Если вращается елочный шарик

А.СТАСЕНКО

Так, забывая жизни скоротечность,
Постигнем мы, что время есть Движенье.
И, покидая цепкую Конечность, –
Что бесконечность есть Кругововращенье!..
А.Чижевский

О ЧЕМ ДУМАЛ ОТЛИЧНИК ТИН ЭЙДЖЕР, ГЛЯДЯ НА новогоднюю елку? Конечно, не о конфетах и жвачках, спрятанных под елкой добрым Дедом Морозом. Нет, он наблюдал, как в потоках теплого воздуха от свеч поворачивается вокруг вертикальной оси елочный шарик. А что если его вращать все быстрее и быстрее – почти до момента, когда его разорвут центробежные силы инерции? Ведь если стеклянная оболочка шарика покрыта блестящим слоем металла, в нем должны быть свободные электроны. И значит…

Дальнейшие мысли были таковы. На любой электрон проводящего слоя действует центробежная сила инерции $\vec{F}_c$, перпендикулярная оси вращения (рис.1); ее касательная (тангенциальная) составляющая $F_\tau = -F_c \sin\varphi$ будет перемещать его вдоль поверхности, так что электроны в конце концов (т.е. в равновесном состоянии) скопятся где-то в окрестности экватора; но поскольку шарик в целом электронейтрален, то у его полюсов останутся положительные заряды. В результате в качестве первого приближения Тин Эйджер вообразил себе такую картину (см. рис.1): отрицательно заряженный экватор (заряд $-Q$) и положительно заряженные полюсы ($+Q/2$ и $+Q/2$) создают электрическое поле, причем, как полагается, векторные линии поля $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, так что в меридиональном сечении получаются четыре «уха». Да ведь это квадруполь! – подумал наш герой, и был прав (потому что «квадро» значит «четыре», о чем знает всякий любитель дискотеки).

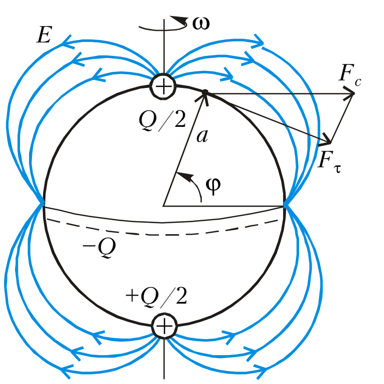

Рис. 1

Ну действительно, у точечного заряда векторные линии электрического поля строго радиальны (рис.2,*а*), а напряженность поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда: $E \sim r^{-2}$ (закон Кулона). У диполя все линии вектора $\vec{E}$ начинаются на положительном заряде и оканчиваются на точно таком же (по модулю) отрицательном заряде (рис.2,*б*), так что в меридиональной плоскости получаются два «уха», а напряженность электрического поля на большом расстоянии ($r \gg l$) убывает как r^{-3}. Поэтому, если на расстоянии l расположить антипараллельно друг другу два диполя с плечом l (рис.2,*в*), возникнет квадруполь, и его поле

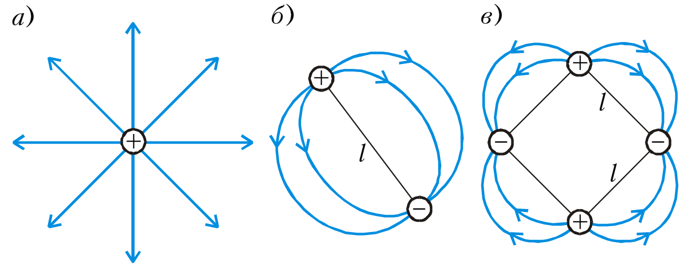

Рис. 2

будет убывать еще быстрее, а именно как r^{-4}. А если в плоскости, параллельной квадруполю, расположить еще один такой же, но повернутый на 90°, то возникнет октуполь («окто» означает «восемь»), и его поле будет пропорционально r^{-5}. А если… Но, стоп! – сказал себе волевой Тин Эйджер, – не отвлекаться от главного направления!

Итак, в случае равномерно вращающегося шарика с проводящим поверхностным слоем возникает квадрупольное электростатическое поле, которое быстро ($\sim r^{-4}$) уменьшается с расстоянием и, конечно, как-то зависит от широтного угла φ.

Безусловно, наш герой понимал, что заряды на полюсах едва ли будут точечными, а на экваторе – линейными: вероятнее всего, они будут как-то «размазаны» по поверхности шарика, т.е. возникнет поверхностное распределение зарядов с плотностью $\sigma(\varphi)$, зависящее от широты. Но как его найти?

