

Целая и дробная части числа

А.ЕГОРОВ

УПОМЯНУТЫЕ В ЗАГЛАВИИ ФУНКЦИИ ДОВОЛЬНО часто встречаются в самых разных областях математики – в частности, в алгебре, анализе, теории чисел, комбинаторике. Об этих и родственных им функциях, а также о задачах, с их помощью решаемых, мы и поговорим.

Целая часть числа и ее родственники

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Например, $[-1,5] = -2$, $[-1] = -1$, $[0] = 0$, $[1,5] = 1$, $[\pi] = 3$. Вообще, в силу определения, равенство $[x] = k$ означает, что k – это целое число, такое, что $k \leq x < k + 1$.

График функции $y = [x]$ (рис.1) состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх,

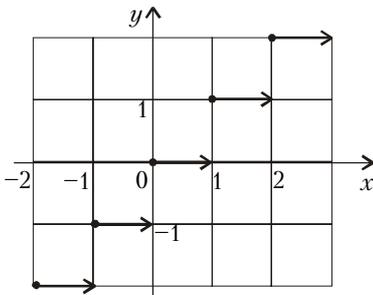


Рис. 1

– потолок числа x . Это наименьшее целое число, не меньшее x .

Например, $[-1] = -1$, $[-\frac{1}{2}] = 0$, $[\pi] = 4$, $[2,5] = 3$.

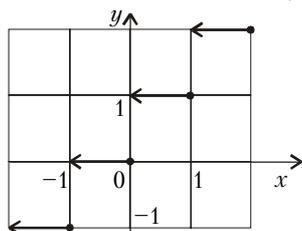


Рис. 2

График функции $y = [x]$ показан на рисунке 2.

Упражнения

1. Подумайте, как из графика $y = [x]$ получить график $y = \{x\}$, и выразите $\{x\}$ через целую часть.

2. Решите уравнения

а) $\left[\frac{x^2 - 3x}{2}\right] = 1$; б) $\left[\frac{3x - 1}{3}\right] = 5$.

Отметим некоторые почти очевидные свойства целой части числа:

- $[x] \leq x$;
- $[x + a] = [x] + a$, где a – произвольное целое число;
- $[x + y] \geq [x] + [y]$ при любых x и y .

Упражнения

3. Докажите, что если $[x + a] = [x] + [a]$ для любого $x \in \mathbf{R}$, то a – целое число.

4. Постройте графики функций

а) $y = [2x]$; б) $y = [-x]$; в) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Нарисуйте на плоскости xOy точки, для которых

а) $[x + y] = [x] + [y]$; б) $[x^2 + y^2] = 1$; в) $[x] = [y]$.

6. Докажите, что

$$[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y].$$

Наконец, иногда бывает полезна функция $y = (x)$ – ближайшее к x целое число. При этом если ближайших к x целых чисел два (что бывает при $x = \frac{2k + 1}{2}$, где k – целое), выбирается большее из них.

Например, $\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $(\pi) = 3$, $(0,8) = 1$.

Нетрудно видеть, что $(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 7. Докажите это и постройте график функции $y = (x)$.

Дробная часть числа

Дробной частью $\{x\}$ числа x называется число $\{x\} = x - [x]$.

Так, $\{-0,3\} = 0,7$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$, $\{-2\sqrt{2}\} = 2 - \sqrt{2}$, $\{1\} = 0$.

Отметим некоторые свойства дробной части:

- равенство $\{x\} = x$ равносильно тому, что $0 \leq x < 1$;
- $\{x\} = \{y\}$ тогда и только тогда, когда $x - y = n$, где n – целое число;
- $\{x + 1\} = \{x\}$ для любого x .

Таким образом, функция $y = \{x\}$ периодична с периодом 1. График ее показан на рисунке 3 (поскосившийся периодический забор).

