

называют *нормой* числа $a + b\sqrt{d}$. Очень многое из того, что мы расскажем об уравнениях Пелля, можно перенести на случай так называемого норменного уравнения в полях алгебраических чисел. Но мы слишком увлеклись. Посоветовав заинтересованному читателю когда-нибудь изучить «Теорию чисел» З.И.Боревича и И.Р.Шафаревича, вернемся к нашим делам.

Упражнение 3. Пусть a, b – целые числа, d – натуральное число, не являющееся квадратом, $x + y\sqrt{d} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}}$. Докажите, что числа x и y целые в том и только том случае, когда $a^2 - db^2 = \pm 1$.

Сложив равенства

$$(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

и

$$(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$$

и поделив на 2, находим

$$x_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}.$$

А если не сложить, а вычесть, то получим

$$y_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Это и есть не рекуррентные (когда каждую следующую пару получаем из предыдущей), а явные формулы решений уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ в натуральных числах. Заметьте: натуральные x_n и y_n получаются из формул, в которые входит иррациональное число $\sqrt{2}$!

Не каждому читателю, по себе знаем, легко привыкнуть пользоваться иррациональными числами для решения уравнений в целых числах. Поэтому мы вернемся к таким рассмотрением чуть позже, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Упражнения

4. а) Докажите равенства $x_{2n} = 2x_n^2 - (-1)^n$ и $y_{2n} = 2x_n y_n$. б) Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, а z и t – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $z^2 - dt^2 = 1$, то натуральные числа a_n и b_n , определенные формулой $a_n + b_n\sqrt{d} = (z + t\sqrt{d})^n$, обладают тем свойством, что $a_{2n} = 2a_n^2 - 1$ и $b_{2n} = 2a_n b_n$. Докажите это.

5. а) Для любого натурального n число $(1 + \sqrt{2})^n$ представимо в виде $\sqrt{k} + \sqrt{k+1}$, где k – натуральное число. Докажите это. б) (M1522) Для любых натуральных m, d, n существует такое натуральное k , что $(\sqrt{m} + \sqrt{m+d})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+d}$. Докажите это. в) Пусть m и n – натуральные числа, $n > 1$. Докажите, что для некоторого натурального числа k имеем $\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$.

6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d , что $(a + b\sqrt{2})^2 + (c + d\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}$?

7(M874). Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что а) $(5 + 3\sqrt{2})^m \neq (3 + 5\sqrt{2})^n$; б*) $(a + b\sqrt{d})^m \neq (b + a\sqrt{d})^n$,

где a, b и d – натуральные числа, $a \neq b$ и число d не является точным квадратом.

8. Докажите следующие утверждения.

а) (M352) Число $\left[(45 + \sqrt{1975})^{30}\right]$ нечетно.

б) Первые 1000 цифр после запятой десятичной записи числа $(6 + \sqrt{35})^{1979}$ – девятки.

в) Первые 999 цифр после запятой десятичной записи числа $(6 + \sqrt{37})^{999}$ – нули.

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\} = 1$.

д) Перед запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. *Указание.* Для любого целого неотрицательного n обозначьте $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n}$ и докажите равенство

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n.$$

(Пункт б) предлагали в соответствующем году самым сильным абитуриентам мехмата МГУ на устном экзамене. Пункт в) предлагали в 1965 году на конкурсе ВМШ при мехмате МГУ. Пункт г) предлагали на студенческой олимпиаде 1977 года.)

9* (M520). Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Каждое из них можно привести к виду $x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n – целые числа. Найдите пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}$.

Уравнение $x^2 + (x+1)^2 = y^2$

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 обладает тем свойством, что один из его катетов на 1 длиннее другого. Много ли еще таких треугольников, точнее, много ли решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2 + (x+1)^2 = y^2$? Чтобы ответить на этот вопрос, раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2.$$

Теперь, домножив обе части на 2, выделим полный квадрат:

$$(2x + 1)^2 + 1 = 2y^2.$$

Обозначив $z = 2x + 1$, получим уравнение

$$z^2 - 2y^2 = -1.$$

Любое удовлетворяющее последнему уравнению число z нечетно. Поэтому мы свели задачу к уравнению $z^2 - 2y^2 = -1$, где y, z – натуральные числа, причем $z > 1$.

Как мы помним, если $z^2 - 2y^2 = -1$, то

$$(z + 2y)^2 - 2(z + y)^2 = 1.$$

В правой части теперь находится 1, а не -1 . Мы умеем переходить от 1 к -1 : для любого решения $(a; b)$ уравнения $a^2 - 2b^2 = 1$ выполнено равенство

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = -1.$$

Следовательно, из любой пары натуральных чисел $(z; y)$, удовлетворяющей равенству $z^2 - 2y^2 = -1$, мы