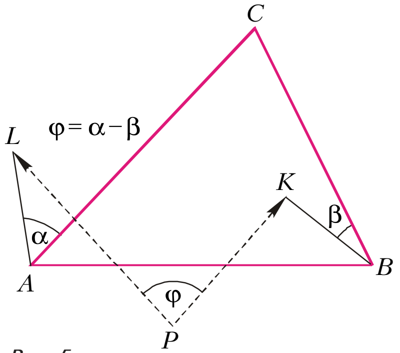

Рис. 5

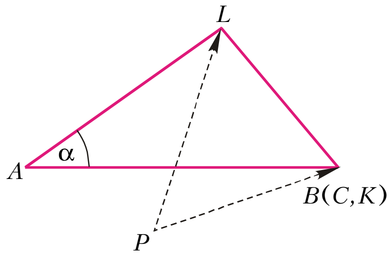

Рис. 6

будут относиться как $m : n$, т.е.

$$PL : PK = m : n.$$

Можно даже записать точнее (рис.5):

$$\overline{PL} = \frac{m}{n}\overline{PK}^{\alpha-\beta}. \quad (9)$$

Задача сводится к нахождению полюса P, т.е. к однозначному определению его положения относительно неподвижного (в процессе движения точки C) отрезка AB. Для этого будем искать определяющий момент времени. В частности, такой момент наступит тогда, когда точка C совпадет с точкой B или с точкой A. Докажем это.

Рассмотрим случай (рис.6), когда точка C совпадает с точкой B. Тогда и точка K совпадает с точкой B. (Иначе говоря, треугольник BCK вырождается в точку.) Сначала заметим, что из равенства (9) для векторов $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ следует, что

$$PL = \frac{m}{n}PK.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника KLA находим

$$KL = c\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}.$$

Теперь можем найти отрезки PK и PL. Сначала по теореме косинусов из треугольника PKL находим

$$KL = PK\sqrt{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)},$$

откуда

$$PK = \frac{KL}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)}}. \quad (10)$$

Тогда

$$PL = \frac{m}{n}PK = \frac{KL}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1 - 2\frac{n}{m}\cos(\alpha-\beta)}}.$$

В результате найдены три стороны в треугольнике PKL, и тем самым положение полюса P можно установить. Но по трем сторонам можно построить два треугольника, поэтому надо следить за соответствующей ориентацией угла между векторами $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{PL}$ – она должна соответствовать знаку разности $\alpha - \beta$.

Выделим из общего решения три частных случая: 1) $\alpha - \beta = 0^\circ$: а) $m = n$; б) $m \neq n$; 2) $\alpha - \beta = 180^\circ$. Случай 1,а) несколько особый, мы рассмотрим его позже. В случаях 1,б и 2 векторы $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ коллинеарны, причем в случае 1,б они сонаправлены, а в случае 2 – противоположно направлены. Отсюда следует, что в случае 1,б точка P лежит вне отрезка KL, а в случае 2 точка P лежит на отрезке KL. Проиллюстрируем случаи 1,б и 2 на конкретных задачах.

Случай $\alpha - \beta = 0^\circ$; $m \neq n$. Так как угол между отрезками PK и PL в этом случае равен 0°, то треугольник PLK вырождается в отрезок. По формуле (10) получаем

$$PK = \frac{KL}{\left|1 - \frac{m}{n}\right|} \quad \left(\text{или } PL = \frac{m}{n}PK\right).$$

В этом случае полюс P лежит на прямой KL вне отрезка KL. Положение точки P относительно точек K, L зависит от величины m/n и устанавливается однозначно.

В дальнейшем мы постоянно используем результаты и обозначения этой задачи (α, β, P).

Задача 3. *На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BCK с острыми углами α и γ (рис.7). Точка Q лежит на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой AB. При этом $AQ = AB\,\mathrm{tg}\,\gamma$. Докажите, что точки Q, L, K лежат на одной прямой и $QL : QK = \cos^2\alpha$.*

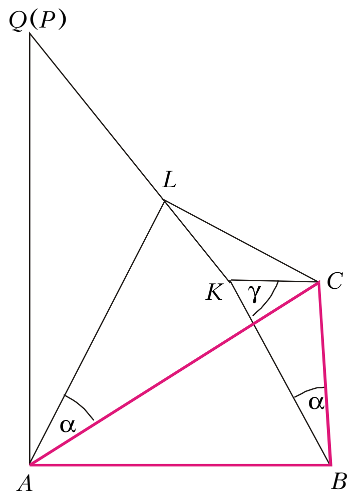

Рис. 7

Решение. В этой задаче $\alpha - \beta = 0^\circ$, $m = \cos\alpha$, $n = 1/\cos\alpha$ ($m \neq n$). Значит, полюс P, точки L и K лежат на одной прямой и при этом $PL : PK = m : n = \cos^2\alpha$. Осталось доказать, что полюс P совпадает с точкой Q. Для этого воспользуемся обоими определяющими положениями точки C. Сначала совместим точку C с точкой A (рис.8). Новое положение точки C – C_1 – и новое положение точки L – L_1 – совпадут с точкой A, а точка K займет положение K_1 (треугольник ACL вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_1, K_1, в данной ситуации – на перпендикуляре к AB, проходящем через точку A. Затем совместим точку C с точкой B. Тогда новое положение точки C – C_2 – и новое положение точки K – K_2 – совпадут с точкой B, а точка L займет положение L_2 (треугольник BCK вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_2, K_2. Оказывается, что полюс P является точкой пересечения прямых K_1L_1 и K_2L_2, т.е. точкой Q. Отсюда и следует, что $AQ = AB\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

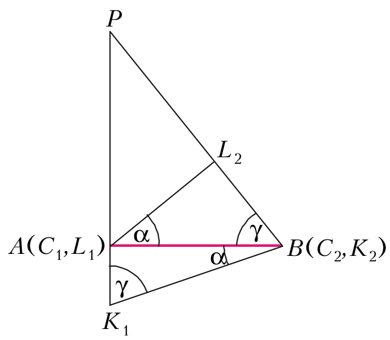

Рис. 8

(Вместо того, чтобы брать два определяющих момента, можно взять только один из них и использовать отношение $m : n$.)