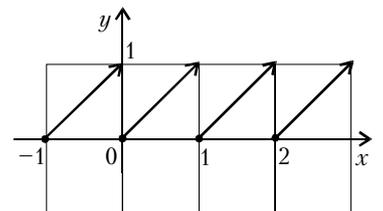


Рис. 3

С дробной частью тесно связана еще одна функция: $y = \{\{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части последняя функция непрерывна. Ее график изображен на рисунке 4.

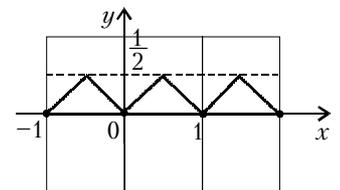


Рис. 4

Упражнения

8. Докажите, что $\{\{x\}\} = \left\{x + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$.

9. Докажите, что $\{k\{x\}\} = \{kx\}$ при любом натуральном k , и решите уравнение $\{3\{x\}\} = x$.

10. Решите уравнения

а) $\{3x\} = \frac{1}{2}$; б) $\{6x\} + \{x\} = 1$.

11. Изобразите на плоскости xOy точки, для которых
 а) $\{x\} = \{y\}$; б) $\{x\} + \{y\} < 1$.

Несколько задач

Уравнения, неравенства и другие задачи про целые и дробные части числа довольно часто встречаются на математических олимпиадах разных уровней. Разберем несколько характерных примеров.

Задача 1 (II Соросовская олимпиада). *Решите уравнение*

$$x^2 - 10[x] + 9 = 0.$$

Решение. Пусть $[x] = k$. Прежде всего, ясно, что $k \geq 0$. Поскольку $x \geq k$, получаем при $x \geq 0$ неравенство

$$x^2 - 10x + 9 \leq 0.$$

Отсюда следует, что $1 \leq x \leq 9$, но тогда и $1 \leq k \leq 9$, причем $x^2 + 9$ – целое число, делящееся на 10. Проверка показывает, что годятся значения $x = 1$, $x = \sqrt{61}$, $x = \sqrt{71}$, $x = 9$.

Ответ. 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\left[\frac{2x+1}{3} \right] = [x].$$

Решение. Пусть $[x] = k$. Тогда

$$\begin{cases} k \leq \frac{2x+1}{3} < k+1, \\ k \leq x < k+1. \end{cases}$$

Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{2} \leq x < \frac{3k+2}{2}, \\ k \leq x < k+1, \end{cases} \quad (*)$$

откуда следует, что k обязано удовлетворять неравенствам

$$\frac{3k-1}{2} < k+1, \quad k < \frac{3k+2}{2},$$

т.е. $-2 < k < 3$.

Итак, возможны следующие значения k : -1 ; 0 ; 1 ; 2 . Подставляя последовательно эти значения в систему $(*)$ и решая полученные неравенства, находим ответ.

Ответ. $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$; $0 \leq x < 2$; $\frac{5}{2} \leq x < 3$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и иначе. Построив графики левой и правой частей исходного уравнения, обнаружим, что они совпадают на промежутках, указанных в ответе.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$[x^2] = 2[x].$$

Решение. Пусть $[x] = k$, $\{x\} = \alpha$. Тогда $k \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и

$$[(k+\alpha)^2] = 2[k+\alpha],$$

после чего приходим к уравнению

$$[2k\alpha + \alpha^2] = 2k - k^2.$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а k – целое число, то $2k - k^2 \geq 0$, и возможны три значения k – это 0 , 1 и 2 .

При $k = 0$ получим $[\alpha^2] = 0$, что выполняется при всех $0 \leq \alpha < 1$. Отсюда $0 \leq x < 1$.

При $k = 1$ приходим к уравнению

$$[2\alpha + \alpha^2] = 1,$$

что дает систему $1 \leq 2\alpha + \alpha^2 < 2$, $0 \leq \alpha < 1$, откуда $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1$, т.е. $\sqrt{2} \leq x < 2$.