Многие свойства этого распределения ясны из соображений симметрии. Например, оно должно быть симметричным относительно экватора (где $\varphi = 0$), так что $\sigma(\varphi) = \sigma(-\varphi)$. Поэтому как полный заряд всей сферы, так и заряды обеих ее половин в отдельности должны равняться нулю. С ростом же широтного угла φ при некотором его значении φ_* должен измениться знак зарядов с отрицательного на положительный. Значит, это распределение должно иметь вид, изображенный на рисунке 3. А значения на экваторе $\sigma(0) = \sigma_0$ или на полюсах $\sigma(\pm\pi/2)$ характеризуют масштаб разделения зарядов. Как бы оценить порядок этих величин?

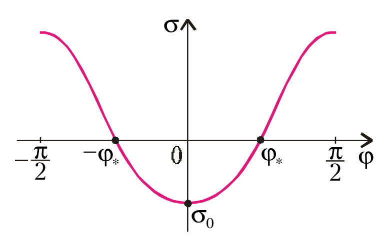

Рис. 3

Вспомним, что центробежную силу инерции, действующую на отдельный электрон, находящийся на широте φ, можно записать в виде

$$F_c = m_e \omega^2 a \cos\varphi, \quad (1)$$

или иначе можно сказать, что центробежное ускорение на этой широте равно (это нам понадобится в дальнейшем)

$$w_c = \omega^2 a \cos\varphi. \quad (2)$$

Значит, касательная составляющая центробежной силы инерции равна

$$F_\tau = -F_c \sin\varphi = -m_e \omega^2 a \cos\varphi \sin\varphi.$$

(В стационарном состоянии эта сила уравновешивается кулоновской силой, возникшей из-за разделения зарядов под действием центробежных сил инерции.) Поэтому

$$E_\tau = \frac{F_\tau}{e} = -\frac{m_e\omega^2 a}{e}\cos\varphi\sin\varphi .$$

Знаки «минус» в двух последних формулах говорят о том, что и касательная составляющая центробежной силы, и тангенциальная составляющая возникшего электростатического поля направлены против роста широтного угла φ.

Этого уже достаточно, чтобы оценить масштаб разделения зарядов на поверхности шарика. Как известно, поверхностная плотность заряда равна разности нормальных компонентов электрического поля по обе стороны от поверхности, умноженной на электрическую постоянную ε_0. Вполне понятно, что формулы для нормальных компонентов будут иметь тот же размерный множитель $m_e\omega^2 a$, что и тангенциальные (им просто больше не от чего зависеть), только безразмерная зависимость от угла φ будет, скорее всего, другой. Поэтому можно ожидать, что поверхностная плотность заряда будет порядка

$$\sigma \sim \frac{m_e}{e}\omega^2 a\varepsilon_0 .$$

Но для того чтобы полюсы приобрели хотя бы по одному положительному заряду, равному e, к экватору должна быть отброшена хотя бы пара электронов – тогда уже и возникнет обещанный квадруполь. Это значит, что угловая скорость должна быть больше определенной минимальной величины. Полагая для оценки, что этим двум электронам отведен экваториальный пояс площадью порядка a^2, получим

$$\sigma_0 a^2 \sim \frac{m_e\omega^2 a\varepsilon_0}{e}a^2 \gtrsim 2e ,$$

откуда

$$\omega^2 \gtrsim \frac{2e^2}{m_e\varepsilon_0 a^3} \sim a^{-3}. \qquad (3)$$

С другой стороны, при слишком большой скорости вращения шарик будет разорван центробежными силами инерции. Оценим и эту угловую скорость. Мысленно разделим шарик пополам и заменим одну из половин силами f, распределенными по поверхности кольца и отнесенными к единице площади этой поверхности (рис.4). Размерность величины f есть $\text{Н}/\text{м}^2$, т.е. f представляет собой механическое напряжение. Если оно достигает предела прочности на разрыв $f_{\max}$, шарик разрушается. Эти силы, обеспечивающие прочность шарика (силы упругости), приложены к площади $2\pi a\delta$, где δ – толщина оболочки шарика (мы считаем, что она много меньше его радиуса a). Значит, суммарная сила равна $f\cdot 2\pi a\delta$. Она уравновешивается равнодействующей $F_{1/2}$ всех центробежных сил инерции, действующих на элементы полусферы. Эти центробежные силы изменяются от экватора до полюса, и мы знаем каким образом (см. выражение (1)). Так что можно было бы проинтегрировать их по поверхности полусферы и найти равнодействующую. Но мы не будем здесь этим заниматься, а снова сделаем оценку по порядку величины. Примем, что среднее (по поверхности шарика) значение центробежного ускорения равно, например, половине наибольшего значения, достигаемого на экваторе (см. выражение (2)): $\langle w_c\rangle \sim \omega^2 a/2$. Умножим его на массу полусферической тонкой оболочки $4\pi a^2\delta\rho_\text{ш}/2$, где $\rho_\text{ш}$ – плотность материала шарика (стекла). Тогда условие сохранности шарика запишется в виде

