

статье «Многочлены деления круга» в «Кванте» №1 за 1998 год) или разложением

$$64m^{12} + 1 = (4m^4 + 1)(4m^4 - 4m^3 + 2m^2 - 2m + 1)(4m^4 + 4m^3 + 2m^2 + 2m + 1).$$

31. Неравенство $\left| \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} \right| < \frac{1}{2}$ можно записать в виде

$|a^2 - b^2 - 2ab| < 2$, откуда $(a - b)^2 - 2b^2 = \pm 1$. Значит, $(a - b; b) = (1; 1), (3; 2), (7; 5), (17; 12)$ или $(41; 29)$, откуда $(a; b) = (2; 1), (5; 2), (12; 5), (29; 12)$ или $(70; 29)$. Треугольник с катетами 29 и 12 расположить можно, ибо $29 + \frac{12}{2} < 40$ и $12 + \frac{29}{2} < 32$. А треугольник с катетом 70 расположить нельзя, ибо $70^2 > 40^2 + 32^2$.

32. Надо решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2},$$

т.е. $2n(n+1) = k(k+1)$. Умножив обе части на 2, получаем уравнение

$$(2n+1)^2 - 1 = 2k^2 + 2k.$$

Обозначим $x = 2n + 1$ и еще раз умножим на 2 обе части уравнения:

$$2x^2 - 2 = (2k+1)^2 - 1.$$

Обозначив $2k + 1 = y$, получаем уравнение $2x^2 - 1 = y^2$, которому, как мы знаем, удовлетворяют числа вида

$$x = \left((1 + \sqrt{2})^{2m+1} - (1 - \sqrt{2})^{2m+1} \right) / (2\sqrt{2}).$$

Следовательно, $n = \left((1 + \sqrt{2})^{2m+1} - (1 - \sqrt{2})^{2m+1} - 2\sqrt{2} \right) / (4\sqrt{2})$, где m - натуральное число.

33. а) Применим индукцию для доказательства того, что соседние члены рассматриваемой последовательности удовлетворяют уравнению. База. $0^2 - m \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1$. Переход. В последовательности a_0, a_1, a_2, \dots за каждой парой $a_k = x, a_{k+1} = y$ следует пара $(a_{k+1}; a_{k+2}) = (a_{k+1}; ma_{k+1} - a_k) = (y; my - x)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} y^2 - my(my - x) + (my - x)^2 &= y^2 - (my - x)(my - (my - x)) = \\ &= y^2 - (my - x)x = x^2 - mxy + y^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что других решений в целых неотрицательных числах у рассматриваемого уравнения нет. Предположим, что $X^2 - mXY + Y^2 = 1$ и $0 \leq X \leq Y$. Если при этом $X = 0$, то, очевидно, $Y = 1$. Если же $X > 0$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = X, \\ my - x = Y. \end{cases}$$

Очевидно, $x = mX - Y$ и $y = X$. Если $mX - Y < 0$, то $mXY < Y^2$ и $1 = X^2 - mXY + Y^2 > X^2 \geq 1$, что невозможно. Значит, $x = mX - Y \geq 0$. Если $x = 0$, то $y = 1$. Если же $x > 0$, то пара натуральных чисел $(x; y)$ удовлетворяет равенству $x^2 - mxy + y^2 = 1$ и условиям $x < y = X \leq Y$ (проверьте!). Переходя таким образом от пары $(X; Y)$ к предшественнице $(x; y)$, затем от $(x; y)$ - к ее предшественнице и так далее, мы рано или поздно должны будем остановиться, а остановиться сможем лишь тогда, когда получим решение $(x; y) = (0; 1)$. Значит, за конечное число операций вида $(X; Y) \rightarrow (x; y)$ мы из любого решения в натуральных числах получим решение $(0; 1)$. Поэтому, идя по этой цепочке в об-

ратном направлении, т.е. начав с пары $(0; 1)$ и многократно выполняя преобразование $(x; y) \rightarrow (X; Y)$, мы получим любое решение уравнения в целых неотрицательных числах $x \leq y$.

