

Целая и дробная части числа

А.ЕГОРОВ

УПОМЯНУТЫЕ В ЗАГЛАВИИ ФУНКЦИИ ДОВОЛЬНО часто встречаются в самых разных областях математики – в частности, в алгебре, анализе, теории чисел, комбинаторике. Об этих и родственных им функциях, а также о задачах, с их помощью решаемых, мы и поговорим.

Целая часть числа и ее родственники

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Например, $[-1,5] = -2$, $[-1] = -1$, $[0] = 0$, $[1,5] = 1$, $[\pi] = 3$. Вообще, в силу определения, равенство $[x] = k$ означает, что k – это целое число, такое, что $k \leq x < k + 1$.

График функции $y = [x]$ (рис.1) состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх,

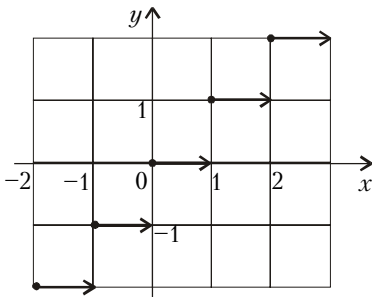


Рис. 1

– потолок числа x . Это наименьшее целое число, не меньшее x .

Например, $[-1] = -1$, $[-\frac{1}{2}] = 0$, $[\pi] = 4$, $[2,5] = 3$.

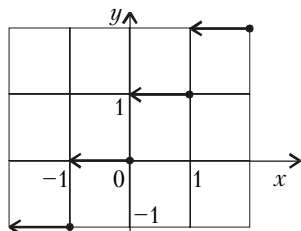


Рис. 2

График функции $y = [x]$ показан на рисунке 2.

Упражнения

1. Подумайте, как из графика $y = [x]$ получить график $y = \{x\}$, и выразите $\{x\}$ через целую часть.

2. Решите уравнения

а) $\left[\frac{x^2 - 3x}{2}\right] = 1$; б) $\left[\frac{3x - 1}{3}\right] = 5$.

Отметим некоторые почти очевидные свойства целой части числа:

- $[x] \leq x$;
- $[x + a] = [x] + a$, где a – произвольное целое число;
- $[x + y] \geq [x] + [y]$ при любых x и y .

Упражнения

3. Докажите, что если $[x + a] = [x] + [a]$ для любого $x \in \mathbf{R}$, то a – целое число.

4. Постройте графики функций

а) $y = [2x]$; б) $y = [-x]$; в) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Нарисуйте на плоскости xOy точки, для которых

а) $[x + y] = [x] + [y]$; б) $[x^2 + y^2] = 1$; в) $[x] = [y]$.

6. Докажите, что

$$[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y].$$

Наконец, иногда бывает полезна функция $y = (x)$ – ближайшее к x целое число. При этом если ближайших к x целых чисел два (что бывает при $x = \frac{2k + 1}{2}$, где k – целое), выбирается большее из них.

Например, $\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $(\pi) = 3$, $(0,8) = 1$.

Нетрудно видеть, что $(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 7. Докажите это и постройте график функции $y = (x)$.

Дробная часть числа

Дробной частью $\{x\}$ числа x называется число $\{x\} = x - [x]$.

Так, $\{-0,3\} = 0,7$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$, $\{-2\sqrt{2}\} = 2 - \sqrt{2}$, $\{1\} = 0$.

Отметим некоторые свойства дробной части:

- 1) равенство $\{x\} = x$ равносильно тому, что $0 \leq x < 1$;
- 2) $\{x\} = \{y\}$ тогда и только тогда, когда $x - y = n$, где n – целое число;
- 3) $\{x + 1\} = \{x\}$ для любого x .

Таким образом, функция $y = \{x\}$ периодична с периодом 1. График ее показан на рисунке 3 (поскосившийся периодический забор).

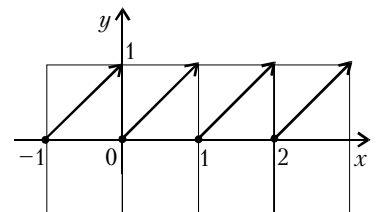


Рис. 3

С дробной частью тесно связана еще одна функция: $y = \{\{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части последняя функция непрерывна. Ее график изображен на рисунке 4.

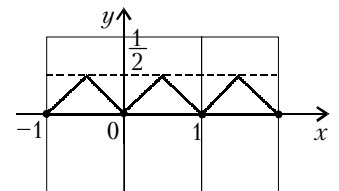


Рис. 4

Упражнения

8. Докажите, что $\{\{x\}\} = \left\{x + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$.

9. Докажите, что $\{k\{x\}\} = \{kx\}$ при любом натуральном k , и решите уравнение $\{3\{x\}\} = x$.

10. Решите уравнения

а) $\{3x\} = \frac{1}{2}$; б) $\{6x\} + \{x\} = 1$.