

Но разности векторов  $\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}$  и  $\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0}$  есть векторы перемещений точек  $A$  и  $B$ :

$$\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0} = \Delta\vec{r}_A, \quad \vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = \Delta\vec{r}_B,$$

т.е. вместо (14) запишем равенство

$$\Delta\vec{r}_B = m\Delta\vec{r}_A^\alpha. \quad (15)$$

Таким образом, мы доказали лемму: *если при движении точек  $A$  и  $B$  в плоскости выполняется равенство (12) или (13) (включая случай, когда постоянный вектор является нулевым), то выполняется равенство (15).*

Теперь вернемся к равенствам (4), (5), (7). Из них, соответственно, следуют равенства

$$\Delta\vec{r}_L = m\Delta\vec{r}_C^\alpha, \quad \Delta\vec{r}_K = n\Delta\vec{r}_C^\beta, \quad \Delta\vec{r}_L = \frac{m}{n}\Delta\vec{r}_K^{(\alpha-\beta)}. \quad (16)$$

Собственно говоря, равенства (4), (5), (7) являются частными случаями соответственных равенств (16), если положить начальные радиусы-векторы точек  $K, L, C$  равными нуль-вектору:

$$\vec{r}_{C_0} = \vec{r}_{K_0} = \vec{r}_{L_0} = \vec{0}.$$

Перейдем к примерам использования полученных соотношений.

**Задача 8.** Вернемся к задаче 6 и дадим ее решение в новой технике.

**Решение.** Из треугольника  $ACL$  (см. рис.13) имеем равенство  $\overline{CL} = \cos \gamma (\overline{CA}^{-\gamma})$ , что соответствует (13) при  $\vec{R} = \vec{0}$ . Поэтому, если оставлять точку  $C$  неподвижной, то, согласно лемме,  $\overline{\Delta r}_L = \cos \gamma \overline{\Delta r}_A^{-\gamma}$ . Переместим точку  $A$  в точку  $B$ :  $\overline{\Delta r}_A = \overline{AB}$ . При этом точка  $L$  переместится в точку  $K$ :  $\overline{\Delta r}_L = \overline{LK}$ . Но тогда  $\overline{LK} = \cos \gamma (\overline{AB}^{-\gamma})$ , т.е.  $LK = AB \cos \gamma$  и образует с  $AB$  угол  $\gamma$ .

**Задача 9.** На сторонах произвольного четырехугольника  $ABCD$  построены равнобедренные прямоугольные треугольники  $DL_1A, CK_1D, BL_2A, CK_2B$  (рис.17). Требуется доказать, что отрезки  $K_1K_2$  и  $L_1L_2$  взаимно перпендикулярны и равны.

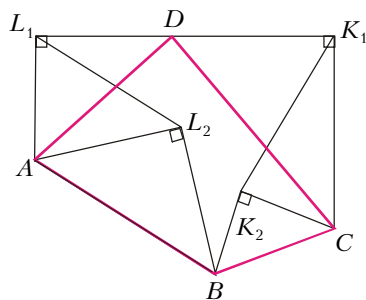


Рис. 17

**Решение.** Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник  $DL_1A$ . Из него получаем

$$\begin{aligned} \angle L_1AD &= \alpha = 45^\circ, \\ AL_1 : AD &= m = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник  $CK_1D$ . Из него получаем

$$\angle K_1CD = \beta = -45^\circ, \quad CK_1 : CD = n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,  $m : n = 1, \alpha - \beta = 90^\circ$ .

Переместим теперь точку  $D$  в точку  $B$ . Тогда точка  $L_1$  переместится в точку  $L_2$ , а точка  $K_1$  переместится в точку  $K_2$ . Отсюда векторы перемещений точек  $D, L_1$  и  $K_1$  равны

$$\Delta\vec{r}_D = \overline{DB}, \quad \Delta\vec{r}_{L_1} = \overline{L_1L_2}, \quad \Delta\vec{r}_{K_1} = \overline{K_1K_2}.$$

Осталось воспользоваться формулами (16):

$$\overline{L_1L_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{DB}^{45^\circ}, \quad \overline{K_1K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{DB}^{-45^\circ}, \quad \overline{L_1L_2} = \overline{K_1K_2}^{90^\circ}.$$

Последнее равенство показывает нам перпендикулярность прямых  $K_1K_2$  и  $L_1L_2$  и равенство отрезков  $K_1K_2$  и  $L_1L_2$ .

**Задача 10.** На сторонах  $AD, BC$  и на диагоналях  $AC, BD$  параллелограмма  $ABCD$  построены равнобедренные прямоугольные треугольники  $DLA, CMB, CNA, DKB$  соответственно (прямые углы – в точках  $L, K, N, M$ ). Докажите, что  $KMNL$  – квадрат (рис.18).

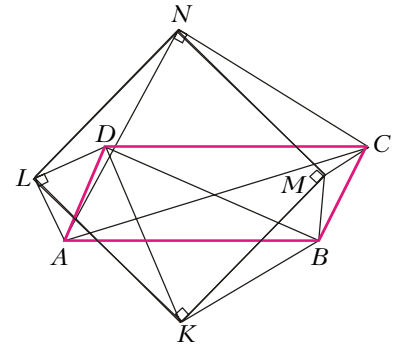


Рис. 18

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $DLA$ . В этом

треугольнике выполняется равенство  $\overline{DL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{DA}^{-45^\circ}$ . Рассмотрим перемещение этого треугольника такое, при котором точка  $D$  остается неподвижной, а точка  $A$  перемещается в точку  $B$ . При таком перемещении точка  $L$  попадет в точку  $K$ . При этом  $\overline{\Delta r}_A = \overline{AB}$ ,  $\overline{\Delta r}_L = \overline{LK}$ . Тогда из леммы приходим к равенству

$$\overline{LK} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB}^{-45^\circ}.$$

Точно так же, рассматривая треугольник  $ABC$  и построенные на его сторонах треугольники  $CNA$  и  $CMB$ , мы получим, рассматривая аналогичное перемещение, что

$$\overline{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB}^{-45^\circ}. \quad (17)$$

Из двух последних равенств мы видим, что  $\overline{NM} = \overline{LK}$ , поэтому  $KMNL$  – параллелограмм.

Аналогично можно доказать, что верно равенство  $\overline{KM} = \overline{LN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{DC}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB}^{45^\circ}$  (так как  $\overline{DC} = \overline{AB}$ ). Сравнивая полученные выражения для  $KM$  и  $LK$ , видим, что  $KM = LK$ , а потому  $KMNL$  – ромб.

И, наконец,  $KMNL$  – квадрат. В самом деле, из равенства  $\overline{KM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB}^{45^\circ}$  мы получаем равенство  $\overline{AB} = \sqrt{2} \overline{KM}^{-45^\circ}$ . Подставим найденное значение для  $\overline{AB}$  в равенство (17) и получим

$$\overline{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB}^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{2} \overline{KM}^{-45^\circ} \right)^{-45^\circ} = \overline{KM}^{-90^\circ}.$$

Из этого равенства видим, что угол  $NMK$  прямой. Но тогда ромб  $KMNL$  является квадратом.

В заключение можно заметить, что задача обобщается на произвольный четырехугольник. На двух его сторонах и диагоналях строятся соответствующим образом подобные треугольники и четыре их вершины оказываются вершинами параллелограмма.

Рассмотренная идея решения имеет некую модификацию. Проиллюстрируем ее на такой задаче.