

шадей этих двух треугольников отличается от площади исходного треугольника менее чем на  $1/2$ . Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

**32.** Как известно,  $1 + 2 = 3$ . Легко проверить также, что  $1 + 2 + 3 + \dots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$ . Найдите все такие  $n$ , что сумма первых  $n$  натуральных чисел равна сумме нескольких последующих.

### Теорема 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = X, \\ 2x + 3y = Y, \end{cases}$$

находим из нее  $x = 3X - 4Y$  и  $y = 3Y - 2X$ , замечаем, что

$$x^2 - 2y^2 = (3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2,$$

а затем формулируем и доказываем следующую лемму.

**Лемма.** Если  $X, Y$  – натуральные числа, удовлетворяющие равенству  $X^2 - 2Y^2 = 7$ , и выполнено неравенство  $Y \geq 6$ , то  $3X - 4Y$  и  $3Y - 2X$  – тоже натуральные числа, причем  $3X - 4Y < X$ .

**Доказательство.** Рассуждаем «от противного». Если  $3X - 4Y \leq 0$ , то  $X \leq \frac{4}{3}Y$  и  $7 = X^2 - 2Y^2 \leq \frac{16}{9}Y^2 - 2Y^2 < 0$ . Если  $3Y - 2X \leq 0$ , то  $X \geq \frac{3}{2}Y$  и  $X^2 - 2Y^2 \geq \frac{9}{4}Y^2 - 2Y^2 = \frac{Y^2}{4} > 7$ . Наконец, если  $3X - 4Y \geq X$ , то  $X \geq 2Y$  и  $X^2 - 2Y^2 \geq 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 > 7$ , что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 2. Чтобы понять, где может остановиться процесс образования пар-предшественниц, достаточно разобрать случаи  $Y = 1, 2, 3, 4, 5$ . Сделав это, вы найдете, как и следовало ожидать, два решения: (3; 1) и (5; 3).

### Теорема 5

Доказательство теоремы 5 похоже на доказательства теорем 2 и 3. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = X, \\ x + 2y = Y, \end{cases}$$

находим из нее  $x = 2X - 3Y$  и  $y = 2Y - X$ , замечаем, что

$$x^2 - 3y^2 = (2X - 3Y)^2 - 3(2Y - X)^2 = X^2 - 3Y^2,$$

а затем формулируем и не доказываем (надеясь на читателя) следующую лемму.

**Лемма.** Если  $X, Y$  – натуральные числа, причем  $X^2 - 3Y^2 = 1$ , то  $2X - 3Y$  и  $2Y - X$  – неотрицательные числа, причем  $2Y - X < Y$ .

Окончание доказательства – как в теореме 2.

### Теорема 7

Из системы

$$\begin{cases} x + y = X, \\ x = Y \end{cases}$$

находим  $x = Y$  и  $y = X - Y$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} x^2 - xy - y^2 &= Y^2 - Y(X - Y) - (X - Y)^2 = \\ &= Y^2 - XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = -(X^2 - XY - Y^2). \end{aligned}$$

**Лемма.** Если  $X, Y$  – натуральные числа, удовлетворяющие равенству  $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$ , то  $X \geq Y$ , причем равенство выполнено лишь в случае  $X = Y = 1$ .

**Доказательство.** Как всегда, рассуждаем «от противного». Если  $X < Y$ , то  $X^2 - XY - Y^2 < -Y^2 \leq -1$ , что несовместимо с условием  $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$ . Если же  $X = Y$ , то  $X^2 - XY - Y^2 = -X^2$ . Очевидно,  $-X^2$  не равняется 1, а  $-X^2 = -1$  лишь при  $X = 1$ . Лемма доказана. Теперь читатель, надеемся, самостоятельно завершит доказательство теоремы 7.

**Упражнение 33 (М39).** а) Целые неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют уравнению  $x^2 - mxy + y^2 = 1$  (где  $m$  – данное натуральное число,  $m > 1$ ) тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  – соседние члены последовательности  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = m, a_3 = m^2 - 1, a_4 = m^3 - 2m, a_5 = m^4 - 3m^2 + 1, \dots$ , в которой  $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$  для всех  $k \geq 0$ . Докажите это. б) Рассмотрим случай  $m = 3$ . Очевидно,  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8, a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$ . Возникает гипотеза, что для любого  $n$  число  $a_n$  – это  $(2n)$ -й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

### Теорема 9

Идея доказательства уже была применена нами четырежды. Применим же ее в пятый раз. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xz + dyt = X, \\ xt + yz = Y. \end{cases}$$

Чтобы найти  $x$ , домножим первое уравнение на  $z$ , второе – на  $dt$  и вычтем затем второе уравнение из первого:

$$zx - dtY = xz^2 - dxt^2 = x,$$

поскольку  $z^2 - dt^2 = 1$ . Аналогично, чтобы найти  $y$ , домножим первое уравнение на  $t$ , второе на  $z$  и вычтем второе уравнение из первого:

$$Xt - Yz = dyt^2 - yz^2,$$

откуда  $y = Yz - Xt$ .

**Лемма.** Если  $X, Y$  – натуральные числа, удовлетворяющие равенству  $X^2 - dY^2 = 1$ , а  $z$  – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число  $t$ , что  $z^2 - dt^2 = 1$ , то  $zX - dtY \geq 0$  и  $Yz - Xt \geq 0$ , причем  $Yz - Xt < Y$ .

**Доказательство.** Рассуждаем «от противного». Если  $zX - dtY < 0$ , то  $X < \frac{dtY}{z}$  и, следовательно,

$$1 = X^2 - dY^2 < \left(\frac{dtY}{z}\right)^2 - dY^2 = dY^2 \frac{dt^2 - z^2}{z^2} < 0.$$

Если  $Yz - Xt < 0$ , то

$$X^2 - dY^2 > \frac{Y^2 z^2}{t^2} - dY^2 = \frac{Y^2 z^2 - dY^2 t^2}{t^2} = \frac{Y^2}{t^2} \geq 1.$$