Как узреть свой затылок вдали

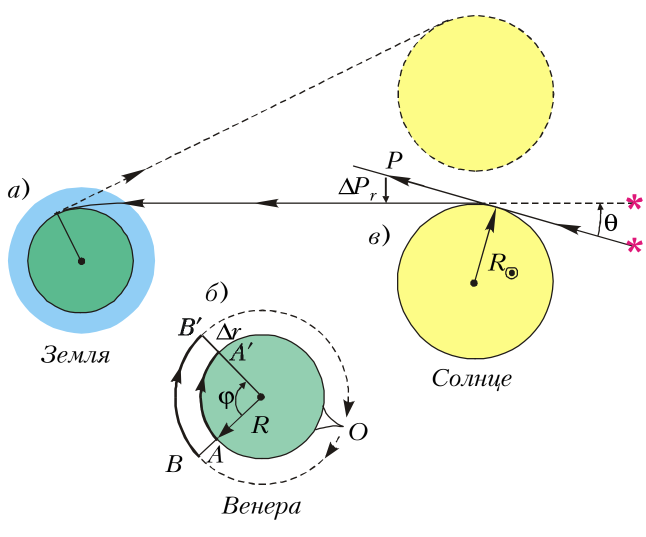
А.СТАСЕНКО

...Видишь, с какой быстротой восходящее солнце внезапно
Все облекает кругом потоками яркого света!..
Но и тот жар, что идет от солнца, и свет его ясный
Не в пустоте совершают свой путь; и двигаться тише
Свет принужден, пока он рассекает воздушные волны...

Лукреций

Очень легко наблюдать «преломление» чайной ложки в стакане воды. Еще древние греки пытались получить количественное выражение закона преломления. В случае прозрачных жидкостей это явление наблюдается легко, поскольку коэффициент преломления n для них значителен – например, скорость света $c_в$ в воде в $4/3$ раза меньше, чем скорость света c в вакууме: $n = c/c_в = 4/3$. В газах этот коэффициент значительно ближе к единице – так, в воздухе он отличается от единицы где-то в четвертом знаке. Но и это отличие вполне ощутимо: за счет искривления солнечных лучей в атмосфере мы видим Солнце раньше его «геометрического» восхода и позднее захода (см. рисунок). Таким образом в сутки набирается дополнительно несколько «лишних» минут светового дня, а за год – несколько суток, что немаловажно для колхозных полей и личных огородов. Это явление называется *атмосферной рефракцией.* Ее причина понятна: атмосфера с приближением к Земле становится все плотнее, а лучи отклоняются в сторону слоев с бо́льшим коэффициентом преломления.

А нельзя ли вообразить планету с такой атмосферой, в которой луч искривляется настолько сильно, что возвращается в исходную точку? Тогда, в принципе, можно было бы увидеть свою спину вдалеке (см. рисунок *б*; луч $OBB'O$). Правда, очень вдалеке, на расстоянии порядка $2\pi R$, где R – радиус планеты. Такое явление уместно назвать *сверхрефракцией.*



Для того чтобы фронт волны AB после поворота радиуса-вектора на угол φ остался перпендикулярным поверхности планеты ($A'B'$), нужно, чтобы участки лучей AA' и BB' проходились волной за одно и то же время:

$$t = \frac{BB'}{c(R+\Delta r)} = \frac{AA'}{c(R)},$$

или

$$BB' \cdot n(R+\Delta r) = AA' \cdot n(R), \qquad (1)$$

где $c(R+\Delta r)$ и $n(R+\Delta r) = n(R) + \Delta n$ – скорость волны и коэффициент преломления на высоте Δr. Поскольку $AA' = R\varphi$, $BB' = (R+\Delta r)\varphi$, из выражения (1) получим

$$(R+\Delta r)\varphi(n(R)+\Delta n) = R\varphi n(R).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной второго порядка ($\Delta r \Delta n \ll 1$), получим простое уравнение

$$-\frac{\Delta n}{n\Delta r} = \frac{1}{R}. \qquad (2)$$

Значит, относительная убыль коэффициента преломления, отнесенная к приращению высоты, должна быть равной кривизне поверхности планеты (обратному значению ее радиуса).

