Задача 7. *Пусть R и r – радиусы сфер, описанной около правильной n-угольной пирамиды и вписанной в нее, d – расстояние между их центрами. Докажите, что*

а) $d^2 = R^2 - 2Rr - r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}$, *б)* $\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$,

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

Решение. Воспользуемся теми же обозначениями и формулами, что и при решении предыдущих задач. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = 2R\sin^2\alpha, \\ h = r\left(1 + \dfrac{1}{\cos\beta}\right), \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и получим

$$\frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right).$$

Из первых двух уравнений находим

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2R}{2R - h}, \quad \frac{1}{\cos\beta} = \frac{h - r}{r}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем квадратное уравнение относительно h:

$$h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}} = 0, \qquad (6)$$

откуда

$$h = R + r + \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

А так как расстояние d между центрами описанной и вписанной сфер равно $|NJ - NO| = |h - r - R|$, то

$$d = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr - r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Дискриминант уравнения (6) неотрицателен, следовательно,

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $d = 0$, т.е. центры сфер совпадают.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичное неравенство для радиуса описанной сферы и радиуса сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды?

Задача 8. *Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и R_1 – радиус сферы, касающейся всех ее ребер. Докажите, что*

$$\frac{R}{R_1} \geq 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)$$

и представим ее в виде

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right).$$

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел a и b: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, где равенство имеет место только при $a = b$. Получим

$$y = \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2y}{\sin\frac{\pi}{n}} \leq \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

или

$$\frac{R}{R_1} \geq 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha, \text{ или } 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1,$$

т.е. тогда, когда $n < 6$ и центры сфер совпадают (см. задачу 3). Для правильной треугольной пирамиды получаем $\frac{R}{R_1} \geq 3$, для четырехугольной пирамиды $\frac{R}{R_1} \geq \sqrt{2}$ (равенство имеет место при $\alpha = 45^\circ$). Для шестиугольной пирамиды и при всех $n > 6$ имеем $\frac{R}{R_1} > 1$, т.е. $R > R_1$.

Из приведенных примеров видно, что решение связанных между собой задач упрощается, если задачи расположены в определенной последовательности так, что решение первых, более простых задач помогает отыскать решение последующих.

Предлагаем читателям для самостоятельного решения еще несколько задач о сфере, касающейся ребер правильной пирамиды.

Упражнения

1. Сторона основания правильной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании равен 60°. Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R_1 сферы, касающейся всех ее ребер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, в два раза больше радиуса сферы, касающейся всех ее ребер. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. В правильной n-угольной пирамиде центр O сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, относительно плоскости основания. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию. Вычислите его при $n = 6$.