«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Покажем, что число 99, которое мог задумать папа, удовлетворяет условию задачи. Если мама задумала число $\overline{xy}$, то $99\cdot\overline{xy}=(100-1)\overline{xy}=\overline{xy00}-\overline{xy}$. Сумма цифр этого числа равна

$$x+(y-1)+9-x+10-y=18.$$

Предположим, папа задумал другое натуральное число p, $p\neq 99$. Если при этом мама задумала число 1, то сумма цифр числа $p\cdot 1$ должна равняться 18, а этого быть не может. Итак, число 99 единственно возможное – именно его и записал папа.

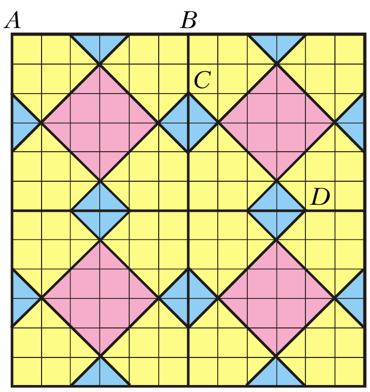

Рис. 1

2. Такие палочки найдутся. Предположим, каждые две палочки из двадцати различаются по длине более чем на 0,5 см. Тогда разница длин наибольшей и наименьшей палочек была бы не меньше чем $0{,}5\text{см}\times 19=9{,}5\text{см}$, что противоречит условию.

3. Отразив исходный квадрат со стороной AB симметрично относительно его сторон и одной из угловых вершин так, как показано на рисунке 1, замечаем, что квадрат со стороной AB и квадрат со стороной CD равносоставлены. Отсюда $AB = CD = 3$ см.

4. Обозначим числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Тогда

$$x_1^5+x_2^5+\ldots+x_{10}^5 = x_1^5+x_2^5+\ldots+x_{10}^5-(x_1+x_2+\ldots+x_{10})=$$
$$=\left(x_1^5-x_1\right)+\left(x_2^5-x_2\right)+\ldots+\left(x_{10}^5-x_{10}\right).$$

В каждой скобке в последнем выражении стоят числа, оканчивающиеся нулем. Следовательно, сумма $x_1^5+x_2^5+\ldots+x_{10}^5$ делится на 10 и, значит, делится на 5.

5. Это 2002. Заметим, что сумма любых k последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, …, $n+k-1$ равна $\frac{(2n+k-1)k}{2}$ и, следовательно, при нечетном k делится на k. Тогда из того, что искомое число представимо в виде суммы и 7, и 11, и 13 последовательных натуральных чисел, следует, что оно делится и на 7, и на 11, и на 13, а следовательно, и на $7\times 11\times 13=1001$. Наименьшее из таких чисел равно 1001, но оно представимо в виде суммы двух последовательных натуральных чисел: 1001 = 500 + 501. А вот следующее по величине число – 2002 – как раз невозможно представить в виде такой суммы (потому что среди двух последовательных натуральных чисел одно четное, второе нечетное, и сумма их также нечетна).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Нет, только ионы и нераспавшиеся молекулы.
2. Нет. Например, медный электрод при погружении в раствор медного купороса заряжается положительно.
3. В каждой единице объема электролита находится столько же положительных зарядов, сколько и отрицательных, так что в среднем электролит не заряжен.
4. Сила тока сначала будет расти, затем останется постоянной.
5. Безводная серная кислота не является проводником. В присутствии же проводящей разбавленной кислоты, из-за наличия в железе примесей, в растворе могут возникать местные токи, приводящие к коррозии сосуда.
6. Так как при электролизе через обе ванны пройдет одинаковый заряд, в первой ванне, где находятся одновалентные ионы меди, потребуется вдвое большее количество ионов для его переноса, чем во второй ванне, где валентность ионов меди равна двум. Следовательно, на катоде первой ванны выделится вдвое больше меди.
7. При угольных электродах электролиз будет идти, пока из раствора не уйдут все ионы меди; при медных – пока не растворится анод.
8. На месте выделенных в единицу времени на катоде положительных ионов и удаленных от него стольких же отрицательных ионов образуется такое же количество ионов обоих знаков из распавшихся молекул электролита (вследствие нарушения динамического равновесия). Положительные ионы также выделяются на аноде, в результате чего суммарный заряд, перешедший на катод за единицу времени, будет равен полному току.
9. Влага на руках всегда содержит соли, поэтому является электролитом с хорошей проводимостью и создает хороший контакт между проводами и телом. Вот почему за электрические провода опаснее браться мокрыми руками.
10. У выступов на поверхности металла напряженность электрического поля больше, чем у гладкой поверхности. При изменении направления тока, когда металл оказывается анодом, выступы растворяются быстрее и поверхность металла выравнивается.
11. Если аккумулятор разряжается, то разность потенциалов на его клеммах меньше ЭДС на величину падения напряжения на его внутреннем сопротивлении; если заряжается, то разность потенциалов на такую же величину больше ЭДС.
12. Внутреннее сопротивление старой батарейки велико. Вольтметр потребляет очень маленький ток, поэтому падение напряжения внутри батарейки при его подключении невелико. Но при подключении лампочки оно становится сравнимым с ЭДС, ток через нагрузку падает, и лампочка не загорается.
13. См. рис.2.

