = 0$  означает, что ферзи не угрожают друг другу, т.е. мы приходим к классической задаче, искомое число равно восьми (см. рис.1). Для  $p = 1$  наибольшее число равно 10 (рис. 2,а). На доске уместилось пять «изолированных» пар ферзей, каждый из которых нападает только на ферзя своей пары. Для  $p = 2$  искомое число равно 14 (рис.2,б). Полное решение задачи обнаружили украинские математики С.Белый и Е.Ровенский. Они доказали, что для  $p = 3$  число ферзей равно 18 (рис.2,в), для  $p = 4$  оно равно 21 (рис.2,г), а для  $p > 4$  необходимых расстановок не существует.

С помощью компьютера Белый и Ровенский исследовали задачу для доски  $n \times n$  при разных  $n$  и  $p$ . В результате они построили таблицу, где для всех  $n \leq 8$  и возможных  $p$  указано наибольшее число ферзей, каждый из которых атакует ровно  $p$  других:

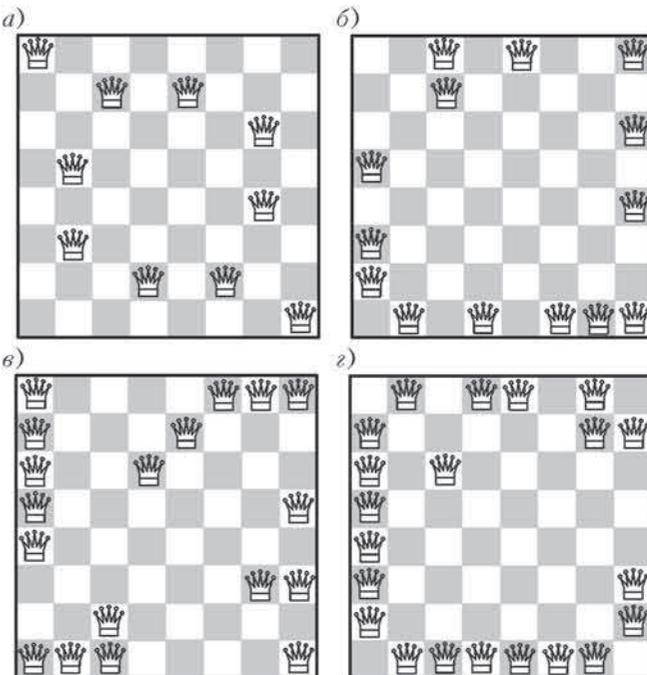


Рис. 2

$n \setminus p$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	15
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

Столбец  $p = 0$ , очевидно, получается из задачи о расстановке  $n$  ферзей на доске  $n \times n$ , строка  $n = 8$  ( $1 \leq p \leq 4$ ) проиллюстрирована на рисунке 2. Вот еще один случай:  $n = 6$ ,  $p = 1$ ; здесь имеются две основные расстановки наибольшего числа ферзей – восьми, обе показаны на рисунке 3. Число

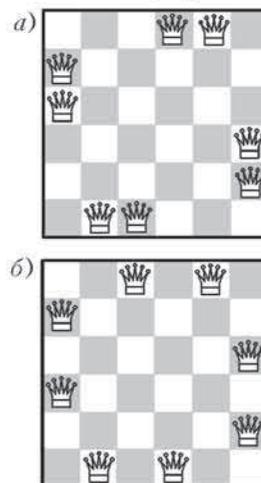
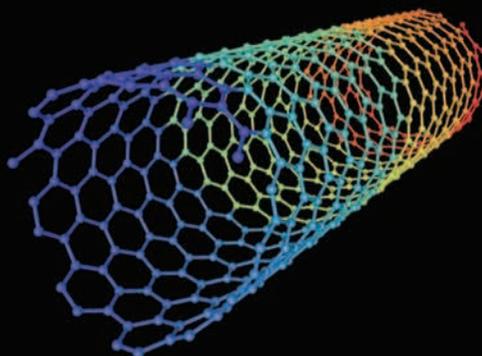
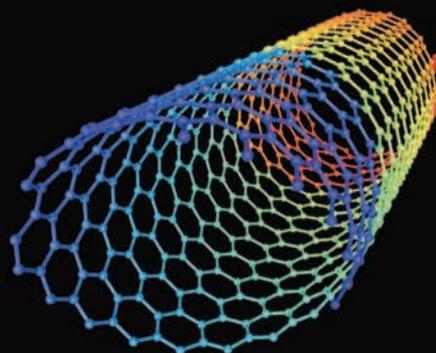
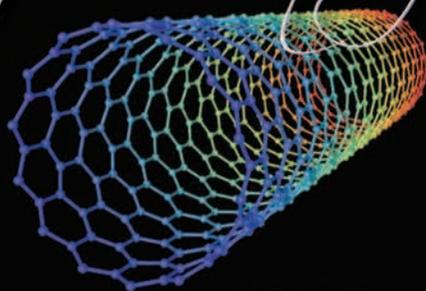


Рис. 3

необходимых расстановок найдено для всех элементов таблицы.

# Игрушки с физикой

ПОЧЕМУ  
УГЛЕРОДНЫЕ  
НАНОТРУБКИ  
ПРОЧНЕЕ  
СТАЛИ ?



Углеродная нанотрубка представляет собой гигантскую молекулу из атомов углерода, которая имеет форму цилиндрического каркаса, т.е. трубки радиусом порядка нанометра. Отсюда и ее название — нанотрубка.

*(Продолжение — на странице 7 внутри журнала)*



F

