

Оптические задачи на вступительных экзаменах

В. МОЖАЕВ

ЗАДАЧА 1. ДВА ЛУЧА СИММЕТРИЧНО ПЕРЕСЕКАЮТ главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $d = 7,5$ см от линзы под углом $\alpha = 4^\circ$ (рис.1). Определите угол β между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

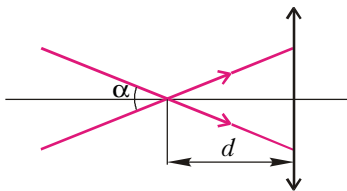


Рис. 1

Построим ход одного из данных лучей после преломления в линзе (рис.2). Через оптический центр линзы (на рисунке 2 это точка O) проведем побочную оптическую ось OC, параллельную данному лучу AB. Параллельные лучи после прохождения собирающей линзы пересекаются в ее фокальной плоскости. Очевидно, что точкой пересечения данных лучей будет точка C, которая одновременно принадле-

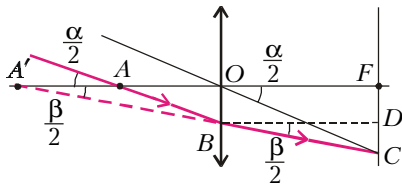


Рис. 2

жит оси OC и фокальной плоскости FC. Продолжим луч BC влево до пересечения с главной оптической осью линзы в точке A'. Угол BA'O является половиной искомого угла β . Проведем линию BD параллельно главной оптической оси. Угол CBD также равен $\beta/2$. Отрезок FC равен $F \operatorname{tg}(\alpha/2)$, где F – фокусное расстояние нашей линзы. А отрезок FD равен отрезку OB, который в свою очередь равен $d \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Из треугольника CBD найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{FC - FD}{F} = \frac{F - d}{F} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{2} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 1^\circ.$$

Эту задачу можно решать и с использованием формулы линзы. Так как точка A расположена ближе фокуса линзы, ее изображение будет мнимым. Запишем формулу линзы и найдем расстояние f от мнимого изображения A' точки A до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ и } f = \frac{dF}{F - d}.$$

Из треугольника A'OB (см. рис.2) находим $\operatorname{tg}(\beta/2) = OB/f$. Поскольку $OB = d \operatorname{tg}(\alpha/2)$, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{F - d}{F} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 2. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 60$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см. Линзу сместили вверх на $L = 2$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить источник света, чтобы его изображение вернулось в старое положение?

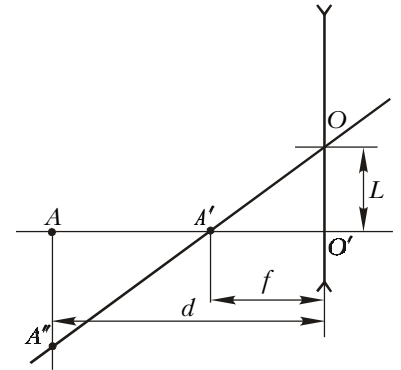


Рис. 3

Поскольку линзы смещают в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси линзы, а изображение источника (A') должно остаться в прежнем положении, расстояние от источника (A) до плоскости линзы также должно сохраниться. Все это будет выполнено, если оптический центр линзы (O), изображение источника (A') и новый источник (A'') будут лежать на одной прямой. На рисунке 3 это прямая OA''. Следовательно, источник надо сместить вниз на расстояние AA''.

По формуле линзы найдем расстояние f от изображения источника до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \text{ и } f = \frac{dF}{d + F}.$$

Из подобия треугольников AA'A'' и A'O'O' можно записать

$$\frac{AA''}{L} = \frac{d - f}{f}.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$AA'' = L \left(\frac{d}{f} - 1 \right) = \frac{Ld}{F} = 8 \text{ см}.$$

Задача 3. Изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d = 60$ см от нее, получено на экране. Между линзой и источником вставили плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной $a = 3$ см, перпендикулярную главной оптической оси линзы. Чтобы снова получить четкое изображение источника, экран пришлось передвинуть вдоль оптической оси на $\Delta = 1$ см. Определите показатель преломления пластинки, если фокусное расстояние линзы $F = 30$ см.

Сначала рассмотрим прохождение лучей от точечного источника A через плоскопараллельную пластинку (рис.4). Направим один из лучей под произвольным углом α к главной оптической оси линзы. После преломления на двух границах пластинки луч выйдет параллельно падающему

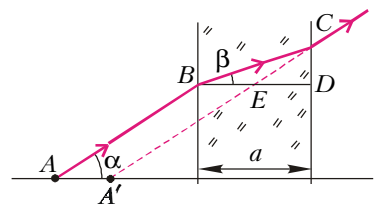


Рис. 4

лучу. Из треугольника BCD найдем длину стороны BC :

$$BC = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Из треугольника BCE по теореме синусов можно записать

