

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Институт естественных наук и экологии при
«Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{b}; \\ \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{2b + (x + y)^2}. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

3. К параболы $y = x^2 - 3x + 3$ проведены две касательные. Одна из них касается левой ветви параболы и одновременно кривой, заданной уравнением $5x^2 - 50x + 5y^2 + 53 = 0$. Тангенс угла между двумя касательными равен $4/7$. Определите площадь фигуры, заключенной между параболой и этими касательными.

4. Окружность проходит через основания всех высот тупоугольного треугольника. Найдите ее радиус, если наибольшая сторона треугольника равна 4, а расстояние между основаниями высот, лежащими на продолжениях сторон треугольника, равно 3.

5. На сфере с радиусом 2 расположены три попарно касающиеся окружности с радиусом 1. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, обе окружности оснований которого лежат на этой же сфере и касаются каждой из данных окружностей.

6. Не пользуясь калькулятором, вычислите $\frac{1}{1,0000000011}$ с 30 знаками после запятой.

ФИЗИКА

Вариант письменного экзамена

1. Какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить телу небольшой массы в центре астероида массой M и радиусом R , чтобы оно через радиальную шахту ушло на бесконечность? Плотность астероида считать постоянной во всем его объеме.

2. Цилиндрический сосуд с тонкими стенками, изготовленными из одного материала и имеющими одинаковую толщину, покоится на гладком горизонтальном столе (рис.1). Объем сосуда V , площадь его поперечного сечения S , масса стенок m .

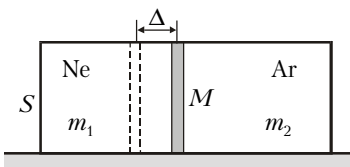


Рис. 1

Внутри находится тонкий подвижный поршень массой M , герметически разделяющий сосуд на две части. Левая часть заполнена неоном массой m_1 , правая – аргоном массой

m_2 . В начальный момент сосуд удерживают, а поршень отводят вправо от положения равновесия на расстояние Δ , малое по сравнению с продольными размерами частей сосуда. Затем сосуд и поршень отпускают. Найдите период и амплитуду колебаний сосуда, считая m_1 и m_2 малыми по сравнению с m и M . Трением и отклонением процесса колебаний от изотермического пренебречь. Абсолютная температура системы равна T .

3. Между двумя обкладками незаряженного плоского воздушного конденсатора емкостью C , закороченного на резистор сопротивлением R , помещают подобную обкладкам проводящую пластину с зарядом $q > 0$ на расстоянии x от одной из обкладок. После установления зарядового равновесия пластину быстро удаляют из конденсатора. Полагая, что за время перемещения пластины заряд конденсатора не успевает измениться, определите величину и направление тока через резистор сразу после удаления пластины и работу, совершенную при удалении пластины. Расстояние между обкладками конденсатора d мало по сравнению с их размерами.

4. Неподвижный точечный источник света S находится на главной оптической оси системы, состоящей из собирающей L_1 и рассеивающей L_2 линз, расположенных вплотную друг к другу (рис.2). Оптические оси линз совпадают, а их фокусные расстояния связаны соотношением $F_2 = -2F_1$, где F_1 – фокусное расстояние линзы L_1 . Расстояние от источника до линзы L_1 равно $d = 3F_1$. Обе линзы начинают двигаться в противоположных направлениях друг от друга с одинаковыми по модулю скоростями v . Найдите величину и направление скорости изображения, даваемого системой линз, в момент начала их движения.

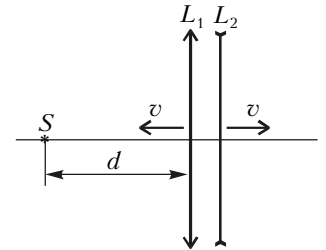


Рис. 2

5. В вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B находятся горизонтальные проводящие рейки (рис.3).

По рейкам, расстояние между которыми l , может скользить без трения проводящий брусок массой m , прикрепленный к абсолютно упругой пружине жесткостью k . Рейки замкнуты на резистор сопротивлением R большой величины. Найдите количество теплоты, которое будет выделяться в резисторе за период колебаний бруска, после того как ему мгновенно сообщили скорость v . Сопротивление реек и бруска не учитывать.

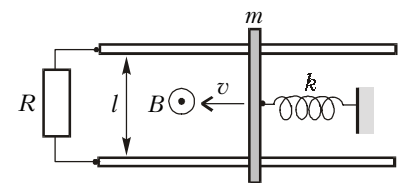


Рис. 3

Публикацию подготовил
С.Фомичев

Институт криптографии, связи и информатики
Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Найдите все значения x , при которых определены три числа: $-3 - \sqrt{5 - x}$; $|x - 2| - 4$; $-2x - 3$, и наибольшее из этих чисел отрицательно.
2. Решите уравнение
$$2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x.$$
3. Первый член арифметической прогрессии равен b , а ее разность равна 5. Найдите все значения параметра b , при которых сумма первых n членов этой прогрессии достигает своего минимального значения при $n = 30$.
4. В треугольнике ABC угол B равен 45° . Из основания K биссектрисы CK проведены перпендикуляры KM и KN к сторонам AC и BC соответственно. Найдите отношение длин сторон AB и AC , если $CN = MN$.
5. Какое из двух чисел больше:

$$3 \log_3 13 \text{ или } \sqrt{9 \log_3 13 + 28} ?$$

Ответ обоснуйте. Таблицами и калькулятором пользоваться не разрешается.

6. Решите неравенство

$$\left| x - 4^{1+\sqrt{3-x}} \right| \leq \frac{5}{3} x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Число 28 представлено в виде суммы двух слагаемых a , b так, что сумма $a^3 + b^3$ минимальна. Найдите a , b .
2. Сколько различных корней имеет уравнение $\sin 3x - \sin 7x = 0$ на отрезке $x \in [0; 2\pi]$?
3. Решите уравнение

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x+4)(x-1)} = 1.$$

4. Решите неравенство $\log_{1/\sqrt{5}} \log_4(x^2 - 2x - 4) > 0$.
5. Машина выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B , тут же поворачивает обратно. Через 5 часов после выезда машина была в 80 км от B , а еще через час – в 160 км от A . Известно, что на весь путь туда и обратно машина затратила не более 15 часов. Найдите расстояние от A до B .
6. Основание треугольника делится высотой на отрезки 36 см и 14 см. Перпендикулярно к основанию проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. На какие отрезки эта прямая делит основание треугольника?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Тело брошено с высоты H над поверхностью земли горизонтально со скоростью v_0 . Найдите дальности L полета тела.

