одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника.)

Ю.Лифшиц

5. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет?

Ю.Лифшиц

6. См. задачу М1792 «Задачника «Кванта».

7. На большей стороне AC треугольника ABC взята точка N так, что серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на окружности, описанной около треугольника KBM.

С.Берлов

8. Найдите все нечетные натуральные n $(n>1)$ такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a+b-1$ также является делителем n.

Д.Джукич

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса

2. См. задачу М1794 «Задачника «Кванта».

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

Т.Емельянова

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный не самопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

Д.Карпов

5. Многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x)=x^2+x+2001$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001)>\dfrac{1}{64}$.

Д.Терёшин

6. См. задачу М1793 «Задачника «Кванта».

7. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H и такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через *точку H.*

С.Берлов

8. Найдите все натуральные числа n такие, что для любых двух его взаимно простых делителей a и b число $a+b-1$ также является делителем n.

Д.Джукич

11 класс

1. Пусть $2S$ – суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

Д.Кузнецов

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. На плоскости даны два таких конечных набора выпуклых многоугольников P_1 и P_2, что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку, и в каждом из двух наборов P_1 и P_2 есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов.

В.Дольников

4. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участниками баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определять сложность вопросов, чтобы места между участниками распределялись любым наперед заданным образом.

При каком наименьшем числе участников это могло быть?

С.Токарев

5. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах, причем концы этих интервалов – различные точки. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство

$$\alpha f(x)+\beta g(x)>0.$$

С.Берлов, О.Подлипский

6. a и b – различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

С.Берлов

7. В стране 2001 город, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога и нет города, соединенного дорогами со всеми остальными. Назовем множество городов D *доминирующим*, если любой не входящий в D город соединен дорогой с одним из городов множества D. Известно, что в любом доминирующем множестве хотя бы k городов. Докажите, что страну можно разбить на $2001-k$ республик так, что никакие два города из одной республики не будут соединены дорогой.

В.Дольников

8. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O – центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Л.Емельянов