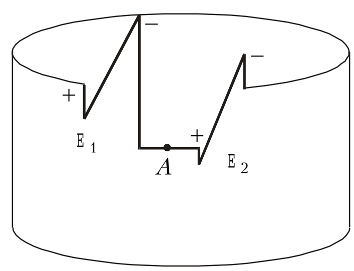

Рис. 2

14. Если внутеннее сопротивление второго аккумулятора велико, а ЭДС мала по сравнению с первым аккумулятором.
15. Если $\mathcal{E}_1$ значительно меньше $\mathcal{E}_2$, то ток, протекающий через первый элемент, направлен от B к A. При увеличении сопротивления R_1 ток на участке BR_1A уменьшается, что приводит к росту тока I на участке BRA.
16. При противоположном подключении на рельсах, из-за электролиза грунтовой влаги, выделялся бы кислород, что приводило бы к нежелательной коррозии.
17. Внутреннее сопротивление элемента невелико, а у электростатической машины оно достигает сотен миллионов ом.

Микроопыт

Действуйте по «методу Вольты» – коснувшись выводов языком, вы ощутите характерное пощипывание, будто от чего-то кислого.

Целая и дробная части числа

1. $[x]=-[x]$.

2. а) $\left(-1;\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ 4\right)$; б) $\left(\frac{13}{3};\ \frac{16}{3}\right]$.

3. Пусть $a=[a]+\alpha$, где $\alpha\ne 0$, а $x=1-\alpha$. Тогда $[x+a]=1+[a]$, $[x]+[a]=[1-\alpha]+[a]=[a]$, т.е. $[x+a]\ne[x]+[a]$.

4. См. рис.3. **5.** См. рис.4.

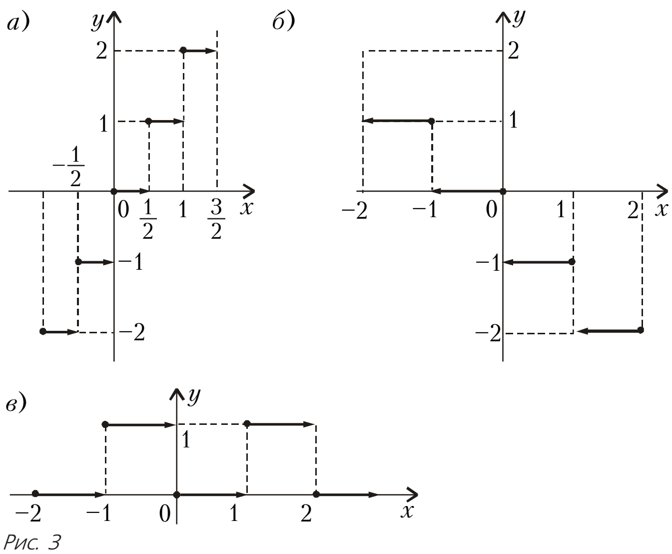

Рис. 3

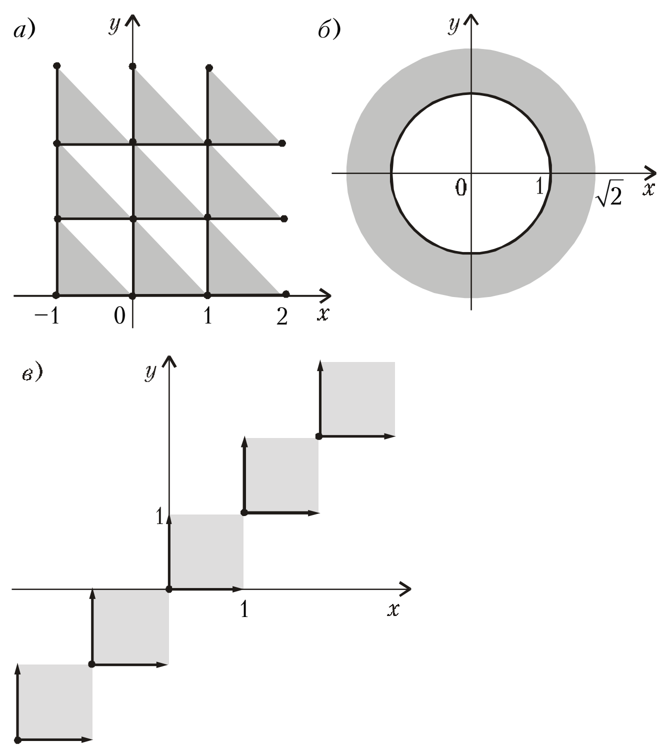

Рис. 4

6. Пусть $[x]=k$, $[y]=l$. Тогда $[x]+[y]+[x+y]=2k+2l+{}$ $+[\alpha+\beta]$, $[2x]+[2y]=2k+2l+[2\alpha]+[2\beta]$. Неравенство же $[\alpha+\beta]\le[2\alpha]+[2\beta]$ почти очевидно. Оно справедливо при $\alpha+\beta<1$, а при $\alpha+\beta\ge 1$ хотя бы одно из чисел α или β не меньше $\frac{1}{2}$, так что $[\alpha+\beta]=1\le[2\alpha]+[2\beta]$.