Наконец, при $k = 2$ имеем уравнение

$$[4\alpha + \alpha^2] = 0,$$

равносильное системе $0 \leq 4\alpha + \alpha^2 < 1$, $0 \leq \alpha < 1$. Ее решение – промежуток $0 \leq \alpha < \sqrt{5} - 2$, откуда $2 \leq x < \sqrt{5}$.

Объединяя полученные промежутки, запишем ответ.

Ответ. $0 \leq x < 1$, $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{5}$.

Задача 4 (V Соросовская олимпиада). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9, \\ y + [z] + \{x\} = 3,5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $a = [x]$, $\alpha = \{x\}$, $b = [y]$, $\beta = \{y\}$, $c = [z]$, $\gamma = \{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \gamma < 1$. В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a + \alpha + b + \gamma = 3,9, \\ b + \beta + c + \alpha = 3,5, \\ c + \gamma + a + \beta = 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2(a + b + c + \alpha + \beta + \gamma) = 9,4,$$

т.е.

$$a + b + c + \alpha + \beta + \gamma = 4,7.$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c + \beta = 0,8, \\ a + \gamma = 1,2, \\ b + \alpha = 2,7, \end{cases}$$

откуда следует, что $c = 0$, $\beta = 0,8$, $a = 1$, $\gamma = 0,2$, $b = 2$, $\alpha = 0,7$.

Ответ. $x = 1,7$; $y = 2,8$; $z = 0,2$.

Вот еще одна задача о поведении целых и дробных частей чисел вида ξ^n , где ξ – корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 5. *Докажите, что а) $\left[(2 + \sqrt{3})^{2002} \right]$ – нечетное число; б) $\left\{ (2 + \sqrt{3})^{2002} \right\} > 0, \underbrace{9 \dots 9}_{1001}$.*

Решение. Раскрывая скобки в выражении $(2 + \sqrt{3})^{2002}$, получим

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = A + B\sqrt{3},$$

где A и B – натуральные числа, причем

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = A - B\sqrt{3} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{2002}}.$$

Но тогда

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} + (2 - \sqrt{3})^{2002} = 2A.$$

Далее,

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} = 2A - 1 + 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}.$$

Отсюда следует, что

$$\left[(2 + \sqrt{3})^{2002} \right] = 2A - 1 - \text{нечетное число,}$$

а

$$\left\{ (2 + \sqrt{3})^{2002} \right\} = 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}.$$

Оценим степень в правой части полученного равенства:

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{2002}} = \frac{1}{(7 + 2\sqrt{3})^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

Поэтому $\left\{ (2 + \sqrt{3})^{2002} \right\} > 0, \underbrace{9 \dots 9}_{1001}$.

В следующей задаче целая часть находит довольно неожиданное применение.

Задача 6. Рассмотрим последовательность

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$$

(последовательно выписаны единица, две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок и т.д.). Какое число стоит на месте с номером а) 2002; б) n ?

Решение. Пусть $x_n = k$ — член заданной последовательности с номером n . До первого появления числа k выписано $1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$ чисел. А последнее число k

стоит на месте с номером $\frac{k(k+1)}{2}$. Поэтому

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2},$$

откуда

$$k^2 - k < 2n \leq k^2 + k.$$

Заметим, что к левой и правой частям последнего неравенства можно прибавить по $\frac{1}{4}$, так что

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

т.е.

$$\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 < 2n < \left(k + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Тогда

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2},$$

откуда

$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1.$$

Следовательно,

$$x_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right].$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислить n -й член исходной последовательности. В частности, $x_{2002} = 63$.

Упражнения

12. Решите уравнение $[x]^2 = [x^2]$.

13. Найдите наименьшее положительное x , для которого $[x] \cdot \{x\} \geq 3$.

14. а) Докажите, что $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$ при всех $x \geq 0$.