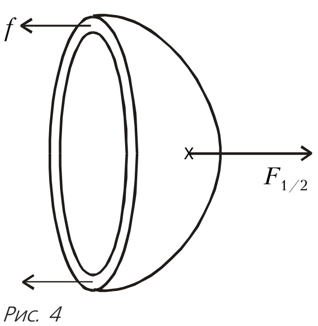

Рис. 4

$$\frac{4\pi a^2\delta\rho_\text{ш}}{2}\cdot\frac{\omega^2 a}{2} \lesssim f_{\max}\cdot 2\pi a\delta ,$$

откуда

$$\omega^2 \lesssim \frac{2f_{\max}}{\rho_\text{ш}a^2} \sim a^{-2}. \qquad (4)$$

(Интересно, что результат не зависит от толщины оболочки δ.)

Неравенства (3) и (4) определяют нашу «рабочую зону», в которой шарик уже стал квадруполем, но еще не разрушается (она заштрихована на рисунке 5). Найдем точку пересечения a_* соответствующих «кривых» в предельном случае, когда неравенство заменяется равенством (конечно, это не совсем линии, а скорее размазанные полосы – ведь мы делаем грубые оценки по порядку величины). Итак,

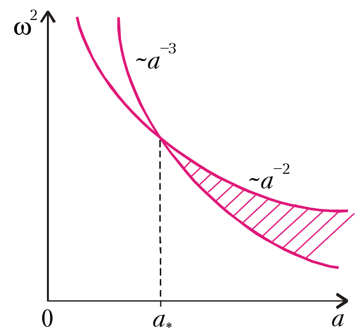

Рис. 5

$$\frac{2e^2}{m_e\varepsilon_0 a_*^3} \sim \frac{2f_{\max}}{\rho_\text{ш}a_*^2}, \quad \text{и} \quad a_* \sim \frac{e^2\rho_\text{ш}}{m_e\varepsilon_0 f_{\max}} .$$

Осталось сделать численные оценки. Фундаментальные константы известны: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)$. А что это за стекло, из которого сделан шарик? Поискав в таблицах, примем $\rho_\text{ш} \approx 2{,}5\cdot 10^3$ $\text{кг}/\text{м}^3$, $f_{\max} \sim 10^9$ $\text{Н}/\text{м}^2$. (Например, в справочнике «Таблицы физических величин», изданном в 1976 году под редакцией И.К.Кикоина – одного из основателей журнала «Квант», что приятно вспомнить, – для стеклянного волокна указано предельное напряжение на разрыв, равное $2{,}1\cdot 10^9$ $\text{Н}/\text{м}^2$. Конечно, эта характеристика зависит от технологии производства стеклянного изделия, в том числе и елочного шарика. Поэтому для оценки мы приняли, из соображений осторожности, вдвое меньшую величину.) Подставив эти числа в последнюю формулу, получим $a_* \sim 10^{-2}$ м $= 2$ см. А соответствующее значение угловой скорости можно найти из любого из выражений (3) или (4): $\omega_* \sim 10^5$ с^{-1}, что для частоты вращения дает $\nu_* = \omega_*/(2\pi) \sim 10^4$ Гц, т.е. 10^4 оборотов в секунду. Похоже, что реальный елочный шарик можно-таки сделать электрическим квадруполем путем его вращения.

И тут Тин Эйджер вспомнил, что шарик можно не только равномерно вращать вокруг фиксированной оси, но и скатывать по наклонной плоскости с углом α без проскальзывания, а значит, с ускорением $g\sin\alpha$. Э, брат, – подумал наш герой, – да ведь это будет уже не электростатика, а целая электродинамика! Но тут наступил Новый Год, и настала пора заниматься подарками.