Но как коэффициент преломления связан со свойствами атмосферы? Разумно предположить, что его отличие от единицы (это значение для вакуума) пропорционально концентрации N молекул: $n - 1 = \alpha N$, где α – некоторый коэффициент. Следовательно,

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\alpha \Delta N}{n} \approx \alpha \Delta N \qquad (3)$$

(так как само значение n для газов очень близко к единице). Поскольку размерность концентрации молекул $[N] = м^{-3}$, коэффициент α должен иметь размерность объема: $[\alpha] = м^3$. Объема чего? Ну конечно же, он как-то должен быть связан с объемом молекул газов, входящих в состав атмосферы.

Возьмем Землю. Для воздуха (из соответствующих таблиц) $\alpha N \approx 3 \cdot 10^{-4}$, $N = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ $м^{-3}$; значит, $\alpha \approx 10^{-29}$ $м^3$. Диаметр молекулы азота (основной компонент воздуха) равен $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м, ее объем составляет

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4\pi \cdot 27 \cdot 10^{-30}}{3 \cdot 8}\ м^3 \approx 4\pi \cdot 10^{-30}\ м^3 \sim \alpha.$$

Следовательно, можно считать, что произведение αN есть суммарная доля объема, занятого («вытесненного») самими молекулами.

А что творится, например, на Венере? Там имеется горячая ($T \approx 800$ К) и плотная ($p \approx 100$ атм) атмосфера углекислого газа (его молярная масса равна $44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Концентрация молекул у поверхности равна

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{100 \cdot 10^5}{1{,}4 \cdot 10^{-23} \cdot 800}\ м^{-3} \sim 10^{27}\ м^{-3}$$

(здесь k – постоянная Больцмана). Радиус молекул углекислого газа в 1,25 раза больше, чем у азота; значит, объем больше почти в два раза, и $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-29}$ $м^3$. Итак, у поверхности Венеры имеем $\alpha N \approx 0{,}02$, что на два порядка больше, чем для атмосферы Земли.

Далее, из условия равновесия столба газа высотой Δr и сечением S:

$$-\Delta p S = N m g \Delta r S$$

и из выражения для давления газа:

$$p = NkT$$

можно получить

$$-\frac{\Delta N}{\Delta r} = N\frac{mg}{kT}\,. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) найдем окончательно

$$-\frac{\Delta n}{n\Delta r} \approx \alpha N\frac{mg}{kT}\,.$$

Подставляя сюда значения нужных величин для обеих планет, получим следующую таблицу (здесь $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг – масса протона):

	m/m_p	T, K	g, м/с^2	R, м	$1/R$, см$^{-1}$	$\Delta n/n\Delta r$, м$^{-1}$
Земля	29	300	9,8	$6{,}4\cdot 10^6$	$1{,}6\cdot 10^{-7}$	$3{,}4\cdot 10^{-8}$
Венера	44	800	8,5	$6{,}2\cdot 10^6$	$1{,}6\cdot 10^{-7}$	$1{,}1\cdot 10^{-6}$

Из последнего столбца следует, что кривизна луча на уровне Земли меньше, чем кривизна поверхности планеты, в то время как в атмосфере Венеры луч «кривее» ее поверхности. Это явление и называют сверхрефракцией.

Напомним, что при вычислениях использовалось значение концентрации молекул у поверхности планеты. Поднимаясь все выше – в горы или на аэростате, – можно найти такую точку O над поверхностью Венеры, что луч, выпущенный горизонтально, возвратится к нам, обогнув планету. И осуществится мечта: мы увидим-таки свой затылок далеко впереди. Если, конечно, пренебречь поглощением света в атмосфере.

Рефракция имеет место и в атмосфере Солнца (фотосфере). Казалось бы, какое нам дело до той рефракции? А вот и есть дело. Ученые как-то решили понаблюдать, как свет звезды, заходящей за диск Солнца, отклоняется в поле тяготения. Ведь каждый фотон обладает массой $h\nu/c^2$ (h – постоянная Планка, ν – частота); следовательно, пролетая у поверхности гравитирующего тела, он должен испытывать отклонение в сторону его центра.