б) При каких $a > 1$ равенство $[\log_a [x]] = [\log_a x]$ выполняется при всех $x > 0$?

15. Докажите, что $\left\{ \left\{ (5 + \sqrt{26})^n \right\} \right\} < \frac{1}{10^n}$ при любом натуральном n .

Целая часть и деление с остатком

Разделим с остатком натуральное число a на натуральное число b , т.е. запишем a в виде

$$a = kb + r,$$

где частное k — целое неотрицательное число, а остаток $0 \leq r < b$. Перепишем равенство так:

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}.$$

По определению целой и дробной частей,

$$k = \left[\frac{a}{b} \right], \quad \frac{r}{b} = \left\{ \frac{a}{b} \right\},$$

так что

$$a = \left[\frac{a}{b} \right] b + b \left\{ \frac{a}{b} \right\}.$$

Мы сумели выразить частное и остаток через целую и дробную части числа $\frac{a}{b}$.

А теперь давайте выясним, сколько существует натуральных чисел, меньших данного числа x (не обязательно целого) и делящихся на данное натуральное число n .

Ясно, что если $n > x$, то таких чисел нет. Если же $kn \leq x < (k+1)n$, то это числа $n, 2n, \dots, kn$. Их ровно k штук. А так как

$$k \leq \frac{x}{n} < k + 1,$$

то $k = \left[\frac{x}{n} \right]$.

Это простое замечание позволит нам получить одну важную для теории чисел формулу. Но сначала решим такую задачу.

Задача 7. На какую степень двойки делится $100!$?

Решение. По доказанному ранее, среди чисел $1, 2, \dots, 100$ имеется

$$\frac{100}{2} = 50 \text{ четных чисел,}$$

$$\frac{100}{4} = 25 \text{ чисел, делящихся на 4,}$$

$$\left[\frac{100}{8} \right] = 12 \text{ чисел, делящихся на 8,}$$

$$\left[\frac{100}{16} \right] = 6 \text{ чисел, делящихся на 16,}$$

$$\left[\frac{100}{32} \right] = 3 \text{ числа, делящихся на 32,}$$

$$\left[\frac{100}{64} \right] = 1 \text{ число, делящееся на 64.}$$

Отсюда следует, что всего в произведение $100!$ входит $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ двоек, т.е. $100!$ делится на 2^{97} и не делится на 2^{98} .

Ответ. 97.

Аналогично, при любом n и простом p есть $\left[\frac{n}{p} \right]$ чисел, делящихся на p , $\left[\frac{n}{p^2} \right]$ — делящихся на p^2 , $\left[\frac{n}{p^k} \right]$ — делящихся на p^k . Если $p^m \leq n < p^{m+1}$, то показатель степени, в которой число p входит в разложение $n!$ на простые множители, равен

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^m} \right].$$

Иногда прибегают к такой записи:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \dots,$$

имея в виду, что в написанной сумме все слагаемые, начиная с некоторого места, равны нулю.

Упражнения

- 16. а) При каких натуральных n число $n!$ делится на 2^n ?
- б) Существует ли такое k , что $n!$ делится 2^{n-k} при всех n ?
- в) Пусть $p > 2$ – простое число. Существует ли такое k , что $n!$ делится на p^{n-k} при всех n ?
- 17. На какую степень двойки делится число $(n+1)(n+2)\dots(2n)$?
- 18. Докажите, что $(n)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.
- 19. На какую степень простого числа p делится число

а) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$; б) $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$?

Подсчет количества целых точек

Начнем с совсем простого вопроса. Сколько целых чисел содержится в интервале $(\alpha; \beta)$? Ясно, что если целое число m удовлетворяет неравенствам $\alpha < m < \beta$, то $\lfloor \alpha \rfloor + 1 \leq m < \lfloor \beta \rfloor$, но таких чисел имеется в точности $\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$. Это так же легко понять, как и то, что между 1 и 10 мая ровно 8 дней.

