

# Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8 \sin^4 x}{4(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{(1-x)^3} \left( \frac{x+6}{3+2x-x^2} \right) + \frac{1}{3} \leq 0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1, \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$$

4. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) окружность касается основания  $AD$ , боковых сторон  $AB$  и  $CD$  и проходит через точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Найдите радиус окружности, если  $AD : BC = 7 : 5$ , а площадь трапеции  $S = 4$ .

5. Дано число  $a = 3^{2002} + 7^{2002}$ . Найдите последнюю цифру числа  $a$  и остаток от деления числа  $a$  на 11.

6. Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  равна 2. Плоскость  $\alpha$ , параллельная прямым  $SB$  и  $AD$ , пересекает пирамиду так, что в сечении можно вписать окружность, причем периметр сечения равен  $\frac{48}{7}$ . Найдите:

1) в каком отношении плоскость  $\alpha$  делит ребра пирамиды; 2) отношение объемов частей, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает пирамиду; 3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости  $\alpha$ .

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} y + \frac{x^3}{y^3} = \frac{y^3}{x} + \frac{x^2}{y}, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{500 + 30x - 2x^2}{2x + 5}} > 10 - |x|.$$

4. Один из углов треугольника равен  $\pi/4$ , радиус вписанной в него окружности равен  $2(2 - \sqrt{2})$ , а радиус описанной вокруг него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.

5. Найдите все значения  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} \log_3(2-x-y) + 2 = \log_3(17-8x-10y), \\ (x-a)^2 + x = y + a + 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. Расстояние от центра  $O$  шара радиуса  $6\sqrt{2}$ , описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до боковой грани равно 3. Найдите: 1) высоту пирамиды; 2) расстояние от точки  $O$  до бокового ребра пирамиды; 3) радиус вписанного в пирамиду шара.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

2. Решите неравенство

$$2 \log_{2x-8} (\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}) < 1.$$

3. Окружность с центром на стороне  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проходит через точку  $A$ , пересекает отрезок  $AC$  в точке  $F$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $G$  и пересекает отрезок  $AB$  в точке  $E$ , причем  $GC/BG = \sqrt{3} - 1$ ,  $FC = a$ . Найдите радиус окружности.

4. Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  равна  $4\sqrt{2}$ , угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания равен  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ . Точка  $M$  – середина ребра  $SD$ , точка  $K$  – середина ребра  $AD$ . Найдите: 1) объем пирамиды  $CMSK$ ; 2) угол между прямыми  $CM$  и  $SK$ ; 3) расстояние между прямыми  $CM$  и  $SK$ .

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(a - 6 + |x - 1|)(a - x^2 + 2x) = 0$$

имеет: 1) ровно три корня, 2) ровно два корня.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Шайба массой  $m$  скользит со скоростью  $v_0$  по гладкой горизонтальной поверхности стола, попадает на покоящийся клин массой  $2m$ , скользит по нему без трения и отрыва и