7. См. рис.5.

9. Пусть $\alpha=\{x\}$. Тогда

$$\{k\{[x]+\alpha\}\}=\{k\alpha\}=$$
$$=\{k[x]+k\alpha\}=\{kx\}.$$

Уравнение имеет решение 0; $\frac{1}{2}$.

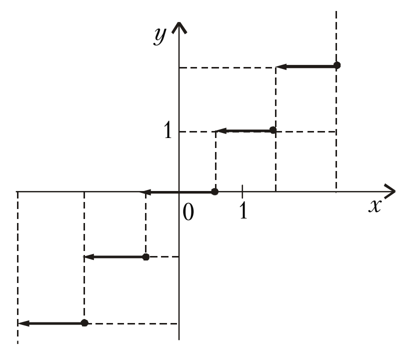

Рис. 5

10. а) $\frac{2n+1}{6}$, где $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{n}{7}$, где $n\in\mathbf{Z}$, $n\ne 7k$.

11. а) Прямые вида $y-x=n$, где $n\in\mathbf{Z}$.
б) См. рис.3, *а*).

12. Все $n<0$; $\left[n;\ \sqrt{n^2+1}\right)$ при $n\ge 0$, $n\in Z$.

13. $\frac{19}{4}$. Пусть $[x]=k$. Тогда $\{x\}\ge\frac{3}{k}$, но это значит, что $k\ge 4$. При $k=4$ получаем наименьшее значение дробной части $\{x\}=\frac{3}{4}$.

14. а) *Указание.* Если $k\le\sqrt{[x]}<k+1$, то $k^2\le[x]<(k+1)^2$, но тогда и $k^2<[x]+\{x\}<(k+1)^2$, т.е. $k\le\sqrt{x}<k+1$.
б) a – целое число. Решение аналогично решению пункта *а*). Пусть $\left[\log_a[x]\right]=k$, тогда $k\le\log_a[x]<k+1$, $a^k\le[x]<$ $<a^{k+1}$. Если a – целое число, то тогда и $a^k<x<a^{k+1}$, т.е. $k<\log_a x<k+1$. Если же a – не целое число, то существует натуральное k, для которого $x=a^k$ – тоже не целое. Но тогда

$$\left[\log_a a^k\right]=[k]=k>\log_a\left[a^k\right]\ge\left[\log_a\left[a^k\right]\right].$$

15. *Указание.* Пусть $\left(5+\sqrt{26}\right)^n=A_n+B_n\sqrt{26}$, где A_n и B_n – натуральные числа. Тогда $\left(5-\sqrt{26}\right)^n=A_n-B_n\sqrt{26}$. Значит, $\left(5+\sqrt{26}\right)^n+\left(5-\sqrt{26}\right)^n=2A_n$, $\left|\left(5-\sqrt{26}\right)^n\right|=\frac{1}{\left(5+\sqrt{26}\right)^n}<$ $<\frac{1}{10^n}$.

16. а) $n=2$. При $n>2$

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^m}\right]+\ldots<\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots+\frac{n}{2^m}+\ldots=n.$$

б) Нет. в) Нет. Воспользуйтесь тем, что

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]+\ldots<$$
$$<\frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\ldots+\frac{n}{p^m}+\ldots=\frac{n}{p-1}<n-k$$

при достаточно больших n.

17. n. *Указание.* $(n+1)(n+2)\ldots(2n)=\frac{(2n)!}{n!}$.

18. Пусть p – простое число. Тогда

$$\left[\frac{n!}{p}\right]+\left[\frac{n!}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n!}{p^k}\right]+\ldots\ge(n-1)!\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots\right).$$

(Мы воспользовались неравенством $[kx]\ge k[x]$ при натуральном k.)

19. а) Поскольку $(2n)!!=2^n\cdot n!$, показатель степени двойки, на которую делится $(2n)!!$, равен $n+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^k}\right]+\ldots$, а для $p>1$ этот показатель равен показателю для числа $n!$.

б) 0 при $p=2$, $\sum_k\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)$ при $p>2$. *Указание.* Воспользуйтесь очевидным равенством $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$.

20. $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]-\left[\dfrac{x}{6}\right]$.

21. Пусть $[x]=m$, $\{x\}=\alpha$, причем $\dfrac{k}{n}\le\alpha<\dfrac{k+1}{n}$, где $0\le k\le n-1$. Тогда

$$[nx]=[nm+n\{x\}]=mn+k.$$

В то же время

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right]=(n-k)m,$$

$$\left[x+\frac{n-k}{n}\right]+\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=km+k,$$

но это и значит, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Электростатическое поле в веществе

1. 1) $\Delta W=\dfrac{\varepsilon_0(1-\varepsilon)SU^2}{2d}\approx-3{,}2\cdot10^{-5}$ Дж,

$A=-\Delta W\approx3{,}2\cdot10^{-5}$ Дж;

2) $\Delta W=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon(\varepsilon-1)SU^2}{2d}\approx1{,}6\cdot10^{-4}$ Дж,

$A=\Delta W\approx1{,}6\cdot10^{-4}$ Дж.

