Иногда прибегают к такой записи:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

имея в виду, что в написанной сумме все слагаемые, начиная с некоторого места, равны нулю.

Упражнения

16. а) При каких натуральных n число $n!$ делится на 2^n?
б) Существует ли такое k, что $n!$ делится 2^{n-k} при всех n?
в) Пусть $p > 2$ – простое число. Существует ли такое k, что $n!$ делится на p^{n-k} при всех n?

17. На какую степень двойки делится число $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$?

18. Докажите, что $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.

19. На какую степень простого числа p делится число
а) $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$; б) $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$?

Подсчет количества целых точек

Начнем с совсем простого вопроса. Сколько целых чисел содержится в интервале $(\alpha;\beta)$? Ясно, что если целое число m удовлетворяет неравенствам $\alpha<m<\beta$, то $[\alpha]+1\le m<[\beta]$, но таких чисел имеется в точности $[\beta]-[\alpha]$. Это так же легко понять, как и то, что *между* 1 и 10 мая ровно 8 дней.

Аналогичный вопрос. Сколько чисел, кратных данному $x>0$ (т.е. чисел вида nx, где n – целое число), содержится в промежутке $(\alpha;\beta)$? Ответ очевиден – таких чисел ровно $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$.

Теперь решим задачу.

Задача 8. *Докажите, что если $x>0$ и n натуральное, то*

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right].$$

Решение. Рассмотрим натуральные числа, меньшие x и делящиеся на n. Таких чисел ровно $\left[\frac{x}{n}\right]$. Но те же самые числа образуют множество чисел, не превосходящих $[x]$ и делящихся на n. Отсюда и следует доказываемое равенство.

Упражнение 20. Найдите количество натуральных чисел, меньших x и делящихся на 2 или на 3.

Следующая важная для теории чисел задача решается с помощью подсчета числа целых точек на плоскости.

Задача 9. *Пусть p и q — взаимно простые целые числа. Докажите, что*

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Решение. Рассмотрим на плоскости xOy точки $(x;y)$ с целыми координатами, такие, что $1\le x\le q-1$, $1\le y\le p-1$, т.е. точки, лежащие *внутри* прямоугольника $OABC$ (рис.5). Всего имеется $(p-1)(q-1)$ таких точек. Заметим, что на диагонали OB этого прямоугольника нет точек с целыми координатами, кроме точек O и B. (В самом деле, прямая OB имеет уравнение $y=\frac{p}{q}x$. Если целая точка $(m;n)$ лежит на OB, причем $1<m<q$, то $\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, т.е. $qn=mp$. Но так как q и p взаимно просты, то n делится на p, а m делится на q, т.е. $m\ge q$, $n\ge p$. Противоречие.) Поэтому в треугольнике OBC содержится ровно половина рассматриваемых целых точек, т.е. $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом. При $x=k$ (k – натуральное число) на отрезке KL лежат $\left[\frac{p}{q}k\right]$ точек с целыми координатами. Таким образом, их общее количество равно сумме

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right],$$

что и доказывает равенство из условия задачи.

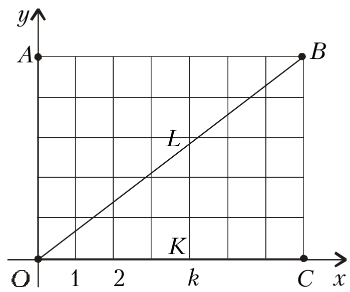

Рис. 5

Точно так же доказывается, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Разберем еще один пример. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей натурального числа n, и решим такую задачу.

Задача 10. *Докажите, что*

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Количество чисел из множества 1, 2, …, n, делящихся на некоторое число k, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$ (это числа k, $2k$, …, $\left[\frac{n}{k}\right]k$). Сумма $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$ равна количеству чисел, делящихся на 1, плюс количество чисел, делящихся на 2, …, плюс количество чисел, делящихся на n. Но ведь это и есть сумма $\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\ldots+\tau(n)$.

Этот результат тем более интересен, что количество делителей натурального n выражается через n весьма непросто. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1,p_2,\ldots p_k$ – простые числа. Тогда $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякий делитель d числа n имеет разложение вида $d=p_1^{\beta_1}\ldots p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, т.е. однозначно определяется набором чисел $(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k)$. Но всего таких наборов существует $(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_k+1)$.

Отметим еще одно полезное соотношение.

Задача 11. *Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей числа n. Тогда*

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Число 1 – делитель всех чисел, поэтому $\left[\frac{n}{1}\right]=n$ – сумма всех единиц. На 2 делится $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, так что $2\left[\frac{n}{2}\right]$ есть сумма всех двоек — делителей чисел от 1 до n. Вообще, $\left[\frac{n}{k}\right]$ — количество чисел, не больших n и делящихся на k. Поэтому $k\left[\frac{n}{k}\right]$ — это сумма всех делителей, равных k. Следовательно, сумма по k всех чисел вида $k\left[\frac{n}{k}\right]$ есть в точности левая часть доказываемого равенства.

Упражнение 21. Докажите, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$