Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1816» или «Ф1823». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

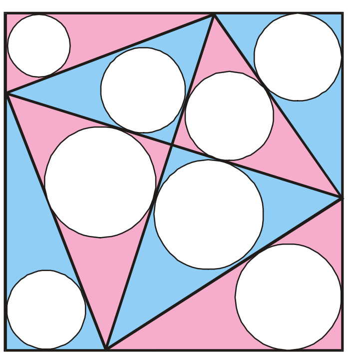
В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1816–М1825, Ф1823–Ф1832

М1816. Сумма 2000 натуральных чисел больше их произведения. Докажите, что не более 10 из этих чисел отличны от 1.

А.Спивак, В.Сендеров

М1817. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырехугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в красный и синий цвет (см. рисунок). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумма радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.



В.Произволов

М1818. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

С.Нестеров

М1819. В треугольнике ABC точки O, I – центры описанной и вписанной окружностей, A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, точка P – ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Докажите, что точки O, I и P лежат на одной прямой.

А.Заславский

М1820. а) Для натуральных чисел x и y десятичная запись числа x^2+xy+y^2 оканчивается нулем. Докажите, что она оканчивается двумя нулями.

б*) Для натуральных чисел x и y число $x^4+x^2y^2+y^4$ делится на 11. Докажите, что это число делится на 14641.

В.Произволов

М1821*. Докажите, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\}-\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{3}\right\}-\ldots+(-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right|<\sqrt{2n}$$

($\{a\}$ – дробная часть числа a).

В.Барзов

М1822. На турнир математических боев съехались $2N$ команд, каждая из которых должна по одному разу встретиться со всеми остальными. Организаторы планируют провести соревнования за $2N-1$ туров (чтобы в каждом туре участвовали все команды, и выходных дней у команд не было). Однако вследствие своей безалаберности они составляют расписание встреч на каждый тур без каких-либо планов на будущее – лишь бы в данном туре участвовали все команды и не произошло повторных встреч.

Может ли случиться так, что составить расписание для очередного тура окажется невозможным (т.е. при любом разбиении команд на пары окажется, что какие-то две команды уже встречались ранее), если

а) $N=5$;
б) $N=6$;
в) $N=8$;
г) N – любое натуральное число?

И.Акулич

М1823*. Пусть $f(x)$ – кубический многочлен. Предположим, что при любом натуральном n число $f(n)$ является кубом целого числа. Докажите, что $f(x)=(ax+b)^3$ для некоторых целых чисел a, b.

Н.Осипов

М1824. Пусть $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ – различные точки координатной плоскости, $n \geq 2$, $M\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}, \frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\right)$ – их центр масс. Обозначим через C центр круга наименьшего радиуса r, в котором содержатся точки $A_1, \ldots, A_n$, а через d – расстояние между точками M и C. Докажите, что $\frac{d}{r} \leq \frac{n-2}{n}$.

И.Протасов, Г.Радзиевский

М1825*. Поверхность куба размером $5 \times 5 \times 5$ можно естественным образом оклеить 150-ю бумажными квадратами размером 1×1 каждый. При этом любая грань куба будет оклеена 25-ю бумажными квадратами. Докажите, что поверхность этого куба можно оклеить нашими бумажными квадратами так, что никакая его грань не будет оклеена 25-ю из них.

В.Произволов

Ф1823. В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги A находится железнодорожная станция $Ж$. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка $АЖ$?

А.Очков

Ф1824. На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?

А.Стрелков

Ф1825. На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов μ = 0,7. Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе F_1 = 10 Н?

Р.Александров

Ф1826. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом α при основании. На клине удерживают неподвижно тонкий обруч массой m. Трение между обручем и поверхностью клина велико. Обруч отпускают, и он начинает двигаться по клину без проскальзывания. Найдите скорость клина в тот момент, когда центр обруча опустится на h.

Р.Обручев

Ф1827. Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.

А.Паров

Ф1828. Моль гелия расширяется при неизменной температуре T_0 = 300 К в заданных пределах, получая при этом от внешних тел количество теплоты Q = = 20 кДж. Оцените работу газа при расширении в тех же пределах, но без подвода тепла извне.

А.Диабатов

Ф1829. Простейший прибор для измерения сопротивления (омметр) состоит из последовательно соединенных батарейки, миллиамперметра и реостата (его часто называют переменным резистором или потенциометром). Измеряемый резистор подключают к выводам этой цепи. Перед началом измерений прибор настраивают – замыкают накоротко выводы цепи (это соответствует нулевому сопротивлению измеряемого резистора) и реостатом устанавливают стрелку миллиамперметра на конец шкалы. В нашем случае настроенный прибор при сопротивлении резистора R_1 = 500 Ом отклоняется на 3/4 шкалы, а при сопротивлении R_2 = 1500 Ом – на 1/2 шкалы. В каком месте шкалы у нашего омметра должно стоять отметка 1 кОм? А 300 Ом? Какое сопротивление еще можно измерять нашим прибором со сколь-нибудь разумной точностью, если суммарная погрешность измерений тока лежит в пределах ±2 деления шкалы (всего на шкале миллиамперметра 100 одинаковых делений)?

А.Простов

Ф1830. Для определения емкости C конденсатора большой емкости применяется следующий метод. Конденсатор заряжают до напряжения батарейки, а затем разряжают его несколько раз при помощи конденсатора известной емкости C_0 = 10 мкФ, который каждый раз присоединяют к выводам батарейки, а затем подключают параллельно выводам конденсатора емкостью C в противоположной полярности – «плюсом» к «минусу». Так повторяют определенное число раз, а затем проверяют остаточный заряд конденсатора емкостью C, подключая к нему микроамперметр. После 8 повторов максимальное отклонение стрелки составило 10 делений. В следующем опыте после 9 повторов стрелка отклонилась на 20 делений в другую сторону. Определите по этим данным емкость C.

З.Рафаилов

Ф1831. Источник переменного напряжения $U = U_0 \cos\omega t$ подключен к последовательно соединенным конденсатору емкостью C = 1 мкФ и катушке индуктивностью L = 1 Гн. Вольтметр, присоединенный к источнику, показывает напряжение U_1 = 1В, а если подключить его к катушке, он покажет U_2 = 100 В. Какой может быть частота источника ω? Элементы цепи считайте при расчете идеальными. А если катушка намотана проводом, имеющим сопротивление, то при каком его сопротивлении описанное выше возможно?

А.Зильберман

Ф1832. Плоская монохроматическая волна с длиной $\lambda = 0{,}55$ мкм падает перпендикулярно на очень тонкий плоский непрозрачный лист. В листе прорезаны две длинные параллельные щели шириной 0,5 мм и 1 мм, а расстояние между ближайшими краями щелей составляет 0,5 мм. На расстоянии 10 м от листа параллельно ему расположен экран для наблюдения интерференции. На каком расстоянии от главного максимума располагается ближайшая серая полоса? Рассчитайте то же для ближайшей черной полосы.

А.Волнов