

и выразим через них искомую длину $BK = x$:

$$\begin{cases} x = 2R_{ABK} \sin \alpha \\ x = 2R_{BCK} \sin \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \sin \alpha \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, и

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$x = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Задача 7. Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B . а) Известно, что $BD = l$ и $\angle ADC = \beta$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$. б) Известны длины отрезков $DE = m$ и $BE = n$, на которые отрезок BD отсекается другой диагональю AC . Найдите длины отрезков AB и BC .

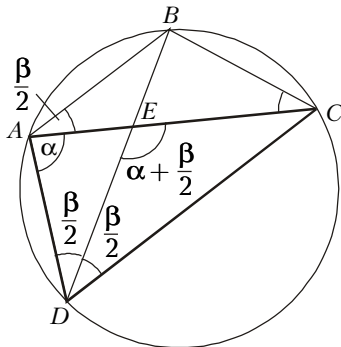


Рис. 9

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \angle DEC = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot 2R \sin \angle ADC \cdot \sin \angle DEC. \end{aligned}$$

Из $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$ ясно, что

$$\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB, \text{ где } \alpha = \angle DAE,$$

$$\frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} BC.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BD (2R \sin \angle DEC) \sin \angle ADC = \\ &= \frac{1}{2} BD (2R \sin \angle DAB) \sin \angle ADC = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot BD \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} l^2 \sin \beta. \end{aligned}$$

б) Ответ вытекает из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle DBA$ (по двум углам):

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BD} &= \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB^2 = \\ &= BD \cdot BE \Rightarrow AB = \\ &= BC = \sqrt{(m+n)n}. \end{aligned}$$

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1997). Диагональ вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и

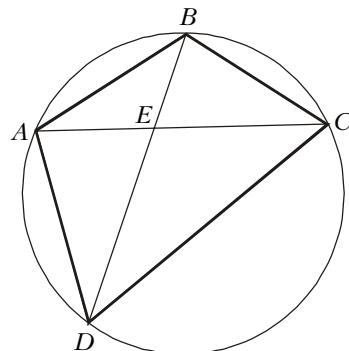


Рис. 10

$AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение. Конфигурация этой задачи (рис.10) напоминает предыдущую. Из условия имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}.$$

В треугольнике ADC отрезок DE отсекает противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в $\triangle ADC$. Докажем это.

Пусть биссектриса DE_1 не совпадает с DE . Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE_1}{CE_1}, \text{ или } \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{AE}{CE},$$

но это значит, что точки E_1 и E совпадают.

Итак, BD – биссектриса. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как по условию $BD = l = 6$, $\angle ADC = 2\angle ADB = 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, то искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} BD^2 \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Задача 9 (МГУ, мехмат, 1997). В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку C , параллельна BD . Известно, что $AB : BE = 3 : 1$ и $S_{\triangle ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE .

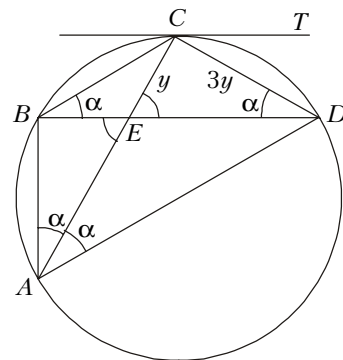


Рис. 11

Решение. Задача сводится к нахождению отношения $CE : AC$. Действительно, высота h_D , проведенная из вершины D , является общей для треугольников CDE и ADC (рис.11). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot h_D}{\frac{1}{2} AC \cdot h_D} = \frac{CE}{AC}.$$

Касательная CT параллельна BD . Поэтому $\overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} DC$, $\overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} DC$. Обозначим $\overset{\cup}{\angle} CBD = \overset{\cup}{\angle} CDB = \alpha$. По теореме о вписанном угле,

$$\overset{\cup}{\angle} BAC = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} BDC = \alpha,$$

$$\overset{\cup}{\angle} DAC = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} CD = \overset{\cup}{\angle} CBD = \alpha,$$

т.е. хорда AC является биссектрисой угла BAD .

Имеем стандартную конфигурацию: биссектриса AE в $\triangle ABD$ продолжена до пересечения с описанной (около $\triangle ABD$) окружностью, т.е. во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла. Рассмотрим две пары подобных треугольников. Во-первых, $\triangle BAE \sim \triangle CDE$ по двум углам: $\angle BAE = \angle CDE = \alpha$, $\angle BEA = \angle DEC$. Поэтому $BE : BA = CE : CD = 1 : 3$. Пусть $CE = y$, тогда $CD = 3y$. Кроме того, $\triangle CDE \sim \triangle CAD$ по двум углам: $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$, а угол при вершине C – общий.