2. $k=\dfrac{1}{\varepsilon+1}$. **3.** $h=\dfrac{\varepsilon-n}{\varepsilon-1}\dfrac{d}{n}\approx0{,}2$ мм.

4. $E=\dfrac{\varepsilon\mathrm{E}}{\varepsilon(d-h)+h}$ при $h<\dfrac{d}{2}$, $E=\dfrac{\mathrm{E}}{\varepsilon(d-h)+h}$ при $h>\dfrac{d}{2}$.

Точка на окружности

5. $a|\mathrm{ctg}\,\alpha|/2$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $4\sqrt{770}/55$. **8.** ab/c^2.
9. 5. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $2/\sqrt{7}$. **12.** 18. **13.** 30°.
14. $R\sqrt{2}/2;\ R\sqrt{2}\big/\sqrt{2+\sqrt{2}};\ R$. **15.** 30°, 60°, 90°.

XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Нельзя. *Указание.* Докажите, что найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2002.

2. *Указание.* Докажите, что

$$\angle AO_1O_2=\frac{1}{2}\angle ABC,\ \text{а}\ \angle AO_2O_1=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

3. Рассмотрим три синие точки A, B, C и не синюю D. Тогда $S_{ABC}\le S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}$.
Просуммируем это неравенство по всем таким четверкам. При этом каждый «синий» треугольник считается 12 раз, а каждый «сине-сине-несиний» – 4 раза. Таким образом, сумма площадей «синих» треугольников хотя бы в 3 раза меньше суммы площадей «сине-сине-несиних». Итого: сумма площадей «синих» треугольников составляет не более четверти суммы площадей треугольников, хотя бы две вершины которых синие. Аналогичное неравенство получим для двух других цветов. Так как рассмотренные группы не пересекаются, то и сумма площадей одноцветных треугольников составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников.

5. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах. Разности их координат по вертикали лежат в отрезке [1, 7], поэтому либо две из них совпадают (и тогда расстояния в соответствующих парах тоже совпадают), либо среди них есть все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (пара A). Аналогично, либо найдутся две пары в соседних строках с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (пара B). Тогда расстояния в парах A и B совпадают, а сами эти пары различны.

6. $n = k - 1$.
Построим пример, показывающий, что при большем n это невозможно. Пусть карты (сверху вниз) первоначально лежат так: сначала все нечетные (в произвольном порядке), потом четные, причем верхняя из них карта $2n$. Тогда первые k ходов однозначно определены – нечетные карты перекладываются на свободные позиции. Следующий ход, если $n > k$, невозможен, а если $n = k$, то можно лишь переложить карту $2n - 1$ обратно в изначальную стопку, что бессмысленно, ибо мы вернемся к предыдущей позиции. Поэтому эту стопку переложить нельзя.
Пусть $n < k$. Покажем, как можно организовать процесс перекладывания. Разобьем все карты на пары $(1,\,2),\ldots,(2n-1,\,2n)$, и сопоставим каждой паре по незанятой ячейке (хотя бы одна ячейка не сопоставлена никакой паре; назовем ее свободной). Теперь каждую карту сверху красной ячейки попытаемся положить в «ее» ячейку. Это может не получиться, только если эта карта имеет номер $2i$, а карта $2i - 1$ уже лежит в ячейке. Но тогда можно переместить карту $2i$ в свободную ячейку, сверху положить карту $2i - 1$, сопоставить этой ячейке нашу пару, а прежнюю сопоставленную назвать свободной. Таким образом, в результате мы получим карты, разложенные в ячейки по парам. Теперь, используя свободную ячейку, легко собрать их в колоду в правильном порядке.

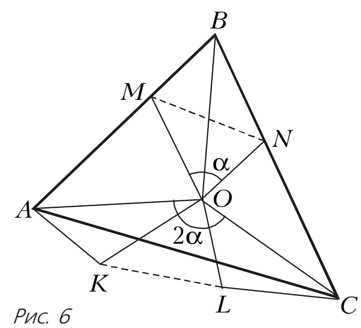

Рис. 6

7. Построим такие точки K и L, лежащие внутри угла AOC, что треугольники AKO и BMO, а также CLO и BNO соответственно равны (рис.6). Тогда $KO = OM$, $LO = ON$ и $\angle KOL=\angle AOC-\angle MOB-\angle BON=\angle MON$, поэтому треугольники KOL и MON равны, следовательно, $KL = MN$. Тогда периметр треугольника BMN равен $BM + MN + NB = AK + KL + LC \ge AC$.

8. Заметим, что среди выбранных чисел найдутся числа a и b, имеющие одинаковые остатки от деления на 2^{2n}. Докажем, что они – искомые.
Предположим, что a^2 делится на b. Тогда и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ делится на b. Пусть $a=p\cdot2^{2n}+r$, $b=q\cdot2^{2n}+r$. Тогда $(p-q)^2\cdot2^{4n}$ делится на b, но поскольку b нечетное, то $(p-q)^2$ делится на b, откуда $|p-q|>2^n$ и $\max(a,b)=\max(p,q)\cdot2^{2n}+r>2^{3n}$, что невозможно по условию.

