а точка C является пересечением касательных, проведенных в точках A и B. Если точка B будет двигаться по кривой к точке A, то C будет тоже стремиться к точке A. (Разумеется, не следует относиться к вышесказанному, как к точной теореме. Но надеемся, что идею вы уловили. А «строгость навести» будет несложно, когда изучите курс математического анализа.)

Начнем с перпендикуляров к параболе. Поскольку

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

Рис.19

и поскольку произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно -1, то угловой коэффициент перпендикуляра, восставленного к параболе в точке $\left(a;\, a^2\right)$, равен $-1/(2a)$. Значит, этот перпендикуляр задан уравнением

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2,$$

которое можно записать в виде

$$2ay = -x + a + 2a^3.$$

Чтобы найти огибающую, рассмотрим аналогичное уравнение, в котором параметр a заменен на $a + \varepsilon$, причем в дальнейшем мы устремим ε к нулю. (Хорошенько обдумайте эту идею! Чтобы найти огибающую, мы рассматриваем «близкие» прямые, находим точку их пересечения и переходим к пределу, превращая «близкие» прямые в, если позволено так выразиться, «бесконечно близкие».) Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2ay = -x + a + 2a^3, \\ 2(a+\varepsilon)y = -x + a + \varepsilon + 2(a+\varepsilon)^3. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2\varepsilon y = \varepsilon + 6a^2\varepsilon + 6a\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3,$$

откуда $y = \frac{1}{2} + 3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2$. Устремив ε к нулю, находим

$$y = \frac{1}{2} + 3a^2.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы, имеем

$$a + 6a^3 = -x + a + 2a^3,$$

откуда

$$x = -4a^3.$$

Итак, $(x;\, y) = \left(-4a^3;\, \frac{1}{2} + 3a^2\right)$. Мы нашли огибающую для семейства нормалей (т.е. перпендикуляров) к параболе.

Упражнения

6. Убедитесь, что найденная огибающая – та самая полукубическая парабола $x^2 = \frac{8}{27}(2y-1)^3$.

7. Прямая, заданная уравнением $2ay = -x + a + 2a^3$, где $a \neq 0$, касается в точке $\left(-4a^3;\, \frac{1}{2} + 3a^2\right)$ кривой, заданной уравнением $y = \frac{3}{4}x^{2/3} + \frac{1}{2}$. Докажите это.

8. Найдите уравнение огибающей семейства нормалей параболы $y = kx^2$, где $k > 0$.

Астроида

Одна из самых запоминающихся огибающих получается, если спросить, какое множество точек заметает отрезок данной длины, концы которого движутся по сторонам данного прямого угла (рис.20).

Рассмотрим отрезок AB единичной длины, концы которого лежат на осях ко-

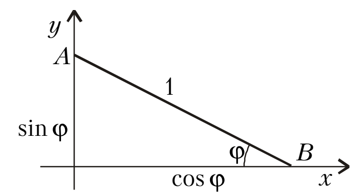

Рис.20

Рис.21

ординат (рис.21). Уравнение прямой AB написать легко: кто-то наизусть помнит так называемое «уравнение прямой в отрезках»

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = 1,$$

кто-то запишет уравнение в виде

$$y = \sin\varphi - x\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Рассмотрим «близкую» прямую, заданную уравнением

$$y = \sin\psi - x\,\mathrm{tg}\,\psi.$$

(Вскоре мы устремим ψ к φ, а пока $\psi \neq \varphi$.) Найдем точку пересечения этих двух прямых:

$$\sin\varphi - x\,\mathrm{tg}\,\varphi = \sin\psi - x\,\mathrm{tg}\,\psi,$$

откуда

$$x = \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\mathrm{tg}\,\psi - \mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{\sin\psi - \sin\varphi}{\psi - \varphi} : \frac{\mathrm{tg}\,\psi - \mathrm{tg}\,\varphi}{\psi - \varphi}.$$

Вспомнив производные синуса и тангенса, получаем: при $\psi \to \varphi$ величина x стремится к $\cos^3\varphi$. Зная x, легко найти

$$y = \sin\varphi - \cos^3\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi = \sin^3\varphi.$$

Итак, $(x;\, y) = \left(\cos^3\varphi;\, \sin^3\varphi\right)$. Мы получили параметрическим образом заданную кривую, у которой есть название: *астроида*. Очевидно,

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

(*Окончание следует*)