Аналогичный вопрос. Сколько чисел, кратных данному $x > 0$ (т.е. чисел вида nx , где n – целое число), содержится в промежутке $(\alpha; \beta)$? Ответ очевиден – таких чисел ровно $\lfloor \frac{\beta}{x} \rfloor - \lfloor \frac{\alpha}{x} \rfloor$.

Теперь решим задачу.

Задача 8. Докажите, что если $x > 0$ и n натуральное, то

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Рассмотрим натуральные числа, меньшие x и делящиеся на n . Таких чисел ровно $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$. Но те же самые числа образуют множество чисел, не превосходящих $\lfloor x \rfloor$ и делящихся на n . Отсюда и следует доказываемое равенство.

Упражнение 20. Найдите количество натуральных чисел, меньших x и делящихся на 2 или на 3.

Следующая важная для теории чисел задача решается с помощью подсчета числа целых точек на плоскости.

Задача 9. Пусть p и q – взаимно простые целые числа. Докажите, что

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Решение. Рассмотрим на плоскости xOy точки $(x; y)$ с целыми координатами, такие, что $1 \leq x \leq q-1$, $1 \leq y \leq p-1$, т.е. точки, лежащие внутри прямоугольника $OABC$ (рис.5). Всего имеется $(p-1)(q-1)$ таких точек. Заметим, что на диагонали OB этого прямоугольника нет точек с целыми координатами, кроме точек O и B . (В самом деле, прямая OB имеет уравнение $y = \frac{p}{q}x$. Если целая точка $(m; n)$ лежит на OB , причем $1 < m < q$, то $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, т.е. $qn = mp$. Но так как q и p взаимно просты, то n делится на p , а m делится на q , т.е. $m \geq q$, $n \geq p$. Противоречие.) Поэтому в треугольнике OBC содержится ровно половина рассматриваемых целых точек, т.е. $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом.

При $x = k$ (k – натуральное число) на отрезке KL лежат $\lfloor \frac{p}{q}k \rfloor$ точек с целыми координатами. Таким образом, их общее количество равно сумме

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor$$

что и доказывает равенство из условия задачи.

Точно так же доказывается, что

$$\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Разберем еще один пример. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей натурального числа n , и решим такую задачу.

Задача 10. Докажите, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Количество чисел из множества $1, 2, \dots, n$, делящихся на некоторое число k , равно $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ (это числа $k, 2k, \dots, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor k$). Сумма $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$ равна количеству чисел, делящихся на 1, плюс количество чисел, делящихся на 2, ..., плюс количество чисел, делящихся на n . Но ведь это и есть сумма $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(n)$.

Этот результат тем более интересен, что количество делителей натурального n выражается через n весьма непросто. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k – простые числа. Тогда $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякий делитель d числа n имеет разложение вида $d = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, т.е. однозначно определяется набором чисел $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Но всего таких наборов существует $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_k + 1)$.

Отметим еще одно полезное соотношение.

Задача 11. Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей числа n . Тогда

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Число 1 – делитель всех чисел, поэтому $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor = n$ – сумма всех единиц. На 2 делится $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чисел, так что $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ есть сумма всех двоек – делителей чисел от 1 до n . Вообще, $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ – количество чисел, не больших n и делящихся на k . Поэтому $k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ – это сумма всех делителей, равных k . Следовательно, сумма по k всех чисел вида $k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ есть в точности левая часть доказываемого равенства.

Упражнение 21. Докажите, что

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

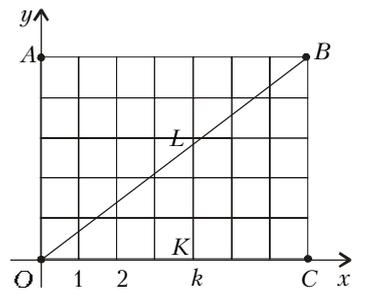


Рис. 5