10 класс

1. Из условия следует, что R и один из многочленов P и Q – третьей степени. Пусть, например, R и Q – третьей степени, P – второй. Поменяв, если это нужно, знаки многочленов на противоположные, можно считать, что коэффициенты при x^3 у R и Q положительны. Тогда из равенства

$$P^2=R^2-Q^2=(R+Q)(R-Q),$$

где $R + Q$ – многочлен третьей степени, следует, что $R - Q$ –

первой степени, т.е. $R - Q = r(x - x_1)$, $r > 0$ (коэффициент при x^4 у P^2 положителен).
Значит, P делится на $x - x_1$, поэтому и $R + Q$ делится на $x - x_1$, и так как $R - Q$ делится на $x - x_1$, то R и Q делятся на $x - x_1$, т.е. $R = (x - x_1)R_1$, $Q = (x - x_1)Q_1$, где R_1 и Q_1 – квадратичные функции с положительными коэффициентами при x^2. Пусть $P = a(x - x_1)(x - x_2)$. Из равенства

$$a^2(x - x_2)^2 = (R_1 + Q_1)(R_1 - Q_1)$$

вытекает, что $R_1 - Q_1 = t = \text{const} > 0$. Следовательно, $R_1 = Q_1 + t$, поэтому

$$a^2(x - x_2)^2 = (2Q_1 + t)t,$$

т.е. $Q_1 = \frac{a^2}{2t}(x - x_2)^2 - \frac{t}{2}$ – трехчлен, имеющий два действительных корня. Тогда Q имеет три действительных корня.

2. Поскольку $MB^2 = AM \cdot DM = \frac{1}{2}MD^2$, а $KA^2 = \frac{1}{2}KC^2$ (рис.7), по теореме синусов получаем, что

$$\frac{\sin\angle ACK}{\sin\angle CAK} = \frac{AK}{KC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle DMB} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но

$$\sin\angle ACK = \sin\angle BDM.$$

Следовательно,

$$\sin\angle CAK = \sin\angle DBM.$$

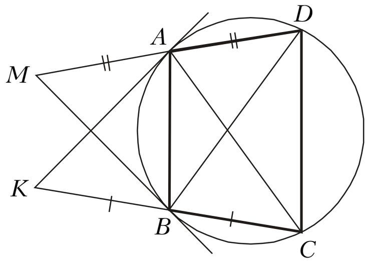

Рис. 7

Поэтому либо $\angle CAK = \angle DBM$, либо

$$\angle CAK + \angle DBM = 180^\circ.$$

В первом случае треугольники CAK и BDM равны (они подобны по двум углам, а AB – их общая медиана к соответственным сторонам), так что $AD = BC$ и $AB \parallel CD$.
Во втором случае $\angle CAK = \angle CDA$, $\angle DBM = \angle DCB$, откуда $\angle CDA + \angle DCB = 180^\circ$, но тогда $AD \parallel BC$.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам, существовавшим в стране до начала всех преобразований. По условию, над этим графом несколько раз подряд проделывается следующая операция: удаляются все ребра некоторого простого цикла, а все вершины этого цикла соединяются с новой вершиной. Докажем, что в графе, получившемся после окончания всех преобразований, все вершины исходного графа будут иметь степень 1. Поскольку таких вершин как минимум 2002, это даст нам полное решение задачи.
Рассмотрим произвольную вершину v, принадлежащую исходному графу. По условию, при удалении этой вершины (и всех выходящих из нее ребер) из исходного графа образуется связный граф. Докажем, что это свойство сохраняется после применения к графу описанной в условии операции.
Рассмотрим произвольный граф G и вершину u этого графа, при удалении которой образуется связный граф. Пусть после применения к графу G описанной в условии операции образовался граф G'. Рассмотрим произвольный путь в графе G, не проходящий через u. В графе G' некоторые ребра этого пути могут быть удалены, но их концы должны быть соединены с новой вершиной (обозначим ее w). Таким образом, заменив минимальный участок пути, содержащий все удаленные ребра, на пару ребер, соединяющих концы этого участка с вершиной w, мы получим путь в графе G', имеющий те же концы и не проходящий через u. Это означает, что если мы удалим из графа G' вершину u, то для любых двух вершин получившегося графа мы можем найти соединяющий их путь. Для старых (отличных от w) вершин этот путь получается описанным выше способом из пути, соединяющего их в графе, образовавшемся при удалении u из графа G, а вершина w должна быть соединена ребром хотя бы с одной из старых вершин, которая соединена путями со всеми остальными вершинами данного графа. Таким образом, при удалении вершины u из графа G' также образуется связный граф.
Из доказанного следует, что после всех преобразований при удалении из получившегося графа вершины v образуется связный граф. Тогда, если степень вершины v в получившемся графе больше 1, то между двумя соединенными с v вершинами есть не проходящий через v путь. Этот путь вместе с вершиной v и двумя выходящими из нее ребрами образует в получившемся графе простой цикл, что по условию невозможно. Таким образом, степень вершины v в этом графе равна 1.

