решение в целых числах, то это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Выведите это из утверждения теоремы 10.

25. а) Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких целых a уравнение $a\left(x^2-1\right)=y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах. б) Пусть a – целое число. Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких натуральных d уравнение $x^2-dy^2=a^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

26. Пусть n – натуральное число, $n>1$. Докажите, что уравнение а) $x^2-\left(n^2-1\right)y^2=1$; б) $x^2-\left(n^2+1\right)y^2=1$; в) $x^2-\left(n^2+2\right)y^2=1$; г) $x^2-\left(n^2-2\right)y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

27. Докажите, что при любом натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2$; б) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2$;

в) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2+1$; г) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$;

д) $\left(a^2+1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$; е) $\left(a^2-1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

28. Докажите, что ни при каком натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$;

б) $x^2=(4a-1)\left(y^2+1\right)$; в) $a\left(x^2-1\right)=y^2+1$

не имеет решений в целых числах. *Указание к пунктам б) и в).* Воспользуйтесь тем, что число вида y^2+1 не может делиться на натуральное число вида $4n-1$. Доказательство последнего факта можно прочесть, например, в статье «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 год.

29. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много четверок целых чисел, в каждой из которых числа попарно различны и таковы, что $x+y+z+t=x^3+y^3+z^3+t^3=2$. б) Уравнение $xy(x+2)(y+2)=z(z+2)$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. в) Существует бесконечно много таких троек натуральных чисел, что произведение любых двух из этих чисел на единицу больше квадрата натурального числа. г) Для любого натурального числа a система уравнений

$$\begin{cases}xy-1=a^2,\\ yz-1=u^2,\\ zx-1=v^2\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, u и v. д) Для любого натурального числа n существует бесконечно много таких наборов из $k=3n^2-1$ последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов сама является квадратом натурального числа. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой 10.

30 * (М618). Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких натуральных n, что $n!$ делится на n^2+1. б) Для любого числа $\alpha>0$ существует бесконечно много таких натуральных n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Доказательства теорем

Теорема 2

Пусть X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y=X,\\ x+y=Y\end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases}x=2Y-X,\\ y=X-Y.\end{cases}$$

Легко проверить, что

$$x^2-2y^2=(2Y-X)^2-2(X-Y)^2=$$

$$=4Y^2-4XY+X^2-2\left(X^2-2XY+Y^2\right)=-\left(X^2-2Y^2\right).$$

Понимаете, в чем идея? Каждой паре $(X;\ Y)$, являющейся решением уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$, мы сопоставляем ее «предшественницу» – пару $(x;y)=(2Y-X;\ X-Y)$, удовлетворяющую равенству $x^2-2y^2=\mp1$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа и $X^2-2Y^2=\pm1$, то $2Y-X$ и $X-Y$ – неотрицательные числа, причем $X-Y<Y$.*

Доказательство. Будем рассуждать «от противного». Если $2Y-X<0$, то $X>2Y$ и $X^2-2Y^2>4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что противоречит равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Если $X-Y<0$, то $X<Y$ и $X^2-2Y^2<Y^2-2Y^2=-Y^2\le-1$. Наконец, если $X-Y\ge Y$, то $X\ge2Y$ и $X^2-2Y^2\ge4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Эта лемма – основа доказательства теоремы 2. А именно, взяв любую пару $(X;\ Y)$ натуральных чисел, удовлетворяющую равенству $X^2-2Y^2=\pm1$, мы можем рассмотреть ее предшественницу – пару $(x;\ y)$. При этом $y<Y$. Если x и y – натуральные числа, то у пары $(x;\ y)$ есть своя предшественница, у той – своя, и так далее. Бесконечно этот процесс продолжаться не может: неравенство $y<Y$ гарантирует, что начатый с пары $(X;\ Y)$ процесс образования предшественниц оборвется не более чем через Y шагов. (Любитель строгости сказал бы, что здесь мы воспользовались отсутствием бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел.)

В какой момент обрывается процесс образования пар-предшественниц? Очевидно, когда очередная пара $(x;\ y)$ состоит не только из натуральных чисел, проще говоря, когда одно из чисел x и y равно нулю. Число x равняться нулю не может, а вот равенство $x^2-2\cdot0^2=\pm1$ возможно. И возможно оно лишь при $x=1$ (напоминаем: $x\ge0$).

Итак, для любого решения $(X;\ Y)$ уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$ процесс образования пар-предшественниц остановится, дойдя до пары $(1;\ 0)$. Проследив этот процесс в обратном направлении, т.е. не от пары $(X;\ Y)$ к паре $(1;\ 0)$, а от пары $(1;\ 0)$ к паре $(X;\ Y)$, мы видим, что он происходит по формуле $(x;y)\to(x+2y;\ x+y)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Упражнения

31. На листе клетчатой бумаги размером 32×40 клеток нарисован прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в узлах клеток. На его катетах как на гипотенузах во внешнюю сторону нарисованы равнобедренные прямоугольные треугольники. Оказалось, что разность пло-