2. Пуля летит горизонтально со скоростью v_0 , пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола коробку и вылетает в том же направлении со скоростью $v_0/3$. Масса коробки в пять раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ . 1) Найдите скорость v коробки сразу после вылета из нее пули. 2). На какое расстояние s продвинется коробка? Время взаимодействия пули и коробки мало.

3. В схеме, изображенной на рисунке 1, известны сопротивления резисторов R_1 и R_2 , емкость конденсатора C , ЭДС E батареи с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Первоначально ключ K находится в положении 1, по цепи течет постоянный ток. Какое количество теплоты Q_2 выделится на резисторе сопротивлением R_2 после переключения ключа из положения 1 в положение 2? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

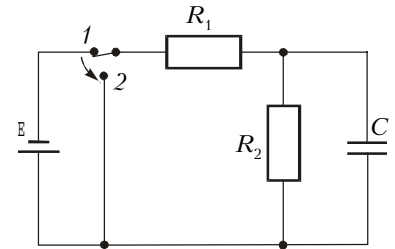


Рис. 1

4. Запаянную пробирку с газом охладили до температуры $T = 283$ К. Давление при этом упало до 70% первоначального давления. Найдите начальную температуру T_0 газа. Изменением объема пробирки пренебречь.

5. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с горизонтальной поверхностью стола угол $\alpha = 48^\circ$. Под какими углами β к поверхности стола можно расположить плоское зеркало, чтобы изменить направление луча на горизонтальное? Ответ поясните рисунком.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Вагон шириной d , движущийся прямолинейно со скоростью v , был пробит пулей, двигавшейся все время перпендикулярно плоскости движения вагона. Смещение отверстия в стенках вагона относительно друг друга равно l . Определите скорость v_1 движения пули.

2. Груз, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, свободного вращается в вертикальной плоскости. В верхней точке окружности скорость груза равна v . Сила натяжения нити в нижней точке окружности в n раз превышает силу натяжения нити в верхней точке окружности. Определите длину нити L .

3. В однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} помещено проволочное кольцо радиусом a , ось которого совпадает с направлением магнитного поля (рис.2). От центра к кольцу отходят два одинаковых проводящих стержня, имеющих электрический контакт между собой и кольцом. Один стержень неподвижен, а другой равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси кольца. За один полный оборот стержня по нему протекает заряд Q . Найдите: 1) суммарное электрическое сопротивление R стержней; 2) тепловую мощность P , выделяющуюся в цепи в процессе вращения. Сопротивлением кольца пренебречь.

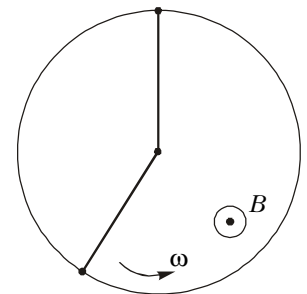


Рис. 2

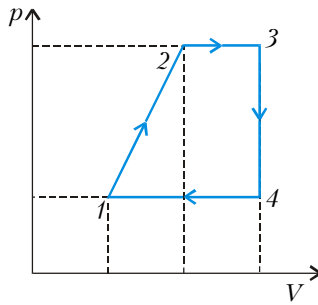


Рис. 3

4. Определите работу одного моля газа в процессе 1-2-3-4-1, изображенном на рисунке 3. Давление газа в состояниях 2 и 3 второе больше, чем в состояниях 1 и 4. Объем газа в состоянии 2 вдвое больше, а в состояниях 3 и 4 – втрое больше, чем в состоянии 1. Температура в состоянии 1 равна T .

5. Расстояние от предмета до линзы $d = 10$ м, от линзы до действительного изображения $f = 2,5$ м. Определите фокусное расстояние F линзы.

*Публикацию подготовили
А.Леднев, В.Кириллов, А.Пичкур*

Московский институт электронной техники
(технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x-3)\sqrt{2} - 3x + 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{2-9x^{-1}}{1-5x^{-1}}\right)^{-1} = \frac{2}{x-2}.$$

3. Какое наименьшее число членов прогрессии 32,5, 37,5, 42,5 ... нужно взять, чтобы их сумма была больше 2160?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-2\sqrt{x}} \leq 3.$$

5. Решите уравнение

$$\log_{(1-x)^2} 8 - \log_{1-x} 32 = 0,7.$$

6. Решите уравнение

$$5 \sin 2x + 10 \sin^2 x = 6.$$

7. В треугольнике ABC $AB = BC$. Окружность с центром в точке O (O – середина отрезка AC) касается сторон AB и BC в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если $AO = 3$, а $BO = 4$.

8. Ученик, мастер и подмастерье по очереди ткут ткань. Если ученик соткет 2 м ткани, подмастерье – 5 м, а мастер – 4 м, то они затратят на работу 1 час 6 минут. Если ученик соткет 3 м ткани, подмастерье – 2 м, а мастер – 2 м, то они затратят на работу 54 минуты. Какое время они затратят на работу, если ученик соткет 5 м ткани, подмастерье – 29 м, а мастер – 22 м?

9. В правильной призме $ABCA'B'C'$ $AB = 4\sqrt{3}$, $AA' = 8$. Найдите расстояние между прямыми BC и AM , где M – середина отрезка $B'C'$.

10. Изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2^{\log_x - y^2} \geq x - y$.

11. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x-2)^2 - 0,2 \arcsin(\sin x) + a = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\sqrt{9c^4 + 6d^8 + c^{-4}d^{16}} - 3c^2.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\frac{x}{5}} - 3^{\frac{x-10}{10}} = 8.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 3x} \leq 2.$$

4. Решите уравнение

$$(x+5)\log_{4-x}(x^2-4) = 2x+10.$$

5. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin x \cos 2x + \sin\left(x - \frac{55\pi}{2}\right)}{\sin 2x \cos x - \sin x},$$

если $\operatorname{ctg} x = -2$.

6. В геометрической прогрессии произведение членов с 9-го по 16-й равно 6, а произведение членов с 17-го по 24-й равно 12. Вычислите произведение первых восьми членов прогрессии.

7. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60° . Точка K – середина стороны CD . Отрезки AK и BD пересекаются в точке E . Найдите длину стороны AB , если расстояние от точки E до прямой BC равно $2\sqrt{3}$.

8. Высота усеченного конуса равна 4, а площадь одного из его оснований на 44% больше площади другого. Найдите высоту полного конуса.

9. График функции $y = 2^{1-2x}$ отразили симметрично относительно прямой $y = x - 3$. График какой функции получился?