5. Поскольку

$$ab + bc + ca = \frac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{2},$$

нужно доказать, что

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \ge 9.$$

Заметим, что $2\sqrt{a} + a^2 \ge 3a$. Действительно,

$$2\sqrt{a} + a^2 = \sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}\,a^2} = 3a.$$

Аналогично, $2\sqrt{b} + b^2 \ge 3b$, $2\sqrt{c} + c^2 \ge 3c$.
Осталось сложить полученные неравенства.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 – точки касания вписанной окружности с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (рис.8). Проведем через A_1 прямую a_1, параллельную биссектрисе угла A. Так как $\triangle AB_1C_1$ равнобедренный, то биссектриса угла A перпендикулярна B_1C_1, поэтому проведенная через A_1 прямая, будучи перпендикулярной B_1C_1, является высотой $\triangle A_1B_1C_1$.

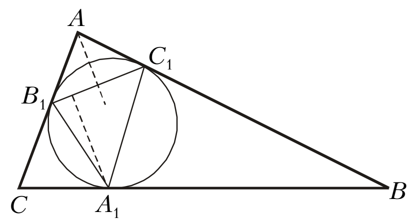

Рис. 8

Пусть A_0, B_0 и C_0 (рис.9) – середины соответствующих сторон $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_0B_0C_0$ гомотетичны с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, то биссектрисы углов A и A_0 параллельны. Обозначим точку пересечения биссектрис $\triangle A_0B_0C_0$ через S. Как известно, точки A_1 и A' равноудалены от середины своей стороны (то же верно для точек B_1 и B', C_1 и C').

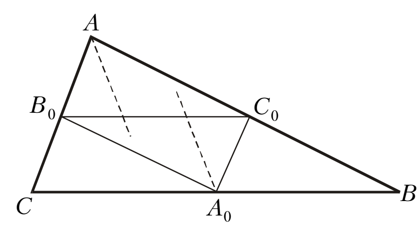

Рис. 9

Рассмотрим симметрию относительно точки S. При этой симметрии прямая a_1 перейдет в прямую a. Таким образом, при этой симметрии каждая из высот $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в одну из прямых a, b и c, следовательно, эти прямые пересекутся в точке, симметричной ортоцентру $\triangle A_1B_1C_1$ относительно центра S окружности, вписанной в серединный треугольник $A_0B_0C_0$.

11 класс

2. Поскольку в случае, когда все точки лежат на одной прямой, утверждение задачи очевидно, можно считать, что в нашем множестве найдутся точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажем, что $\operatorname{tg}\angle BAC$ либо рациональное число, либо не существует. Рассмотрим координаты этих точек в системе, соответствующей тройке A, B, C. Если $x_A = x_B$ (случай $x_A = x_C$ аналогичен), то $\operatorname{tg}\angle BAC = \pm\dfrac{x_C - x_A}{y_B - y_A}$ рационален (или не существует). Если же $x_B \ne x_A$ и $x_C \ne x_A$, то числа $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ и $q = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ рациональны. Но $p = \operatorname{tg}\alpha$, $q = \operatorname{tg}\beta$, где α и β – углы, образуемые лучами AB и AC с положительным направлением оси Ox, поэтому из формулы

$$\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{p - q}{1 + pq}$$

следует рациональность $\operatorname{tg}\angle BAC$ (или тангенс не существует, если $pq = -1$). Аналогично, рациональными являются тангенсы углов всех треугольников с вершинами в данных точках. Рассмотрим систему координат с началом A и единичным вектором по оси Ax, равным $\overrightarrow{AB}$. Для любой точки D нашего множества $\operatorname{tg}\angle DAB$ и $\operatorname{tg}\angle DBA$ рациональны, поэтому уравнения прямых AD и BD имеют рациональные коэффициенты. Тогда и точка D имеет рациональные координаты. Изменив масштаб, мы получим целочисленные координаты у всех точек.

3. *Указание*. Достаточно доказать это неравенство при $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ (при $x = \dfrac{\pi}{4}$ оно очевидно, а при $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ получается заменой $y = \dfrac{\pi}{2} - x$). Для таких x докажите неравенства

$$\cos^k x - \sin^k x \ge \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x \quad \text{при} \quad k \ge 2$$

и

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^k x - \sin^k x} \le \frac{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x} \quad \text{при} \quad n \ge k > 1.$$

Убедитесь, что исходное неравенство сводится к случаям $m = 1$, $n = 3$ и $m = 1$, $n = 2$, для которых оно почти очевидно.