б) *Первый способ.* Рассуждайте по индукции, предварительно доказав тождество $\Phi_{n+4} = 3\Phi_{n+2} - \Phi_n$.

Второй способ. Уравнение $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ заменой $y = x - z$ можно привести к виду $z^2 + zx - x^2 = 1$. Решения

$(x; z) = (\Phi_{2n}; \Phi_{2n-1})$ соответствуют решениям исходного уравнения в неотрицательных целых числах x и y , удовлетворяющих неравенству $x \geq y$. Значит, $(x; y) = (x; x - z) = (\Phi_{2n}; \Phi_{2n} - \Phi_{2n-1}) = (\Phi_{2n}; \Phi_{2n-2})$.

Третий способ. Приведите уравнение к виду

$$(2x - 3y)^2 - 5y^2 = 4,$$

вспомните следствие теоремы 7 (см. предыдущий номер журнала) и рассмотрите два случая: $2x - 3y > 0$ и $2x - 3y < 0$.

34. а) Для $p = 2$ годятся $x = y = 1$. Для $p = 17$ годятся $x = 4, y = 0$. Для любого другого простого p рассмотрим числа вида x^2 , где $x = 0, 1, \dots, (p-1)/2$, и числа вида $34y^2 - 1$, где $y = 0, 1, \dots, (p-1)/2$. Докажите, что как $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида x^2 дают разные остатки при делении на p , так и $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида $34y^2 - 1$ дают разные остатки при делении на p . Поскольку $\frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2} > p$, то хотя бы одно число одного вида сравнимо по модулю p с числом другого вида, т.е. найдется такая пара $(x; y)$, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на p .

г) Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках, т.е. тем, что существуют такие числа x и y , для которых

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv x_2 \pmod{m_2}, \quad y \equiv y_1 \pmod{m_1} \quad \text{и} \quad y \equiv y_2 \pmod{m_2}.$$

е) Если бы существовало решение в целых числах, то существовало бы и решение, где x и y - натуральные числа. Среди всех таких решений нашлось бы решение с наименьшей возможной величиной y . Поскольку

$$35^2 - 34 \cdot 6^2 = 35^2 - (35-1)(35+1) = 1,$$

то

$$\begin{aligned} x^2 - 34y^2 &= (x - y\sqrt{34})(35 + 6\sqrt{34})(35 - 6\sqrt{34})(x + y\sqrt{34}) = \\ &= (35x - 204y - (35y - 6x)\sqrt{34})(35x - 204y + (35y - 6x)\sqrt{34}). \end{aligned}$$

Докажем неравенства $35x - 204y > 0, 35y - 6x > 0$ и $35y - 6x < y$. Поскольку $\frac{3}{17} > \frac{35}{204}$, то достаточно доказать, что

$$\frac{6}{35}x < y < \frac{35}{204}x.$$

Первое совсем легко: если $\frac{6}{35}x \geq y$, то

$$-1 = x^2 - 34y^2 \geq \frac{35^2}{36}y^2 - 34y^2 = \frac{y^2}{36} > -1,$$

что неверно. Второе неравенство доказать чуть сложнее. Если $y \geq \frac{35}{204}x$, то

$$x^2 - 34y^2 \leq \frac{204^2}{35^2}y^2 - 34y^2 = \frac{-34y^2}{35^2}.$$

При $y \geq 7$ противоречие очевидно: $\frac{34y^2}{35^2} > 1$. А для каждого из значений $y = 1, 2, 3, 4, 5$ и 6 легко проверить, что $34y^2 - 1$ не является квадратом целого числа.

35. а) $3a^2 - 2b^2 = (a\sqrt{3} - b\sqrt{2})(a\sqrt{3} + b\sqrt{2}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2001} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2001} = ((\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}))^{2001} = (3 - 2)^{2001} = 1$.