10. При каких значениях параметра a уравнение

$$(|x - 4a + 1| + |x - 8a + 1| - 4)(2ax^2 + 24ax - x + 22a - 11) = 0$$

имеет ровно три корня?

11. Из двух пунктов A и B одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями выехали два автомобиля. Если бы автомобили не изменяли скорости, то их встреча произошла бы через 4 часа. Однако, проехав 260 км, первый автомобиль вынужден был убавить скорость на 50 км/ч, второй убавил скорость на 30 км/ч после прохождения им 150 км. В результате этого встреча произошла позже, но также через целое число часов. Определите первоначальные скорости автомобилей, если известно, что каждая из них представляет собой целое число километров в час, а расстояние между A и B равно 800 км.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Небольшое тело брошено с горизонтальной скоростью v_0 с высоты H над горизонтальной плоскостью стола со специальным покрытием. Объемные и поверхностные свойства стола таковы, что при каждом ударе вертикальная составляющая скорости тела, оставаясь неизменной по величине, изменяет направление на противоположное, а горизонтальная составляющая скорости уменьшается в два раза. На какое максимальное расстояние L вдоль горизонта удалится тело от точки первого удара? Ускорение свободного падения равно g .

2. После загрузки корабля период малых колебаний его вертикального смещения от равновесия увеличивается от $T_1 = 7$ с до $T_2 = 7,5$ с. Найдите массу Δm добавленного груза. Площадь сечения по ватерлинии $S = 500$ м².

3. К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью $k = 200$ Н/м прикрепили груз массой $m = 1$ кг и без толчка отпустили. Определите максимальную деформацию Δl пружины.

4. Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими трубками, заполнены газообразным гелием при температуре $T = 40$ К. Затем один из сосудов нагрели до $T_1 = 100$ К, другой – до $T_2 = 400$ К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз n увеличилось давление в системе?

5. В длинной горизонтальной теплоизолированной трубке между двумя одинаковыми непроводящими тепло поршнями массой $m = 0,5$ кг каждый находится $\nu = 1$ моль одноатомного идеального газа при температуре $T_0 = 300$ К. В некоторый момент каждому поршню сообщают одинаковые по величине скорости $v = 10$ м/с, направленные навстречу друг другу. До какой максимальной температуры T нагреется газ? Трением пренебречь. Внешнее давление равно нулю.

6. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора заряжены до разных напряжений. Сила, действующая на точечный заряд, помещенный между пластинами первого конденсатора, в $n = 2$ раза больше силы, действующей на такой же заряд внутри второго конденсатора. Определите отношение W_1/W_2 энергий конденсаторов.

7. Первые $\tau_1 = 10$ с ток в проводнике равномерно возрастал от нуля до $I = 2$ А, следующие $\tau_2 = 40$ с ток продолжал равномерно расти от I до $2I$, и последние $\tau_3 = 10$ с ток равномерно уменьшался от $2I$ до нуля. Определите заряд q , прошедший через поперечное сечение проводника за все указанное время.

8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2$ пФ и одного витка, индуктивность которого $L = 1$ мкГн, а сопротивление пренебрежимо мало. Действующее значение напряжения на конденсаторе $U_d = 6$ В. Определите максимальное значение Φ_m магнитного потока, пронизывающего виток.

9. Точечный источник света расположен на расстоянии $d_1 = F/2$ от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F на ее главной оптической оси. Линзу разрезают пополам плоскостью, в которой лежит главная оптическая ось, и одну половинку удаляют от источника так, что расстояние между этой половинкой линзы и источником становится равным $d_2 = 3F/2$. Найдите расстояние x между изображениями источника, формируемыми двумя половинками линзы.

10. Какая доля η энергии фотона израсходовала на работу по вырыванию фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта соответствует длине волны $\lambda_k = 307$ нм и кинетическая энергия фотоэлектрона $K = 1$ эВ? Постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. Летевший вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. В результате образовалось большое количество одинаковых, разлетевшихся во всех направлениях осколков, которые выпадали на землю в течение промежутка времени τ . Найдите величину v_0 скорости осколков в момент взрыва. Ускорение свободного падения равно g .

2. Доска массой $M = 4$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 1$ м/с. На доску осторожно опускают сверху небольшое тело массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между доской и телом $\mu = 0,4$. Через какое время τ после опускания тела его скольжение по поверхности доски прекратится?

3. Два бруска с массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 100$ г, находящихся на гладкой горизонтальной поверхности, соединены сжатой пружиной, стянутой ниткой. При пережигании нитки первый брусок приобретает скорость $v = 1$ м/с. С какой скоростью v_1 будет двигаться этот брусок, если во время пережигания нитки второй брусок удерживать на месте? Начальная деформация пружины в обоих случаях одна и та же.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\phi_1 = 80\%$ при температуре $t_1 = 27$ °С. Объем воздуха $V_1 = 1,5$ л. Какой станет влажность ϕ_2 , если объем воздуха уменьшить до $V_2 = 0,37$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100$ °С? Давление насыщенного пара при температуре t_1 равно $p_{н1} = 3,6$ кПа, а при температуре $t_2 - p_{н2} = 100$ кПа.

5. На какую высоту H можно было бы поднять груз массой $m = 10^3$ кг, если бы удалось полностью использовать энергию, освобождающуюся при остывании стакана чая? Объем стакана $V = 250$ см³, начальная температура чая $t_1 = 100$ °С, конечная температура $t_2 = 20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·К), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

6. Незаряженный плоский воздушный конденсатор помещают во внешнее однородное электростатическое поле, вектор напряженности \vec{E} которого перпендикулярен пластинам конденсатора. Площадь каждой пластины S . Пластины соединяют проволокой. Найдите величину заряда q на каждой пластине. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

7. Конденсатор подключен к клеммам источника. Когда параллельно конденсатору подключили резистор сопротивлением $R = 10$ Ом, энергия конденсатора уменьшилась в $n = 1,44$ раза. Определите внутреннее сопротивление r источника.

8. Определите частоту ν переменного тока, протекающего через последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 4$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 250$ Ом, если максимальные напряжения на них равны $U_C = 1,6$ В и $U_R = 8$ В.

9. На каком расстоянии d от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F следует расположить предмет перпендикулярно оптической оси линзы, чтобы расстояние l от предмета до его действительного изображения, создаваемого линзой, было минимально возможным? Расстояние l отсчитывается вдоль главной оптической оси линзы.

10. За одно и то же время распалось $\delta_1 = 75\%$ ядер одного радиоактивного вещества и $\delta_2 = 87,5\%$ ядер другого радиоактивного вещества. Определите отношение T_1/T_2 периодов полураспада ядер этих веществ.

Публикацию подготовили А.Берестов, Н.Боргардт, И.Кожухов, С.Куклин, Д.Ничуговский, А.Овчинников, Т.Олейник, Т.Соколова

Московский государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один рабочий выполнил $5/7$ некоторого заказа, а затем его сменил другой рабочий; таким образом, весь заказ был выполнен за 20 ч. За сколько часов каждый рабочий может выполнить этот заказ, если, работая вместе, они выполнили бы его за 10 ч?

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \sin(3x + \pi).$$

Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$3^{1+\sqrt{x}} + 9 = 28 \cdot \sqrt{3^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} + \log_2(x+2) \leq 3.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, одна сторона которого лежит на оси x , другая – на прямой $x = 4$, а одна из вершин – на графике функции $y = x^3$ ($0 < x < 4$)?

6. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 1, \\ \frac{x + |x|}{y - a} = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a .

7. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой 6 и стороной основания 11 проведена плоскость, проходящая через апофему TK боковой грани TAB и параллельная медиане BM боковой грани TBC . На каком расстоянии от этой плоскости находится медиана BM ?

Вариант 2

1. Один рабочий за час делает на 2 детали меньше, чем другой; соответственно, на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2,5 ч больше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33.$$

4. Решите неравенство

$$1 + \log_x(3 - 2x) < 0.$$

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = 2$, $CD = 5$ и высотой, равной 4, разбивается на две части прямой, проходящей через вершину A и пересекающей основание CD . Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов площадей этих частей?

6. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \log_2\left(2 + \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x|}{x}\right), \\ (x+4)^2 + (y-a)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a .

7. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD , если расстояние от BD до секущей плоскости равно l , а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 60° .

Публикацию подготовил Л. Паршев

Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-1)}{x-2n}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} (x-4)f_2^2(x), & \text{если } |x| \leq 1; \\ |x|, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

в) При каких a уравнение $g(x) - a = 0$ имеет ровно два решения?

2. Решите уравнение $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = (0,81)^{-2x}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 5 \cos x - \operatorname{ctg} x.$$

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = 90^\circ$, $BD = a$, $CD = b$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых проходит через точки A, B, D , а другая – через точки B, C, D .

5. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом α . Площадь сечения, проходящего через противоположные стороны оснований параллелепипеда, равна S . Определите объем параллелепипеда.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{2n + 2x - x^2}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_4^2(x), & \text{если } |x| \leq 2; \\ x, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

в) При каких a уравнение $|g(x)| = a$ имеет ровно три решения?

2. Решите уравнение $5 \cdot 2^{|x-2|} = 4 + 4^{|x-2|}$.

3. Решите уравнение

$$9 \cos 2x + 5 = 8 \cos^4 x.$$

4. Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S , а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определите радиус вписанного круга.

5. В правильной четырехугольной призме построено сечение плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания, пересекающей три боковых ребра и наклоненной к плоскости основания под углом β . Сторона основания равна a . Найдите площадь сечения.

*Публикацию подготовили
Г.Хамов, О.Корсакова*

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В сосуде емкостью 5 л находится гелий под давлением 400 кПа. Стенки сосуда могут выдержать максимальное давление 2 МПа. Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу, чтобы сосуд не разорвался?

2. В воду опустили прямоугольный стеклянный клин (рис.1). При каких значениях угла ϕ луч света, прошедший через грань AB , полностью дойдет до грани AC ? Луч падает по нормали к грани AB . Показатели преломления стекла 1,5, воды 1,33.

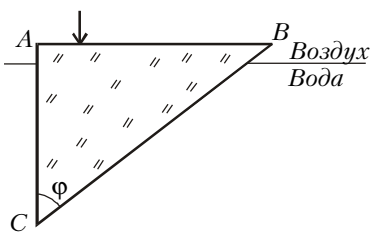


Рис. 1

3. Металлический шар радиусом 3 см, заряженный до потенциала 60 В, окружат концентрической проводящей оболочкой, радиус которой 15 см, а заряд оболочки равен нулю. Шар соединяют с оболочкой тонким проводником. Чему станет равен потенциал шара после этого? Какой заряд пройдет по проводнику?

4. Пуля пробивает закрепленную доску толщиной 3,6 см и вылетает из нее, потеряв 20% скорости. Найдите минимальную толщину доски, которую нужно поставить вслед за первой, чтобы пуля в ней застряла. Силы трения в обеих досках одинаковы, силу тяжести не учитывать.

5. При подключении к точкам A и B схемы (рис.2) вольтметра он показывает 20 В. Что покажет амперметр, если его подключить к тем же точкам вместо вольтметра? Амперметр и вольтметр идеальные, $R = 50$ Ом, внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь.

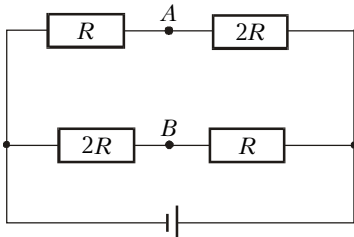


Рис. 2

Луч падает по нормали к грани AB . Показатели преломления стекла 1,5, воды 1,33.

3. Металлический шар радиусом 3 см, заряженный до потенциала 60 В, окружат концентрической проводящей оболочкой, радиус которой 15 см, а заряд оболочки равен нулю.

Шар соединяют с оболочкой тонким проводником. Чему станет равен потенциал шара после этого? Какой заряд пройдет по проводнику?

4. Пуля пробивает закрепленную доску толщиной 3,6 см и вылетает из нее, потеряв 20% скорости. Найдите минимальную толщину доски, которую нужно поставить вслед за первой, чтобы пуля в ней застряла. Силы трения в обеих досках одинаковы, силу тяжести не учитывать.

5. При подключении к точкам A и B схемы (рис.2) вольтметра он показывает 20 В. Что покажет амперметр, если его подключить к тем же точкам вместо вольтметра? Амперметр и вольтметр идеальные, $R = 50$ Ом, внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь.

6. Металлическое кольцо лежит на непроводящей горизонтальной плоскости, линии индукции однородного магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца. Индукция магнитного поля начинает изменяться

по закону $B(t) = B_0 - bt$, где $b = 10^2$ Тл/с. Найдите минимальное значение B_0 , при котором кольцо будет разорвано. Сопротивление единицы длины кольца 0,01 Ом/м, сила натяжения проволоки, при которой кольцо рвется, равна 10 Н, радиус кольца 10 см. Индуктивность кольца не учитывать, до разрыва кольцо не деформируется.

Вариант 2

1. По графику зависимости скорости от времени (рис.3) определите среднюю скорость движения тела на первой половине пути.

2. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин 200 см² и расстоянием между ними 1 мм подключили к источнику постоянного напряжения. На пластинах при этом появился заряд 0,2 мкКл. Не отключая от источника, конденсатор заполнили жидким диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. На сколько изменилась энергия конденсатора?

3. Первичная обмотка трансформатора имеет 11000 витков. Она включена в сеть переменного тока, напряжение в сети 220 В. Ко вторичной обмотке подключена нагрузка, которая потребляет мощность 40 Вт при силе тока во вторичной цепи 2 А. Найдите число витков вторичной обмотки, если ее сопротивление 1 Ом.

4. С идеальным газом в количестве 1 моль проводят цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах равно 5/4, отношение объемов на изохорах равно 6/5. Постройте график этого цикла в координатах p, V и найдите работу газа за один цикл, если разность максимальной и минимальной температур равна 100 К.

5. На невесомой нерастяжимой нити длиной 1 м висит брусок. В брусок попадает пуля, летевшая горизонтально, и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули брусок сделает полный оборот вокруг точки подвеса? Масса бруска в 20 раз больше массы пули.

6. Три металлические пластины (рис.4) одинаковы, их размеры гораздо больше расстояний между пластинами. Пластина 2 заряжена, напряженность ее электрического поля равна 10^4 В/м. Ключ K замыкают. После установления равновесия пластину 2 очень быстро (заряды на пластинах не успевают измениться) передвигают на 15 мм по направлению к пластине 3. Найдите силу тока через резистор сопротивлением $R = 60$ Ом сразу после этого.

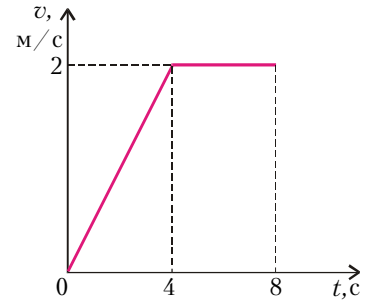


Рис. 3

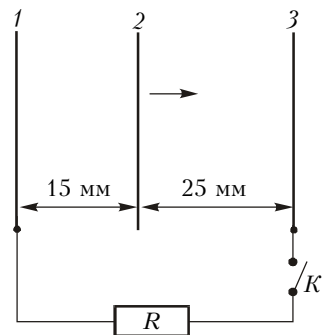


Рис. 4

Вариант 3

1. Найдите массу Солнца, зная, что скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с. Орбиту можно считать круговой с радиусом 150 млн км. Гравитационная постоянная $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

2. В сосуд поместили кусок льда массой 1 кг, имеющий

температуру -10°C . Какая масса воды окажется в сосуде после того, как его содержимому сообщат 10^6 Дж тепла? Удельные теплоемкости льда и воды $2,1$ кДж/(кг·К) и $4,2$ кДж/(кг·К) соответственно, удельная теплота плавления льда 333 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды 2250 кДж/кг.

3. Конденсатор емкостью 100 мкФ, заряженный до некоторого напряжения, замыкают на катушку индуктивностью $0,04$ Гн. Через какое минимальное время энергия окажется распределенной поровну между конденсатором и катушкой? Сопротивление проводов не учитывать.

4. Два шара, один радиусом 5 см с зарядом $+0,8$ нКл, другой радиусом 10 см с зарядом -2 нКл, соединяют тонкой проволокой. Какой заряд пройдет по ней? Шары находятся далеко друг от друга.

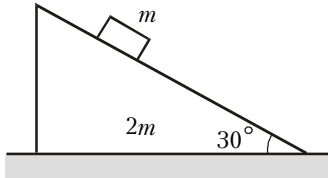


Рис. 5

5. Клин массой $2m$ находится на горизонтальной поверхности (рис.5). На клин кладут брусок массой m , который начинает скользить по клину. При каких значениях коэффициента трения между клином и плоскостью, клин остается неподвижным? Угол наклона клина 30° , коэффициент трения между бруском и клином $0,5$.

6. Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц через конденсатор емкостью $C = 0,5$ мкФ (рис.6). Амперметр показывает $0,01$ А, показания вольтметра 180 В. Найдите мощность, потребляемую прибором. Амперметр и вольтметр идеальные, сопротивление проводов не учитывать.

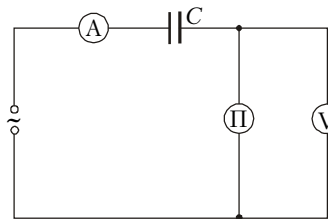


Рис. 6

7. Вычислите $\log_a b = 5,6$. Найдите $\log_a (b^5 \sqrt{a^3})$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ \operatorname{ctg} 125^\circ$.

9. При каком отличном от нуля значении параметра a касательная к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 6x + a$, проведенная в точке его пересечения с осью Ox , проходит через точку пересечения этого графика с осью Oy ?

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства $\cos(\pi/6) \cos 3x - \sin(\pi/6) \sin 3x = 1/2$.

11. $ABCD$ – ромб с острым углом BAD . Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD , равно $\sqrt{3}$, а между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ACD , равно $\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

12. В правильную треугольную пирамиду вписан шар радиуса 2 , расстояние от центра этого шара до бокового ребра пирамиды равно 3 . Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

$$\log_9 \sqrt{5x+150} \log_x 9 \geq 1?$$

Вариант 2

1. Упростите выражение и вычислите его значение при $a = 2,03$:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{7}a^2}{\sqrt[5]{7}\sqrt{2}a-2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{7}a-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[5]{7}a}$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{6(2x-5)} > 4(x-4)$.

3. Сумма 7-го и 27-го членов арифметической прогрессии равна 18 . Найдите 17-й член этой прогрессии.

4. Решите уравнение $|x - 0,25| = x^2 + 0,5$.

5. Решите уравнение $(\sqrt{6})^{x-8} : 4^{x-8} = \frac{3}{8}$.

6. Вычислите $(\lg 6^{5 \log_6 10})^3$.

7. Вычислите $\frac{\cos^2 10^\circ - \cos^2 100^\circ}{\cos 20^\circ}$.

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения $\frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg}(\pi/4)}{1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}(\pi/4)} = \sqrt{3}$.

9. При каком значении параметра a прямая, соединяющая точки на графике функции $y = x^3 - 15x^2 - 9x + a$, в которых функция достигает экстремума, проходит через начало координат?

10. Найдите 2^x , где x – больший корень уравнения $2^x \cdot 2,5^{x-1} = 25$.

11. В треугольнике ABC прямая, соединяющая вершину B

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение:

$$\frac{16\sqrt{2} + 8b^3}{2\sqrt{2} + 2b} + 4\sqrt{2}b - 4b^2$$

2. Найдите наименьшее целое число из области определения функции $y = \sqrt{9 + 32x - 16x^2}$.

$$y = \sqrt{9 + 32x - 16x^2}$$

3. Дана арифметическая прогрессия, у которой 7-й член равен 24 , а 10-й член равен 33 . Найдите первый член прогрессии.

4. Решите уравнение $(x-5)|x-5| = -169$.

$$(x-5)|x-5| = -169$$

5. Решите уравнение $25^{2-2x} \cdot 5^{6x-9} = 25$.

$$25^{2-2x} \cdot 5^{6x-9} = 25$$

11. В треугольнике ABC прямая, соединяющая вершину B

с центром описанной около треугольника окружности O , пересекает сторону AC в точке D . Известно, что $AD : DC = 4 : 1$, $\sin \angle ABC = 0,75$. Найдите отношение $OD : OB$.

12. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 500, боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания пирамиды угол β , $\cos \beta = 0,4$. Вписанный в пирамиду шар касается ее боковых граней в точках M, N, P, Q . Найдите объем пирамиды $SMNPQ$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 .

Вариант 1

1. Мяч брошен с поверхности земли под углом 30° с начальной скоростью 30 м/с . Сколько секунд длился полет мяча до его удара о землю?

2. Сколько процентов составляет ускорение свободного падения на поверхности Марса от ускорения свободного падения на Земле, если радиус Земли в два раза больше радиуса Марса, а масса Земли в 10 раз больше массы Марса?

3. После разгрузки в гавани осадка парохода уменьшилась на 80 см. Сколько тонн груза сняли с парохода, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии 3600 м^2 ? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

4. Какова полная кинетическая энергия (в кДж) поступательного движения молекул газа, находящегося в баллоне емкостью 15 л при давлении 400 кПа ?

5. Заряженная частица создает в вакууме в некоторой точке напряженность 40 В/м . Какая сила (в наноニュтонах) будет действовать на заряд 7 нКл , помещенный в эту точку, если всю систему поместить в керосин, диэлектрическая проницаемость которого равна 2,5?

6. Два проводника соединены параллельно и подключены к сети постоянного напряжения. Длина первого проводника в 3 раза больше, а площадь его поперечного сечения в 15 раз больше, чем второго. В проводниках выделяется одинаковая мощность. Во сколько раз удельное сопротивление первого проводника больше, чем второго?

7. Математический маятник длиной 2,5 см совершает гармонические колебания с амплитудой $0,003 \text{ м}$. Определите наибольшую скорость движения грузика маятника (в см/с).

8. Расстояние между предметом и его уменьшенным в 6 раз мнимым изображением равно 25 см. Найдите расстояние от предмета до линзы (в см).

9. Какое ускорение приобретут санки массой 4 кг, если потянуть за веревку с силой 28 Н, направленной под углом 30° к горизонту? Коэффициент трения равен 0,3. Считать $\sqrt{3} = 1,7$.

10. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды действовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае 15 Н, а во втором случае 5 Н. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором?

11. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль находится при температуре 200 К. Объем газа увеличивают в 2 раза так, что давление линейно зависит от объема и уменьшается на 20%, а затем газ изохорно нагревают до первоначального давления. Какое количество теплоты получил газ в двух процессах? Универсальная газовая постоянная $8300 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

12. Квадратная рамка со стороной 6,8 мм, сделанная из медной проволоки с площадью поперечного сечения 1 мм^2 , помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Магнитная индукция равномерно меняется на 12 Тл за 0,2 с. Чему равна при этом сила тока в рамке? Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Вариант 2

1. Два камня находятся на одной вертикали на расстоянии 40 м друг от друга. В некоторый момент времени нижний камень бросают вертикально вверх со скоростью 5 м/с , а верхний камень отпускают без начальной скорости. Через сколько секунд они столкнутся?

2. Тележка массой 100 кг вместе с человеком массой 80 кг движется со скоростью $0,4 \text{ м/с}$. Человек начинает идти по тележке с постоянной скоростью в направлении движения тележки. При какой скорости (в см/с) человека относительно тележки она остановится?

3. На какую величину плотность некоторого тела больше, чем плотность жидкости, которая равна 800 кг/м^3 , если вес тела в этой жидкости в 9 раз меньше, чем в воздухе?

4. Сколько тысяч молекул воздуха находится в 3 мм^3 сосуда при 27°C , если воздух в сосуде откачан до давления $1,66 \text{ мкПа}$? Универсальная газовая постоянная $8300 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$, число Авогадро $6 \cdot 10^{26} \text{ 1/кмоль}$.

5. Определите начальную температуру (в кельвинах) 70 г азота, если при изобарном нагревании до 350 К газ совершил работу $1,66 \text{ кДж}$. Молярная масса азота 28 кг/кмоль , универсальная газовая постоянная $8300 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

6. Сколько витков проволоки следует вплотную намотать на фарфоровую трубку радиусом 5 см, чтобы изготовить реостат сопротивлением 200 Ом? Удельное сопротивление проволоки $5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, ее диаметр 3 мм.

7. Под каким напряжением находится первичная обмотка трансформатора, имеющая 350 витков, если во второй обмотке 200 витков и напряжение на ней 120 В?

8. Предмет находится на расстоянии 6 см от двояковыпуклой линзы с оптической силой 10 диоптрий. На каком расстоянии (в см) от линзы находится мнимое изображение этого предмета?

9. К бруску, лежащему на наклонной плоскости с углом наклона α ($\sin \alpha = 0,6$), дважды приложили горизонтальную силу, пытаясь поднять его вверх по плоскости. В первом случае величина силы была в 2 раза больше, а во втором – в 2 раза меньше действующей на брусок силы тяжести. Во сколько раз сила трения в первом случае больше, чем во втором, если коэффициент трения равен 0,8?

10. Вертикальная трубка с поршнем опущена нижним концом в ртуть. Вначале поршень находится на уровне ртути в сосуде, а затем его медленно поднимают на высоту 87,5 см. Пренебрегая массой поршня и трением, найдите совершенную при этом работу. Площадь поршня 10 см^2 . Воздуха под поршнем нет, давлением паров ртути пренебречь. Плотность ртути 13600 кг/м^3 , атмосферное давление 750 мм рт. ст.

11. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. Один из них заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 3. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?

12. Замкнутый провод изогнут в виде восьмерки и помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Считая петли восьмерки окружностями радиусов 5 см и 8 см, найдите силу тока (в мА), который будет

протекать по проводу при убывании магнитного поля со скоростью 0,2 Тл/с. Сопротивление единицы длины провода 0,5 Ом/м.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный
технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{2a^{-2} - a^{-1}}{a^2 - 2a}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_x 4$$

3. Найдите меньший корень уравнения

$$x|x-2|=1$$

4. Вычислите значение

$$\log_5 4 \cdot \log_4 9 \cdot \log_9 25$$

Убедитесь, что это число целое.

5. Решите неравенство $2x < \sqrt{x+3}$.

6. Для скольких целых значений n выражение $\frac{3n+7}{n+1}$ является целым числом?

7. Вычислите $5 \cos 3\alpha$, если $\operatorname{tg}(3\alpha/2) = 2$.

8. Решите уравнение

$$9 \cdot 2^x + 3^x = 5 \cdot 3^x$$

9. Решите неравенство

$$\log_3(4 - 4x^2) \geq 1$$

10. Третий член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.

11. Найдите область определения D_x функции $y = \sqrt{x^2 - x^3}$.

12. Какое из чисел больше: $a = \arccos(1/2)$ или $b = \arcsin(4/5)$?

13. Решите неравенство

$$(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$$

14. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$.

15. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-2)\sqrt{x-1}$$

16. Найдите функцию, обратную функции $y = x|x-1|$, заданной на промежутке $[-2; 0]$.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

18. Треугольник ABC вписан в окружность с диаметром CD . Хорда AB параллельна CD . Найдите AB , если $AC = 4$, $CB = 3$.

19. Для двугранного угла α при боковом ребре правильной треугольной пирамиды верно равенство $\cos \alpha =$

$= 1/5$. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

20. Для скольких целых значений n сумма квадратов корней уравнения $nx^2 - (n+2)x + 2 = 0$ является целым числом?

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$a \cdot \sqrt{a^2 + 2a + 1} - a^2 \text{ при } a > 0.$$

2. Найдите больший корень уравнения

$$|x-2|=3$$

3. Найдите $\sin^2 2\alpha$, если $\sin \alpha = 1/3$.

4. Решите уравнение

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

5. Решите неравенство $x-1 > \frac{x^2}{x+1}$.

6. Решите уравнение

$$|x^2 - 6x + 7| = x - 1$$

7. Найдите область определения D_x функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 2}}$$

8. Решите уравнение

$$\sqrt{8^x} = 2^{x+1}$$

9. Найдите производную функции $y = 2\sqrt{x^5}$ в точке $x_0 = 1$.

10. Найдите уравнение прямой линии, симметричной прямой линии $y = x + 1$ относительно прямой линии $x = 1$.

11. Решите неравенство

$$\frac{2}{x - \sqrt{x}} < 1$$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

13. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y = 2|x|$ и $y = 3 - x$.

14. Сколько существует двузначных четных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2?

15. Решите неравенство

$$\log_{2x-1} x \geq \log_{2x-1} 2$$

16. Найдите наибольшее значение функции $y = 9^x - 4 \cdot 3^x$ на промежутке $[0; 2]$.

17. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{\cos 2x}$$

18. Определите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 5, а радиус вписанной окружности равен 1.

19. Найдите объем конуса, если площадь его полной поверхности равна 8π , а площадь основания равна π .

20. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x - a\sqrt{x} + 2$ на промежутке $[1; 4]$ отрицательно?

Публикацию подготовили
И.Комарчев, Е.Подсытанин, С.Преображенский

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – эта задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь надо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. Два одинаковых шара плотностью ρ соединены невесомой нитью, переброшенной через закрепленный блок. Один из шаров, погруженный в вязкую жидкость плотностью ρ_0 , поднимается с установившейся скоростью v . Определите отношение ρ/ρ_0 , если установившаяся скорость свободно падающего в жидкости шара также равна v . Ускорение свободного падения равно g .

2. Два поршня разной формы, но одинакового сечения S с массами m и M расположены вплотную друг к другу в длинной трубе сечением S , наполненной газом с давлением p , как показано на рисунке 1. Правому поршню сообщают скорость v . Найдите максимальное расстояние между поршнями. Поршни движутся в трубе без трения, газ в область между поршнями не проникает, изменением давления газа пренебречь.

3. Определите заряды на конденсаторах в цепи, изображенной на рисунке 2. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь. До включения в цепь заряды на пластинах конденсаторов были равны нулю.

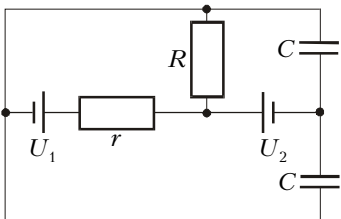


Рис. 2

5. Пучок света от лазера падает на боковую грань стеклянной равнобедренной прямоугольной призмы и выходит из нее под углом 90° , как показано на рисунке 3 слева. Если к наклонной грани приложить сухую бумагу, то ничего не изменится. Однако если приложить мокрую черную бумагу,

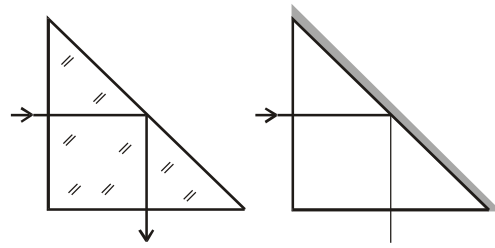


Рис. 3

интенсивность выходящего из призмы света резко уменьшится. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

1. В начальный момент времени первый из двух одинаковых упругих шаров отпускают с нулевой скоростью с высоты h , а второй, находящийся под первым, выстреливают с поверхности земли со скоростью v вертикально вверх. Через какое время после столкновения второй шар упадет на землю? Ускорение свободного падения равно g .

2. Поршень массой m расположен вплотную к дну открытой пробирки массой M и сечением S (рис. 4). Какую минимальную начальную скорость v надо сообщить пробирке, чтобы поршень из нее вылетел? Длина пробирки l , атмосферное давление p . Поршень в пробирке движется без трения, воздух в область между поршнем и дном пробирки не проникает.