4. Сначала докажем, что если с любой площади выходит не более двух улиц, то площади можно покрасить в 13 цветов так, чтобы ни с какой площади нельзя было попасть на площадь того же цвета, проехав менее трех улиц. Для этого рассмотрим следующий вспомогательный ориентированный граф: его вершинами будут площади, а ориентированными ребрами будут соединены пары площадей, между которыми в нашем городе есть путь, проходящий не более чем по двум улицам. Легко видеть, что в этом графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер. Нужно доказать, что вершины этого графа можно раскрасить в 13 цветов правильным образом. Это утверждение легко доказывается индукцией по числу вершин. Действительно, в случае, если вершин не больше 13, утверждение очевидно. Далее, легко видеть, что если в ориентированном графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер, то существует вершина, в которую входит не более 6 ребер. Удалив из графа эту вершину, мы получим граф, удовлетворяющий нашему условию и содержащий меньшее число вершин. По индукционному предположению, мы можем раскрасить вершины этого графа в 13 цветов, после чего удаленную вершину мы также можем покрасить в один из цветов, так как она соединена не более чем с 12 вершинами. Теперь для каждого цвета разделим все площади данного цвета на 78 типов, в зависимости от того, на площади каких цветов ведут улицы, выходящие с данной площади. Поскольку других цветов 12, для каждого цвета есть 12 вариантов, в которых обе улицы ведут на площади одного цвета, и $\dfrac{12\cdot 11}{2} = 66$ вариантов, в которых они ведут на площади разных цветов. Итого, 78 вариантов. Таким образом, мы можем разбить все площади на $78\cdot 13 = 1014$ районов.
Осталось доказать, что полученное разбиение подходит.

5. 10010.

Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления: $n = a_1 + \ldots + a_{2002} = b_1 + \ldots + b_{2003}$. Воспользуемся тем, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{2002}$ дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма цифр; обозначим этот остаток через r ($0 \le r \le 8$), а соответствующий остаток для чисел $b_1, \ldots, b_{2003}$ – через s ($0 \le s \le 8$).
Тогда $n - 2002r$ и $n - 2003s$ кратны 9, а значит, и число

$$(n - 2002r) - (n - 2003s) = 2003s - 2002r = 2003(r + s) - 4005r$$

кратно 9. Число $4005r$ также кратно 9, а число 2003 взаимно просто с 9; отсюда следует, что число $r + s$ кратно 9.
Если при этом $r = s = 0$, то $n \ge 9\cdot 2003$ (поскольку $b_1, \ldots, b_{2003}$ делятся на 9). Если же $r \ne 0$, то $r + s = 9$, и потому имеет место по крайней мере одно из неравенств $r \ge 5$ или $s \ge 5$; для числа n получаются неравенства $n \ge 5\cdot 2002$ и $n \ge 5\cdot 2003$ соответственно. А так как $10010 = 5\cdot 2002 = 4\cdot 2002 + 2002\cdot 1$ и числа 4 и 2002 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10010 – искомое.

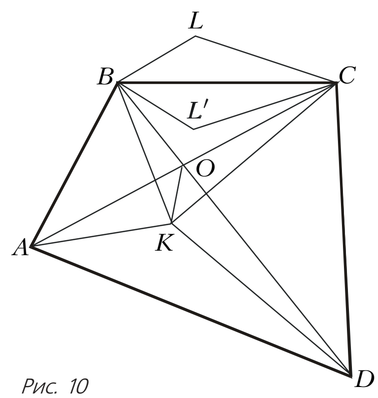

Рис. 10

6. Будем считать, что K лежит в $\triangle AOD$ (все остальные случаи разбираются аналогично). Пусть L' – точка, симметричная L относительно BC (рис.10). Тогда

$$\angle L'BO = \angle OBC - \angle L'BC = \angle OBC - \angle LBC,$$

но $\angle OBC = \angle OAD$, так как $ABCD$ вписанный, следовательно,

$$\angle L'BO = \angle OAD - \angle KAD = \angle OAK = \angle OBK,$$

так как $ABOK$ вписанный. Аналогично, $\angle L'CO = \angle OCK$.
Далее, $\angle BKO = \angle BAO = \angle CDO = \angle CKO$, так как четырехугольники $ABCD$, $ABOK$ и $CDKO$ вписанные.
Теперь рассмотрим четырехугольник $BL'CK$ (рис.11). Пусть N – точка пересечения CK и BL', M – точка пересечения

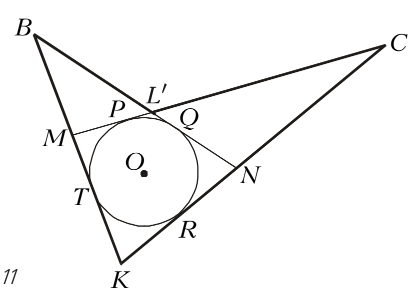

Рис. 11

BK и CL'. Так как CO – биссектриса $\angle MCK$, BO – биссектриса $\angle NBK$, а KO – биссектриса $\angle MKN$, то O равноудалена от сторон четырехугольника $ML'NK$ и является центром вписанной в него окружности. Пусть P, Q, R, T – точки касания этой окружности со сторонами ML', $L'N$, NK и KM соответственно. Тогда

$$CK + BL' = (CR + KR) + (BQ - L'Q) = CP + KT + BT - L'P = \\ = (KT + BT) + (CP - L'P) = KB + CL'.$$

Значит, $CK + BL = KB + CL$, и четырехугольник $BLCK$ является описанным, что и требовалось доказать.