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha},$$

откуда получим

$$BE = a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin \alpha}.$$

Для параксиальных лучей, т.е. для лучей, идущих под малыми углами к главной оптической оси линзы, можно считать, что $\sin(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$, $\sin \alpha = \alpha$, а $\cos \beta = 1$. В этом приближении

$$BE = a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Расстояние BE равно смещению источника по направлению к линзе. До помещения пластины источник и его изображение находились на двойном фокусном расстоянии от линзы. После установления пластины источник приблизился к линзе на расстояние $AA' = BE$, а изображение отодвинулось от линзы на Δ . По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d - AA'} + \frac{1}{d + \Delta} = \frac{1}{F},$$

или

$$d - a \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{F(d + \Delta)}{d + \Delta - F}.$$

Разрешая это равенство относительно n , получим

$$n = \left(\frac{(a - d)(d + \Delta - F) + F(d + \Delta)}{a(d + \Delta - F)} \right)^{-1} = \frac{31}{21} \approx 1,48.$$

Задача 4. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см (рис. 5). По потолку AB ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $d = 220$ см. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы OO' ?

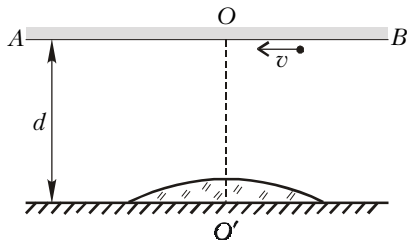


Рис. 5

Пусть муха в некоторый момент находится на небольшом расстоянии OM от главной оптической оси линзы (рис. 6). По формуле линзы мы можем найти, на каком расстоянии от линзы находится изображение мухи M' :

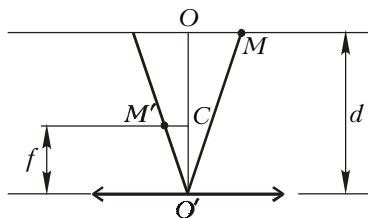


Рис. 6

Здесь f – расстояние от изображения мухи до линзы, а двойка в чис-

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}, \text{ и}$$

$$f = \frac{dF}{2d - F} = 22 \text{ см.}$$

лителе правой части формулы учитывает двойной проход лучей через линзу.

Из подобия треугольников $OO'M$ и $M'CO'$ следует, что $d/f = OM/M'C$. Очевидно, что $OM/M'C = v/u$, где u – скорость изображения мухи. Следовательно,

$$u = v \frac{f}{d} = 0,2 \text{ см/с.}$$

Задача 5. С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/2$. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 9$ см от нее перпендикулярно главной оптической оси линзы установили плоское зеркало. Изображение спички в системе линза – зеркало получилось с увеличением $\Gamma = 1/4$. Определите фокусное расстояние линзы.

Рассмотрим сначала первый случай, когда зеркала нет, а с помощью рассеивающей линзы получено изображение спички с увеличением Γ_1 . Обозначим расстояние от спички до линзы через d , а от изображения спички до линзы через f . По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где F – фокусное расстояние линзы. Умножив каждый член этого равенства на f , получим

$$\frac{f}{d} - 1 = -\frac{f}{F}.$$

С учетом того, что $f/d = \Gamma_1$, мы получаем однозначную связь между расстоянием от изображения до линзы и увеличением:

$$f = F(1 - \Gamma_1).$$

Мнимое изображение B точки спички B_0 в линзе (рис. 7) будет являться предметом для плоского зеркала. Расстояние от этого предмета до зеркала равно $f + l$. Изображение B' этого предмета в зеркале находится также на расстоянии $f + l$ от зеркала. Расстояние от изображения B' до линзы равно $d' = f + 2l$. Обозначим расстояние от изображения B'' в линзе через f' и снова воспользуемся формулой линзы:

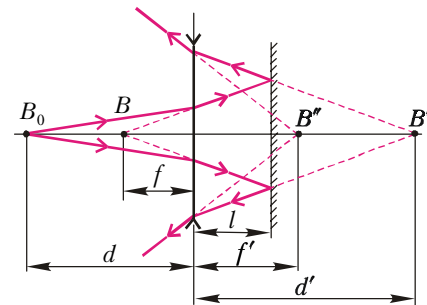


Рис. 7

$$\frac{1}{f + 2l} - \frac{1}{f'} = -\frac{1}{F}.$$

Увеличение в этом случае равно $\Gamma_2 = \frac{f'}{f + 2l}$. С другой стороны, $\Gamma_2 = \Gamma/\Gamma_1$. Умножим все члены в формуле линзы на $f + 2l$, подставим ранее найденное выражение для f и получим

$$F = \frac{2l}{\Gamma_1 + \Gamma_1/\Gamma - 2} = 36 \text{ см.}$$

Задача 6. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см. Через такую линзу рассматривается точечный источник света S , расположенный на расстоянии $d = R/2$ от плоской поверхности полушара (рис. 8). На каком расстоянии от этой поверхности наблю-

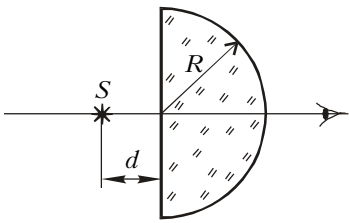


Рис. 8

Решение задачи разобьем на два этапа. На первом этапе рассмотрим падение лучей от источника на плоскую границу раздела: справа находится стекло с показателем преломления n , а слева – воздушная среда (рис.9).