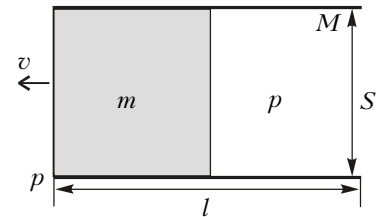


Рис. 4

3. Определите заряды на конденсаторах в цепи, изображенной на рисунке 5. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь. До включения в цепь заряды на пластинах конденсаторов были равны нулю.

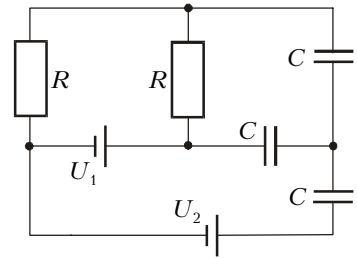


Рис. 5

4. Оцените максимальную широту местности, где еще можно разговаривать по спутниковому телефону, использующему спутник, находящийся на геостационарной орбите (т.е. постоянно «висящий» над одной и той же точкой земной поверхности).

5. См. задачу 5 варианта 1.

Факультет естественных наук

Абитуриентам предоставлялось право выбора между экзаменом по физике и экзаменом по химии.

Вариант 3

1. Две бусинки находятся на согнутой под углом α спице на расстояниях l_1 и l_2 от точки изгиба. Их одновременно отпускают с нулевой начальной скоростью. Через какое время одна бусинка догонит другую на горизонтальном участке пути? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

2. Цилиндрический стакан высотой H , опущенный вверх дном в жидкость плотностью ρ , плавает погруженным до глубины h_1 . Стакан, плавающий вниз дном, погружен до

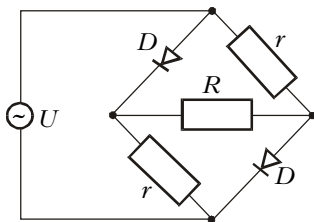


Рис. 6

глубины h_2 . Найдите величину атмосферного давления p_0 при этом. Ускорение свободного падения равно g .

3. Схема, состоящая из диодов и резисторов, изображенная на рисунке 6, подключена к источнику переменного тока. Определите, какая часть полной тепловой

мощности приходится на резистор сопротивлением R . Сопротивлением диодов в прямом направлении пренебречь.

4. Точечный источник света движется с постоянной скоростью v в плоскости, перпендикулярной оптической оси линзы и расположенной на расстоянии l от линзы. Найдите скорость движения изображения v_1 , если фокусное расстояние линзы равно F .

Геолого-геофизический факультет

Абитуриентам предоставлялось право выбора между экзаменом по физике и экзаменом по химии.

Вариант 4

1. Оцените массу атмосферы Венеры. Массу и радиус Венеры считать равными земным. Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², давление у поверхности планеты $p = 10^7$ Па.

2. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в схеме, изображенной на рисунке 7. Схема состоит из четырех одинаковых резисторов сопротивлением r , одного резистора

сопротивлением R и батарейки с ЭДС U . Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

3. Оптическая система состоит из двух соосных линз, одна из которых рассеивающая с фокусным расстоянием $-F_1$, а другая собирающая с фокусным расстоянием $+F_2$ (рис.8). Параллельный пучок света, па-

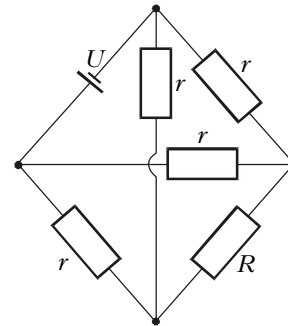


Рис. 7

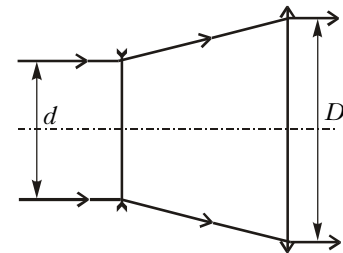


Рис. 8

дающий вдоль оптической оси на рассеивающую линзу, остается параллельным и после выхода из собирающей линзы. Найдите расстояние между линзами l и отношение диаметров пучков света d/D на входе и выходе из системы.

4. На горизонтальной плоскости находится брусок массой m . Коэффициент трения скольжения между бруском и плоскостью μ . К бруску прикладывают силу \vec{F} , направленную под углом α к горизонту. Изобразите график зависимости силы трения от величины силы F . Рассмотрите случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

Публикацию подготовили Г.Меледин, А.Мильштейн

О Л И М П И А Д Ы

XII Международная математическая олимпиада

XII Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 1 по 14 июля 2001 года в Вашингтоне и была приурочена к празднованию 225-летия независимости США. На церемонии открытия ММО с видеоприветствием к участникам олимпиады обратился Президент США Дж. Буш, а 4 июля все гости ММО могли любоваться фейерверком в честь Дня Независимости во время вечернего круиза на теплоходах по реке Потомак.

Олимпиада, в которой приняли участие 473 школьника из 85 стран мира, принесла команде России как приятные достижения (второй раз подряд наши школьникам удалось завоевать на ММО 5 (!) золотых медалей), так и обидную неудачу (лидеру нашей команды А.Халявину не хватило лишь двух очков для завоевания золота).

В состав команды России на ММО вошли ставшие золотыми медалистами одиннадцатиклассники Андрей Воробьев (Санкт-Петербург, ФМЛ 239), Михаил Гарбер (Ярославль, школа 33), Алексей Глазырин (Челябинск, лицей 11), Сергей Соколов (Рыбинск, школа 30), Сергей Спиридонов (Ижевск, школа 41), а также завоевавший во второй раз серебряную медаль ММО десятиклассник Андрей Халявин (Киров, ФМШ 35). Запасным членом команды был Арсений Аюпян (Москва, лицей «Вторая школа»).

Приведем результаты наших участников:

	1	2	3	4	5	6	Σ
С.Спиридонов	6	7	7	7	7	5	39
А.Воробьев	7	4	1	7	7	7	33
С.Соколов	7	0	5	7	7	7	33
М.Гарбер	7	7	4	7	7	0	32
А.Глазырин	7	3	7	7	7	0	31
А.Халявин	7	7	1	7	4	2	28

XII ММО подтвердила тенденцию выхода на ведущие позиции динамично развивающихся азиатских стран, атакуе стран, возникших после распада СССР. В неофициальном командном зачете лучшие команды расположились в следующем порядке:

	Очки	Золото	Серебро	Бронза
1. Китай	225	6	0	0
2-3. Россия	196	5	1	0
2-3. США	196	4	2	0
4-5. Болгария	185	3	3	0
4-5. Ю.Корея	185	3	3	0
6. Казахстан	168	4	1	0
7. Индия	148	2	2	2