8. Положим $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{A(n)}{B(n)}$, где $A(n)$ и $B(n)$ взаимно просты. Нам понадобится оценка $B(n)>n/2$.

Предположим, что при всех $n\ge n_0$ число $A(n)$ является степенью простого. Пусть $p>n_0+5$ – простое число. Тогда $A(p-1)$ делится на p (слагаемые суммы $S(p-1)$ разбиваются на пары, для каждой из которых числитель суммы делится на p). Следовательно, $A(p-1)=p^k$, $k\in\mathbf{N}$.

Далее, докажем, что числитель $A\left(p^n-1\right)$ также кратен p (и, стало быть, является степенью p) при всех натуральных n. Проведем индукцию по n. База доказана. Переход $n-1\to n$. Имеем $S\left(p^n-1\right)=S\left(p^{n-1}-1\right)/p+S'$, где $S'=\sum_{d\le p^n-1, d\not\vdots p}\frac{1}{d}$ (первое слагаемое как раз равно сумме слагаемых со знаменателями, делящимися на p). Сумма S' разбивается на несколько (а именно, p^{n-1}) сумм вида

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{pk+i},\quad k=0,1,\ldots,p^{n-1}-1.$$

Каждая из них имеет числитель, делящийся на p, что устанавливается так же, как и для $S(p-1)$. Осталось убедиться, что числитель дроби $S\left(p^{n-1}-1\right)/p$ делится на p. Действительно, $A\left(p^{n-1}-1\right)=p^s$ в силу индукционного предположения, причем $s>1$ (вспомним, что $B\left(p^{n-1}-1\right)\ge p^{n-1}/2\ge p/2$, а $S\left(p^{n-1}-1\right)\ge S(n_0+4)\ge S(4)>2$). Положим

$$H_p(n)=S\left(p^n-p\right)-S\left(p^n-1\right)=\sum_{i=1}^{p-1}1/\left(-p^n+i\right).$$

Если $n>k$, то числитель дроби $H_p(n)$ делится на p^k, но не на p^{k+1} (ибо $H_p(n)-S(p-1)$ – дробь, числитель которой делится на p^n). Отсюда получаем, что оба числителя $A\left(p^n-1\right)$ и $A\left(p^n-p\right)$ делятся на p, но один из них не делится на p^{k+1}. Значит, одна из дробей $S\left(p^n-1\right)$ и $S\left(p^n-p\right)$ не превосходит $\frac{2p^k}{\left(p^n-p\right)}<1$ при $n=k+2$ – противоречие.

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\rho=\frac{3\pi(1+n)^3}{GT^2}\approx 653$ кг/м^3.

2. Решение этой задачи (а также некоторых других задач) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

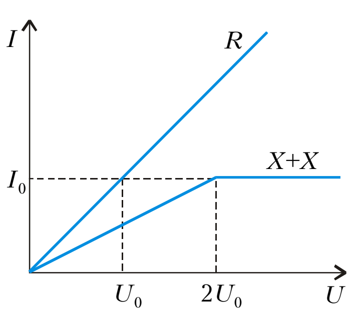

Рис. 12

4. 1) При $V\le 2U_0$ $\eta_1=0{,}5$; при $V=4U_0$ $\eta_1=0{,}75$.

2) ВАХ получается сложением напряжений для каждого фиксированного значения силы тока (см. рис.12); $\eta_2=0{,}75$.

3) ВАХ получается сложением сил токов для каждого фиксированного значения напряжения (см. рис.13); $\eta_3=0{,}5$.

10 класс

1. Есть предельная скорость v_0, не зависящая от мощности. При этой скорости $F_{сопр}=F_{тр\,max}$, откуда $v_0=\sqrt{\mu mg/k}\approx 71$ м/с. С другой стороны, для поддержания постоянной скорости требуется мощность $N=F_{сопр}v=kv^3$, откуда получаем

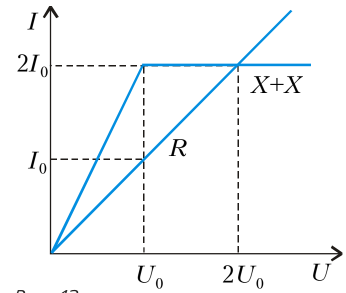

Рис. 13

$v_{max}(N)=(N/K)^{1/3}$. Скорость перестает расти начиная с мощности $N_0=\mu mg\sqrt{\mu mg/k}\approx 70$ кВт.

2. $H\approx 2{,}8$ м; пройденные пути совпадают.

3. Искомую температуру найдем из квадратного уравнения $\frac{(T_1-T_2)^2}{(T_3-T_x)^2}=\frac{T_2}{T_x}$, откуда $T_{x1}=232$ К, т.е. $t_{x1}=-41$ °C, а второй корень $T_{x2}=338$ К не подходит – он отвечает работе агрегата в качестве теплового насоса.

5. $Q_1=C\mathcal{E}^2/2$, $Q_2=C\mathcal{E}^2/4$.

11 класс

1. $x_0=\frac{\omega^2}{3ag}$, $y_0=\frac{\omega^6}{27a^2g^3}$; $T=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1+\frac{\omega^8}{9a^2g^4}}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Л.В.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №