вить значения X и Y вместо x и y. А именно,

$$(x+2y)^2-2(x+y)^2=$$
$$=x^2+4xy+4y^2-2\left(x^2+2xy+y^2\right)=$$
$$=2y^2-x^2=-\left(x^2-2y^2\right).$$

Как видите, если $x^2-2y^2=\pm 1$, то $X^2-2Y^2=\mp 1$. Теорема 1 доказана, мы научились строить «новое» решение из «старого».

А вот доказательство теоремы 2 хотя и не очень сложно, но требует привлечения идеи, которая слишком важна, чтобы говорить о ней мимоходом. Поэтому мы займемся этим позже, а пока посмотрим, как для решения уравнения Пелля можно использовать иррациональные числа.

Упражнения

1. Рассмотрим последовательности $x_0=1$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=7$, $x_4=17$, … и $y_0=0$, $y_1=1$, $y_2=2$, $y_3=5$, $y_4=12$, …, заданные своими первыми членами $x_0=1$, $y_0=0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1}=x_n+2y_n$ и $y_{n+1}=x_n+y_n$. Докажите, что $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ и $y_{n+2}=2y_{n+1}+y_n$.

2. По правилам новомодного танца надо делать либо шаг вперед, либо два шага вперед, либо два шага вперед и сразу же шаг назад. Сколькими способами танцор может за несколько таких па сдвинуться на 7 шагов от исходного рубежа?

Степени числа $1+\sqrt{2}$

Если d не является квадратом натурального числа, то в разложении

$$x^2-dy^2=\left(x-y\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right)$$

участвует иррациональное число $\sqrt{d}$. Казалось бы, мы решаем уравнения в целых числах; зачем нам иррациональности?

Но заметьте:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2},$$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3=1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}.$$

Узнали? Это же решения (3; 2) и (7; 5) уравнения $x^2-2y^2=\pm 1$! Если вас не убедили эти два примера, вот еще один:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^4=\left(1+\sqrt{2}\right)^3\left(1+\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=17+12\sqrt{2}.$$

Впрочем, это всего лишь примеры. Чтобы получить доказательство, посмотрим, что происходит при переходе от n-й степени числа $1+\sqrt{2}$ к $(n+1)$-й. А именно, пусть

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n – натуральные числа. Тогда

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(x_n+y_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=$$
$$=x_n+y_n\sqrt{2}+x_n\sqrt{2}+2y_n=\left(x_n+2y_n\right)+\left(x_n+y_n\right)\sqrt{2},$$

так что $x_{n+1}=x_n+2y_n$ и $y_{n+1}=x_n+y_n$. Знакомые формулы, не правда ли?

Что будет, если возводить в степень не $1+\sqrt{2}$, а $1-\sqrt{2}$? Смотрите:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^3=7-5\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^4=17-12\sqrt{2},$$

и вообще,

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{2}.$$

Это легко доказать по индукции:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)=\left(x_n-y_n\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=$$
$$=x_n-y_n\sqrt{2}-x_n\sqrt{2}+2y_n=\left(x_n+2y_n\right)-\left(x_n+y_n\right)\sqrt{2}.$$

А можно обойтись и без индукции, заметив, что при возведении числа $1+\sqrt{2}$ в степень мы используем равенство $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$; но число $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ тоже равно 2.

Подобные соображения в алгебре используют часто, есть даже термин: *сопряженные числа*. В полной общности это важное понятие нам не понадобится. Поэтому пока просто скажем, что для каждого числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a, b – рациональные числа, сопряженным числом называют $a-b\sqrt{2}$. Если вы знаете, что такое комплексные числа, и помните, что для любого комплексного числа $a+bi$ сопряженное – это $a-bi$, не удивляйтесь использованию одного и того же слова для разных целей: если бы мы подробно рассказали о сопряженных числах, то все стало бы абсолютно ясно. Но это, к сожалению, слишком отвлекло бы нас от основной темы.

Тем не менее, для нас важно следующее свойство: *сопряженное к сумме (разности, произведению, частному) двух чисел равно сумме (разности, произведению, частному) сопряженных к ним*. Например, вот как выглядит это для сложения:

$$(a+c)-(b+d)\sqrt{2}=\left(a-b\sqrt{2}\right)+\left(c-d\sqrt{2}\right).$$

Чуть больших усилий потребует от нас проверка этого свойства для умножения.[1] Прежде всего вычислим произведение

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Значит, сопряженное к произведению равно $(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}$. Осталось вычислить произведение сопряженных:

$$\left(a-b\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Как видите, результат получился тот же самый.

Отображение $a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}$ называют *автоморфизмом* поля $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. А произведение

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a-b\sqrt{2}\right)=a^2-2b^2$$

[1] *Строго говоря, надо бы еще разобраться с разностью и частным, но не будем тратить на это силы: при желании вы легко сделаете это самостоятельно.*