трансформатора подключают к сети переменного напряжения 220 В, к другой обмотке этого трансформатора подсоединяют последовательно с резистором сопротивлением 200 Ом одну из обмоток второго трансформатора, а к выводам второй обмотки этого трансформатора подключают идеальный амперметр переменного тока. Что покажет прибор?

Р.Александров

Ф1847. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.5). Из текста следует, что предмет и изображение одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось линзы параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).

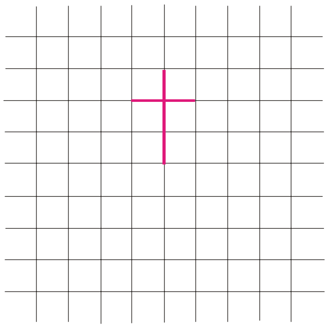
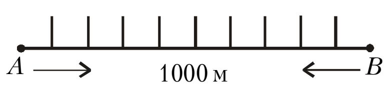


Рис.5

А.Чудновский

Решения задач М1811–М1815, Ф1823–Ф1832

М1811. *Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов A и B, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах B и A (см. рисунок). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между A и B 1000 м, через каждые 100 м от аллеи AB отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда-обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.*



Будем называть джентльменов A и B – по обозначениям концов аллеи, из которых они вышли. Гипотетическая возможность не встретиться и разминуться скрывается в наличии боковых аллей. Можно предположить, что пока джентльмен B находится где-то на боковой аллее, джентльмен A «проскакивает» ее начало по главной аллее. Зафиксируем этот предполагаемый момент времени t_0.

К моменту t_0 джентльмен A пройдет по парку $100k$ метров, k – целое число. Столько же, ввиду равенства скоростей, пройдет джентльмен B. Значит, джентльмен B в момент t_0 будет находиться либо в начале, либо в конце боковой аллеи. Если он в начале боковой аллеи, то произошла встреча в момент t_0. Если B находится в конце боковой аллеи, то это означает, что джентльмен A может переместиться из пункта A в пункт B, пройдя $100k + 100(k-1) = 100(2k-1)$ метров по парку. Но переместиться из A в B джентльмен A может, лишь пройдя по парку $100m$ метров, где m – непременно четное число.

Значит, встреча джентльменов неизбежна.

Напоследок вопрос для самоконтроля. Остается ли в силе утверждение задачи в случае $AB = 1100$ м?

В.Произволов

М1812. *Натуральные числа a, b и c таковы, что*

$$НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right) = 1 .$$

Докажите, что

$$НОД\left(ab+c, bc+a, ca+b\right) = НОД\left(a, b, c\right) .$$

(*НОД – наибольший общий делитель.*)

Рассмотрим произвольное простое число p и докажем, что оно входит в $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ и $НОД(a, b, c)$ в равной степени. Заметим, что если $НОД(a, b, c) \vdots p$, то степень вхождения p в оба НОДа равна наименьшей степени вхождения p в числа a, b, c (если $НОД(a, b, c) \vdots p^k$, но c не делится на p^{k+1}, то $ab+c$ делится на p^k, но не делится на p^{k+1}). Поэтому достаточно доказать, что любой простой делитель q числа $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ делит $НОД(a, b, c)$. Пусть, скажем, a не делится на q, тогда, поскольку $bc+a$ не делится на q, получаем, что b не делится на q и c не делится на q. Тогда

$$(ab+c)(bc+a) - a(ab+c) - c(bc+a) = ac\left(b^2-1\right) \vdots q .$$

Стало быть, $\left(b^2-1\right) \vdots q$. Аналогично, $\left(a^2-1\right) \vdots q$ и $\left(c^2-1\right) \vdots q$ – это уже противоречие с тем, что $НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right) = 1$. Значит, $НОД(ab+c, bc+a, ca+b) = НОД(a, b, c)$.

А.Голованов

М1813. *Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.1).*

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

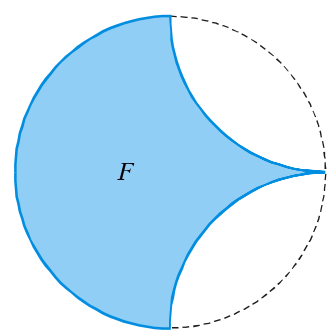


Рис.1

а) Это делается просто. На рисунке 2 показано разрезание фигуры F на части и складывание из них квадрата. Два сегмента отрезаются от F и приставляются иначе к оставшейся части – в результате получаем квадрат.

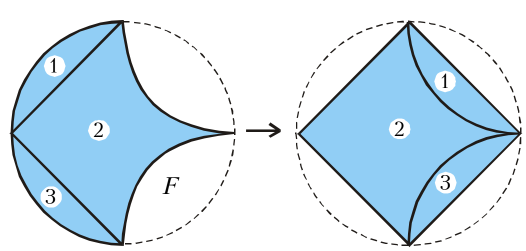


Рис.2