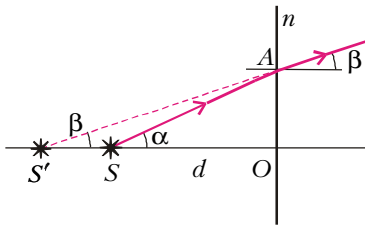


Рис. 9

найдем из треугольника $S'AO$:

$$S'O = \frac{AO}{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}} = d \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = d \frac{\alpha}{\beta} = dn.$$

Полученный результат позволяет нам заменить реальный источник S , расположенный в воздушной среде, мнимым источником S' , расположенным в стекле. Эта эквивалентная ситуация изображена на рисунке 10.

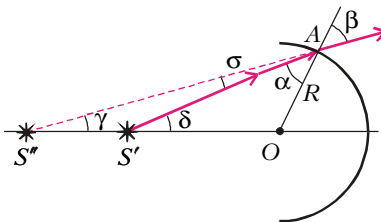


Рис. 10

Слева от сферической границы находится стеклянная среда с показателем преломления n , а справа – воздушная среда. Из точки S' проведем произвольный луч под углом δ к горизонту. Обозначим угол падения на границу двух сред через α , а угол преломления через β . По закону преломления,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = n.$$

Из треугольника $S'AO$ по теореме синусов можно записать

$$\frac{R}{S'O} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Подставляя сюда выражение для $S'O$, получим связь между углами δ и α :

$$\delta = \frac{2\alpha}{n}.$$

Угол σ , очевидно, равен разности углов β и α :

$$\sigma = \beta - \alpha = \alpha(n - 1).$$

Углы σ и γ в сумме равны углу δ , поэтому

$$\gamma = \delta - \sigma = \frac{2\alpha}{n} - \alpha(n - 1) = \alpha \frac{2 - n(n - 1)}{n}.$$

Теперь рассмотрим треугольник $S''AO$. По теореме синусов можно записать

$$\frac{S''O}{R} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{n^2}{2 - n^2 + n}.$$

датель увидит изображение источника света? Указание: для малых углов $\text{tg } \alpha = \sin \alpha = \alpha$.

Сразу оговоримся, что мы будем рассматривать параксиальные лучи, т.е. лучи, которые распространяются под малыми углами к главной оптической оси линзы. Решение задачи разобьем на два этапа. На первом этапе рассмотрим падение лучей от источника на плоскую границу раздела: справа находится стекло с показателем преломления n , а слева – воздушная среда (рис.9). Из треугольника SAO находим

$$AO = d \text{tg } \alpha,$$

где α – произвольный угол. Расстояние $S'O$

Отсюда искомое расстояние будет равно

$$S''O = R \frac{n^2}{2 - n^2 + n} = 18 \text{ см}.$$

Данная задача имеет другое решение, которое принципиально отличается от приведенного выше. Для параксиальных лучей стеклянную полусферу можно рассматривать как суперпозицию стеклянной плоскопараллельной пластинки толщиной R и плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны R . Вывод выражения для фокуса F такой системы выходит за рамки школьной программы, потому мы приведем лишь окончательный результат:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n - 1}{R}$$

(с одной стороны радиус кривизны поверхности линзы равен R , с другой стороны мы имеем плоскую поверхность, т.е. радиус кривизны бесконечно большой). Проведите этот способ решения и сравните результат с полученным выше ответом.

Упражнения

1. Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось рассеивающей линзы на расстоянии $d = 24$ см от линзы под углом $\alpha = 6^\circ$ (рис.11). Определите угол между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы $F = 12$ см.

2. Сходящийся пучок света, падающий на рассеивающую линзу симметрично относительно главной оптической оси, собирается в точку на экране, находящимся на расстоянии $f = 90$ см от линзы.

Если перед линзой перпендикулярно главной оптической оси разместить плоскопараллельную оптически прозрачную пластинку, то из линзы будет выходить параллельный пучок света. Чему равна толщина пластинки l , если ее показатель преломления $n = 1,5$? Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

3. На столе лежит плоское зеркало, к которому плотно прилегает тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 45$ см. Над оптической системой параллельно плоскости зеркала на расстоянии $d = 4F$ пролетает комар со скоростью $v = 9$ см/с. На каком расстоянии от зеркала находится изображение комара в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения комара в тот момент, когда комар будет пересекать главную оптическую ось линзы?

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см получено мнимое изображение иголки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 2$. По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение иголки в системе линза – зеркало получилось с увеличением $\Gamma_2 = 3$. Определите расстояние от линзы до зеркала.

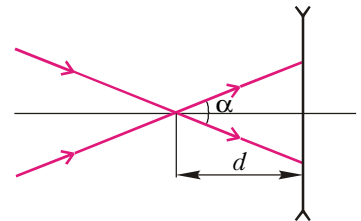


Рис. 11