Оценим прежде всего порядок величины этого угла отклонения θ. Очевидно, что наибольшая сила, действующая на фотон, будет на самом краю солнечного диска:

$$F_{\max} = -G\left(\frac{h\nu}{c^2}\right)\frac{M_\odot}{R_\odot^2}\,,$$

где G – гравитационная постоянная, $\odot$ – астрономический знак Солнца. Очевидно также, что наиболее существенное отклонение фотон будет испытывать не вдалеке, а где-то в пределах расстояний, сравнимых с размерами самого Солнца, и за время $\Delta t \sim 2R_\odot/c$. Таким образом, радиальное изменение импульса фотона будет равно

$$\Delta P_r = F_{\max}\Delta t\,.$$

Значит, искомый угол (а он заведомо мал) будет порядка (см. рисунок *в*)

$$\theta \sim \frac{\Delta P_r}{P} = \frac{F_{\max}\Delta t}{h\nu/c} \sim -G\frac{2M_\odot}{c^2 R_\odot}\,.$$

Интересно, что он одинаков для фотонов любой частоты. Подставляя численные значения ($M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг, $R_\odot = 0{,}7\cdot 10^9$ м), найдем

$$|\theta| \sim \frac{2\cdot 2\cdot 10^{30}\ \text{кг}\cdot 6{,}67\cdot 10^{11}\ \text{м}^3/\text{кг}\cdot c^2}{\left(3\cdot 10^8\ \text{м/с}\right)^2\cdot 0{,}7\cdot 10^9\ \text{м}} = 4{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{рад} = 0{,}87''$$

(меньше одной угловой секунды). Значение, предсказываемое общей теорией относительности (ОТО), вдвое больше: $\theta_{\text{ОТО}} = 1{,}7''$ (это объясняется искривлением пространства около гравитирующего тела – что не учитывает ньютоновская теория тяготения).

Конечно, измерение этого угла принципиально важно для проверки теории. Но дело в том, что неоднородность атмосферы Солнца может как-то маскировать исследуемый эффект. Рассмотрим поэтому и рефракцию электромагнитной волны в плазме фотосферы.

Ясно, что электрическое поле электромагнитной волны $\vec{E}$ стремится сместить положительные заряды вдоль своего направления, отрицательные заряды (электроны) – в противоположном направлении. Но первые гораздо массивнее вторых (даже самый легкий из ионов – протон – почти в 2000 раз «тяжелее» электрона), так что смещением ионов можно пренебречь. Сила же, действующая на электрон, равна $-eE(t)$. Пусть электрическое поле в волне колеблется с частотой ω, так что в рассматриваемой точке его можно записать, например, в виде

$$E(t) = E_m \sin\omega t\,,$$

где E_m – амплитуда. Это поле стремится много раз в секунду ($\nu = \omega/(2\pi)$) «таскать» электроны вверх-вниз. Но каждый из них обладает массой m_e, которая есть мера инертности, т.е. нежелания смещаться из положения равновесия. Если в единице объема находится N_e электронов, их массовая плотность равна $m_e N_e$. Понятно, что все перечисленные факторы как-то должны войти в окончательное выражение для скорости распространения волны в плазме $c_{\text{п}}$. Оставляя в стороне строгий вывод (в него входят еще рассуждения о различии *фазовой* и *групповой* скоростей волны), приведем окончательный результат:

$$c_{\text{п}} = c\sqrt{1-\frac{\omega_*^2}{\omega^2}}\,,$$

где в выражение для ω_* (*плазменной* частоты) вошли перечисленные выше параметры:

$$\omega_*^2 = \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \qquad (5)$$

(множитель ε_0 свидетельствует об использовании Международной системы единиц). Значит, коэффициент преломления в этом случае равен

$$n = \frac{c}{c_{\text{п}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\omega_*^2/\omega^2}} > 1\,. \qquad (6)$$

И значит, электромагнитная волна, проходя у края диска Солнца, должна отклоняться от «прямой линии». Таким образом, искомый эффект, действительно, может быть замаскирован атмосферной рефракцией.

Но можно подобрать такие частоты ω, на которых рефракция была бы несущественной. В самом деле, плазменная частота зависит от концентрации электронов (5), а последняя – от высоты над поверхностью Солнца. Следовательно, можно найти относительное приращение $-\dfrac{\Delta n}{\Delta r}$ (продифференцировав (6) при фиксированном значении ω или графически) и потребовать, чтобы эта величина была много меньше, чем кривизна $1/R_\odot$, – точно так же, как это было сделано для Земли и Венеры. А отсюда и можно найти допустимые значения ω. Но эту работу предоставим сделать перед сном самому Читателю.