М1823*. Пусть $f(x)$ – кубический многочлен. Предположим, что при любом натуральном n число $f(n)$ является кубом целого числа. Докажите, что $f(x) = (ax+b)^3$ для некоторых целых чисел a, b.

Н.Осипов

М1824. Пусть $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ – различные точки координатной плоскости, $n \geq 2$, $M\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)$ – их центр масс. Обозначим через C центр круга наименьшего радиуса r, в котором содержатся точки $A_1, \ldots, A_n$, а через d – расстояние между точками M и C. Докажите, что $\frac{d}{r} \leq \frac{n-2}{n}$.

И.Протасов, Г.Радзиевский

М1825*. Поверхность куба размером $5 \times 5 \times 5$ можно естественным образом оклеить 150-ю бумажными квадратами размером 1×1 каждый. При этом любая грань куба будет оклеена 25-ю бумажными квадратами. Докажите, что поверхность этого куба можно оклеить нашими бумажными квадратами так, что никакая его грань не будет оклеена 25-ю из них.

В.Произволов

Ф1823. В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги *А* находится железнодорожная станция *Ж*. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка *АЖ*?

А.Очков

Ф1824. На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?

А.Стрелков

Ф1825. На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов μ = 0,7. Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе F_1 = 10 Н?

Р.Александров

Ф1826. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом α при основании. На клине удерживают неподвижно тонкий обруч массой m. Трение между обручем и поверхностью клина велико. Обруч отпускают, и он начинает двигаться по клину без проскальзывания. Найдите скорость клина в тот момент, когда центр обруча опустится на h.

Р.Обручев

Ф1827. Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.

А.Паров

Ф1828. Моль гелия расширяется при неизменной температуре T_0 = 300 К в заданных пределах, получая при этом от внешних тел количество теплоты Q = = 20 кДж. Оцените работу газа при расширении в тех же пределах, но без подвода тепла извне.

А.Диабатов

Ф1829. Простейший прибор для измерения сопротивления (омметр) состоит из последовательно соединенных батарейки, миллиамперметра и реостата (его часто называют переменным резистором или потенциометром). Измеряемый резистор подключают к выводам этой цепи. Перед началом измерений прибор настраивают – замыкают накоротко выводы цепи (это соответствует нулевому сопротивлению измеряемого резистора) и реостатом устанавливают стрелку миллиамперметра на конец шкалы. В нашем случае настроенный прибор при сопротивлении резистора R_1 = 500 Ом отклоняется на 3/4 шкалы, а при сопротивлении R_2 = 1500 Ом – на 1/2 шкалы. В каком месте шкалы у нашего омметра должно стоять отметка 1 кОм? А 300 Ом? Какое сопротивление еще можно измерять нашим прибором со сколь-нибудь разумной точностью, если суммарная погрешность измерений тока лежит в пределах ±2 деления шкалы (всего на шкале миллиамперметра 100 одинаковых делений)?

А.Простов

Ф1830. Для определения емкости C конденсатора большой емкости применяется следующий метод. Конденсатор заряжают до напряжения батарейки, а затем разряжают его несколько раз при помощи конденсатора известной емкости C_0 = 10 мкФ, который каждый раз присоединяют к выводам батарейки, а затем подключают параллельно выводам конденсатора емкостью C в противоположной полярности – «плюсом» к «минусу». Так повторяют определенное число раз, а затем проверяют остаточный заряд конденсатора емкостью C, подключая к нему микроамперметр. После 8 повторов максимальное отклонение стрелки составило 10 делений. В следующем опыте после 9 повторов стрелка отклонилась на 20 делений в другую сторону. Определите по этим данным емкость C.

З.Рафаилов

Ф1831. Источник переменного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ подключен к последовательно соединенным конденсатору емкостью C = 1 мкФ и катушке индуктивностью L = 1 Гн. Вольтметр, присоединенный к источнику, показывает напряжение U_1 = 1В, а если подключить его к катушке, он покажет U_2 = 100 В. Какой может быть частота источника ω? Элементы цепи считайте при расчете идеальными. А если катушка намотана проводом, имеющим сопротивление, то при каком его сопротивлении описанное выше возможно?

А.Зильберман