Доказательство. Просуммировав цепочку неравенств

$$\begin{cases} 1 \le a_1, \\ 2 \le a_2, \\ \ldots \\ m \le a_m, \end{cases}$$

находим

$$\frac{m(m+1)}{2} \le \sum_{i=1}^{m} a_i = nk.$$

С учетом того, что $n = m$, отсюда получаем утверждение 5°.

Итак, $k = n - 1 = \frac{n+1}{2}$, откуда $n = 3$, $m = 3$, $k = 2$.

Ситуация до примирения и после примирения показана на рисунках 1 и 2 соответственно (дугами обозначены ссоры).

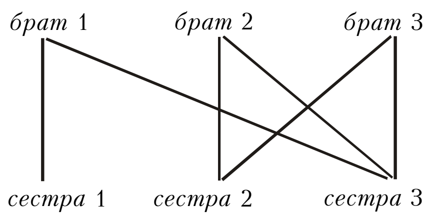

Рис.1

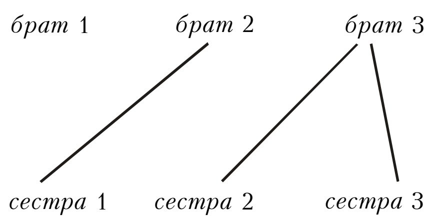

Рис.2

Итак, в беспокойной семейке 3 сестры и 3 брата. Решение единственное.

И.Акулич, А.Жуков

М1777. *В квадрат со стороной 1 вписан четырехугольник. Его стороны являются гипотенузами четырех прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность (рис.1). Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не превосходит $2 - \sqrt{2}$ и достигает этого числа лишь тогда, когда стороны вписанного четырехугольника параллельны диагоналям квадрата.*

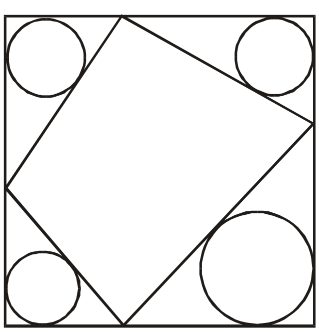
Рис.1

Сначала приведем два вспомогательных утверждения.

1°. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен разности между суммой катетов и гипотенузой.

Усматриваем из рисунка 2, что $a = r + x$, $b = r + y$, $c = x + y$. Значит, $2r = a + b - c$.

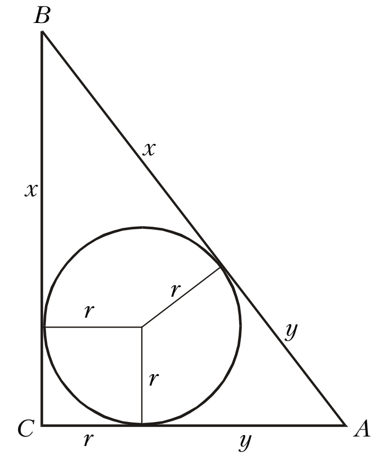

Рис.2

2°. Периметр четырехугольника, вписанного в квадрат со стороной 1, не меньше $2\sqrt{2}$ и равен этому числу лишь тогда, когда стороны четырехугольника параллельны диагоналям квадрата.

На рисунке 3 квадрат $ABCD$ трижды зеркально отражается относительно сторон. При этом стороны вписанного четырехугольника разворачиваются в ломаную линию MN. Каждая из проекций ломаной MN на вертикаль и горизонталь равна 2. Значит, минимальная длина ломаной MN равна $2\sqrt{2}$ и будет достигаться лишь тогда, когда отрезок MN параллелен диагонали квадрата.

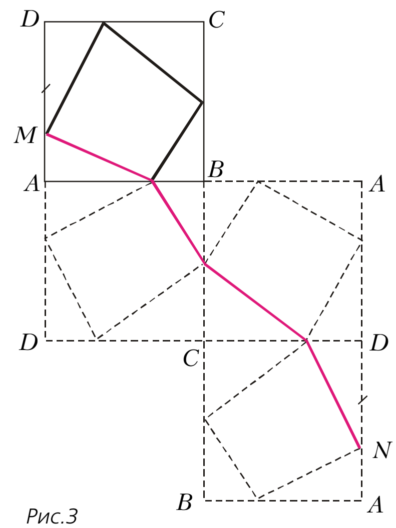

Рис.3

Теперь обратимся к формулировке задачи. В силу утверждения 1° сумма четырех диаметров вписанных кругов равна разности периметров квадрата и четырехугольника, т.е. $4 - p$. Но $p \ge 2\sqrt{2}$ в силу утверждения 2°. Откуда следует, что $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \le 2 - \sqrt{2}$. Равенство достигается лишь при условии параллельности сторон четырехугольника диагоналям квадрата.

В.Произволов

М1778*. *На доске написано комплексное число $1 + i$. Разрешается любое число раз и в любом порядке проделывать следующие три операции:*

1) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен два числа, равных $(a+1) + bi$;

2) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен три числа: $(a+1) + bi$, $a + (b+1)i$ и $(a+1) + (b+1)i$;

3) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен четыре числа, два из которых равны $a + (b+1)i$, а два других равны $(a+1) + (b+1)i$.

После нескольких таких операций оказалось, что модули всех написанных чисел больше 3. Докажите, что среди чисел есть два одинаковых.

Предположим обратное – что среди чисел не оказалось двух одинаковых. Заметим, что какие бы операции ни производились, для каждого из написанных чисел $a + bi$ всегда a и b – натуральные числа. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $a + bi$ дробь, равную $\frac{1}{2^a \cdot 3^b}$, и назовем ее *спутником* этого числа. Поскольку a и b – натуральные числа, то, очевидно, соответствие комплексных чисел и спутников будет